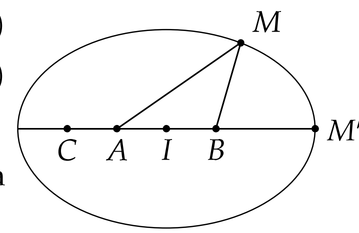
CỰC TRỊ SỐ PHỨC VÀ HÌNH HỌC

Câu 1. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-1-i|+|z+1+3i| = 6\sqrt{5}$. Giá trị lớn nhất của $|z-2-3i|$ là

(A) $5\sqrt{5}$. (B) $2\sqrt{5}$. (C) $6\sqrt{5}$. (D) $4\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $|z-1-i|+|z+1+3i| = 6\sqrt{5} \Leftrightarrow MA+MB = 6\sqrt{5}$ với $M(x;y)$ biểu diễn số phức $z = x+yi$, $A(1;1)$ biểu diễn số phức $1+i$, $B(-1;-3)$ biểu diễn số phức $-1-3i$.



Khi đó điểm M nằm trên elip tâm I có độ dài trục lớn $6\sqrt{5}$ và A, B là hai tiêu điểm.

- $|z-2-3i| = MC$ với $C(2;3)$ biểu diễn số phức $2+3i$.
- $\overrightarrow{AB} = (-2;-4) \Rightarrow AB = 2\sqrt{5}$.
- $\overrightarrow{AC} = (1;2) \Rightarrow AC = \sqrt{5}$.
- Vì $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC}$ nên $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ ngược hướng và $AB = 2AC$.

Gọi M' là điểm nằm trên elip sao cho A, B, M' thẳng hàng và M' khác phía A so với B.

Ta có $BM' = \dfrac{6\sqrt{5}-AB}{2} = 2\sqrt{5}$.

Ta thấy $MC \le M'C$ với mọi điểm M nằm trên elip.

Do đó MC lớn nhất khi và chỉ khi $M \equiv M'$.

Khi đó $MC = M'C = CA + AB + BM' = \sqrt{5}+2\sqrt{5}+2\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 2. Cho số phức z thỏa mãn $|z+1|+|z-3-4i| = 10$. Giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = |\bar{z}-1+2i|$ bằng

(A) $P_{\min} = \sqrt{17}$. (B) $P_{\min} = \sqrt{34}$. (C) $P_{\min} = 2\sqrt{10}$. (D) $P_{\min} = \dfrac{\sqrt{34}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $z = x+yi$, điểm biểu diễn của z là $M(x;y)$.

Khi đó $|z+1|+|z-3-4i| = 10 \Leftrightarrow MA+MB = 10$ với $A(-1;0)$ và $B(3;4)$.

Suy ra M thuộc elip có độ dài trục lớn là $10 \Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow a = 5$ và hai tiêu điểm là A, B.

Mà $\overrightarrow{AB} = (4;4) \Rightarrow AB = 4\sqrt{2} \Rightarrow 2c = 4\sqrt{2} \Rightarrow c = 2\sqrt{2}$.

Ta có

$$\begin{aligned} P &= |\bar{z}-1+2i| \\ &= \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} = MH \end{aligned}$$

Với $H(1;2)$. Dễ thấy A, B, H thẳng hàng nên H thuộc đoạn AB.

Do đó $P_{\min} \Leftrightarrow MH$ ngắn nhất khi và chỉ khi M thuộc trục nhỏ của elip.

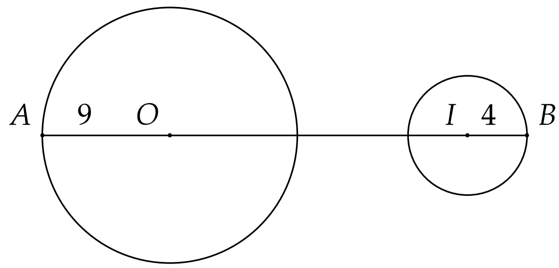
Khi đó độ dài MH bằng một nửa trục nhỏ hay $MH = b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{17}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Cho các số phức z, w thỏa mãn $|z - 5 + 3i| = 3$, $|iw + 4 + 2i| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |3iz + 2w|$.

