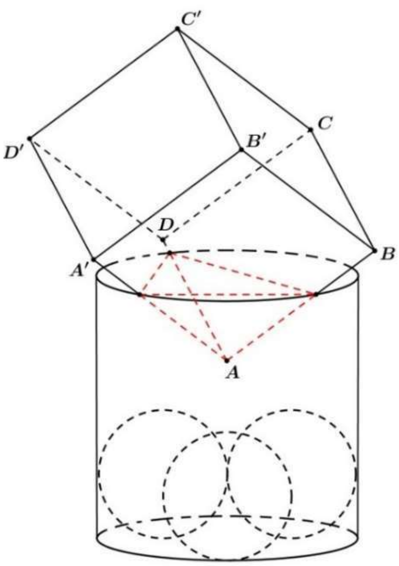
ĐỀ LIÊN TRƯỜNG NGHỆ AN LẦN 1

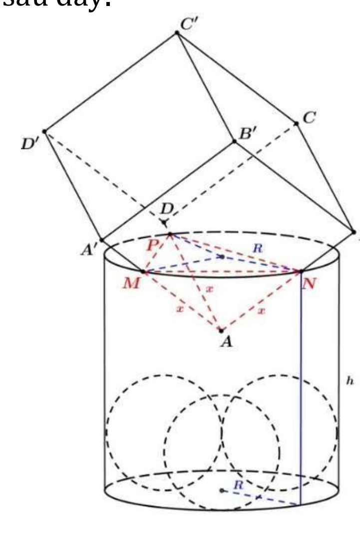
Câu 46. Một bình thủy tinh hình trụ không có nắp, trong bình được xếp vào ba viên bi bằng nhau có bán kính $\sqrt{3}dm$ sao cho các viên bi đều tiếp xúc với đáy, đôi một tiếp xúc nhau và tiếp xúc với đường sinh của bình. Người ta đổ đầy nước vào rồi đặt lên miệng bình một khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ đặc, sao cho đường chéo AC' có phương vuông góc với mặt đáy của bình và các cạnh AA', AB, AD tiếp xúc với miệng bình (xem hình vẽ). Sau đó quan sát thấy lượng nước tràn ra ngoài bằng $\frac{1}{16}$ lượng nước ban đầu có trong bình. Giả sử chiều dày của vỏ bình không đáng kể, hỏi thể tích của bình thủy tinh gần nhất với số nào sau đây ?



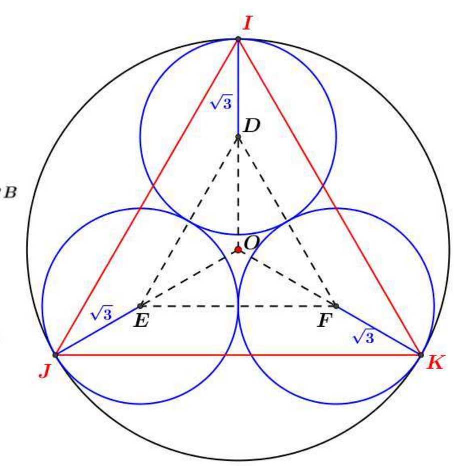
A. $276,41\left(dm^3\right)$. **B.** $319,94\left(dm^3\right)$. **C.** $350,31\left(dm^3\right)$. **D.** $275,44\left(dm^3\right)$.

Lời giải

Đầu tiên ta có hình vẽ sau đây.



Hình 1



Hình 2

Chú thích: hình 2 là hình mặt cắt khối hình 1 qua khối trụ và ba khối cầu trong khối trụ đó.

Gọi các cạnh AA', AB, AD tiếp xúc với miệng bình lần lượt là các điểm M, N, P.

Theo hình 1, ta có:

Nhận xét: do đường chéo AC' có phương vuông góc với mặt đáy của bình nên ta suy ra khối tứ diện $AMNP$ là một khối tam diện vuông có ba cạnh AA', AB, AD bằng nhau và bằng $x\left(dm\right)$, thể tích bằng

$\frac{1}{6}x^3\left(dm^3\right)$. Khi đó M,N,P đều nằm trên đường tròn đáy của khối trụ tức bán kính đường tròn đáy của trụ (R) cũng chính bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ΔMNP, suy ra

$R=R_{(MNP)}=\frac{MN}{\sqrt{3}}=\frac{AM\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(dm)$. (1)

Do đổ nước đầy bình sau khi bỏ ba quả cầu nên ta có thể tích nước ban đầu bằng:

$V_0=\pi R^2h-3.\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{3}\right)^3=\pi R^2h-12\pi\sqrt{3}\left(dm^3\right)$ với h là chiều cao của khối trụ.

Theo hình 2, ta có:

Gọi D,E,F lần lượt là tâm đường tròn mặt cắt tử ba quả cầu và O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔDEF.

