

## CHƯƠNG 2. HẰNG ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỚ VÀ ỨNG DỤNG

### Bài 1. HIỆU HAI BÌNH PHƯƠNG, BÌNH PHƯƠNG CỦA MỘT TỔNG HAY MỘT HIỆU

#### I. LÝ THUYẾT.

##### 1) Hằng đẳng thức.

**Ví dụ 1:** Khi thực hiện phép nhân  $a.(a+b)$  ta được  $a.(a+b) = a^2 + ab$

Như vậy đẳng thức  $a.(a+b) = a^2 + ab$  là đẳng thức đúng và khi thay  $a, b$  bởi các giá trị khác nhau thì hai vế của đẳng thức luôn nhận giá trị bằng nhau.

##### Kết luận:

- ♣ Hằng đẳng thức là đẳng thức mà hai vế luôn cùng nhận một giá trị khi thay các chữ trong hằng đẳng thức bằng các số tùy ý.

##### 2) Hiệu hai bình phương.

**Ví dụ 2:** Thực hiện phép nhân  $(a-b)(a+b)$  ta được  $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Như vậy  $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$  gọi là hằng đẳng thức hiệu hai bình phương.

##### Tổng quát:

- ♣ Với  $A, B$  là hai biểu thức tùy ý ta có  $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$

**Ví dụ 3:** Tính nhanh  $50^2 - 48^2 = (50-48)(50+48) = 2.98 = 196$ .

**Ví dụ 4:** Viết thành tích  $4x^2 - 25y^2 = (2x-5y)(2x+5y)$

##### 3) Bình phương của một tổng.

**Ví dụ 5:** Khi ta thực hiện phép tính  $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$

Như vậy  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  gọi là hằng đẳng thức bình phương của một tổng

##### Tổng quát:

- ♣ Với  $A, B$  là hai biểu thức tùy ý ta có  $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

**Ví dụ 6:** Tính nhanh  $(2x+3y)^2 = 4x^2 + 2.6xy + 9y^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$

**Ví dụ 7:** Viết gọn  $9x^2 + 12x + 4$  thành bình phương của một tổng

$$9x^2 + 12x + 4 = (3x)^2 + 2.3x.2 + 2^2 = (3x+2)^2$$

##### 4) Bình phương của một hiệu.

**Ví dụ 8:** Khi ta thực hiện phép tính  $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$

Như vậy  $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$  gọi là hằng đẳng thức bình phương của một hiệu.

**Ví dụ 9:** Tính nhanh  $(2x^2 - 1)^2 = 4x^4 - 2.2x^2 + 1 = 4x^4 - 4x^2 + 1$

**Ví dụ 10:** Viết gọn  $9x^2 - 24xy + 16y^2$  thành bình phương của một hiệu

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 = (3x)^2 - 2.3x.4y + (4y)^2 = (3x - 4y)^2$$

## II. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

**Bài 1:** Triển khai các biểu thức sau theo hằng đẳng thức

- |                  |                   |                   |                   |
|------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 1) $(x+1)^2$     | 2) $(4+x)^2$      | 3) $(6-x)^2$      | 4) $(x-5)^2$      |
| 5) $(5x+1)^2$    | 6) $(2x+3)^2$     | 7) $(2x-1)^2$     | 8) $(3x-2)^2$     |
| 9) $(x+2y)^2$    | 10) $(x+5y)^2$    | 11) $(x-2y)^2$    | 12) $(2x-y)^2$    |
| 13) $(3x+5y)^2$  | 14) $(2x+3y)^2$   | 15) $(2x-3y)^2$   | 16) $(2x-5y)^2$   |
| 17) $(x^2+9)^2$  | 18) $(2x^2+1)^2$  | 19) $(x^2-y^2)^2$ | 20) $(3x-y^2)^2$  |
| 21) $(x+2y^2)^2$ | 22) $(2x+3y^2)^2$ | 23) $(4x-2y^2)^2$ | 24) $(4x^2-2y)^2$ |