(A) $\sqrt{554} + 5$. (B) $\sqrt{578} + 13$. (C) $\sqrt{578} + 5$. (D) $\sqrt{554} + 13$.

Hướng dẫn giải



Ta có $|z - 5 + 3i| = 3 \Leftrightarrow \left|\dfrac{3iz - 15i - 9}{3i}\right| = 3 \Leftrightarrow |3iz - 9 - 15i| = 9$.

$|iw + 4 + 2i| = 2 \Leftrightarrow \left|\dfrac{-i}{2}(-2w - 4 + 8i)\right| = 2 \Leftrightarrow |-2w - 4 + 8i| = 4$.

Gọi A và B là điểm biểu diễn của $3iz$ và $-2w$, khi đó A và B lần lượt thuộc các đường tròn tâm $O(9;15)$ bán kính bằng 9 và đường tròn $I(4;-8)$ bán kính bằng 4. Ta tính được $OI = \sqrt{554}$.

Khi đó $T = |3iz + 2w| = |3iz - (-2w)| = AB$.

Do $IO = \sqrt{554} > 4 + 9$ nên hai đường tròn ngoài nhau, suy ra $AB_{\max} = AO + OI + IB = \sqrt{554} + 13$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 4. Xét số phức z thỏa mãn $|iz - 2i - 2| - |z + 1 - 3i| = \sqrt{34}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |(1 + i)z + 2i|$.

(A) $P_{\min} = \dfrac{9}{\sqrt{17}}$. (B) $P_{\min} = 3\sqrt{2}$. (C) $P_{\min} = 4\sqrt{2}$. (D) $P_{\min} = \sqrt{26}$.

Hướng dẫn giải

Giả sử số phức z có dạng $z = a + bi$, z có biểu diễn hình học là điểm $M(a;b)$. Khi đó

$$|iz - 2i - 2| - |z + 1 - 3i| = \sqrt{34} \Leftrightarrow \sqrt{(b+2)^2 + (a-2)^2} - \sqrt{(a+1)^2 + (b-3)^2} = \sqrt{34}. \quad (1)$$

Gọi điểm $A(2;-2)$, $B(-1;3)$ khi đó ta có $AB = \sqrt{34}$. Kết hợp với (1) ta suy ra $MA - MB = AB$. $\Rightarrow$ Điểm M trùng với điểm B hoặc B là trung điểm của MA. Ta xét hai trường hợp sau:

- TH1: M trùng $B \Rightarrow M(-1;3)$. Suy ra
$$P = \sqrt{(a-b)^2 + (a+b+2)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}.$$

- TH2: B là trung điểm của $MA \Rightarrow M(-4;8)$. Suy ra
$$P = \sqrt{(a-b)^2 + (a+b+2)^2} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}.$$

Suy ra, $\min P = 4\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 5. Cho số phức z thỏa mãn $\left|\dfrac{z-2i}{z+3-i}\right| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $|z+3-2i|$ bằng

(A) $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$. (B) $2\sqrt{10}$. (C) $\sqrt{10}$. (D) $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

Hướng dẫn giải

Gọi $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

$\left|\dfrac{z-2i}{z+3-i}\right| = 1 \Leftrightarrow |z-2i| = |z+3-i| \Leftrightarrow |x+(y-2)i| = |(x+3)+(y-1)i| \Leftrightarrow 3x+y+3=0$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $d\colon 3x+y+3=0$.

Ta có $|z+3-2i| = |z-(-3+2i)|$, với $M_0(-3;2)$.