Tiếp đến ta gọi I,J,K là các điểm tiếp xúc của đường tròn mặt cắt với đường tròn ngoài có bán kính bằng R. Ta có ΔDEF đều có cạnh bằng $2\sqrt{3}(dm)$ nên suy ra $OF=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=2(dm)$

Suy ra: $R=OK=OF+FK=2+\sqrt{3}(dm)$ (2)

Từ (1) và (2) ta có được: $\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}\Rightarrow x=\sqrt{6}+\frac{3}{\sqrt{2}}(dm)$

Theo giả thiết thì thể tích phần nước tràn (tức thể tích khối tứ diện $AMNP$ bằng $\frac{1}{16}$ lượng nước ban đầu có trong bình nên ta có phương trình sau: $\frac{1}{6}x^3=\frac{1}{16}\left(\pi R^2h-12\pi\sqrt{3}\right)\Leftrightarrow\frac{1}{6}\left(\sqrt{6}+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^3=\frac{1}{16}\left(\pi R^2h-12\pi\sqrt{3}\right)$

Giải phương trình ta thu được $h\approx 7,312(dm)$.

Vậy thể tích khối trụ cần tìm là: $V_{tru}=\pi R^2h=\pi\left(2+\sqrt{3}\right)^2 7,312\approx 319,94\left(dm^3\right)$. **Chọn B**

Câu 50. Xét các số thực dương x,y,z thỏa mãn $(y+2z)\left(3^x-27^{\frac{1}{y+2z}}\right)=xy+2xz-3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_5\left(y^2+z^2\right)+\frac{1}{4}\log_5^2\left(\frac{3y+6z}{x}+3y^2-3z^2\right)$

A. -1. **B.** -2. **C.** $4-\log_5 3$. **D.** $3-\log_3^2 5$.

Lời giải

Giả thiết ban đầu suy ra: $(y+2z)\left(3^x-27^{\frac{1}{y+2z}}\right)=x(y+2z)-3\Leftrightarrow\left(3^x-27^{\frac{1}{y+2z}}\right)=x-\frac{3}{y+2z}$

$\Leftrightarrow 3^x-x=3^{\frac{3}{y+2z}}-\frac{3}{y+2z}$. Xét hàm số $y=f(t)=3^t-t$ trên $(0;+\infty)$ có $f'(t)=3^t\ln 3-1>0,\forall t\in(0;+\infty)$

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ tức $x=\frac{3}{y+2z}$

Ta có: $\frac{3y+6z}{x}+3y^2-3z^2=\frac{3(y+2z)}{x}+3y^2-3z^2=(y+2z)^2+3y^2-3z^2=4y^2+z^2+4yz=(2y+z)^2$

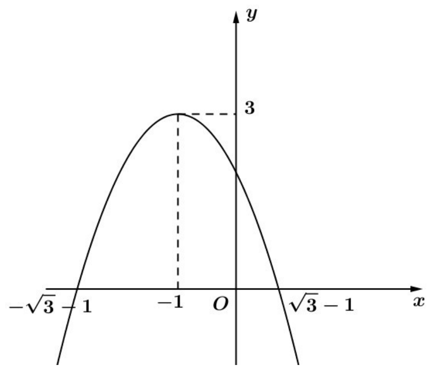
Cùng với: $y^2+z^2=\frac{(2y)^2}{4}+\frac{z^2}{1}\ge\frac{(2y+z)^2}{5}$ (Svac-xo) nên $P\ge\log_5\frac{(2y+z)^2}{5}+\frac{1}{4}\log_5^2(2y+z)^2$.

Đặt $t=2y+z>0$ ta suy ra:

$P\ge\log_5\left(\frac{t^2}{5}\right)+\frac{1}{4}\left(\log_5 t^2\right)^2=\left(\frac{1}{2}\log_5 t^2+1\right)^2-2\ge-2$. Vậy $P_{\min}=-2$ khi $t=2y+z=\frac{1}{5}$. **Chọn B**

ĐỀ THCS – THPT NGUYỄN KHUYẾN TPHCM

Câu 43. Cho hàm số $y=f(x)$ có $f\left(\sqrt{3}-1\right)=1$ và $f'(x)=ax^2+bx+c\ (a,b,c\in R)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như sau:



Số điểm cực trị của $g(x)=f\left(\left|f(x)\right|-2\right)-8\sqrt{3+\left|f(x)\right|}-\left(\dfrac{f^2(x)+6\left|f(x)\right|}{8}\right)$ là

A. 5. **B.** 2. **C.** 7. **D.** 6.

Lời giải

Đầu tiên, dễ dàng giải hệ a,b,c ra được $f'(x)=-x^2-2x+2\Rightarrow f(x)=-\dfrac{x^3}{3}-x^2+2x+C$

Với $f\left(\sqrt{3}-1\right)=1$ ta suy ra $C=\dfrac{11}{3}-2\sqrt{3}$, tức $f(x)=-\dfrac{x^3}{3}-x^2+2x+\dfrac{11}{3}-2\sqrt{3}$

Ta có: $g(x)=f\left(\left|f(x)\right|-2\right)-8\sqrt{3+\left|f(x)\right|}-\left(\dfrac{\left|f(x)\right|^2+6\left|f(x)\right|+9-1}{8}\right)+1$

$=f\left(\left|f(x)\right|+3-5\right)-8\sqrt{\left|f(x)\right|+3}-\left(\dfrac{\left(\left|f(x)\right|+3\right)^2-1}{8}\right)+1$

