

Các Chuyên Đề Bồi Dưỡng HSG Toán 8

Cấu Trúc Mới Có Lời Giải Chi Tiết

CHUYÊN ĐỀ : HẰNG ĐẲNG THỨC

A. CÁC HẰNG ĐẲNG THỨC CƠ BẢN

$$1. (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2 + 4ab = (a-b)^2 + 4ab$$

$$2. (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab = (a+b)^2 - 4ab$$

$$3. a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$4. (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) \Rightarrow a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

$$5. (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a+b) \Rightarrow a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$$

$$6. a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$7. a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

Bài 1:

a) Tính $A = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2$

b) Tính $B = -1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - \dots + (-1)^n \cdot n^2$

Lời giải

a)

$$A = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2 = (100-99)(100+99) + \dots + (2-1)(2+1) = 100 + \dots + 1 = \frac{101 \cdot 100}{2} = 5050$$

b) Ta xét hai trường hợp

- TH1: Nếu n chẵn thì

$$B = (2^2 - 1^2) + (4^2 - 3^2) + \dots + [n^2 - (n-1)^2] = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- TH1: Nếu n lẻ thì

$$B = (2^2 - 1^2) + (4^2 - 3^2) + \dots + [(n-1)^2 - (n-2)^2] - n^2 = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (n-1) - n^2 = -\frac{n(n+1)}{2}$$

⇒ Hai kết quả trên có thể dùng công thức: $(-1)^n \cdot \frac{n(n+1)}{2}$

Bài 2: So sánh $A = 19999.39999$ và $B = 29999^2$

Lời giải

Ta có:

$$19999.39999 = (29999 - 10000)(29999 + 10000) = 29999^2 - 10000^2 < 29999^2 \Rightarrow A < B$$

Bài 3: Rút gọn các biểu thức sau

a. $A = (2+1)(2^2+1)\dots(2^{64}+1)+1$

b.

$$B = (3+1)(3^2+1)\dots(3^{64}+1)+1$$

c. $C = (a+b+c)^2 + (a+b-c)^2 - 2(a+b)^2$

Lời giải

a. $A = (2+1)(2^2+1)\dots(2^{64}+1)+1 = (2-1)(2+1)(2^2+1)\dots(2^{64}+1)+1 = 2^{128} - 1 + 1 = 2^{128}$

b. $B = (3+1)(3^2+1)\dots(3^{64}+1)+1 = \frac{1}{2}(3-1)(3+1)(3^2+1)\dots(3^{64}+1)+1 = \frac{1}{2}(3^{128}-1)+1 = \frac{3^{128}+1}{2}$

c.

$$C = (a+b+c)^2 + (a+b-c)^2 - 2(a+b)^2 = (a+b+c)^2 - 2(a+b+c)(a+b-c) + (a+b-c)^2 - 2(a+b+c)(a+b-c)$$

$$- 2(a+b)^2 = (a+b+c+a+b-c)^2 - 2[(a+b)^2 - c^2] - 2(a+b)^2 = 4(a+b)^2 - 2(a+b)^2 + 2c^2 - 2(a+b)^2 = 2c^2$$

Bài 4: Chứng minh rằng

$$\text{a. } (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (bx - ay)^2 + (ax + by)^2$$

$$\text{b. } (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2 = (bx - ay)^2 + (cy - bz)^2 + (az - cx)^2$$

Lời giải

$$\text{a. Ta có: VT} = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 = (bx)^2 + (ay)^2 + (ax)^2 + (by)^2$$

$$= (bx)^2 - 2bx.ay + (ay)^2 + 2bx.ay + (ax)^2 + (by)^2 = (bx - ay)^2 + (ax + by)^2 \text{ (dpcm)}$$

$$\text{b. VT} =$$

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) + (a^2 + b^2)z^2 + c^2(x^2 + y^2 + z^2) - [(ax + by)^2 + 2(ax + by)cz + (cz)^2]$$

$$= (ax + by)^2 + (bx - ay)^2 + (az)^2 + (bz)^2 + (cx)^2 + (cy)^2 + (cz)^2 - (ax + by)^2 - (cz)^2 - 2ax.cz - 2by.cz$$

$$= (bx - ay)^2 + [(cy)^2 - 2by.cz + (bz)^2] + (az)^2 + (cx)^2 - 2az.cx = (bx - ay)^2 + (cy - bz)^2 + (az - cx)^2$$

Nhận xét: Đây là bất đẳng thức Bunhicopski.

$$\text{Bài 5: Cho } x^2 = y^2 + z^2. \text{CMR: } (5x - 3y + 4z)(5x - 3y - 4z) = (3x - 5y)^2$$