$|z+3-2i|$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\mathrm{d}(M_0,d) = \dfrac{|-9+2+3|}{\sqrt{9+1}} = \dfrac{4}{\sqrt{10}} = \dfrac{2\sqrt{10}}{5}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Cho các số phức z, w thỏa mãn $|z| = \sqrt{5}$, $w = (4-3i)z + 1 - 2i$. Giá trị nhỏ nhất của $|w|$ là

(A) $3\sqrt{5}$. (B) $4\sqrt{5}$. (C) $5\sqrt{5}$. (D) $6\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

Theo giả thiết ta có $w = (4-3i)z + 1 - 2i \Rightarrow z = \dfrac{w-1+2i}{4-3i}$.

Nên $|z| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \left|\dfrac{w-1+2i}{4-3i}\right| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |w-1+2i| = 5\sqrt{5}$.

Vậy, tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn $I(1;-2)$ và bán kính $R = 5\sqrt{5}$.

Ta có $OI = \sqrt{1^2+(-2)^2} = \sqrt{5} < R$.

Do đó $\min |w| = R - OI = 5\sqrt{5} - \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Cho số phức z thỏa mãn $|z-3+4i| = 2$. Mô-đun lớn nhất của z bằng

(A) 7. (B) 8. (C) 5. (D) 3.

Hướng dẫn giải

Tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức z thỏa $|z-3+4i| = 2$ là đường tròn có tâm $I(3;-4)$ và bán kính bằng $R = 2$. Suy ra $\max |z| = IO + R = 7$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Cho số phức z thỏa mãn $|z-2-3i| + |z-5+2i| = \sqrt{34}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z+1+2i|$. Khi đó tổng $M+m$ bằng

(A) $\dfrac{30}{\sqrt{34}} + \sqrt{34}$. (B) $\dfrac{30}{\sqrt{34}} + 5$. (C) $\sqrt{34} + 6$. (D) $\dfrac{30}{\sqrt{34}} + 6$.

Hướng dẫn giải

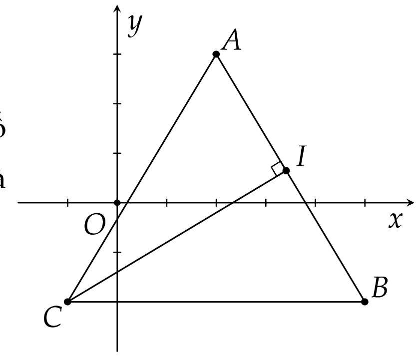
Đặt $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Gọi $I(x; y)$ là điểm biểu diễn của số phức z.

Ta có $A(2;3)$, $B(5;-2)$, $C(-1;-2)$ lần lượt là điểm biểu diễn của số phức $z_1 = 2+3i$, $z_2 = 5-2i$, $z_3 = -1-2i$. Khi đó $AB = \sqrt{34}$ và $|z+1+2i| = CI$.

Theo đề bài thì $AI + BI = \sqrt{34} = AB$ nên I thuộc đoạn thẳng AB.

Phương trình của đường thẳng AB là $5x + 3y - 19 = 0$.



CI đạt giá trị nhỏ nhất khi $CI \perp AB$ hay $CI = \mathrm{d}(C, AB) = \dfrac{|5\cdot(-1) + 3\cdot(-2) - 19|}{\sqrt{5^2+3^2}} = \dfrac{30}{\sqrt{34}}$.

CI đạt giá trị lớn nhất nhất khi I trùng với điểm đầu mút của đoạn thẳng AB.

Mặt khác $CA = \sqrt{34}$ và $CB = 6$.

Vậy giá trị lớn nhất của CI là 6.

Do đó $M = 6$, $m = \dfrac{30}{\sqrt{34}}$.

Vì vậy $M + m = \dfrac{30}{\sqrt{34}} + 6$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 9. Cho các số phức z_1 và z_2 thỏa mãn các điều kiện $|z_1 - i| = |z_1 - 1 + i|$ và $|z_2 - 1| = |z_2 + 2i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z_1 - z_2| + |z_1 - 3| + |z_2 - 3|$?

(A) $P_{\min} = \dfrac{4\sqrt{3}}{2}$. (B) $P_{\min} = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$. (C) $P_{\min} = 4\sqrt{3}$. (D) $P_{\min} = 4\sqrt{2}$.

