



BAÁT ÑAÚNG THÒUC BAÁT PHÒÔNG TRÌNH

BAØI

1.

BÁT ĐẰNG THỨC

I – ÔN TẬP BÁT ĐẰNG THỨC

1. Khái niệm bất đẳng thức

Các mệnh đề dạng " $a < b$ " hoặc " $a > b$ " được gọi là bất đẳng thức.

2. Bất đẳng thức hệ quả và bất đẳng thức tương đương

Nếu mệnh đề " $a < b \text{ Đ } c < d$ " đúng thì ta nói bất đẳng thức $c < d$ là bất đẳng thức hệ quả của bất đẳng thức $a < b$ và cũng viết là $a < b \text{ Đ } c < d$.

Nếu bất đẳng thức $a < b$ là hệ quả của bất đẳng thức $c < d$ và ngược lại thì ta nói hai bất đẳng thức tương đương với nhau và viết là $a < b \text{ Û } c < d$.

3. Tính chất của bất đẳng thức

Như vậy để chứng minh bất đẳng thức $a < b$ ta chỉ cần chứng minh $a - b < 0$. Tổng quát hơn, khi so sánh hai số, hai biểu thức hoặc chứng minh một bất đẳng thức, ta có thể sử dụng các tính chất của bất đẳng thức được tóm tắt trong bảng sau

Tính chất		Tên gọi
Điều kiện	Nội dung	
	$a < b \text{ Û } a + c < b + c$	Cộng hai vế của bất đẳng thức với một số

$c > 0$	$a < b \hat{U} ac < bc$	Nhân hai vế của bất đẳng thức với một số
$c < 0$	$a < b \hat{U} ac > bc$	
	$a < b$ và $c < d$ $\text{P } a + c < b + d$	Cộng hai bất đẳng thức cùng chiều
$a > 0, c > 0$	$a < b$ và $c < d \text{ P } ac < bd$	Nhân hai bất đẳng thức cùng chiều
$n \hat{I} \text{ N}^*$	$a < b \hat{U} a^{2n+1} < b^{2n+1}$	Nâng hai vế của bất đẳng thức lên một lũy thừa
$n \hat{I} \text{ N}^*$ và $a > 0$	$a < b \hat{U} a^{2n} < b^{2n}$	
$a > 0$	$a < b \hat{U} \sqrt{a} < \sqrt{b}$	Khai căn hai vế của một bất đẳng thức
	$a < b \hat{U} \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$	

Chú ý

Ta còn gặp các mệnh đề dạng $a \text{ £ } b$ hoặc $a^3 \text{ £ } b$. Các mệnh đề dạng này cũng được gọi là bất đẳng thức. Để phân biệt, ta gọi chúng là các bất đẳng thức không ngặt và gọi các bất đẳng thức dạng $a < b$ hoặc $a > b$ là các bất đẳng thức ngặt. Các tính chất nêu trong bảng trên cũng đúng cho bất đẳng thức không ngặt.

II- BẤT ĐẲNG THỨC GIỮA TRUNG BÌNH CỘNG VÀ TRUNG BÌNH NHÂN (BẤT ĐẲNG THỨC CÔ-SI)

1. Bất đẳng thức Cô-si

Định lí

Trung bình nhân của hai số không âm nhỏ hơn hoặc bằng trung bình cộng của chúng

$$\sqrt{ab} \text{ £ } \frac{a+b}{2}, \quad " a, b \geq 0. \quad (1)$$

Đẳng thức $\sqrt{ab} = \frac{a+b}{2}$ xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

2. Các hệ quả

Hệ quả 1

Tổng của một số dương với nghịch đảo của nó lớn hơn hoặc bằng 2.

$$a + \frac{1}{a} \geq 2, \quad " a > 0.$$

Hệ quả 2

Nếu x, y cùng dương và có tổng không đổi thì tích xy lớn nhất khi và chỉ khi $x = y$.

Hệ quả 3

Nếu x, y cùng dương và có tích không đổi thì tổng $x + y$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $x = y$.