Đặt $u=\sqrt{\left|f(x)\right|+3}>0$ khi đó $g(u)=f\left(u^2-5\right)-8u-\dfrac{u^4}{8}+\dfrac{9}{8}\Rightarrow g'(u)=2uf'\left(u^2-5\right)-8-\dfrac{u^3}{2}=0$

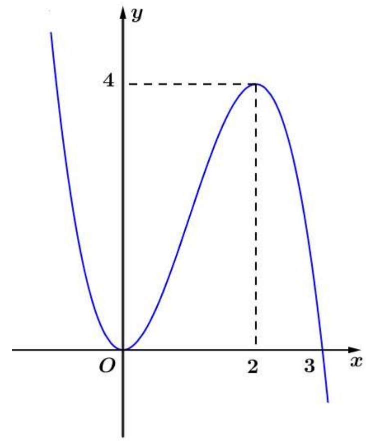
$\Leftrightarrow f'\left(u^2-5\right)=\dfrac{u^2}{4}+\dfrac{4}{u}=\dfrac{u^2}{4}+\dfrac{2}{u}+\dfrac{2}{u}\geq 3\sqrt[3]{\dfrac{u^2}{4}.\dfrac{2}{u}.\dfrac{2}{u}}=3\Rightarrow f'\left(u^2-5\right)\geq 3$ (đánh giá Cauchy 3 số không âm).

Khi đó: $\begin{cases}-\left(u^2-5\right)^2-2\left(u^2-5\right)+2\geq 3\\ f'(x)=-x^2-2x+2\end{cases}\Leftrightarrow (u-2)^2(u+2)^2\leq 0\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}u=2\\u=-2\end{array}\right.\\ u=\sqrt{\left|f(x)\right|+3}\end{cases}\Rightarrow\sqrt{\left|f(x)\right|+3}=\pm 2$

Suy ra: $\left|f(x)\right|+3=4\Leftrightarrow f(x)=\pm 1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\dfrac{x^3}{3}-x^2+2x+\dfrac{11}{3}-2\sqrt{3}=1\\-\dfrac{x^3}{3}-x^2+2x+\dfrac{11}{3}-2\sqrt{3}=-1\end{array}\right.$ (1)

Thử bằng máy tính casio ta thấy (1) có 5 nghiệm bội lẻ nên ta suy ra $g(x)$ có tất cả 5 điểm cực trị.

Câu 45. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=-x^3+bx^2+cx$ có đồ thị như hình sau:



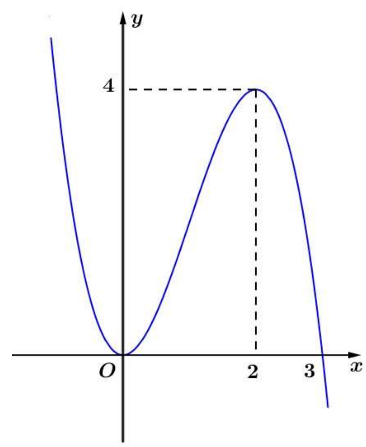
Hình phẳng $\left(H\right)$ giới hạn bởi $y=f\left(x\right),y=0,x=0,x=4$ quay quanh Ox sinh ra một khối tròn xoay có thể tích bằng V. Khẳng định **đúng** là

A. $V=\dfrac{3072\pi}{35}$. **B.** $V=\dfrac{3073\pi}{35}$. **C.** $V=\dfrac{3074\pi}{35}$. **D.** $V=\dfrac{3076\pi}{35}$.

Lời giải

Giả thiết ban đầu suy ra: $f\left(x\right)=-x^3+3x^2$. Suy ra $V=\int\limits_0^4 \pi f^2\left(x\right)dx=\pi\int\limits_0^4\left(-x^3+3x^2\right)^2dx=\dfrac{3072\pi}{35}$

Câu 48. Cho hàm số $y=f'\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx$ có đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như sau



Và $f\left(0\right)=0$. Số điểm cực trị của hàm $g\left(x\right)=f\left(xf\left(x\right)\right)-\ln\left(xf\left(x\right)\right)$ bằng

A. 9. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải

Giả thiết ban đầu suy ra: $f'\left(x\right)=-x^3+3x^2=x^2\left(3-x\right)\Rightarrow f\left(x\right)=-\dfrac{x^4}{4}+x^3$ với $f\left(0\right)=0$.

Ta có: $g\left(x\right)=f\left(xf\left(x\right)\right)-\ln\left(xf\left(x\right)\right)\Rightarrow\left(xf\left(x\right)\right)'\left[f'\left(xf\left(x\right)\right)-\dfrac{1}{xf\left(x\right)}\right]=0$. Cho $g'\left(x\right)=0$.

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)+xf'\left(x\right)=0\\ f'\left(xf\left(x\right)\right)=\dfrac{1}{xf\left(x\right)}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}=\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x-4}=-\dfrac{1}{x}\ \ (1)\\ f'\left(xf\left(x\right)\right)=\dfrac{1}{xf\left(x\right)}\ \ (2)\end{array}\right..$$

Tại (1) phương trình tương đương với: $\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x-4}+\dfrac{1}{x}=0\Leftrightarrow\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x-4}=0$.

