

CHUYÊN ĐỀ 3: HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

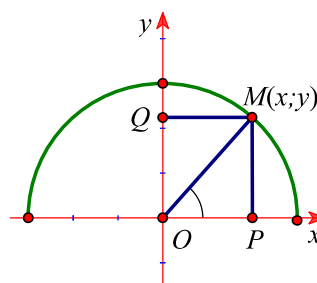
Chủ đề 1-GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ 0° ĐẾN 180°

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Định nghĩa

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy . Với mỗi góc α ($0^{\circ} \leq \alpha \leq 180^{\circ}$), ta xác định điểm M trên đường nửa đường tròn đơn vị tâm O sao cho $\alpha = \widehat{xOM}$. Giả sử điểm M có tọa độ $(x; y)$.

Khi đó:



Hình 2.1

$\sin \alpha = y$; $\cos \alpha = x$; $\tan \alpha = \frac{y}{x}$ ($\alpha \neq 90^{\circ}$); $\cot \alpha = \frac{x}{y}$ ($\alpha \neq 0^{\circ}, \alpha \neq 180^{\circ}$) Các số

$\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$ được gọi là *giá trị lượng giác* của góc α .

Chú ý: Từ định nghĩa ta có:

Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu của M lên trục Ox, Oy khi đó $M(\overline{OP}; \overline{OQ})$.

Với $0^{\circ} \leq \alpha \leq 180^{\circ}$ ta có $0 \leq \sin \alpha \leq 1$; $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$

Dấu của giá trị lượng giác:

Góc α	0°	90°	180°
$\sin \alpha$	+		+
$\cos \alpha$	+		-
$\tan \alpha$	+		-
$\cot \alpha$	+		-

b) Tính chất

• Góc phụ nhau

$$\begin{aligned}\sin(90^{\circ} - \alpha) &= \cos \alpha \\ \cos(90^{\circ} - \alpha) &= \sin \alpha \\ \tan(90^{\circ} - \alpha) &= \cot \alpha \\ \cot(90^{\circ} - \alpha) &= \tan \alpha\end{aligned}$$

• Góc bù nhau

$$\begin{aligned}\sin(180^{\circ} - \alpha) &= \sin \alpha \\ \cos(180^{\circ} - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \tan(180^{\circ} - \alpha) &= -\tan \alpha \\ \cot(180^{\circ} - \alpha) &= -\cot \alpha\end{aligned}$$

3. Giá trị lượng giác của các góc đặc biệt

Góc α	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	\parallel	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot \alpha$	\parallel	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	\parallel

4. Các hệ thức lượng giác cơ bản

- 1) $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} (\alpha \neq 90^0) ;$
- 2) $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} (\alpha \neq 0^0; 180^0)$
- 3) $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 (\alpha \neq 0^0; 90^0; 180^0)$
- 4) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- 5) $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} (\alpha \neq 90^0)$
- 6) $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} (\alpha \neq 0^0; 180^0)$

Chứng minh:

- Hệ thức 1), 2) và 3) dễ dàng suy ra từ định nghĩa.

- Ta có $\sin \alpha = \overline{OQ}$, $\cos \alpha = \overline{OP}$

Suy ra $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \overline{OQ}^2 + \overline{OP}^2 = OQ^2 + OP^2$

+ Nếu $\alpha = 0^0$, $\alpha = 90^0$ hoặc $\alpha = 180^0$ thì dễ dàng thấy $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

+ Nếu $\alpha \neq 0^0$, $\alpha \neq 90^0$ và $\alpha \neq 180^0$ khi đó theo định lý Pitago ta có

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = OQ^2 + OP^2 = OQ^2 + QM^2 = OM^2 = 1$$

Vậy ta có $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

Mặt khác $1 + \tan^2 \alpha = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ suy ra được 5)

Tương tự $1 + \cot^2 \alpha = 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ suy ra được 6)

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1:- Tính giá trị của một biểu thức-Hai góc phụ nhau, bù nhau

a) Phương pháp: Dùng bảng tỉ số lượng giác các góc đặc biệt và góc phụ nhau, bù nhau.

b) Ví dụ minh họa

I- BÀI TẬP TỰ LUẬN:

Ví dụ 1: Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $A = \sin^2 45^0 + \cos^2 30^0 - \sin^2 0^0 + \cos^2 180^0$

b) $B = \tan 30^0 + \cot 30^0 - 2 \cdot \sin^2 180^0$.