III - BẤT ĐẲNG THỨC CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Điều kiện	Nội dung
	$ x ^3 \geq 0, x ^3 \geq x, x ^3 \geq -x$
$a > 0$	$ x \geq a \hat{U} -a \leq x \leq a$
	$ x ^3 \geq a \hat{U} x \geq a$ hoặc $x^3 \leq -a$
	$ a - b \leq a+b \leq a + b $

CAU HOÏI TRÁEC NGHIEÀM

Câu 1. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \text{ P } a - c < b - d.$

B. $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \text{ P } a - c > b - d.$

C. $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \text{ P } a - d > b - c.$

D. $\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \text{ P } a - c > b - d.$

Câu 2. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sau đây sai?

A. $\begin{cases} a > b \\ a > c \end{cases} \text{ P } a > \frac{b+c}{2}.$

B. $\begin{cases} a > b \\ a > c \end{cases} \text{ P } a - c > b - a.$

C. $a > b \text{ P } a - c > b - c.$

D. $a > b \text{ P } c - a > c - b.$

Câu 3. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \text{ P } ac < bd.$

B. $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \text{ P } ac > bd.$

C. $\begin{cases} 0 < a < b \\ 0 < c < d \end{cases} \text{ P } ac < bd.$

D. $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \text{ P } -ac > -bd.$

Câu 4. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a < b \text{ P } ac < bc.$

B. $a < b \text{ P } ac > bc.$

C. $c < a < b \text{ P } ac < bc.$

D. $\begin{cases} a < b \\ c > 0 \end{cases} \text{ P } ac < bc.$

Câu 5. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\begin{cases} 0 < a < b \\ 0 < c < d \end{cases} \text{ P } \frac{a}{c} < \frac{b}{d}.$

B. $\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \text{ P } \frac{a}{c} > \frac{b}{d}.$

C. $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \text{ P } \frac{a}{c} < \frac{b}{d}. \text{ D. } \begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \text{ P } \frac{a}{b} > \frac{d}{c}.$

Câu 6. Nếu $a + 2c > b + 2c$ thì bất đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $-3a > -3b.$

B. $a^2 > b^2.$

C. $2a > 2b.$

D. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}.$

Câu 7. Nếu $a + b < a$ và $b - a > b$ thì bất đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $ab > 0.$

B. $b < a.$

C. $a < b < 0.$

D. $a > 0$ và $b < 0.$

Câu 8. Nếu $0 < a < 1$ thì bất đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\frac{1}{a} > \sqrt{a}.$

B. $a > \frac{1}{a}.$

C. $a > \sqrt{a}.$

D. $a^3 > a^2.$

Câu 9. Cho hai số thực dương a, b . Bất đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\frac{a^2}{a^4 + 1} \geq \frac{1}{2}.$

B. $\frac{\sqrt{ab}}{ab + 1} \geq \frac{1}{2}.$

C. $\frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a^2 + 2} \leq \frac{1}{2}.$

D. Tất cả đều đúng.

Câu 10. Cho $a, b > 0$ và $x = \frac{1+a}{1+a+a^2}, y = \frac{1+b}{1+b+b^2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $x > y.$

B. $x < y.$

C. $x = y.$

D. Không so sánh được.

Câu 11. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = x + \frac{2}{x-1}$ với $x > 1$.

- A. $m = 1 - 2\sqrt{2}$. B. $m = 1 + 2\sqrt{2}$. C. $m = 1 - \sqrt{2}$. D. $m = 1 + \sqrt{2}$.

Câu 12. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 5}{\sqrt{x^2 + 4}}$.

- A. $m = 2$. B. $m = 1$. C. $m = \frac{5}{2}$. D. Không tồn tại m .

Câu 13. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$ với $x > -1$.

- A. $m = 0$. B. $m = 1$. C. $m = 2$. D. $m = \sqrt{2}$.

Câu 14. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = \frac{(x+2)(x+8)}{x}$ với $x > 0$.

- A. $m = 4$. B. $m = 18$. C. $m = 16$. D. $m = 6$.

Câu 15. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = \frac{4}{x} + \frac{x}{1-x}$ với $1 > x > 0$.

- A. $m = 2$. B. $m = 4$. C. $m = 6$. D. $m = 8$.