Xét hàm số $h(x)=\frac{4}{x}+\frac{1}{x-4}$ có $h'(x)=-\frac{4}{x^2}-\frac{1}{(x-4)^2}<0$ tức $h(x)$ nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Vậy phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x=\frac{16}{5}$ (nhận).

Tại (2) phương trình tương đương với: (đặt $t=xf(x)$) $\Leftrightarrow f'(t)=\frac{1}{t}\Leftrightarrow -t^3+3t^2=\frac{1}{t}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0.764 \\ t=2.961 \end{array}\right.$.

Suy ra: $\left[\begin{array}{l} f(x)=\frac{0.764}{x} \\ f(x)=\frac{2.961}{x} \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=\frac{0.764}{x} \\ f(x)=\frac{2.961}{x} \end{array}\right.$. Khảo sát sự tương giao của đồ thị $y=f(x)$ và hai đường cong lần lượt là $y=\frac{0.764}{x}$ và $y=\frac{2.961}{x}$ ta thấy có 6 nghiệm bội lẻ (2).

Từ (1) và (2) ta kết luận hàm số $g(x)$ có tổng cộng 7 điểm cực trị.

Câu 49. Cho $(C_1): y=g(x)=\frac{2}{x}$;$(C_2): y=f(x)=4x^2+bx+c$, (C_2) tiếp xúc Ox tại $A\left(\frac{3}{2};0\right)$ và (C_2) qua $B(2;1)$. Giá trị nhỏ nhất của $\sqrt{2}.g\left(\frac{4+x+2f(x)}{(1+f(x))(2+x)}\right)-\sqrt{x}|2x-3|$ trên đoạn $[0;2]$ bằng $\sqrt{\frac{a}{b}}$ và $M=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$

Khẳng định **đúng** là

A. $M\in(-2;0)$. **B.** $M\in(0;1)$. **C.** $M\in(1;2)$. **D.** $M\in(2;4)$.

Lời giải

Ta có: $f'(x)=8x+b$. Do (C_2) tiếp xúc Ox tại $A\left(\frac{3}{2};0\right)$ nên $A\left(\frac{3}{2};0\right)$ là điểm cực trị của đồ thị (C_2)

$$\Rightarrow \begin{cases} f'\left(\frac{3}{2}\right)=0 \\ f(2)=1 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} 12+b=0 \\ 16+2b+c=1 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} b=-12 \\ c=9 \end{cases}\Rightarrow y=f(x)=4x^2-12x+9=(2x-3)^2\ge 0$$

Tiếp đến, ta có: $\frac{4+x+2f(x)}{(1+f(x))(2+x)}=\frac{2(1+f(x))+(2+x)}{(1+f(x))(2+x)}=\frac{2}{x+2}+\frac{1}{f(x)+1}=\frac{1}{\frac{x}{2}+1}+\frac{1}{(2x-3)^2+1}$

Khi đó, suy ra: $P=\sqrt{2}.g\left(\frac{4+x+2f(x)}{(1+f(x))(2+x)}\right)-\sqrt{x}|2x-3|=\sqrt{2}.\frac{2}{\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^2+1}+\frac{1}{|2x-3|^2+1}}-\sqrt{2}\sqrt{\frac{x}{2}}|2x-3|$

Đặt $(a;b)=\left(\sqrt{\frac{x}{2}};|2x-3|\right)\Rightarrow(x;y)=\left(2a^2;\left|4a^2-3\right|\right)$. Do $x\in[0;2]$nên $a\in(0;1],b\in[0;3)$

-Nếu $ab>1$ thì $a\left|4a^2-3\right|>1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} a\left(4a^2-3\right)>1 \\ a\left(4a^2-3\right)<-1 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} (a+1)(2a-1)^2<0 \\ (a-1)(2a+1)^2>0 \end{array}\right.$ (vô lí do $a\in(0;1]$)

-Nếu $0 \le ab \le 1$ thì ta có: $P = \dfrac{2\sqrt{2}}{\dfrac{1}{a^2+1} + \dfrac{1}{b^2+1}} - \sqrt{2}ab$

Đến đây ta có bất đẳng thức (*) sau: $\forall a, b$ thỏa $0 \le ab \le 1$ thì ta có: $\dfrac{1}{a^2+1} + \dfrac{1}{b^2+1} \le \dfrac{2}{1+ab}$

Thật vậy, bất đẳng thức (*) tương đương với:

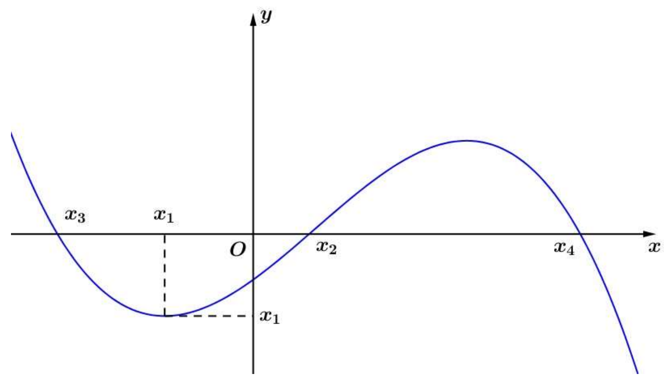
$\Leftrightarrow \dfrac{1}{a^2+1} - \dfrac{1}{1+ab} + \dfrac{1}{b^2+1} - \dfrac{1}{1+ab} \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{ab-a^2}{(a^2+1)(ab+1)} + \dfrac{ab-b^2}{(b^2+1)(ab+1)} \le 0$

