

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

BÀI 1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ 0° ĐẾN 180° .

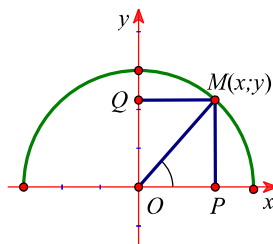
I LÝ THUYẾT.

1. ĐỊNH NGHĨA GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy . Với góc α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$), ta xác định được duy nhất điểm M trên đường nửa đường tròn đơn vị tâm O , sao cho $\alpha = \widehat{xOM}$, biết $M(x; y)$.

Khi đó: $\sin \alpha = y$; $\cos \alpha = x$; $\tan \alpha = \frac{y}{x}$ ($\alpha \neq 90^\circ$); $\cot \alpha = \frac{x}{y}$ ($\alpha \neq 0^\circ, 180^\circ$)

Các số $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$ được gọi là *giá trị lượng giác* của góc α .



Hình 2.1

Chú ý: □ Với $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ta có $0 \leq \sin \alpha \leq 1$; $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$

Góc α	0°	90°	180°
$\sin \alpha$	+		+
$\cos \alpha$	+		-
$\tan \alpha$	+		-
$\cot \alpha$	+		-

2. MỐI QUAN HỆ GIỮA CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA HAI GÓC BÙ NHAU

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$$

3. MỐI QUAN HỆ GIỮA CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA HAI GÓC PHỤ NHAU (BỔ SUNG)

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha$$

$$\cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$$

4. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC GÓC ĐẶC BIỆT

Góc α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	
$\cot \alpha$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

5. CÁC HỆ THỨC LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN (BỔ SUNG – KẾT QUẢ CỦA BÀI TẬP 5 SGK)

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} (\alpha \neq 90^\circ) ;$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} (\alpha \neq 0^\circ; 180^\circ)$$

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 (\alpha \neq 0^\circ; 90^\circ; 180^\circ)$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} (\alpha \neq 90^\circ)$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} (\alpha \neq 0^\circ; 180^\circ)$$

II HỆ THỐNG BÀI TẬP.

DẠNG 1: TÍNH CÁC GIÁ TRỊ BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC

1 PHƯƠNG PHÁP.

- Sử dụng định nghĩa giá trị lượng giác của một góc
- Sử dụng tính chất và bảng giá trị lượng giác đặc biệt
- Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Tính giá trị các biểu thức sau:

- a) $A = a^2 \sin 90^\circ + b^2 \cos 90^\circ + c^2 \cos 180^\circ$
 b) $B = 3 - \sin^2 90^\circ + 2 \cos^2 60^\circ - 3 \tan^2 45^\circ$
 c) $C = \sin^2 45^\circ - 2 \sin^2 50^\circ + 3 \cos^2 45^\circ - 2 \sin^2 40^\circ + 4 \tan 55^\circ \cdot \tan 35^\circ$

Câu 2. Tính giá trị các biểu thức sau:

- a) $A = \sin^2 3^\circ + \sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ + \sin^2 87^\circ$
 b) $B = \cos 0^\circ + \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$
 c) $C = \tan 5^\circ \tan 10^\circ \tan 15^\circ \dots \tan 80^\circ \tan 85^\circ$

3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Giá trị của $\cos 60^\circ + \sin 30^\circ$ bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. 1.

Câu 2: Giá trị của $\tan 30^\circ + \cot 30^\circ$ bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{4}{\sqrt{3}}$ B. $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ D. 2

Câu 3: Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào **sai**?

- A. $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 1$ B. $\sin 90^\circ + \cos 90^\circ = 1$
 C. $\sin 180^\circ + \cos 180^\circ = -1$ D. $\sin 60^\circ + \cos 60^\circ = 1$

Câu 4: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. $\cos 60^\circ = \sin 30^\circ$. B. $\cos 60^\circ = \sin 120^\circ$. C. $\cos 30^\circ = \sin 120^\circ$. D. $\sin 60^\circ = -\cos 120^\circ$.

Câu 5: Đẳng thức nào sau đây **sai**?