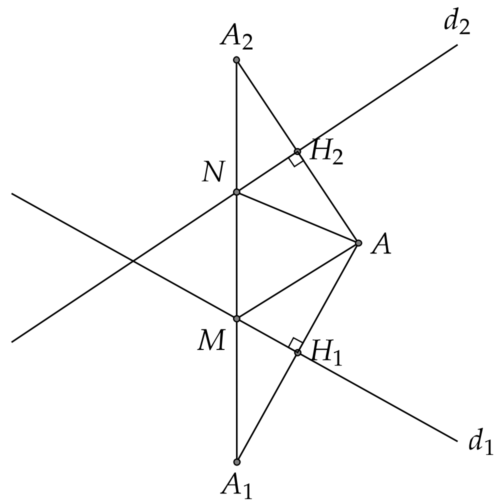
Hướng dẫn giải

Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$. Ta có

- $|z_1 - i| = |z_1 - 1 + i| \Leftrightarrow a^2 + (b-1)^2 = (a-1)^2 + (b+1)^2 \Leftrightarrow 2a - 4b - 1 = 0$.
  $\Rightarrow M$ di động trên đường thẳng $d_1\colon 2x - 4y - 1 = 0$.

- $|z_2 - 1| = |z_2 + 2i| \Leftrightarrow (c-1)^2 + d^2 = c^2 + (d+2)^2 \Leftrightarrow 2c + 4d + 3 = 0$.
  $\Rightarrow N$ di động trên đường thẳng $d_2\colon 2x + 4y + 3 = 0$.

Ta có $P = |z_1 - z_2| + |z_1 - 3| + |z_2 - 3| = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} + \sqrt{(a-3)^2 + b^2} + \sqrt{(c-3)^2 + d^2} = MN + MA + NA$ với $A(3;0)$.



Gọi A_1 đối xứng với A qua đường thẳng d_1; A_2 đối xứng với A qua đường thẳng d_2, ta có

$$MN + MA + NA = MN + MA_1 + NA_2 \geq A_1A_2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi bốn điểm M, N, A_1, A_2 thẳng hàng.
Gọi Δ_1 là đường thẳng đi qua điểm A và vuông góc với d_1, ta có phương trình đường thẳng Δ_1 là $2x + y - 6 = 0$.

Gọi $H_1 = \Delta_1 \cap d_1 \Rightarrow$ tọa độ điểm H_1 là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2x - 4y - 1 = 0 \\ 2x + y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{2} \\ y = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow H_1\left(\dfrac{5}{2}; 1\right) \Rightarrow A_1(2; 2)$.
Gọi Δ_2 là đường thẳng đi qua điểm A và vuông góc với d_2, ta có phương trình đường thẳng Δ_2 là $2x - y - 6 = 0$.

Gọi $H_2 = \Delta_2 \cap d_2 \Rightarrow$ tọa độ điểm H_2 là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2x + 4y + 3 = 0 \\ 2x - y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{21}{10} \\ y = -\dfrac{9}{5} \end{cases}$

$\Rightarrow H_2\left(\dfrac{21}{10}; -\dfrac{9}{5}\right) \Rightarrow A_2\left(\dfrac{6}{5}; -\dfrac{18}{5}\right)$.

Vậy $P_{\min} = A_1A_2 = \sqrt{\left(\dfrac{6}{5} - 2\right)^2 + \left(-\dfrac{18}{5} - 2\right)^2} = 4\sqrt{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 10. Cho các số phức w, z thỏa mãn $|w + i| = \dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ và $5w = (2 + i)(z - 4)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z - 1 - 2i| + |z - 5 - 2i|$ bằng

A $4\sqrt{13}$.   B $4 + 2\sqrt{13}$.   C $2\sqrt{53}$.   D $6\sqrt{7}$.