$\Leftrightarrow a(b-a)(b^2+1) - b(b-a)(a^2+1) \le 0 \Leftrightarrow (b-a)^2(ab-1) \le 0$ luôn đúng với $0 \le ab \le 1$

Như vậy (*) đúng, suy ra $P \ge \dfrac{2\sqrt{2}}{\dfrac{2}{1+ab}} - \sqrt{2}ab = \sqrt{2}(ab+1) - \sqrt{2}ab = \sqrt{2}$

Như vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\sqrt{2}$ khi $x = 2$. **Chọn đáp án B.**

Câu 50. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên R, có $f''(x) > 0,\ \forall x \in [x_3; x_2]$ và có đồ thị $y = f(x)$ như hình dưới đây



Gọi $\left[f(x) - xf'(f(x_0)) - f(f(x_0)) + 1\right]^2 = m$; $\left[\dfrac{1 - f'(f(x_0))f(x_0)}{2}\right]^2 = n$; $x_0 \in [x_3; 0]$. Khi giá trị nhỏ nhất của $S = \dfrac{2}{(m+1)(4n+1)} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{m+4n}{4mn+1}} + \sqrt{mn}$ trên $x \in [x_3; x_2]$ bằng k và $T = (k + f(x_0))(k - f(x_0)) + x^2$. Khẳng định **đúng** là

A. $T \in (0;1)$. **B.** $T \in (2;3)$. **C.** $T \in (4;5)$. **D.** $T \in (5;6)$.

Lời giải

Từ đồ thị ta có: $f(x_1) = x_1; f(x_3) = 0$

-Trên $[x_3; 0]$ thì $f(x) \le 0$ (dựa vào đồ thị) $\Rightarrow \begin{cases} f(x_0) \le 0, x_0 \in [x_3; 0] \\ f(x_0) \ge f(x_1) = x_1 > x_3 \end{cases} \Rightarrow f(x_0) \in [x_1; 0]$

-Vì $f''(x) > 0,\ \forall x \in [x_3; x_2]$ nên theo bất đẳng thức tiếp tuyến, với mọi $f(x_0) \in [x_3; 0]$ thì

$f(x) \ge f'(f(x_0))(x - f(x_0)) + f(f(x_0))$

$\Rightarrow f(x) - xf'(f(x_0)) - f(f(x_0)) + 1 \ge f'(f(x_0))(x - f(x_0)) + f(f(x_0)) - xf'(f(x_0)) - f(f(x_0)) + 1$

$\Leftrightarrow f(x) - xf'(f(x_0)) - f(f(x_0)) + 1 \ge 1 - f'(f(x_0))f(x_0) \quad (1)$

-Lại có $f''(x) > 0,\ \forall x \in [x_3; x_2]$ nên suy ra $f'(x)$ đồng biến và liên tục trên $[x_3; x_2]$

Do $x_0 \in [x_3; 0]$ nên $x_1 \le f(x_0) \le 0$ (suy ra từ nhìn nhận đồ thị)

$\Rightarrow f'\left(f\left(x_0\right)\right) \ge f'\left(x_1\right)=0$ (do $x=x_1$ là điểm cực trị của đồ thị hàm số).

Mà mặt khác $f\left(x_0\right)\le 0$ nên suy ra $f'\left(f\left(x_0\right)\right)f\left(x_0\right)\le 0 \Rightarrow \left[\dfrac{1-f'\left(f\left(x_0\right)\right)f\left(x_0\right)}{2}\right]^2=n\ge \dfrac{1}{4}$

Kéo theo $\left[f\left(x\right)-xf'\left(f\left(x_0\right)\right)-f\left(f\left(x_0\right)\right)+1\right]^2=m\ge 1$

Đặt $\left(m;4n\right)=\left(a;b\right)$ thì khi đó $a,b\ge 1$ và $a\ge b$

Ta có: $S=\dfrac{2}{\left(m+1\right)\left(4n+1\right)}+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{m+4n}{4mn+1}}+\sqrt{mn}=\dfrac{2}{\left(a+1\right)\left(b+1\right)}+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a+b}{ab+1}}+\dfrac{1}{2}\sqrt{ab}$

Do $a,b\ge 1$ nên ta có: $\left(a-1\right)\left(b-1\right)\ge 0\Rightarrow ab+1\ge a+b\Rightarrow \left(a+1\right)\left(b+1\right)=\left(ab+1\right)+\left(a+b\right)\le 2\left(ab+1\right)$

Suy ra: $S\ge \dfrac{1}{ab+1}+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a+b}{ab+1}}+\dfrac{1}{2}\sqrt{ab}=\dfrac{2+\sqrt{\left(a+b\right)\left(ab+1\right)}+\sqrt{ab}\left(ab+1\right)}{2\left(\sqrt{ab+1}\right)^2}$

