

CHƯƠNG

VIII

ĐẠI SỐ TỔ HỢP

BÀI 23: QUY TẮC ĐẾM



I LÝ THUYẾT.

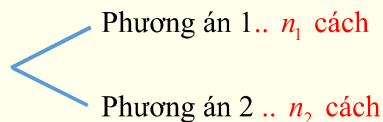
1. Quy tắc cộng và sơ đồ hình cây

Quy tắc cộng

Giả sử một công việc nào đó có thể thực hiện theo một trong hai phương án khác nhau:

- Phương án 1 có n_1 cách thực hiện.
- Phương án 2 có n_2 cách thực hiện.

Khi đó số cách thực hiện công việc là : $n_1 + n_2$ cách



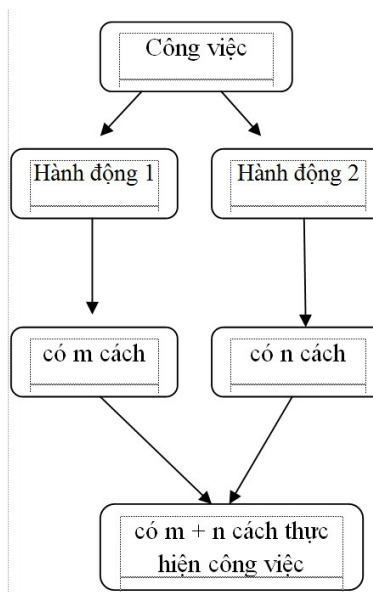
Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động. Nếu hành động này có m cách thực hiện, hành động kia có n cách thực hiện không trùng với bất kì cách nào của hành động thứ nhất thì công việc đó có $m + n$ cách thực hiện.

Chú ý: số phần tử của tập hợp hữu hạn X được kí hiệu là $|X|$ hoặc $n(X)$.

Quy tắc cộng được phát biểu ở trên thực chất là quy tắc đếm số phần tử của hợp hai tập hợp hữu hạn không giao nhau: Nếu A và B là các tập hợp hữu hạn không giao nhau thì $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

Mở rộng: Một công việc được hoàn thành bởi một trong k hành động

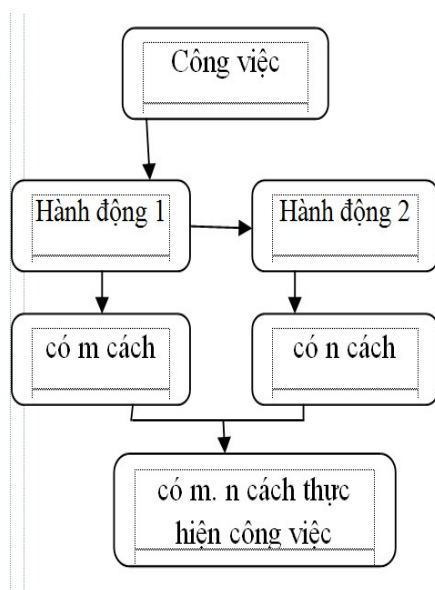
$A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$. Nếu hành động A_1 có m_1 cách thực hiện, hành động A_2 có m_2 cách thực hiện, ..., hành động A_k có m_k cách thực hiện và các cách thực hiện của các hành động trên không trùng nhau thì công việc đó có $m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_k$ cách thực hiện.



2. Quy tắc nhân

Một công việc được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp. Nếu có m cách thực hiện hành động thứ nhất và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện hành động thứ hai thì công việc đó có $m.n$ cách thực hiện.

Mở rộng: Một công việc được hoàn thành bởi k hành động $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$ liên tiếp. Nếu hành động A_1 có m_1 cách thực hiện, ứng với mỗi cách thực hiện hành động A_1 có m_2 cách thực hiện hành động A_2, \dots , có m_k cách thực hiện hành động A_k thì công việc đó có $m_1.m_2.m_3 \dots m_k$ cách hoàn thành.



NHẬN XÉT CHUNG:

Để đếm số cách lựa chọn để thực hiện một công việc A bằng quy tắc cộng, ta thực hiện các bước như sau:

Bước 1: Phân tích xem có bao nhiêu phương án riêng biệt để thực hiện công việc A (có nghĩa công việc A có thể hoàn thành một trong các phương án A_1, A_2, \dots, A_n).

Bước 2: Đếm số cách chọn x_1, x_2, \dots, x_n trong các phương án A_1, A_2, \dots, A_n .