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết ta có:

$$|5w + 5i| = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow |(2 + i)(z - 4) + 5i| = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow \left|z - 4 + \frac{5i}{2 + i}\right| = \frac{3\sqrt{5}}{|2 + i|} \Leftrightarrow |z - 3 + 2i| = 3.$$

Gọi $M(a;b)$ là điểm biểu diễn số phức z, suy ra M thuộc đường tròn (T) tâm $I(3;-2)$ bán kính $R=3$.

Gọi $A(1;2), B(5;2)$ và $E(3;2)$ là trung điểm của AB. Ta có $P = MA + MB$.

Khi đó $P^2 = (MA+MB)^2 \leqslant 2(MA^2+MB^2) = 4ME^2 + AB^2$.

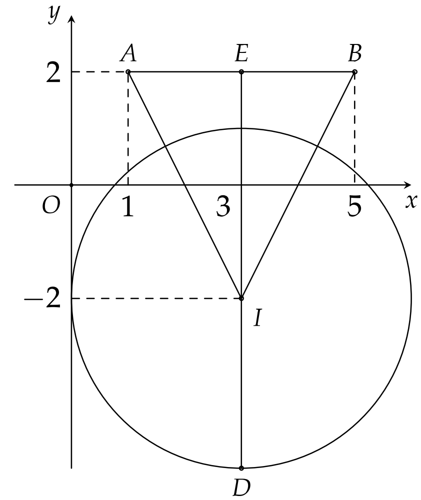
Nhận thấy E nằm ngoài đường tròn (T), gọi D là giao điểm của tia đối của tia IE và đường tròn (T) suy ra $ME \leqslant ED$, với mọi M thuộc (T).

Mặt khác ta có: $\overrightarrow{AB} = (4;0)$, $\overrightarrow{IE} = (0;4) \Rightarrow AB \perp IE \Rightarrow DE = R + IE = 3 + 4 = 7$.

$\Rightarrow P^2 \leqslant 4ME^2 + AB^2 \leqslant 4DE^2 + AB^2 = 4 \cdot 49 + 16 = 212$.

$\Rightarrow P \leqslant 2\sqrt{53}$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv D$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức là $P_{\max} = 2\sqrt{53}$.



Chọn đáp án C □

Câu 11. Có bao nhiêu số phức z thoả mãn đồng thời hai điều kiện sau: $|z-10+2i| = |z+2-14i|$ và $|z-1-10i| = 5$?

(A) Vô số. (B) Một. (C) Không. (D) Hai.

Hướng dẫn giải

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức z. Từ điều kiện ban đầu ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{(x-10)^2+(y+2)^2} = \sqrt{(x+2)^2+(y-14)^2} \\ \sqrt{(x-1)^2+(y-10)^2} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-4y+12=0 \\ (x-1)^2+(y-10)^2 = 25. \end{cases}$$

Để ý đường thẳng $3x-4y+12=0$ tiếp xúc với đường tròn $(x-1)^2+(y-10)^2=25$, nên hệ trên chỉ có một cặp nghiệm $(x;y)$, suy ra chỉ có một số phức thỏa yêu cầu đề bài.

Chọn đáp án B □

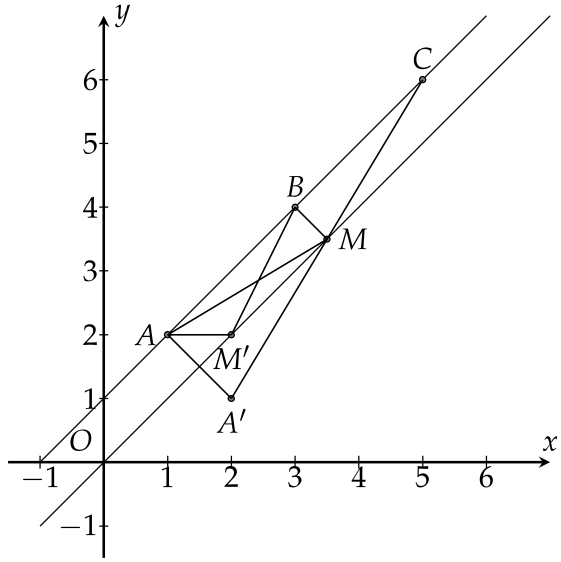
Câu 12. Cho số phức z thoả điều kiện $|z+2| = |z+2i|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = |z-1-2i| + |z-3-4i| + |z-5-6i|$$

được viết dưới dạng $\left(a+b\sqrt{17}\right)/\sqrt{2}$ với a, b là các hữu tỉ. Giá trị của $a+b$ là

(A) 3. (B) 2. (C) 7. (D) 4.