Đến đây ta cần chứng minh $\dfrac{2+\sqrt{\left(a+b\right)\left(ab+1\right)}+\sqrt{ab}\left(ab+1\right)}{2\left(\sqrt{ab+1}\right)^2}\ge \dfrac{3}{2}$ (**)

$\Leftrightarrow 2+\sqrt{\left(a+b\right)\left(ab+1\right)}+\sqrt{ab}\left(ab+1\right)\ge 3\left(ab+1\right)\Leftrightarrow \sqrt{\left(a+b\right)\left(ab+1\right)}+\sqrt{ab}\left(ab+1\right)\ge 3ab+1$

Ta nhận thấy: do $ab+1\ge a+b$ nên

$\sqrt{\left(a+b\right)\left(ab+1\right)}+\sqrt{ab}\left(ab+1\right)\ge a+b+\sqrt{ab}\left(ab+1\right)\ge 2\sqrt{ab}+\sqrt{ab}\left(ab+1\right)$

Đến đây ta cần chứng minh $2\sqrt{ab}+\sqrt{ab}\left(ab+1\right)\ge 3ab+1$ (*). Thật vậy, ta có:

(*) tương đương với: $\Leftrightarrow \begin{cases} t=\sqrt{ab}\ge 1 \\ 2t+t\left(t^2+1\right)\ge 3t^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \left(t-1\right)^3\ge 0$ và luôn đúng với mọi $t\ge 1$

Như vậy bất đẳng thức (*) đúng, tức kéo theo (**) đúng, từ đó suy ra $\min S=k=\dfrac{3}{2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=x_0=x_1$ và $f\left(x_0\right)=x_0$

Suy ra: $T=\left(k+f\left(x_0\right)\right)\left(k-f\left(x_0\right)\right)+x^2=k^2-f^2\left(x_0\right)+{x_0}^2=\dfrac{9}{4}-{x_0}^2+{x_0}^2=\dfrac{9}{4}\in\left(2;3\right)$

ĐỀ THPT ĐÔ LƯƠNG 1 NGHỆ AN

Câu 46. Cho hai số thực x và y thỏa mãn $x-2y=\log_3\left(\log_3 5\right)$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=3^x+\dfrac{1}{25^y}$ là $a+\log_b c$ trong đó a,b,c là các số tự nhiên, b,c là số nguyên tố. Tính giá trị của biểu thức $T=a+2b+3c$.

A. $T=22$ **B.** $T=23$. **C.** $T=17$ **D.** $T=8$.

Lời giải

Ta thực hiện biến đổi biểu thức P như sau:

$$P=3^x+\frac{1}{5^{2y}}=3^x+\frac{1}{5^{x-\log_3\left(\log_3 5\right)}}=3^x+\frac{5^{\log_3\left(\log_3 5\right)}}{5^x}=3^x+\frac{\left(\log_3 5\right)^{\log_3 5}}{\left(5^x\right)^{\log_3 3}}=3^x+\frac{\left(\log_3 5\right)^{\log_3 5}}{\left(3^x\right)^{\log_3 5}}=\log_3 5\left(\frac{3^x}{\log_3 5}\right)+\left(\frac{\log_3 5}{3^x}\right)^{\log_3 5}$$

Đặt $t=\dfrac{\log_3 5}{3^x}>0$, xét hàm số $y=f\left(t\right)=t^{\log_3 5}+\dfrac{\log_3 5}{t}$ có $f'\left(t\right)=\log_3 5\left(t^{\log_3 5-1}-\dfrac{1}{t^2}\right)=0\Leftrightarrow t=1$

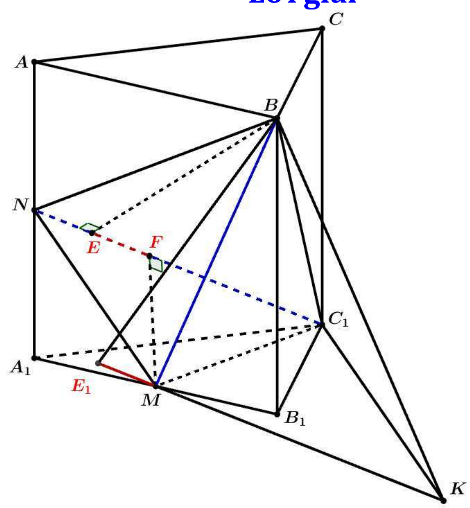
Mà $f''\left(1\right)>0$ nên ta suy ra $\min P=\min f\left(x\right)=f\left(1\right)=1+\log_3 5$.

Đồng nhất hệ số ta suy ra $a=1,b=3,c=5$. Vậy $T=a+2b+3c=22$. **Chọn đáp án A.**

Câu 47. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A_1B_1C_1$ có cạnh đáy $AB=5$. Gọi M,N thứ tự là trung điểm của A_1B_1 và AA_1. Biết rằng hình chiếu của BM lên đường thẳng C_1N là đoạn thẳng có độ dài bằng $\frac{\sqrt{5}}{2}$ và chiều $AA_1>3$. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$.