**Bài 2:** Triển khai các biểu thức sau theo hằng đẳng thức

- |  |  |  |
|--|--|--|
| 1) $x^2 - 4$   | 2) $1 - 4x^2$  | 3) $4x^2 - 9$  |
| 4) $9 - 25x^2$   | 5) $4x^2 - 25$   | 6) $9x^2 - 36$   |
| 7) $(3x)^2 - y^2$  | 8) $x^2 - (2y)^2$  | 9) $(2x)^2 - y^2$  |
| 10) $(3x)^2 - 9y^4$  | 11) $16x^2 - (y^2)^2$  | 12) $x^4 - (3y^2)^2$   |
| 13) $(x-1)(x+1)$   | 14) $(x-5)(x+5)$   | 15) $(x-6)(6+x)$   |
| 16) $(2x+1)(2x-1)$   | 17) $(x-2y)(2y+x)$   | 18) $(5x-3y)(3y+5x)$   |
| 19) $\left(\frac{1}{x}-5\right)\left(\frac{1}{x}+5\right)$                     | 20) $\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)$                       | 21) $\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{4}\right)\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\right)$       |
| 22) $\left(\frac{x}{y}-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{x}{y}+\frac{2}{3}\right)$ | 23) $\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)\left(\frac{y}{3}-\frac{x}{2}\right)$   | 24) $\left(2x-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}+2x\right)$                         |
| 25) $\left(2x+\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{5}-2x\right)$                   | 26) $\left(\frac{1}{2}x-\frac{4}{3}\right)\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{2}x\right)$ | 27) $\left(\frac{2}{3}x^2-\frac{y}{2}\right)\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{y}{2}\right)$ |
| 28) $(3x-y^2)(3x+y^2)$   | 29) $(x^2-2y)(x^2+2y)$   | 30) $(x^2-y^2)(x^2+y^2)$   |

**Bài 3:** Rút gọn biểu thức sau:

- |                          |                         |                          |
|--------------------------|-------------------------|--------------------------|
| 1) $(2x+1)^2 + (2x-1)^2$ | 2) $-(x+1)^2 - (x-1)^2$ | 3) $(x+2y)^2 - (x-2y)^2$ |
|--------------------------|-------------------------|--------------------------|

$$\begin{array}{lll}
4) (3x+y)^2 + (x-y)^2 & 5) -(x+5)^2 - (x-3)^2 & 6) (3x-2)^2 - (3x-1)^2 \\
7) (x-4y)^2 + (x+4y)^2 & 8) -(-2x+3)^2 - (5x-3)^2 & 9) (-2x+3)^2 - (5x-3)^2 \\
10) (2x+1)^2 + (-3x-1)^2 & 11) -(x-y)^2 - (2x+y)^2 & 12) -(x+1)^2 + (x-1)^2 \\
13) (2x+7)^2 + (-2x-3)^2 & 14) -(2x-y)^2 - (x+3y)^2 & 15) -(2x+7)^2 + (-2x-3)^2
\end{array}$$

**Bài 4:** Thực hiện phép tính

$$\begin{array}{ll}
1) x(1-x) + (x-1)^2 & 2) (x-3)^2 - x^2 + 10x - 7 \\
3) (x+2)^2 - (x-3)(x+1) & 4) (x+4)(x-2) - (x-3)^2 \\
5) (x-2)^2 + (x-1)(x+5) & 6) (x+3)(x-3) - x(23+x) \\
7) (1-2x)(5-3x) + (4-x)^2 & 8) (x-2)(x+2) - (x-3)(x+1) \\
9) (x+1)^2 + (x-2)(x+2) - 4x & 10) (x+2)^2 - (x+3)(x-3) + 10 \\
11) (x+4)^2 + (x+5)(x-5) - 2x(x+1) & 12) (x-1)^2 - (x-4)(x+4) + (x+3)^2 \\
13) (x-1)^2 - 2(x+3)(x-3) + 4x(x-4) & 14) (y-3)(y+3)(y^2+9) - (y^2+2)(y^2-2)
\end{array}$$