Hướng dẫn giải



Cách 1

- Đặt $E(-2;0)$, $F(0;-2)$, $A(1,2)$, $B(3,4)$, $C(5,6)$, $M(x,y)$ biểu diễn cho số phức z.
- Từ giả thiết, ta có M thuộc đường trung trực $\Delta : y = x$ của đoạn EF và $P = AM + BM + CM$.
- Ta chứng minh điểm M chính là hình chiếu vuông góc của B lên đường thẳng Δ.
  - Với M' tuỳ ý thuộc Δ, M' khác M. Gọi A' là điểm đối xứng của A qua Δ. Nhận thấy rằng ba điểm A', M, C thẳng hàng.
  - Ta có $AM' + BM' + CM' = A'M' + BM' + CM'$. Mà $A'M' + CM' > A'C = A'M + CM = AM + CM$. Lại có $BM' > BM$. Do đó $AM' + BM' + CM' > AM + BM + CM$.

Cách 2.

- Gọi $z = x + yi$, $(x,\ y \in \mathbb{R})$. Từ giả thiết $|z+2| = |z+2i|$, dẫn đến $y = x$. Khi đó $z = x + xi$.
- $P = \sqrt{(x-1)^2 + (x-2)^2} + \sqrt{(x-3)^2 + (x-4)^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (x-6)^2}$.
- Sử dụng bất đẳng thức

$$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \geqslant \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}.$$

  Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$. Ta có

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-1)^2+(x-2)^2} + \sqrt{(x-5)^2+(x-6)^2} &= \sqrt{(x-1)^2+(x-2)^2} + \sqrt{(5-x)^2+(6-x)^2}\\ &\geqslant \sqrt{(x-1+6-x)^2+(x-2+5-x)^2}\\ &\geqslant \sqrt{34}.\end{aligned}$$

  Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{x-1}{6-x} = \dfrac{x-2}{5-x} \Leftrightarrow x = \dfrac{7}{2}$.

- Mặt khác

$$\sqrt{(x-3)^2+(x-4)^2}=\sqrt{2x^2-14x+25}=\sqrt{2}\sqrt{\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=\frac{7}{2}$.

- Từ hai trường hợp trên, ta thấy, giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{1+2\sqrt{17}}{\sqrt{2}}$. Khi đó $a+b=3$.

Chọn đáp án A □

Câu 13. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-1+2i|=\sqrt{5}$. Khi đó số phức $w=z+1+i$ có môđun lớn nhất $|w|_{\max}$ bằng

A $|w|_{\max}=20$. **B** $|w|_{\max}=2\sqrt{5}$. **C** $|w|_{\max}=\sqrt{5}$. **D** $|w|_{\max}=5\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $|z-1+2i|=\sqrt{5}\Leftrightarrow|w-2+i|=\sqrt{5}\geqslant|w|-|2-i|=|w|-\sqrt{5}\Rightarrow|w|\leqslant2\sqrt{5}$, dấu $''=''$ xảy ra khi $w=4-2i$. Vậy $|w|_{\max}=2\sqrt{5}$.