$$c) C = \sin^2 45^\circ + \cot^2 60^\circ - \frac{1}{\cos^2 135^\circ}$$

$$d) D = \frac{(\cot 44^\circ + \tan 46^\circ) \cdot \cos 46^\circ}{\cos 44^\circ} - \cot 72^\circ \cdot \tan 72^\circ$$

$$e) E = \frac{\sin^2 90^\circ + \cos^2 120^\circ + \cos^2 0^\circ - \operatorname{tg}^2 60^\circ + \cot^2 135^\circ}{\sin 30^\circ + \cos^2 60^\circ}$$

Lời giải:

$$a) A = \sin^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 0^\circ + \cos^2 180^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 0^2 + (-1)^2 = \frac{9}{4}$$

$$b) B = \tan 30^\circ + \cot 30^\circ - 2 \cdot \sin^2 180^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} - 2 \cdot 0^2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$c) C = \cos^2 135^\circ + \cot^2 60^\circ - \frac{1}{\sin^2 60^\circ} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = -\frac{1}{2}$$

d)

$$D = \frac{(\cot 44^\circ + \tan 46^\circ) \cdot \cos 46^\circ}{\cos 44^\circ} - \cot 72^\circ \cdot \tan 72^\circ = \frac{2 \tan 46^\circ \cdot \cos 46^\circ}{\cos 44^\circ} - 1 = \frac{2 \sin 46^\circ}{\cos 44^\circ} - 1 = 2 - 1 = 1.$$

.

$$e) E = \frac{\sin^2 90^\circ + \cos^2 120^\circ + \cos^2 0^\circ - \operatorname{tg}^2 60^\circ + \cot^2 135^\circ}{\sin 30^\circ + \cos^2 60^\circ} = \frac{1 + \frac{1}{4} + 1 - 3 + 1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

Ví dụ 2: Tính giá trị biểu thức của các biểu thức

$$a) P = \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \dots + \sin^2 80^\circ.$$

$$b) Q = \cos^2 10^\circ + \cos^2 70^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 80^\circ.$$

$$c) R = \cos 0^\circ + \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ.$$

$$d) S = \tan 1^\circ \tan 2^\circ \tan 3^\circ \dots \tan 89^\circ.$$

$$e) E = \cos^2 12^\circ + \cos^2 78^\circ + \cos^2 1^\circ + \cos^2 89^\circ + \cos^2 17^\circ + \cos^2 73^\circ.$$

$$f) F = 4a^2 \cos^2 60^\circ + 2ab \cos^2 180^\circ + \frac{4}{3} b^2 \cos^2 30^\circ \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$

$$g) G = a^2 \sin 90^\circ + b^2 \cos 90^\circ + c^2 \cos 180^\circ \quad (a, b, c \in \mathbb{R})$$

Lời giải:

a) Do $10^\circ + 80^\circ = 20^\circ + 70^\circ = 30^\circ + 60^\circ = 40^\circ + 50^\circ = 90^\circ$ nên các cung lượng giác tương ứng đôi một phụ nhau. Áp dụng công thức $\sin(90^\circ - x) = \cos x$, ta được

$$\begin{aligned} P &= (\sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ) + (\sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ) \\ &\quad + (\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ) + (\sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ) \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 = 4. \end{aligned}$$

$$b) Q = \cos^2 10^\circ + \cos^2 70^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 80^\circ = (\cos^2 10^\circ + \sin^2 10^\circ) + (\cos^2 20^\circ + \sin^2 20^\circ) = 1 + 1 = 2.$$

c) Sử dụng công thức $\cos(180^\circ - x) = -\cos x$ ta được:

$$\begin{aligned}
 R &= (\cos 0^\circ + \cos 180^\circ) + (\cos 20^\circ + \cos 160^\circ) + (\cos 40^\circ + \cos 140^\circ) \\
 &\quad + (\cos 60^\circ + \cos 120^\circ) + (\cos 80^\circ + \cos 100^\circ) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

d) Áp dụng công thức $\tan x \cdot \tan(90^\circ - x) = \tan x \cdot \cot x = 1$. Do đó $S = 1$.

e) $E = \cos^2 12^\circ + \cos^2 78^\circ + \cos^2 1^\circ + \cos^2 89^\circ + \cos^2 17^\circ + \cos^2 73^\circ = 3$.

f) Ta có:

$$\begin{aligned}
 F &= 4a^2 \cos^2 60^\circ + 2ab \cos^2 180^\circ + \frac{4}{3} b^2 \cos^2 30^\circ \\
 &= 4a^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2ab(-1)^2 + \frac{4}{3} b^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\
 &= a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2.
 \end{aligned}$$

c) $G = a^2 \sin 90^\circ + b^2 \cos 90^\circ + c^2 \cos 180^\circ = a^2 - c^2$.

