

Các Dạng Bài Tập Về Tính Đơn Điệu Của Hàm Số Giải Chi Tiết

Phương Pháp Xét Tính Đơn Điệu Của Hàm Số Cho

Bởi Công Thức

Phương pháp xét tính đơn điệu của hàm số cho bởi công thức: Hàm bậc hai, bậc ba, trùng phương; Hàm phân thức hữu tỉ; hàm chứa căn bậc hai.

I. Phương pháp

Bước 1: Tìm tập xác định DD .

Bước 2: Tính đạo hàm $y'=f'(x)$.

Bước 3: Tìm nghiệm của $f'(x)$ hoặc những giá trị x làm cho $f'(x)$ không xác định.

Bước 4: Lập bảng biến thiên.

Bước 5: Kết luận.

II. Các ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Xét tính đơn điệu của hàm số $y=x^2+4x-2$.

Lời giải

Tập xác định: $D=RD=R$.

Ta có: $y'=2x+4$;

$y'=0 \Leftrightarrow 2x+4=0 \Leftrightarrow x=-2$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	-6	$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$

Ví dụ 2. Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow [x = 0; x = 2]$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	$+$
y	$-\infty$	1	-3	$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Ví dụ 3. Xét tính đơn điệu của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3x$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = -3x^2 + 6x - 3$

$y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (nghiệm kép)

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$y'(x)$	$-$	0	$-$
y	$+\infty$	-1	$-\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Ví dụ 4. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = x^4 - 2x^2$.

Lời giải

Tập xác định: $D=RD=R$.

Ta có $y'=4x^3-4x=4x(x^2-1)$; $y'=4x^3-4x=4x(x^2-1)$;

$y'=0 \Leftrightarrow [x=0 \vee x=\pm 1]$ $y'=0 \Leftrightarrow [x=0 \vee x=\pm 1]$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	-1	0	-1	$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$,
nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

Ví dụ 5. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y=x+4x+3$.

Lời giải

Tập xác định: $D=R \setminus \{-3\}$.

Ta có $y'=1 \cdot 3 - 4 \cdot 1(x+3)^2 = 1(x+3)^2 < 0, \forall x \in D$

$4 \cdot 1(x+3)^2 = 1(x+3)^2 < 0, \forall x \in D$.

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-3)$ và $(-3;+\infty)$.

Ví dụ 6. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y=3x+11-x$.

Lời giải

$y=3x+1-x$

Tập xác định: $D=R \setminus \{1\}$.

Ta có $y'=3 \cdot 1 - (-1) \cdot 1(1-x)^2 = 4(1-x)^2 > 0, \forall x \in D$

$x)^2 > 0, \forall x \in D$.

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Ví dụ 7. Tìm các khoảng nghịch biến của hàm số: $y=x^2-3x+4x-3$.

Lời giải

Tập xác định: $D=R \setminus \{3\}$.

Ta có: $y'=(x^2-3x+4)'(x-3)-(x^2-3x+4)(x-3)'$

$=2x-3-(x^2-3x+4) \cdot 1(x-3)^2 = (2x-3)(x-3)-(x^2-3x+4) \cdot 1(x-3)^2$

$=2x^2-6x-3x+9-x^2+3x-4(x-3)^2 = 2x^2-6x-3x+9-x^2+3x-4(x-3)^2 = x^2-6x+5(x-3)^2 = x^2-6x+5(x-3)^2$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5(x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5(x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow [x = 5 \vee x = 1]$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	3	5	$+\infty$
y'		+	0	-	
y	$-\infty$		-1		$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(5; +\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(1; 3)$ và $(3; 5)$.

Ví dụ 8. Tìm các khoảng nghịch biến của hàm số: $y = -x^2 + 2x - 1x + 2$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Ta có: $y' = -x^2 - 4x + 5(x+2)^2$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 4x + 5(x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow [x = -5 \vee x = 1]$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-5	-2	1	$+\infty$
y'		-	0	+	
y	$+\infty$		12		$-\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-5; -2)$ và $(-2; 1)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -5)$ và $(1; +\infty)$.

Ví dụ 9. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$.

Lời giải

Tập xác định $D = (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$.

$$y' = (x^2 - 4x + 3)' \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 4x + 3}} = 2x - 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 4x + 3}} = \frac{2x - 4}{2\sqrt{x^2 - 4x + 3}}$$

$y'=0 \Rightarrow 2x-4=0 \Rightarrow x=2$ (loại)
 Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$y'(x)$		-		+	
y	$+\infty$	\searrow		\nearrow	$+\infty$

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$.

Ví dụ 10. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = x\sqrt{4-x^2}$.

Lời giải

Tập xác định $D = [-2; 2]$.

$$y' = \sqrt{4-x^2} - x^2\sqrt{4-x^2} = 4-2x^2\sqrt{4-x^2}; y'=0 \Leftrightarrow [x=-\sqrt{2}; x=\sqrt{2}]$$

Bảng biến thiên

x	-2	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	2			
$y'(x)$		-	0	+	0	-	
y	0	\searrow	-2	\nearrow	2	\searrow	0

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$, nghịch biến trên các khoảng $(-2; -\sqrt{2})$ và $(\sqrt{2}; 2)$.