Bước 3: Dùng quy tắc cộng ta tính được số cách lựa chọn để thực hiện công việc A là:
 $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$.

Để đếm số cách lựa chọn để thực hiện công việc A bằng quy tắc nhân, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Phân tích xem có bao nhiêu công đoạn liên tiếp cần phải tiến hành để thực hiện công việc A (giả sử A chỉ hoàn thành sau khi tất cả các công đoạn A_1, A_2, \dots, A_n hoàn thành).

Bước 2: Đếm số cách chọn x_1, x_2, \dots, x_n trong các công đoạn A_1, A_2, \dots, A_n .

Bước 3: Dùng quy tắc nhân ta tính được số cách lựa chọn để thực hiện công việc A là:
 $x = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$.

Cách đếm gián tiếp (đếm phần bù)

Trong trường hợp hành động H chia nhiều trường hợp thì ta đi đếm phần bù của bài toán như sau:

- Đếm số phương án thực hiện hành động H (không cần quan tâm đến có thỏa tính chất T hay không) ta được a phương án.
- Đếm số phương án thực hiện hành động H không thỏa tính chất T ta được b phương án.

Khi đó số phương án thỏa yêu cầu bài toán là: $a - b$.



BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA.

- 8.1** Trên giá sách có 8 cuốn truyện ngắn, 7 cuốn tiểu thuyết và 5 tập thơ (tất cả đều khác nhau). Vẽ sơ đồ hình cây minh họa và cho biết bạn Phong có bao nhiêu cách chọn một cuốn để đọc vào ngày cuối tuần.
- 8.2** Một người gieo đồng xu hai mặt, sau mỗi lần gieo thì ghi lại kết quả sấp hay ngửa. Hỏi nếu người đó gieo ba lần thì có thể có bao nhiêu khả năng xảy ra?
- 8.3** Ở một loài thực vật, A là gen trội quy định tình trạng hoa kép, a là gen lặn quy định tình trạng hoa đơn.
- Sự tổ hợp giữa hai gen trên tạo ra mấy kiểu gen?
 - Khi giao phối ngẫu nhiên, có bao nhiêu kiểu giao phối khác nhau từ các kiểu gen đó?
- 8.4** Có bao nhiêu số tự nhiên
- có ba chữ số khác nhau?
 - là số lẻ có ba chữ số khác nhau?
 - là số có ba chữ số và chia hết cho 5?
 - là số có ba chữ số khác nhau và chia hết cho 5?
- 8.5** a) Mật khẩu của chương trình máy tính quy định gồm 3 kí tự, mỗi kí tự là một chữ số. Hỏi có thể tạo được bao nhiêu mật khẩu khác nhau?
 b) ở ầu chương trình máy tính quy định mới mật khẩu vẫn gồm 3 kí tự, nhưng kí tự đầu tiên phải là một chữ cái in hoa trong bảng chữ cái tiếng Anh gồm 26 chữ (từ A đến Z) và 2 kí tự sau là các chữ số (từ 0 đến 9). Hỏi quy định mới có thể tạo được nhiều hơn quy định cũ bao nhiêu mật khẩu khác nhau?

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 1: QUY TẮC CỘNG

1 PHƯƠNG PHÁP.

ả ếu một công việc nào nó **có thể thực hiện theo n hướng khác nhau**, trong đó:

Hướng thứ 1 có m_1 cách thực hiện

Hướng thứ 2 có m_2 cách thực hiện

.....

Hướng thứ n có m_n cách thực hiện

Khi đó, có: $m_1 + m_2 + \dots + m_n$ cách để hoàn thành công việc đã cho.

2 BÀI TẬP.

- Câu 1.** Giả sử bạn muốn mua một áo sơ mi cỡ 39 hoặc cỡ 40. Áo cỡ 39 có 5 màu khác nhau, áo cỡ 40 có 4 màu khác nhau. Hỏi có bao nhiêu sự lựa chọn (về màu áo và cỡ áo)?
- Câu 2.** Một người có 4 cái quần khác nhau, 6 cái áo khác nhau, 3 chiếc cà vạt khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chọn một cái quần hoặc một cái áo hoặc một cái cà vạt?
- Câu 3.** Trên bàn có 8 cây bút chì khác nhau, 6 cây bút bi khác nhau và 10 cuốn tập khác nhau. Một học sinh muốn chọn một đồ vật duy nhất hoặc một cây bút chì hoặc một cây bút bi hoặc một cuốn tập thì số cách chọn khác nhau bằng bao nhiêu?
- Câu 4.** Trong một trường THPT, khối 11 có 280 học sinh nam và 325 học sinh nữ. ả hà trường cần chọn một học sinh ở khối 11 đi dự dạ hội của học sinh thành phố. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn?