**Bài 5:** Thu gọn về hằng đẳng thức:

$$\begin{array}{lll}
1) 4x^4 - 4x^2 + 1 & 2) 4x^2 - 12x + 9 & 3) 36 + x^2 - 12x \\
4) 1 - 10x + 25x^2 & 5) x^4 + 81 + 18x^2 & 6) 4x^2 - 20x + 25 \\
7) x^2 + 4y^4 - 4xy^2 & 8) x^2 + 10xy + 25y^2 & 9) 9y^2 - 24xy + 16x^2
\end{array}$$

**Bài 6:** Thu gọn về hằng đẳng thức:

$$\begin{array}{ll}
1) (2x+1)^2 + 2(2x+1) + 1 & 2) (3x-2y)^2 + 4(3x-2y) + 4 \\
3) (x+3)^2 + (x-2)^2 - 2(x+3)(x-2) & 4) (3x-5)^2 - 2(3x-5)(3x+5) + (3x+5)^2 \\
5) (x-y)^2 + (x+y)^2 - 2(x+y)(x-y) & 6) (5-x)^2 + (x+5)^2 - (2x+10)(x-5) \\
7) (x-2)^2 + (x+1)^2 + 2(x-2)(-1-x) & 8) (2x+3y)^2 + (2x-3y)^2 - 2(4x^2 - 9y^2)
\end{array}$$

**Bài 7:** Tính

$$\begin{array}{l}
1) A = 8(3^2 + 1)(3^4 + 1) \dots (3^{16} + 1) \\
2) B = (1-3)(3+1)(3^2 + 1)(3^4 + 1) \dots (3^{16} + 1) \\
3) C = (5-1)(5+1)(5^2 + 1)(5^4 + 1) \dots (5^{16} + 1) \\
4) D = 15(4^2 + 1)(4^4 + 1) \dots (4^{64} + 1) \\
5) E = 24(5^2 + 1)(5^4 + 1)(5^8 + 1) \dots (5^{128} + 1) + (5^{256} - 1)
\end{array}$$

**Bài 8:** Tính giá trị của các biểu thức sau

- 1)  $A = (2x+3)^2 - (2x-1)^2 - 6x$  tại  $x = 201$
- 2)  $B = (2x+5)^2 - 4(x+3)(x-3)$  tại  $x = \frac{1}{20}$
- 3)  $C = x^2 - 8xy + 16y^2$  tại  $x - 4y = 5$
- 4)  $D = 9x^2 + 1620 - 12xy + 4y^2$  tại  $3x - 2y = 20$

**Bài 9: Tìm  $x$  biết**

- |                          |                            |                          |
|--------------------------|----------------------------|--------------------------|
| 1) $x^2 - 9 = 0$         | 2) $25 - x^2 = 0$          | 3) $-x^2 + 36 = 0$       |
| 4) $4x^2 - 4 = 0$        | 5) $4x^2 - 36 = 0$         | 6) $4x^2 - 36 = 0$       |
| 7) $(3x+1)^2 - 16 = 0$   | 8) $(2x-3)^2 - 49 = 0$     | 9) $(2x-5)^2 - x^2 = 0$  |
| 10) $(x+3)^2 - x^2 = 45$ | 11) $(5x-4)^2 - 49x^2 = 0$ | 12) $16(x-1)^2 - 25 = 0$ |

**Bài 10: Tìm  $x$  biết**

- |                             |                             |                             |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| 1) $(2x-3)^2 - (x-1)^2 = 0$ | 2) $(2x+1)^2 - (x-1)^2 = 0$ | 3) $(3x-5)^2 - (x+1)^2 = 0$ |
| 4) $(x+2)^2 - (2x-5)^2 = 0$ | 5) $(3x-1)^2 - (x+5)^2 = 0$ | 6) $(2x-3)^2 - (x+5)^2 = 0$ |
| 7) $(3x-4)^2 - (x+2)^2 = 0$ | 8) $(2x-1)^2 - (3-x)^2 = 0$ | 9) $(5x-1)^2 - (x+1)^2 = 0$ |