A. $\frac{125\sqrt{3}}{8}$. **B.** $\frac{125\sqrt{3}}{2}$. **C.** $25\sqrt{3}$. **D.** $\frac{125\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải



Ta kẻ $BE\perp C_1N; MF\perp C_1N$ thì khi đó ta thu được hình chiếu của BM lên đường thẳng C_1N chính là đoạn EF. Mặt khác, khi ta dựng hình bình hành NC_1KM và kẻ $BE_1\perp KM$ tại E_1 thì hình chiếu lúc này chính là ME_1, ta nhận thấy cả hai trường hợp này đều cho ra 2 đoạn hình chiếu song song và bằng nhau.

Khi đó ta suy ra $\begin{cases} EF=ME_1=\frac{\sqrt{5}}{2} \\ BE=BE_1 \end{cases}$. Đặt $AA_1=x>3\Rightarrow BM=\sqrt{x^2+\frac{25}{4}}; C_1N=BN=\sqrt{25+\frac{x^2}{4}}; BC_1=\sqrt{x^2+25}$

Tiếp đến ta có: $\begin{cases} d\left(N;BC_1\right)=d\left(A_1;B_1C_1\right)=\frac{5\sqrt{3}}{2} \\ d\left(N;BC_1\right).BC_1=BE.C_1N \end{cases}\Rightarrow BE=BE_1=5\sqrt{\frac{3x^2+75}{4x^2+25}}\Rightarrow ME_1{}^2=MB^2-BE_1{}^2$

$\Leftrightarrow\left(x^2+\frac{25}{4}\right)-25\left(\frac{3x^2+75}{4x^2+25}\right)=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2\Leftrightarrow x=AA_1=5\Rightarrow V_{ABC.A_1B_1C_1}=AA_1S_{ABC}=\frac{125\sqrt{3}}{4}$. **Chọn đáp án D.**

Câu 48. Cho hàm số $f\left(x\right)=10^x+x$ và $g\left(x\right)=x^3-mx^2+\left(m^2+1\right)x-2$. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y=g\left(x+f\left(x\right)\right)$ trên đoạn $\left[0;1\right]$. Khi M đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị của m bằng?

A. $\frac{21}{2}$ **B.** 6 **C.** 21 **D.** 5

Lời giải

Ta có: $y=h\left(x\right)=g\left(10^x+2x\right)\Rightarrow h'\left(x\right)=\left(10^x\ln 10+2\right)g'\left(10^x+2x\right)$

Xét $g'\left(x\right)=3x^2-2mx+\left(m^2+1\right)$ có $\begin{cases} \Delta'_{g'(x)}=m^2-3\left(m^2+1\right)=-2m^2-3<0 \\ 3>0 \end{cases}$ nên suy ra hàm số $g\left(x\right)$ luôn đồng biến trên đoạn $\left[0;1\right]$ tức giá trị lớn nhất của hàm số $h\left(x\right)$ tại $x=1$

Khi đó ta có: $h\left(1\right)=g\left(12\right)=12^3-m12^2+12\left(m^2+1\right)-2=12m^2-144m+1738=12\left(m-6\right)^2+1306\geq 1306$

Như vậy dấu bằng xảy ra khi $m-6=0\Leftrightarrow m=6$. **Chọn đáp án B.**

Câu 49. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-1;1]$ và thỏa mãn $f(x)+2=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}(x+t)f(t)dt$. với $\forall x\in[-1;1]$

Khi đó $I=\int_{-1}^{1}f(x)dx$ bằng

A. $I=3$ **B.** $I=4$ **C.** $I=2$ **D.** $I=1$

Lời giải

Chú ý trong tích phân lấy theo biến t do đó x trong tích phân lúc này là tham số các em nhé, nên không đặt $m=\int_{-1}^{1}(x+t)f(t)dt$ được: $f(x)+2=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}(x+t)f(t)dt=\frac{3}{2}\left[\int_{-1}^{1}xf(t)dt+\int_{-1}^{1}tf(t)dt\right]=\frac{3}{2}x\int_{-1}^{1}f(t)dt+\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}tf(t)dt$

Do đó $\Rightarrow f(x)+2=ax+b;\left(a=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}f(t)dt;b=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}tf(t)dt\right)$.

Thay ngược lại đẳng thức đã cho

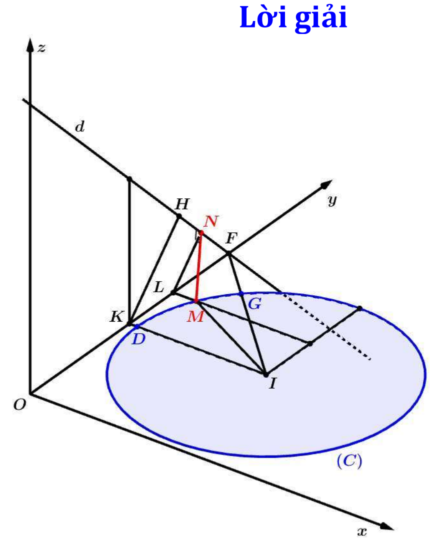
$ax+b=\frac{3}{2}x\int_{-1}^{1}(at+b-2)dt+\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}t(at+b-2)dt=\frac{3}{2}x\times 2(b-2)+\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}a=3(b-2)x+a$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a=3(b-2)\\ b=a\end{cases}\Leftrightarrow a=b=3\Rightarrow f(x)=3x+1\Rightarrow\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}(3x+1)dx=2$. **Chọn đáp án C.**