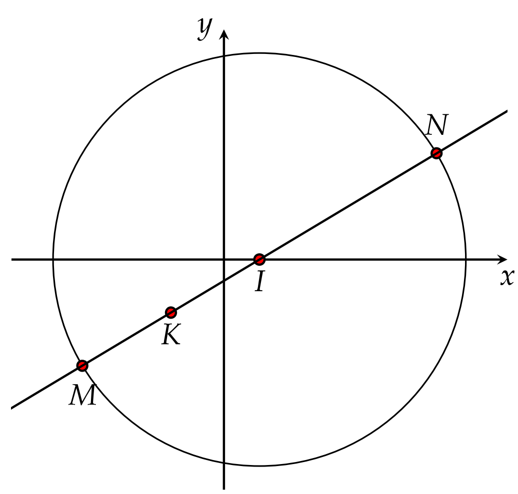
Chọn đáp án B □

Câu 14. Cho hai số phức z_1, z_2 đồng thời thỏa mãn hai điều kiện $|z-1|=\sqrt{34}$ và $|z+1+mi|=|z+m+2i|$ trong đó $m\in\mathbb{R}$, sao cho $|z_1-z_2|$ lớn nhất. Khi đó giá trị của $|z_1+z_2|$ bằng

A $\sqrt{2}$. **B** $\sqrt{130}$. **C** 2. **D** 10.

Hướng dẫn giải

Đặt $z=x+yi, x, y\in\mathbb{R}$. $|z-1|=\sqrt{34}$ suy ra biểu diễn của z thuộc đường tron tâm $I(1;0)$, bán kính $\sqrt{34}$, $|z+1+mi|=|z+m+2i|\Leftrightarrow(2m-2)x+(4-2m)y+3=0$ (d) nên biểu diễn của z thuộc đường thẳng d, dễ thấy d luôn đi điểm $K\left(-\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)$ cố định.



Biểu diễn của z_1, z_2 là giao điểm của đường tròn tâm I và đường thẳng d, dễ thấy $|z_1-z_2|$ lớn nhất khi d đi qua I, khi đó $z_1=-4-3i$, $z_2=6+3i$ và $|z_1+z_2|=2$.

Chọn đáp án C □

Câu 15. Cho số phức z thỏa mãn $|2z-3-4i|=10$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Khi đó $M-m$ bằng

Ⓐ 5. Ⓑ 15. Ⓒ 10. Ⓓ 20.

Hướng dẫn giải

Giả sử số phức $z=x+iy$ với $x,y\in\mathbb{R}$ và điểm $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z.

Khi đó

$$|2z-3-4i|=10\Leftrightarrow|2(x+yi)-3-4i|=10\Leftrightarrow|(2x-3)+(2y-4)i|=10$$

suy ra

$$(2x-3)^2+(2y-4)^2=100\Leftrightarrow\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-2)^2=25.$$

Do đó tập hợp điểm M thuộc đường tròn (C) có tâm $I\left(\frac{3}{2};2\right)$ và bán kính $R=5$.

Mà $|z|=OM$, ở đó O là gốc tọa độ. Do $OI=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+2^2}=\frac{5}{2}$ suy ra O nằm trong đường tròn (C).

Do đó $\max|z|=OI+IM=\frac{5}{2}+5=\frac{15}{2}$ và $\min|z|=IM-OI=5-\frac{5}{2}=\frac{5}{2}$.

Vậy $M-m=\frac{15}{2}-\frac{5}{2}=5$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 16. Xét số phức z thoả mãn $|z+1-i|+|z-3+i|=6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+1+4i|$.

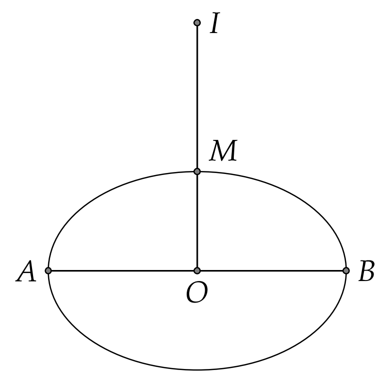
Ⓐ 3. Ⓑ $2+\sqrt{2}$. Ⓒ 5. Ⓓ $5-\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Ta nhận thấy tập hợp điểm M biểu diễn số phức z thoả mãn $|z+1-i|+|z-3+i|=6$ chính là đường elíp (E) có độ dài trục lớn bằng $2a=6$, trục nhỏ bằng $2b=4$ với $A(-1;1)$ và $B(3;-1)$ là hai đỉnh trên trục lớn.