Ví dụ 3: Cho α là góc nhọn. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \sin(90^\circ - \alpha) + 2\cos\alpha - 5\cos(90^\circ - \alpha)$.

b) $B = \sin(90^\circ - \alpha) - \cos(90^\circ - \alpha) + \cot(180^\circ - \alpha) + \tan(90^\circ - \alpha)$

c) $C = 2\cos(180^\circ - \alpha) - \sin(90^\circ - \alpha) - \cot(90^\circ - \alpha) \cdot \cot(180^\circ - \alpha)$.

d) $D = \frac{2 \cdot \cos(180^\circ - \alpha) + 5 \sin(90^\circ - \alpha)}{\sin \alpha - 4 \cos(90^\circ - \alpha)}$

e) $F = \frac{\cos(90^\circ - \alpha) - \cot(90^\circ + \alpha)}{\cot(90^\circ - \alpha)} - \sin(180^\circ - \alpha) \cot(180^\circ - \alpha)$.

Lời giải:

a) Ta có:

$$\begin{aligned}
 A &= \sin(90^\circ - \alpha) + 2\cos\alpha - 5\cos(90^\circ - \alpha) \\
 &= \cos\alpha + 2\cos\alpha - 5\sin\alpha \\
 &= 3\cos\alpha - 5\sin\alpha.
 \end{aligned}$$

b) Ta có:

$$\begin{aligned}
 B &= \sin(90^\circ - \alpha) - \cos(90^\circ - \alpha) + \cot(180^\circ - \alpha) + \tan(90^\circ - \alpha) \\
 &= \cos\alpha - \sin\alpha - \cot\alpha + \cot\alpha \\
 &= \cos\alpha - \sin\alpha.
 \end{aligned}$$

c) Ta có:

$$\begin{aligned}
 C &= 2\cos(180^\circ - \alpha) + \sin(90^\circ - \alpha) - \cot(90^\circ - \alpha) \cdot \cot(180^\circ - \alpha) \\
 &= -2\cos\alpha + \cos\alpha + \tan\alpha \cdot \cot\alpha \\
 &= 1 - \cos\alpha.
 \end{aligned}$$

d) Ta có:

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{2 \cdot \cos(180^\circ - \alpha) + 5 \sin(90^\circ - \alpha)}{\sin \alpha - 4 \cos(90^\circ - \alpha)} \\
 &= \frac{-2\cos\alpha + 5\cos\alpha}{\sin\alpha - 4\sin\alpha} = -\cot\alpha.
 \end{aligned}$$

e) Ta có:

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{\cos(90^\circ - \alpha) - \cot(90^\circ + \alpha)}{\cot(90^\circ - \alpha)} + \sin(180^\circ - \alpha) \cot(180^\circ - \alpha). \\
 &= \frac{\sin \alpha - \cot(180^\circ - (90^\circ - \alpha))}{\tan \alpha} - \sin \alpha \cdot \cot \alpha \\
 &= \frac{\sin \alpha + \tan \alpha}{\tan \alpha} - \cos \alpha = \frac{\sin \alpha}{\tan \alpha} + 1 - \cos \alpha = 1.
 \end{aligned}$$

Ví dụ 4: Biết A, B, C là các góc nhọn của tam giác ABC . Hãy chứng minh

a) $\cos(A+C) = -\cos B$.

b) $\sin \frac{A+C}{2} = \cos \frac{B}{2}$.

c) $\sin(A+B+2C) = -\sin C$.

d) $\tan\left(\frac{B+C-2A}{2}\right) = \cot \frac{3A}{2}$.

Lời giải:

a) Vì A, B, C là ba góc của một tam giác suy ra $A+C = 180^\circ - B$.