- A. $\sin 45^\circ + \sin 45^\circ = \sqrt{2}$. B. $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ = 1$.
 C. $\sin 60^\circ + \cos 150^\circ = 0$. D. $\sin 120^\circ + \cos 30^\circ = 0$.

Câu 6: Giá trị $\cos 45^\circ + \sin 45^\circ$ bằng bao nhiêu?

- A. 1. B. $\sqrt{2}$. C. $\sqrt{3}$. D. 0.

Câu 7: Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào **đúng**?

- A. $\sin(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$. B. $\sin(180^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$.
 C. $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$. D. $\sin(180^\circ - \alpha) = \cos \alpha$.

Câu 8: Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào **sai**?

A. $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 0$.

B. $\sin 90^\circ + \cos 90^\circ = 1$.

C. $\sin 180^\circ + \cos 180^\circ = -1$.

D. $\sin 60^\circ + \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

Câu 9: Cho α là góc tù. Điều khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\sin \alpha < 0$.

B. $\cos \alpha > 0$.

C. $\tan \alpha < 0$.

D. $\cot \alpha > 0$.

Câu 10: Giá trị của $E = \sin 36^\circ \cos 6^\circ \sin 126^\circ \cos 84^\circ$ là

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. 1.

D. -1.

Câu 11: Giá trị của biểu thức $A = \sin^2 51^\circ + \sin^2 55^\circ + \sin^2 39^\circ + \sin^2 35^\circ$ là

A. 3.

B. 4.

C. 1.

D. 2.

Câu 12: Giá trị của biểu thức $A = \tan 1^\circ \tan 2^\circ \tan 3^\circ \dots \tan 88^\circ \tan 89^\circ$ là

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Câu 13: Tổng $\sin^2 2^\circ + \sin^2 4^\circ + \sin^2 6^\circ + \dots + \sin^2 84^\circ + \sin^2 86^\circ + \sin^2 88^\circ$ bằng

A. 21.

B. 23.

C. 22.

D. 24.

Câu 14: Giá trị của $A = \tan 5^\circ \cdot \tan 10^\circ \cdot \tan 15^\circ \dots \tan 80^\circ \cdot \tan 85^\circ$ là

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. -1.

Câu 15: Giá trị của $B = \cos^2 73^\circ + \cos^2 87^\circ + \cos^2 3^\circ + \cos^2 17^\circ$ là

A. $\sqrt{2}$.

B. 2.

C. -2.

D. 1.

DẠNG 2: TÍNH GIÁ TRỊ CỦA MỘT BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC, KHI BIẾT TRƯỚC MỘT GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC.



PHƯƠNG PHÁP.

- Dựa vào các hệ thức lượng giác cơ bản
- Dựa vào dấu của giá trị lượng giác
- Sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ



BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Cho $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ với $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Tính $\cos \alpha$ và $\tan \alpha$

Câu 2. Cho $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ và $\sin \alpha > 0$. Tính $\sin \alpha$ và $\cot \alpha$

Câu 3. Cho $\tan \gamma = -2\sqrt{2}$ tính giá trị lượng giác còn lại.

Câu 4. Cho $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Tính $A = \frac{\tan \alpha + 3 \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha}$.

Câu 5. Cho $\tan \alpha = \sqrt{2}$. Tính $B = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3 \cos^3 \alpha + 2 \sin \alpha}$

Câu 6. Biết $\sin x + \cos x = m$

a) Tìm $|\sin^4 x - \cos^4 x|$.

b) Chứng minh rằng $|m| \leq \sqrt{2}$.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