Xét điểm $I(-1;4)$ nằm ngoài elíp (E) và I nằm trên đường trung trực của đoạn AB.

Ta có $P=|z+1+4i|=MI$ với mọi điểm $M\in(E)$. Từ đó suy ra giá trị nhỏ nhất của P bằng $\mathrm{d}(I,AB)-b=5-2=3$.



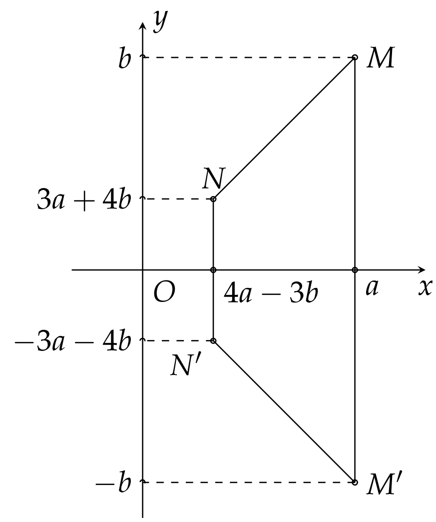
Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 17. Trong mặt phẳng phức, xét số phức z và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn là M,M'; số phức $z(4+3i)$ và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn lần lượt là N,N'. Biết rằng M,M',N,N' là bốn đỉnh của hình chữ nhật. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z+4i-5|$.

Ⓐ $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ⓑ $\frac{2}{\sqrt{5}}$. Ⓒ $\frac{5}{\sqrt{34}}$. Ⓓ $\frac{4}{\sqrt{13}}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $z = a + bi$. Khi đó $z(4+3i) = 4a - 3b + (3a+4b)i$ và $M(a;b); M'(a;-b), N(4a-3b; 3a+4b), N'(4a-3b; -3a-4b)$.
$\overrightarrow{MN} = (3a-3b; 3a+3b)$.
Theo tính chất đối xứng thì $MNN'M'$ là hình thang cân. Do đó để $MNN'M'$ là hình chữ nhật thì $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với trục Ox hay $3a + 3b = 0 \Leftrightarrow b = -a$.



Ta có

$$\begin{aligned} |z+4i-5| &= \sqrt{(a-5)^2+(b+4)^2} \\ &= \sqrt{(a-5)^2+(-a+4)^2} = \sqrt{2a^2-18a+41} \\ &= \sqrt{2\left(a-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{1}{2}} \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = \frac{9}{2}$ hay $z = \frac{9}{2} - \frac{9}{2}i$.
Vậy giá trị nhỏ nhất của $|z+4i-5|$ bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}$ khi và chỉ khi $z = \frac{9}{2} - \frac{9}{2}i$.

Chọn đáp án A □

Câu 18. Cho số phức z và w thỏa mãn $z + w = 3 + 4i$ và $|z - w| = 9$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |z| + |w|$.

A $\max T = \sqrt{176}$. **B** $\max T = 14$. **C** $\max T = 4$. **D** $\max T = \sqrt{106}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$; $w = c + di$ $(c, d \in \mathbb{R})$.
Ta có

$$\begin{aligned} & |z+w| = |3+4i| = 5 \\ \Leftrightarrow\ & |(a+bi)+(c+di)| = 5 \\ \Leftrightarrow\ & |(a+c)+(b+d)i| = 5 \\ \Leftrightarrow\ & (a+c)^2+(b+d)^2 = 25. \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} & |z-w| = 9 \\ \Leftrightarrow\ & |(a+bi)-(c+di)| = 9 \\ \Leftrightarrow\ & |(a-c)+(b-d)i| = 9 \\ \Leftrightarrow\ & (a-c)^2+(b-d)^2 = 81. \end{aligned}$$