Do đó $\cos(A+C) = \cos(180^\circ - B) = -\cos B$.

b) Vì A, B, C là ba góc của một tam giác suy ra $A+C = 180^\circ - B \Rightarrow \frac{A+C}{2} = 90^\circ - \frac{B}{2}$

Do đó: $\sin \frac{A+C}{2} = \sin(90^\circ - \frac{B}{2}) = \cos \frac{B}{2}$.

d) Ta có:

$$A+B+C = 180^\circ \Rightarrow B+C-2A = 180^\circ - 3A \Rightarrow \frac{B+C-2A}{2} = 90^\circ - \frac{3A}{2}$$

$$\tan\left(\frac{B+C-2A}{2}\right) = \tan\left(90^\circ - \frac{3A}{2}\right) = \cot \frac{3A}{2}$$

c) Ta có $\sin(A+B+2C) = \sin(180^\circ - C + 2C) = \sin(180^\circ + C) = -\sin C$.

Ví dụ 5: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \cos 10^\circ + \cos 20^\circ + \cos 30^\circ + \dots + \cos 170^\circ + \cos 180^\circ$

b) $B = \frac{\cos(90^\circ - \alpha) - \cot(90^\circ + \alpha)}{\cot(90^\circ - \alpha)} + \sin(180^\circ - \alpha) \cot(180^\circ - \alpha)$

Lời giải:

a) Ta có: $\cos 170^\circ = -\cos 10^\circ \Leftrightarrow \cos 10^\circ + \cos 170^\circ = 0$

$$\cos 160^\circ = -\cos 20^\circ \Leftrightarrow \cos 20^\circ + \cos 160^\circ = 0$$

$$\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ \Leftrightarrow \cos 30^\circ + \cos 150^\circ = 0$$

$$\cos 90^\circ = 0$$

$$\cos 180^\circ = -1$$

Vậy $A = -1$.

b) Ta có: $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$

$$\cot(90^\circ + \alpha) = \cot(180^\circ + \alpha - 90^\circ) = \cot(\alpha - 90^\circ) = -\tan \alpha$$

$$\cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$$

Do đó $B = \frac{\sin \alpha + \tan \alpha}{\tan \alpha} + \sin \alpha (-\cot \alpha)$

$$B = \sin \alpha \cot \alpha + 1 - \sin \alpha \cot \alpha$$

Vậy: $B = 1$.

Ví dụ 6: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $C = \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$.

b) $D = \sin(90^\circ - \alpha) + \sin(180^\circ - \alpha) - \cos \alpha + \sin \alpha$

Lời giải:

a) Ta có: $\cos 20^\circ = -\cos 160^\circ \Leftrightarrow \cos 20^\circ + \cos 160^\circ = 0$

$$\cos 40^\circ = -\cos 140^\circ \Leftrightarrow \cos 40^\circ + \cos 140^\circ = 0$$

$$\cos 60^\circ = -\cos 120^\circ \Leftrightarrow \cos 60^\circ + \cos 120^\circ = 0$$

$$\cos 80^\circ = -\cos 100^\circ \Leftrightarrow \cos 80^\circ + \cos 100^\circ = 0$$

$$\cos 180^\circ = -1.$$

Vậy: $C = -1$.

b) Ta có: $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

Vậy: $D = \cos \alpha + \sin \alpha - \cos \alpha + \sin \alpha = 2 \sin \alpha$.

Ví dụ 7: Đơn giản biểu thức:

$$E = 2 \sin \alpha - 3 \cos(90^\circ - \alpha) + \tan(90^\circ - \alpha) + 2 \cot(180^\circ - \alpha) + 2 \sin \alpha - 3 \cot \alpha.$$

Lời giải:

Ta có: $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$; $\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha$; $\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$

Vậy: $E = 2 \sin \alpha - 3 \sin \alpha + \cot \alpha - 2 \cot \alpha + 2 \sin \alpha - 3 \cot \alpha$

$$E = \sin \alpha - 4 \cot \alpha.$$

Ví dụ 8: Đơn giản biểu thức:

$$T = \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \dots + \sin^2 70^\circ + \sin^2 80^\circ + \sin^2 90^\circ$$

Lời giải:

Ta có: $\sin 90^\circ = 1 \Rightarrow \sin^2 90^\circ = 1$

$$\sin 80^\circ = \cos 10^\circ \Rightarrow \sin^2 80^\circ = \cos^2 10^\circ \Rightarrow \sin^2 80^\circ + \sin^2 10^\circ = 1$$

$$\sin 70^\circ = \cos 20^\circ \Rightarrow \sin^2 70^\circ = \cos^2 20^\circ \Rightarrow \sin^2 70^\circ + \sin^2 20^\circ = 1$$

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ \Rightarrow \sin^2 60^\circ = \cos^2 30^\circ \Rightarrow \sin^2 60^\circ + \sin^2 30^\circ = 1$$

$$\sin 50^\circ = \cos 40^\circ \Rightarrow \sin^2 50^\circ = \cos^2 40^\circ \Rightarrow \sin^2 50^\circ + \sin^2 40^\circ = 1$$

Vậy $T = \sin 10^\circ + \sin 20^\circ + \sin 30^\circ + \sin 40^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 30^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 10^\circ + 1$

$$T = 5.$$

Ví dụ 9: Đơn giản biểu thức:

$$T = \cos^2 15^\circ + \cos^2 25^\circ + \cos^2 45^\circ + \cos^2 65^\circ + \cos^2 75^\circ.$$

Lời giải:

Ta có $\cos^2 75^\circ = \sin^2 15^\circ \Rightarrow \cos^2 75^\circ = \sin^2 15^\circ$

$$\cos^2 65^\circ = \sin^2 25^\circ \Rightarrow \cos^2 65^\circ = \sin^2 25^\circ$$

$$\cos^2 45^\circ = \sin^2 45^\circ \Rightarrow \cos^2 45^\circ = \sin^2 45^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

Vậy $T = \cos^2 15^\circ + \cos^2 25^\circ + \frac{1}{2} + \sin^2 25^\circ + \sin^2 15^\circ = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

Ví dụ 10: Cho A, B, C là 3 góc của một tam giác ABC . Chứng minh rằng:

a) $\sin \frac{B+A}{2} = \cos \frac{C}{2}$

b) $\sin A = \sin(B + C)$

c) $\cos A = -\cos(B + C)$.

Lời giải:

a) Vì A, B, C là 3 góc của một tam giác nên $A + B + C = 180^\circ$

$$\Rightarrow \frac{A}{2} + \frac{B}{2} = \frac{180^\circ}{2} - \frac{C}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \sin \frac{A+B}{2} = \sin \left(90^\circ - \frac{C}{2} \right) = \cos \frac{C}{2}.$$

b) Ta có: $A + B + C = 180^\circ \Rightarrow A = 180^\circ - (B + C)$

$$\Rightarrow \sin A = \sin[180^\circ - (B + C)] = \sin(B + C).$$

c) Ta có: $A + B + C = 180^\circ \Rightarrow A = 180^\circ - (B + C)$

$$\Rightarrow \cos A = \cos[180^\circ - (B + C)] = -\cos(B + C).$$

Ví dụ 11: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = a^2 \sin 90^\circ + b^2 \cos 90^\circ + c^2 \cos 180^\circ$

b) $B = 3 - \sin^2 90^\circ + 2 \cos^2 60^\circ - 3 \tan^2 45^\circ$

c) $C = \sin^2 45^\circ - 2 \sin^2 50^\circ + 3 \cos^2 45^\circ - 2 \sin^2 40^\circ + 4 \tan 55^\circ \cdot \tan 35^\circ$

Lời giải:

a) $A = a^2 \cdot 1 + b^2 \cdot 0 + c^2 \cdot (-1) = a^2 - c^2$

b) $B = 3 - (1)^2 + 2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 - 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 1$

c) $C = \sin^2 45^\circ + 3 \cos^2 45^\circ - 2(\sin^2 50^\circ + \sin^2 40^\circ) + 4 \tan 55^\circ \cdot \cot 55^\circ$

$$C = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - 2(\sin^2 50^\circ + \cos^2 40^\circ) + 4 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 + 4 = 4$$

Ví dụ 12: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \sin^2 3^\circ + \sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ + \sin^2 87^\circ$

b) $B = \cos 0^\circ + \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$

c) $C = \tan 5^\circ \tan 10^\circ \tan 15^\circ \dots \tan 80^\circ \tan 85^\circ$