Câu 16. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$ với $0 < x < 1$.

- A. $m = 2$. B. $m = 4$. C. $m = 8$. D. $m = 16$.

Câu 17. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 32}{4(x-2)}$ với $x > 2$.

- A. $m = \frac{1}{2}$. B. $m = \frac{7}{2}$. C. $m = 4$. D. $m = 8$.

Câu 18. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = \frac{2x^3 + 4}{x}$ với $x > 0$.

- A. $m = 2$. B. $m = 4$. C. $m = 6$. D. $m = 10$.

Câu 19. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = \frac{x^4 + 3}{x}$ với $x > 0$.

- A. $m = 4$. B. $m = 6$. C. $m = \frac{13}{2}$. D. $m = \frac{19}{2}$.

Câu 20. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x) = (6x + 3)(5 - 2x)$ với $x \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4} \right]$.

- A. $M = 0$. B. $M = 24$. C. $M = 27$. D. $M = 30$.

Câu 21. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x}$ với $x \geq 1$.

- A. $M = 0$. B. $M = \frac{1}{2}$. C. $M = 1$. D. $M = 2$.

Câu 22. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$ với $x > 0$.

- A. $M = \frac{1}{4}$. B. $M = \frac{1}{2}$. C. $M = 1$. D. $M = 2$.

Câu 23. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$ với $x > 0$.

- A. $M = 0$. B. $M = \frac{1}{4}$. C. $M = \frac{1}{2}$. D. $M = 1$.

Câu 24. Tìm giá trị nhỏ nhất m và lớn nhất M của hàm số $f(x) = \sqrt{x+3} + \sqrt{6-x}$.

- A. $m = \sqrt{2}$, $M = 3$. B. $m = 3$, $M = 3\sqrt{2}$.
 C. $m = \sqrt{2}$, $M = 3\sqrt{2}$. D. $m = \sqrt{3}$, $M = 3$.

Câu 25. Tìm giá trị nhỏ nhất m và lớn nhất M của hàm số $f(x) = 2\sqrt{x-4} + \sqrt{8-x}$.

- A. $m = 0$; $M = 4\sqrt{5}$. B. $m = 2$; $M = 4$.
 C. $m = 2$; $M = 2\sqrt{5}$. D. $m = 0$; $M = 2 + 2\sqrt{2}$.

Câu 26. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = \sqrt{7-2x} + \sqrt{3x+4}$.

- A. $m = 3$. B. $m = \sqrt{10}$. C. $m = 2\sqrt{3}$. D. $m = \frac{\sqrt{87}}{3}$.

Câu 27. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x) = x + \sqrt{8-x^2}$.

- A. $M = 1$. B. $M = 2$. C. $M = 2\sqrt{2}$. D. $M = 4$.

Câu 28. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 + xy = 3$. Tập giá trị của biểu thức $S = x + y$ là:

- A. $[0; 3]$. B. $[0; 2]$. C. $[-2; 2]$. D. $\{-2; 2\}$.

Câu 29. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 + xy = 1$. Tập giá trị của biểu thức $P = xy$ là:

- A. $[\frac{1}{3}; \frac{1}{3}]$. B. $[-1; 1]$. C. $[\frac{1}{3}; \frac{1}{3}]$. D. $[\frac{1}{3}; \frac{1}{3}]$.

Câu 30. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $(x+y)^3 + 4xy^3 = 2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x + y$ là:

- A. $\sqrt[3]{2}$. B. 1. C. 8. D. $-\sqrt[3]{2}$.

Câu 31. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 = x + y + xy$. Tập giá trị của biểu thức $S = x + y$ là:

- A. $[0; +\infty)$. B. $[-\infty; 0]$. C. $[4; +\infty)$. D. $[0; 4]$.

Câu 32. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 - 3(x+y) + 4 = 0$. Tập giá trị của biểu thức $S = x + y$ là:

- A. $\{2; 4\}$. B. $[0; 4]$. C. $[0; 2]$. D. $[2; 4]$.

Câu 33. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $x + y = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $S = \frac{1}{x} + \frac{4}{y}$ là:

- A. 4. B. 5. C. 9. D. 2.