Câu 50. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho đường tròn (C) là giao tuyến của mặt phẳng tọa độ (xOy) với mặt cầu $(S):(x-6)^2+(y-6)^2+(z+3)^2=41$. Gọi d là đường thẳng đi qua các điểm $A(0;0;12)$ và $B(0;4;8)$. Với M,N là các điểm thay đổi thứ tự trên (C) và d. Giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng MN là

A. $2+\sqrt{17}$. **B.** $\frac{\sqrt{34}}{3}$. **C.** $1+2\sqrt{5}$. **D.** $\frac{\sqrt{34}}{2}$.

Lời giải



Đầu tiên ta có phương trình $(C):(x-6)^2+(y-6)^2=32$ với tâm $I(6;6)$ và bán kính $R=4\sqrt{2}$

Gọi $F=(d)\cup Oy$, $IK\perp Oy$, $D=IK\cap(C)$, $G=IF\cap(C)$, $ML\perp Oy$. Như vậy để MN đạt giá trị nhỏ nhất thì M phải thuộc cung nhỏ $\overset{\frown}{DG}$.

Kẻ $\begin{cases}KH\perp(d);NL\perp(d)\\ LK=x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{NL}{KH}=\frac{FL}{FK}\\ KH=d(K;(d))=3\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow NL=KH\frac{6-x}{6}=\frac{6-x}{\sqrt{2}}$

Cùng với $LM = 6-\sqrt{R^2-d^2\left(I;(ML)\right)} = 6-\sqrt{32-KL^2} = 6-\sqrt{32-x^2}$

Suy ra $MN = \sqrt{ML^2+LN^2} = \sqrt{\left(\frac{6-x}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(6-\sqrt{32-x^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{(6-x)^2}{2}+\left(6-\sqrt{32-x^2}\right)^2} = f(x)$

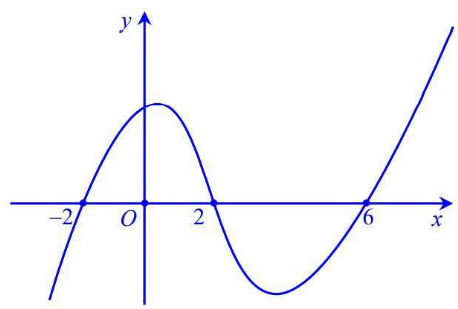
Xét hàm số $y = f(x) = \sqrt{\frac{(6-x)^2}{2}+\left(6-\sqrt{32-x^2}\right)^2}$, $\forall x\in\left[-4\sqrt{2};4\sqrt{2}\right]$. Có

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 12x-(x+6)\sqrt{32-x^2}=0 \Leftrightarrow x = x_0 \approx 3{,}5145 \in\left[-4\sqrt{2};4\sqrt{2}\right] \Rightarrow \min f(x) = f(3{,}5145)\approx 2.35488$

Như vậy giá trị nhỏ nhất của MN bằng xấp xỉ 2.35488. **Chọn đáp án E.**

ĐỀ THI THỬ LẦN 2 SỞ HẢI DƯƠNG

Câu 46. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên R. Biết hàm số $y=f'(x)$ là hàm bậc 3 có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(\left|2x^3+3x\right|-m+1\right)$ có đúng 5 điểm cực trị.

A. 4. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Đầu tiên ta thấy $f'(x)=0$ có ba nghiệm lần lượt là $-2;2;6$.

Tiếp đến, ta có: $g(-x)=f\left(\left|-2x^3-3x\right|-m+1\right)=f\left(\left|-\left(2x^3+3x\right)\right|-m+1\right)=g(x)$ nên suy ra $g(x)$ là hàm chẵn tức đồ thị hàm số $g(x)$ đối xứng qua Oy. Suy ra để hàm số $g(x)$ có đúng 5 điểm cực trị thì hàm số $h(x)=f\left(2x^3+3x-m+1\right)$ phải có 2 điểm cực trị dương.

Tức $h'(x)=\left(6x^2+3\right)f'\left(2x^3+3x-m+1\right)=0$ phải có nghiệm dương bội lẻ. Phương trình tương đương với:

$f'\left(2x^3+3x-m+1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^3+3x-m+1=-2 \\ 2x^3+3x-m+1=2 \\ 2x^3+3x-m+1=8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2x^3+3x+3=u_1(x) \\ m=2x^3+3x-1=u_2(x) \\ m=2x^3+3x-7=u_3(x) \end{array}\right.$. Khi đó ta có bảng biến thiên gộp từ ba hàm $u_1(x),u_2(x),u_3(x)$ như sau:

x	0	$+\infty$
$u_1(x)$	3 ↗	$+\infty$
$u_2(x)$	-1 ↗	$+\infty$
$u_3(x)$	-7 ↗	$+\infty$

Vậy để thỏa yêu cầu đề bài thì $-1<m\le 3$ tức có 4 giá trị nguyên m thỏa. **Chọn đáp án A.**