DẠNG 2: QUY TẮC NHÂN



PHƯƠNG PHÁP.

Ả Ể Ứ một công việc nào đó phải hoàn thành qua n giai đoạn liên tiếp, trong đó:

Giai đoạn 1 có m_1 cách thực hiện

Giai đoạn 2 có m_2 cách thực hiện

.....

Giai đoạn n có m_n cách thực hiện

Khi đó, có: $m_1.m_2...m_n$ cách để hoàn thành công việc đã cho.

Ta thường gặp các bài toán sau:

Bài toán 1: Đếm số phương án liên quan đến số tự nhiên

Khi lập một số tự nhiên $x = \overline{a_1...a_n}$ ta cần lưu ý:

* $a_i \in \{0,1,2,...,9\}$ và $a_1 \neq 0$.

* x là số chẵn $\Leftrightarrow a_n$ là số chẵn

* x là số lẻ $\Leftrightarrow a_n$ là số lẻ

* x chia hết cho 3 $\Leftrightarrow a_1 + a_2 + ... + a_n$ chia hết cho 3

* x chia hết cho 4 $\Leftrightarrow \overline{a_{n-1}a_n}$ chia hết cho 4

* x chia hết cho 5 $\Leftrightarrow a_n \in \{0,5\}$

* x chia hết cho 6 $\Leftrightarrow x$ là số chẵn và chia hết cho 3

* x chia hết cho 8 $\Leftrightarrow \overline{a_{n-2}a_{n-1}a_n}$ chia hết cho 8

* x chia hết cho 9 $\Leftrightarrow a_1 + a_2 + ... + a_n$ chia hết cho 9.

* x chia hết cho 11 \Leftrightarrow tổng các chữ số ở hàng lẻ trừ đi tổng các chữ số ở hàng chẵn là một số nguyên chia hết cho 11.

* x chia hết cho 25 \Leftrightarrow hai chữ số tận cùng là 00, 25, 50, 75 .

Bài toán 2: Đếm số phương án liên quan đến kiến thức thực tế

Bài toán 3: Đếm số phương án liên quan đến hình học



BÀI TẬP.

- Câu 1.** Từ thành phố A đến thành phố B có 3 con đường, từ thành phố B đến thành phố C có 4 con đường. Có bao nhiêu cách đi từ thành phố A đến thành phố C , biết phải đi qua thành phố
- Câu 2.** Từ các số $0,1,2,3,4,5$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên mà mỗi số có 6 chữ số khác nhau và chữ số 2 đứng cạnh chữ số 3?
- Câu 3.** Có 3 học sinh nữ và 2 hs nam.Ta muốn sắp xếp vào một bàn dài có 5 ghế ngồi. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp để:
1. 3 học sinh nữ ngồi kề nhau
 2. 2 học sinh nam ngồi kề nhau.
- Câu 4.** Xếp 6 người A, B, C, D, E, F vào một ghế dài.Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho:
1. A và F ngồi ở hai đầu ghế
 2. A và F ngồi cạnh nhau
 3. A và F không ngồi cạnh nhau
- Câu 5.** Có bao nhiêu chữ số chẵn gồm bốn chữ số đôi một khác nhau được lập từ các số $0,1,2,4,5,6,8$
- Câu 6.** Từ các số $1,2,3,4,5,6$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên,mỗi số có 6 chữ số đồng thời thỏa điều kiện:sáu số của mỗi số là khác nhau và trong mỗi số đó tổng của 3 chữ số đầu nhỏ hơn tổng của 3 số sau một đơn vị
- Câu 7.** Bạn An có 3 cái áo và 4 cái quần. Hỏi bạn An có mấy cách chọn
- a) Một cái quần hoặc một cái áo?
 - b) Một bộ quần áo ?
- Câu 8.** Cho hai đường thẳng song song d, d' . Trên d lấy 10 điểm phân biệt, trên d' lấy 15 điểm phân biệt. Hỏi có bao nhiêu tam giác mà đỉnh của nó được chọn từ 25 đỉnh nói trên?

BÀI 23: QUY TẮC ĐẾM



I LÝ THUYẾT.