- Câu 1:** Cho $\cos x = \frac{1}{2}$. Tính biểu thức $P = 3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x$
- A. $\frac{13}{4}$. B. $\frac{7}{4}$. C. $\frac{11}{4}$. D. $\frac{15}{4}$.
- Câu 2:** Biết $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. Giá trị đúng của biểu thức $P = \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha$ là:
- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{10}{9}$. C. $\frac{11}{9}$. D. $\frac{4}{3}$.
- Câu 3:** Cho biết $\tan \alpha = \frac{1}{2}$. Tính $\cot \alpha$.
- A. $\cot \alpha = 2$. B. $\cot \alpha = \sqrt{2}$. C. $\cot \alpha = \frac{1}{4}$. D. $\cot \alpha = \frac{1}{2}$.
- Câu 4:** Cho biết $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tính $\tan \alpha$?
- A. $\frac{5}{4}$. B. $-\frac{5}{2}$. C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. D. $-\frac{\sqrt{5}}{2}$.
- Câu 5:** Cho α là góc tù và $\sin \alpha = \frac{5}{13}$. Giá trị của biểu thức $3 \sin \alpha + 2 \cos \alpha$ là
- A. 3. B. $-\frac{9}{13}$. C. -3. D. $\frac{9}{13}$.
- Câu 6:** Cho biết $\sin \alpha + \cos \alpha = a$. Giá trị của $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ bằng bao nhiêu?
- A. $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = a^2$. B. $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2a$.
 C. $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1-a^2}{2}$. D. $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{a^2-1}{2}$.
- Câu 7:** Cho biết $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $E = \frac{\cot \alpha + 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha + \tan \alpha}$?
- A. $-\frac{19}{13}$. B. $\frac{19}{13}$. C. $\frac{25}{13}$. D. $-\frac{25}{13}$.
- Câu 8:** Cho biết $\cot \alpha = 5$. Tính giá trị của $E = 2 \cos^2 \alpha + 5 \sin \alpha \cos \alpha + 1$?
- A. $\frac{10}{26}$. B. $\frac{100}{26}$. C. $\frac{50}{26}$. D. $\frac{101}{26}$.
- Câu 9:** Cho $\cot \alpha = \frac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $A = \frac{3 \sin \alpha + 4 \cos \alpha}{2 \sin \alpha - 5 \cos \alpha}$ là:
- A. $-\frac{15}{13}$. B. -13. C. $\frac{15}{13}$. D. 13.
- Câu 10:** Cho biết $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$. Giá trị của biểu thức $E = \frac{\cot \alpha - 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha - \tan \alpha}$ bằng bao nhiêu?
- A. $-\frac{25}{3}$. B. $-\frac{11}{13}$. C. $-\frac{11}{3}$. D. $-\frac{25}{13}$.
- Câu 11:** Biết $\sin a + \cos a = \sqrt{2}$. Hỏi giá trị của $\sin^4 a + \cos^4 a$ bằng bao nhiêu?
- A. $\frac{3}{2}$. B. $\frac{1}{2}$. C. -1. D. 0.
- Câu 12:** Cho $\tan \alpha + \cot \alpha = m$. Tìm m để $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = 7$.

- A. $m = 9$. B. $m = 3$. C. $m = -3$. D. $m = \pm 3$.

Câu 13: Cho biết $3 \cos \alpha - \sin \alpha = 1$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ Giá trị của $\tan \alpha$ bằng

- A. $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ B. $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ C. $\tan \alpha = \frac{4}{5}$ D. $\tan \alpha = \frac{5}{4}$

Câu 14: Cho biết $2 \cos \alpha + \sqrt{2} \sin \alpha = 2$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Tính giá trị của $\cot \alpha$.

- A. $\cot \alpha = \frac{\sqrt{5}}{4}$ B. $\cot \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$ C. $\cot \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$ D. $\cot \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Câu 15: Cho biết $\cos \alpha + \sin \alpha = \frac{1}{3}$. Giá trị của $P = \sqrt{\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha}$ bằng bao nhiêu?

- A. $P = \frac{5}{4}$. B. $P = \frac{7}{4}$. C. $P = \frac{9}{4}$. D. $P = \frac{11}{4}$.

Câu 16: Cho biết $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Giá trị của $P = \sqrt{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha}$ bằng bao nhiêu?

- A. $P = \frac{\sqrt{15}}{5}$ B. $P = \frac{\sqrt{17}}{5}$ C. $P = \frac{\sqrt{19}}{5}$ D. $P = \frac{\sqrt{21}}{5}$

DẠNG 3: CHỨNG MINH CÁC ĐẲNG THỨC, RÚT GỌN CÁC BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC



1 PHƯƠNG PHÁP.

- Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản
- Sử dụng tính chất của giá trị lượng giác
- Sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ.