Lời giải

$$\text{VT} = (5x - 3y)^2 - 16z^2 = 25x^2 - 30xy + 9y^2 - 16z^2$$

Mà:

$$z^2 = x^2 - y^2 \Rightarrow \text{VT} = 25x^2 - 30xy - 9y^2 - 16(x^2 - y^2) = 9x^2 - 30xy + 25y^2 = (3x - 5y)^2 \text{ (dpcm)}$$

$$\text{Bài 6: CMR, nếu } (a + b + c + d)(a - b - c + d) = (a - b + c - d)(a + b - c - d) \text{ thì } ad = bc$$

Lời giải

$$\text{VT} =$$

$$[(a + d) + (b + c)][(a + d) - (b + c)] = (a + d)^2 - (b + c)^2 = a^2 + d^2 + 2ad - b^2 - c^2 - 2bc$$

$$\text{VP} =$$

$$[(a - d) + (c - b)][(a - d) - (c - b)] = (a - d)^2 - (c - b)^2 = a^2 + d^2 - 2ad - c^2 - b^2 + 2bc$$

$$VT = VP \Rightarrow 2ad - 2bc = -2ad + 2bc \Leftrightarrow 4ad = 4bc \Leftrightarrow ad = bc (dpcm)$$

Bài 7: CMR, nếu:

a. $a + b + c = 0$ thì $a^3 + a^2c - abc + b^2c + b^3 = 0$

b. $(y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-y)^2 = (y+z-2x)^2 + (z+x-2y)^2 + (y+x-2z)^2$ thì $x = y = z$

Lời giải

a. Ta có :

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \\ a + b + c \Rightarrow a + b = -c \end{cases} \Rightarrow a^3 + b^3 = -c(a^2 - ab + b^2) = -a^2c + abc - b^2c \Rightarrow a^3 + b^3 + a^2c - abc + b^2c = 0$$

b. Đặt : $y - z = a; z - x = b; x - y = c \Rightarrow a + b + c = 0$ và $\begin{cases} y + z - 2x = (y - x) + (z - x) = b - c \\ z + x - 2y = c - a \\ x + y - 2z = a - b \end{cases}$

Từ giả thiết ta có :

$$a^2 + b^2 + c^2 = (b - c)^2 + (c - a)^2 + (a - b)^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ac + a^2 + a^2 - 2ab + b^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca = 0 \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) - (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ y = z \Rightarrow x = y = z \\ z = x \end{cases}$$

Bài 8: Chứng minh rằng không tồn tại các số thực x, y, z thỏa mãn:

a. $5x^2 + 10y^2 - 6xy - 4x - 2y + 3 = 0$

b.

$x^2 + 4y^2 + z^2 - 2x - 6z + 8y + 15 = 0$

Lời giải

a. $VT = (x - 3y)^2 + (2x - 1)^2 + (y - 1)^2 \geq 1 (dpcm)$

b. $VT = (x - 1)^2 + 4(y + 1)^2 + (z - 3)^2 + 1 \geq 1 (dpcm)$

Bài 9: Tìm x, y thỏa mãn

$$\text{a. } x^2 + 8y^2 + 9 = 4y(x+3)$$

b.

$$9x^2 - 8xy + 8y^2 - 28x + 28 = 0$$

$$\text{c. } x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 1 = 2(xy + 2yz + z)$$

Lời giải

$$\text{a. Ta có: } x^2 + 8y^2 + 9 = 4y(x+3) \Leftrightarrow (x-2y)^2 + (2y-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{3; \frac{3}{2}\right\}$$

b.

$$9x^2 - 8xy + 8y^2 - 28x + 28 = 0 \Leftrightarrow (7x^2 - 28x + 28) + (2x^2 - 8xy + 8y^2) = 0 \Leftrightarrow 7(x-2)^2 + 2(x-2y)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

$$\text{c. } x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 1 = 2(xy + 2yz + z) \Leftrightarrow (x-y)^2 + (y-2z)^2 + (z-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 2; z = 1$$

Bài 10: Chứng minh rằng biểu thức sau viết được dưới dạng tổng các bình phương của hai biểu thức: $x^2 + 2(x+1)^2 + 3(x+2)^2 + 4(x+3)^2$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} x^2 + 2(x+1)^2 + 3(x+2)^2 + 4(x+3)^2 &= x^2 + 2(x^2 + 2x + 1) + 3(x^2 + 4x + 4) + 4(x^2 + 6x + 9) \\ &= 10x^2 + 40x + 50 = (x+5)^2 + (3x+5)^2 \Rightarrow \text{dpcm} \end{aligned}$$

Bài 11: Cho $a = x^2 + x + 1$. Tính theo a giá trị của biểu thức

$$A = x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x + 4$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x + 4 = (x^4 + x^2 + 1) + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2x^2 + 2x + 3$$

$$\Rightarrow A = (x^2 + x + 1)^2 + 2(x^2 + x + 1) + 1 \Rightarrow A = a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2$$

Bài 12: Chứng minh $x(x-a)(x+a)(x+2a) + a^4$ là bình phương của một đa thức