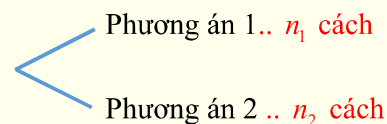
1. Quy tắc cộng và sơ đồ hình cây

Quy tắc cộng

Giả sử một công việc nào đó có thể thực hiện theo một trong hai phương án khác nhau:

- Phương án 1 có n_1 cách thực hiện.
- Phương án 2 có n_2 cách thực hiện.

Khi đó số cách thực hiện công việc là : $n_1 + n_2$ cách



Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động. Nếu hành động này có m cách thực hiện, hành động kia có n cách thực hiện không trùng với bất kì cách nào của hành động thứ nhất thì công việc đó có $m + n$ cách thực hiện.

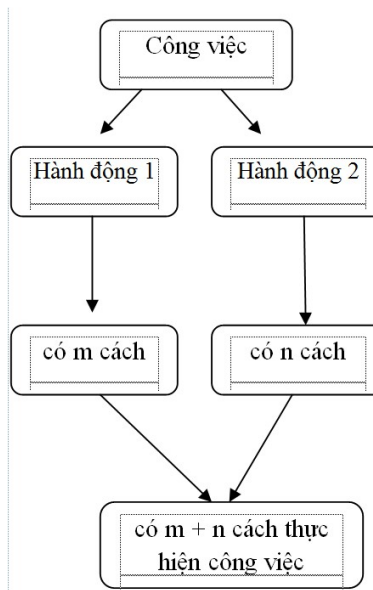
Chú ý: số phần tử của tập hợp hữu hạn X được kí hiệu là $|X|$ hoặc $n(X)$.

Quy tắc cộng được phát biểu ở trên thực chất là quy tắc đếm số phần tử của hợp hai tập hợp hữu hạn không giao nhau: Nếu A và B là các tập hợp hữu hạn không giao nhau thì

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

Mở rộng: Một công việc được hoàn thành bởi một trong k hành động

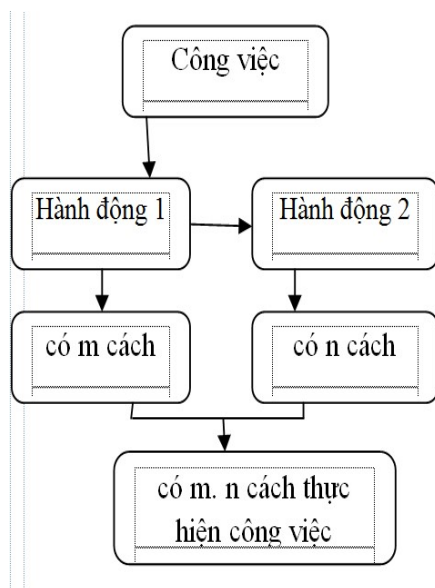
$A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$. Nếu hành động A_1 có m_1 cách thực hiện, hành động A_2 có m_2 cách thực hiện, ..., hành động A_k có m_k cách thực hiện và các cách thực hiện của các hành động trên không trùng nhau thì công việc đó có $m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_k$ cách thực hiện.



2. Quy tắc nhân

Một công việc được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp. Nếu có m cách thực hiện hành động thứ nhất và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện hành động thứ hai thì công việc đó có $m.n$ cách thực hiện.

Mở rộng: Một công việc được hoàn thành bởi k hành động $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$ liên tiếp. Nếu hành động A_1 có m_1 cách thực hiện, ứng với mỗi cách thực hiện hành động A_1 có m_2 cách thực hiện hành động A_2, \dots , có m_k cách thực hiện hành động A_k thì công việc đó có $m_1.m_2.m_3 \dots m_k$ cách hoàn thành.



NHẬN XÉT CHUNG:

Để đếm số cách lựa chọn để thực hiện một công việc A bằng quy tắc cộng, ta thực hiện các bước như sau:

Bước 1: Phân tích xem có bao nhiêu phương án riêng biệt để thực hiện công việc A (có nghĩa công việc A có thể hoàn thành một trong các phương án A_1, A_2, \dots, A_n).

Bước 2: Đếm số cách chọn x_1, x_2, \dots, x_n trong các phương án A_1, A_2, \dots, A_n .

Bước 3: Dùng quy tắc cộng ta tính được số cách lựa chọn để thực hiện công việc A là:
 $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$.

Để đếm số cách lựa chọn để thực hiện công việc A bằng quy tắc nhân, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Phân tích xem có bao nhiêu công đoạn liên tiếp cần phải tiến hành để thực hiện công việc A (giả sử A chỉ hoàn thành sau khi tất cả các công đoạn A_1, A_2, \dots, A_n hoàn thành).