2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Chứng minh các đẳng thức sau(giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

- a) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$
 b) $\frac{1 + \cot x}{1 - \cot x} = \frac{\tan x + 1}{\tan x - 1}$
 c) $\frac{\cos x + \sin x}{\cos^3 x} = \tan^3 x + \tan^2 x + \tan x + 1$

Câu 2. Cho tam giác ABC . Chứng minh $\frac{\sin^3 \frac{B}{2}}{\cos\left(\frac{A+C}{2}\right)} + \frac{\cos^3 \frac{B}{2}}{\sin\left(\frac{A+C}{2}\right)} - \frac{\cos(A+C)}{\sin B} \cdot \tan B = 2$

Câu 3. Đơn giản các biểu thức sau(giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

- a) $A = \sin(90^\circ - x) + \cos(180^\circ - x) + \sin^2 x(1 + \tan^2 x) - \tan^2 x$
 b) $B = \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{1}{1 + \cos x} + \frac{1}{1 - \cos x}} - \sqrt{2}$

Câu 4. Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x .

$$P = \sqrt{\sin^4 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos^4 x} + \sqrt{\cos^4 x + 6 \sin^2 x + 3 \sin^4 x}$$



3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Trong các hệ thức sau hệ thức nào đúng?

Câu 13: Rút gọn biểu thức sau $A = \frac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cot x}$.

- A. $A = 1$. B. $A = 2$. C. $A = 3$. D. $A = 4$.

Câu 14: Biểu thức $f(x) = 3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x)$ có giá trị bằng:

- A. 1. B. 2. C. -3. D. 0.

Câu 15: Biểu thức: $f(x) = \cos^4 x + \cos^2 x \sin^2 x + \sin^2 x$ có giá trị bằng

- A. 1. B. 2. C. -2. D. -1.

Câu 16: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. $(\sin x \cos x)^2 = 12 \sin x \cos x$. B. $\sin^4 x + \cos^4 x = 12 \sin^2 x \cos^2 x$.
 C. $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$. D. $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 \sin^2 x \cos^2 x$.

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

BÀI 1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ 0° ĐẾN 180° .

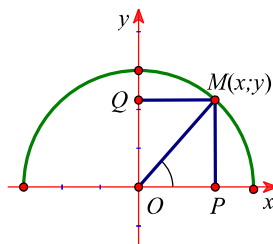
I LÝ THUYẾT.

1. ĐỊNH NGHĨA GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy . Với góc α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$), ta xác định được duy nhất điểm M trên đường nửa đường tròn đơn vị tâm O , sao cho $\alpha = \widehat{xOM}$, biết $M(x; y)$.

Khi đó: $\sin \alpha = y$; $\cos \alpha = x$; $\tan \alpha = \frac{y}{x}$ ($\alpha \neq 90^\circ$); $\cot \alpha = \frac{x}{y}$ ($\alpha \neq 0^\circ, 180^\circ$)

Các số $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$ được gọi là *giá trị lượng giác* của góc α .



Hình 2.1

Chú ý: □ Với $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ta có $0 \leq \sin \alpha \leq 1$; $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$

Góc α	0°	90°	180°
$\sin \alpha$	+		+
$\cos \alpha$	+		-
$\tan \alpha$	+		-
$\cot \alpha$	+		-

2. MỐI QUAN HỆ GIỮA CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA HAI GÓC BÙ NHAU

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$$

3. MỐI QUAN HỆ GIỮA CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA HAI GÓC PHỤ NHAU (BỔ SUNG)

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha$$

$$\cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$$

4. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC GÓC ĐẶC BIỆT

Góc α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	
$\cot \alpha$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

5. CÁC HỆ THỨC LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN (BỔ SUNG – KẾT QUẢ CỦA BÀI TẬP 5 SGK)

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} (\alpha \neq 90^\circ) ;$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} (\alpha \neq 0^\circ; 180^\circ)$$

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 (\alpha \neq 0^\circ; 90^\circ; 180^\circ)$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} (\alpha \neq 90^\circ)$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} (\alpha \neq 0^\circ; 180^\circ)$$