Lời giải:

a) $A = (\sin^2 3^\circ + \sin^2 87^\circ) + (\sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ)$

$$= (\sin^2 3^\circ + \cos^2 3^\circ) + (\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ)$$

$$= 1 + 1 = 2$$

b) $B = (\cos 0^\circ + \cos 180^\circ) + (\cos 20^\circ + \cos 160^\circ) + \dots + (\cos 80^\circ + \cos 100^\circ)$

$$= (\cos 0^\circ - \cos 0^\circ) + (\cos 20^\circ - \cos 20^\circ) + \dots + (\cos 80^\circ - \cos 80^\circ)$$

$$= 0$$

c) $C = (\tan 5^\circ \tan 85^\circ)(\tan 15^\circ \tan 75^\circ) \dots (\tan 45^\circ \tan 45^\circ)$

$$= (\tan 5^\circ \cot 5^\circ)(\tan 15^\circ \cot 15^\circ) \dots (\tan 45^\circ \cot 45^\circ)$$

$$= 1$$

Vấn đề 2: Dấu của một biểu thức lượng giác.

a) **Phương pháp:** Dùng dấu của các tỉ số lượng giác.

b) **Ví dụ minh họa**

I- BÀI TẬP TỰ LUẬN:

Ví dụ 1: Xét dấu biểu thức: $P = \cos x \cdot \sin x$ biết $0^\circ < x < 90^\circ$.

Lời giải:

Ta có $\cos x > 0$; $\sin x > 0$ với $0^\circ < x < 90^\circ$. Do đó $P = \cos x \cdot \sin x > 0$.

Ví dụ 2: Xét dấu biểu thức: $P = \sin^2 x \cdot \tan x$ biết $90^\circ < x < 180^\circ$.

Lời giải:

Ta có $\sin^2 x > 0$; $\tan x < 0$, với $90^\circ < x < 180^\circ$. Do đó $P = \sin^2 x \cdot \tan x < 0$

Ví dụ 3: Xét dấu biểu thức: $P = (\cos x - 1) \sin x \tan x$ biết $0^\circ < x < 90^\circ$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } P = (\cos x - 1) \sin x \frac{\sin x}{\cos x} = (\cos x - 1) \sin^2 x \frac{1}{\cos x}$$

$$\text{Ta có: } \sin^2 x \geq 0; \cos x - 1 < 0 \text{ (vì } 0^\circ < x < 90^\circ) \Leftrightarrow 0 < \cos x < 1, \cos x > 0$$

Ta có bảng tổng kết:

x	0°	90°
$\cos x - 1$		-
$\cos x$		+
P		-

Vậy $0^\circ < x < 90^\circ$ thì $P = (\cos x - 1) \sin x \tan x < 0$.

Ví dụ 4: Xét dấu của $P = \sin^2 x \cos^3 x \tan x$, biết $45^\circ < x < 180^\circ$, $x \neq 90^\circ$.

Lời giải:

Ta có: $\sin^2 x \geq 0$ với $45^\circ < x < 180^\circ$

$\cos x \geq 0$ với $45^\circ < x \leq 90^\circ$

$\cos x < 0$ với $90^\circ < x < 180^\circ$

$\tan x > 0$ với $45^\circ < x < 90^\circ$

$\tan x < 0$ với $90^\circ < x < 180^\circ$

Ta có bảng dấu như sau:

x	45°	90°	180°
$\cos^3 x$	+	0	-
tgx	+		-
P	+		+

Vậy $P = \sin^2 x \cos^3 x \tan x$ luôn luôn dương khi $45^\circ < x < 180^\circ$, $x \neq 90^\circ$

Ví dụ 5: Xét dấu của $P = \sin^3 x \cos x (1 - \sin^9 x)$, biết $75^\circ < x < 125^\circ$.

Lời giải:

Ta có: $\sin x > 0 \Rightarrow \sin^3 x > 0$ với $75^\circ < x < 125^\circ$

và $1 - \sin^9 x \geq 0$

và $\cos x \geq 0$ với $75^\circ < x \leq 90^\circ$

$$\cos x < 0 \quad \text{với} \quad 90^\circ < x < 125^\circ$$

Ta có bảng xét dấu:

x	75°	90°	125°
$\cos x$	+	0	-
P	+	0	-

Vậy $P = \sin^3 x \cos x (1 - \sin^9 x) < 0$ nếu $90^\circ < x < 125^\circ$

$P = \sin^3 x \cos x (1 - \sin^9 x) \geq 0$ nếu $75^\circ < x \leq 90^\circ$.