Bước 2: Đếm số cách chọn x_1, x_2, \dots, x_n trong các công đoạn A_1, A_2, \dots, A_n .

Bước 3: Dùng quy tắc nhân ta tính được số cách lựa chọn để thực hiện công việc A là:
 $x = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$.

Cách đếm gián tiếp (đếm phần bù)

Trong trường hợp hành động H chia nhiều trường hợp thì ta đi đếm phần bù của bài toán như sau:

- Đếm số phương án thực hiện hành động H (không cần quan tâm đến có thỏa tính chất T hay không) ta được a phương án.
- Đếm số phương án thực hiện hành động H không thỏa tính chất T ta được b phương án.

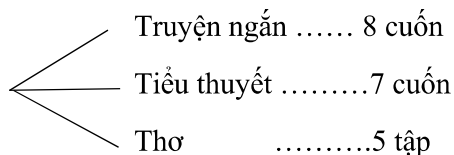
Khi đó số phương án thỏa yêu cầu bài toán là: $a - b$.



BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA.

8.1 Trên giá sách có 8 cuốn truyện ngắn, 7 cuốn tiểu thuyết và 5 tập thơ (tất cả đều khác nhau). Vẽ sơ đồ hình cây minh họa và cho biết bạn Phong có bao nhiêu cách chọn một cuốn để đọc vào ngày cuối tuần.

Lời giải



Để chọn một cuốn sách đọc vào ngày cuối tuần, bạn Phong thực hiện 1 trong 3 sự lựa chọn sau:

Chọn một cuốn truyện ngắn : Có 8 cách.

Chọn một cuốn tiểu thuyết : Có 7 cách.

Chọn một tập thơ : Có 5 cách.

Theo quy tắc cộng thì bạn Phong có : $8 + 7 + 5 = 20$ cách.

8.2 Một người gieo đồng xu hai mặt, sau mỗi lần gieo thì ghi lại kết quả sấp hay ngửa. Hỏi nếu người đó gieo ba lần thì có thể có bao nhiêu khả năng xảy ra?

Lời giải

Lần gieo thứ nhất: Có 2 khả năng xảy ra.

Lần gieo thứ hai: Có 2 khả năng xảy ra.

Lần gieo thứ ba: Có 2 khả năng xảy ra.

Nếu người đó gieo ba lần thì số khả năng xảy ra là: $2.2.2 = 8$.

8.3 Ở một loài thực vật, A là gen trội quy định tính trạng hoa kép, a là gen lặn quy định tính trạng hoa đơn.

- Sự tổ hợp giữa hai gen trên tạo ra mấy kiểu gen?
- Khi giao phối ngẫu nhiên, có bao nhiêu kiểu giao phối khác nhau từ các kiểu gen đó?

Lời giải

a) Sự tổ hợp gen A và gen a thành các kiểu gen là: AA, Aa, aa.

Vậy có 3 kiểu gen.

b) Khi giao phối ngẫu nhiên thì có các kiểu giao phối:

AA × AA

aa × aa

Aa × Aa

AA × aa

Aa × AA

Aa × aa

Vậy có 6 kiểu giao phối khác nhau.

8.4 Có bao nhiêu số tự nhiên

- có ba chữ số khác nhau?
- là số lẻ có ba chữ số khác nhau?
- là số có ba chữ số và chia hết cho 5?
- là số có ba chữ số khác nhau và chia hết cho 5?

Lời giải

a) Gọi số tự nhiên cần tìm là \overline{abc} với a, b, c là các chữ số tự nhiên đôi một khác nhau, $a \neq 0$.

Chọn a : Có 9 cách.

Chọn b : Có 9 cách.

Chọn c : Có 8 cách.

Như vậy có $9.9.8 = 648$ số tự nhiên có ba chữ số khác nhau.

b) Gọi số tự nhiên cần tìm là \overline{abc} với a, b, c là các chữ số tự nhiên đôi một khác nhau, $a \neq 0$ và c lẻ.

Chọn c : Có 5 cách.

Chọn a : Có 8 cách.

Chọn b : Có 8 cách.

Như vậy có $5.8.8 = 320$ số tự nhiên lẻ có ba chữ số khác nhau.

c) Gọi số tự nhiên cần tìm là \overline{abc} với a, b, c là các chữ số tự nhiên $a \neq 0$ và $c \in \{0; 5\}$.

Chọn a : Có 9 cách.