Ví dụ 6: Định x để $P = \sin x \cos x > 0$, biết $0^\circ < x < 180^\circ$.

Lời giải:

Vì $0^\circ < x < 180^\circ \Rightarrow \sin x > 0$

Ta có: $\cos x \geq 0$ khi $0^\circ < x \leq 90^\circ$

$\cos x < 0$ khi $90^\circ < x < 180^\circ$

Ta có bảng xét dấu:

x	0°	90°	180°
$\sin x$	0	+	1
$\cos x$	+	0	-
$P = \sin x \cos x$	+	0	-

Vậy để $P = \sin x \cos x > 0 \Leftrightarrow 0^\circ < x < 90^\circ$.

Ví dụ 7: Định x để $T = \sin(115^\circ - x) > 0$, biết $0^\circ < x < 180^\circ$.

Lời giải:

Ta có: $\sin(115^\circ - x) > 0 \Rightarrow 0^\circ < 115^\circ - x < 180^\circ$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0^\circ < 115^\circ - x \\ 115^\circ - x < 180^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 115^\circ \\ x > -65^\circ \end{cases}$$

Vì giả thiết cho $0^\circ < x < 180^\circ$ nên ta chọn $0^\circ < x < 115^\circ$ thì $T > 0$.

Ví dụ 8: Định x để $P = \sin^2 x (1 - \cos x) \cot gx > 0$, biết $30^\circ < x < 160^\circ$, $x \neq 90^\circ$.

Lời giải:

Ta có: $\sin^2 x > 0$ và $1 - \cos x > 0$ với $30^\circ < x < 160^\circ$

Ta chỉ cần xét dấu $\cot gx$

x	30°	90°	160°
$\cot gx$	+	0	-
P	+	0	-

Vậy $P > 0$ khi $30^\circ < x < 90^\circ$.

Ví dụ 9: Tính theo hàm số lượng giác của các góc bé hơn 90° :

$\sin 100^\circ$, $\sin 160^\circ$, $\cos 170^\circ$, $\tan 103^\circ 45'$, $\cot 124^\circ 15'$.

Lời giải:

$$\sin 100^\circ = \sin(180^\circ - 100^\circ) = \sin 80^\circ;$$

$$\sin 160^\circ = \sin(180^\circ - 160^\circ) = \sin 20^\circ;$$

$$\tan 103^\circ 45' = -\tan(180^\circ - 103^\circ 45') = \tan 76^\circ 15'$$

$$\cot 124^\circ 15' = -\cot(180^\circ - 124^\circ 15') = -\cot 55^\circ 45'$$

Vấn đề 3. Cho biết một giá trị lượng giác, tính các giá trị lượng giác còn lại hoặc tính giá trị của một biểu thức lượng giác.

Phương pháp: dùng các hệ thức lượng giác cơ bản và dấu của các tỉ số lượng giác.

Ví dụ 1: Tính $\cos \alpha$, $\tan \alpha$, $\cot \alpha$.

a) Biết $\sin \alpha = \frac{4}{5}$

b) Biết α nhọn và $\sin \alpha = \frac{3}{5}$

c) Biết $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ và $\sin \alpha = \frac{12}{13}$.

Lời giải:

a) Ta có: $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{3}{5}$

Với $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ thì $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$; $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{3}{4}$.

Với $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ thì $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$; $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{3}{4}$.

b) Ta có: $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{4}{5}$ (α nhọn)

Ta có: $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$; $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{4}{3}$.

c) Ta có: $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169}$

$\cos \alpha = -\frac{5}{13}$ (vì $90^\circ < \alpha < 180^\circ$)

Ta có: $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{12}{13}}{-\frac{5}{13}} = -\frac{12}{5}$; $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{5}{12}$.

Ví dụ 2: Cho $\sin \alpha = \frac{2}{5}$ và $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Tính $\cos \alpha$, $\tan \alpha$, $\cot \alpha$.

Lời giải:

Vì $90^\circ < \alpha < 180^\circ \Rightarrow \cos \alpha < 0$.

Do đó $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{4}{25}} = -\frac{\sqrt{21}}{5}$