**Bài 11: Tìm  $x$  biết**

- |                                    |                                    |
|------------------------------------|------------------------------------|
| 1) $(2x-1)^2 - (4x^2 - 1) = 0$     | 2) $(x+2)^2 - x(x-3) = 2$          |
| 3) $(x-5)^2 - x(x+2) = 5$          | 4) $(x-1)^2 + x(4-x) = 11$         |
| 5) $(x-3)(x+3) = (x-5)^2$          | 6) $(2x+1)^2 - 4x(x-1) = 17$       |
| 7) $(3x+1)^2 - 9x(x-2) = 25$       | 8) $(3x-2)(3x+2) - 9(x-1)x = 0$    |
| 9) $(x+2)^2 - (x-2)(x+2) = 0$      | 10) $(x+2)^2 - (x-3)(x+3) = -3$    |
| 11) $(3x+2)^2 - (3x-5)(3x+2) = 0$  | 12) $(x+3)^2 - (x+2)(x-2) = 4x+17$ |
| 13) $3(x-1)^2 + (x+5)(2-3x) = -25$ | 14) $(x+3)^2 + (x-2)^2 = 2x^2$     |

**Bài 12: Tìm  $x, y$  biết**

- |                                  |                                     |
|----------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $x^2 + y^2 + 4y + 13 = 6x$    | 2) $x^2 + y^2 + 17 = 2x - 8y$       |
| 3) $x^2 + y^2 + 45 = 12y - 6x$   | 4) $4x^2 + 9y^2 + 2 = 4x + 6y$      |
| 5) $9x^2 + 4y^2 + 26 + 4y = 30x$ | 6) $9x^2 + y^2 + 20 = 12x + 8y$     |
| 7) $x^2 + 49y^2 + 5 + 14y = 4x$  | 8) $16x^2 + 25y^2 + 13 = 20y + 24x$ |

**Bài 13: Chứng minh rằng với mọi  $x$  thì**

- 1)  $A = x^2 - x + 1 > 0$       2)  $B = x^2 + x + 1 > 0$       3)  $C = x^2 + 2x + 2 > 0$   
 4)  $A = x^2 - 5x + 10 > 0$       5)  $B = x^2 - 8x + 20 > 0$       6)  $C = x^2 - 8x + 17 > 0$   
 7)  $A = x^2 - 6x + 10 > 0$       8)  $B = 9x^2 - 6x + 2 > 0$       9)  $C = 2x^2 + 8x + 15 > 0$

**Bài 14:** Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau

- 1)  $A = x^2 - x + 3$       2)  $B = x^2 + x + 1$   
 3)  $C = x^2 - 4x + 1$       4)  $D = x^2 - 5x + 7$   
 5)  $E = x^2 + 2x + 2$       6)  $F = x^2 - 3x + 1$   
 7)  $G = 3 + x^2 + 3x$       8)  $H = 3x^2 + 3 - 5x$   
 9)  $I = 4x + 2x^2 + 3$       10)  $K = 4x^2 + 3x + 2$   
 11)  $M = (x-1)(x-3) + 11$       12)  $N = (x-3)^2 + (x-2)^2$

**Bài 15:** Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau

- 1)  $A = 4x - x^2 + 1$       2)  $B = 3 - 4x - x^2$   
 3)  $C = 8 - x^2 - 5x$       4)  $D = -4 - x^2 + 6x$   
 5)  $E = -10 - x^2 - 6x$       6)  $F = -x^2 + 13x + 1$   
 7)  $G = -7 - 4x^2 + 8x$       8)  $H = -4x^2 - 12x$   
 9)  $I = 3x - 9x^2 - 1$       10)  $K = 7 - 9x^2 - 8x$   
 11)  $M = 2x - 4x^2 - 7$       12)  $N = -4x^2 + 4x + 3$

**Bài 16:** Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau

- 1)  $A = -3x^2 + 12x - 1$       2)  $B = 9 + 4x - 2x^2$   
 3)  $C = 9x + 2 - 3x^2$       4)  $D = 2x - 2 - 3x^2$   
 5)  $E = 7x - 3x^2 + 5$       6)  $F = 2 - 2x^2 - 9x$   
 7)  $G = 15 + 7x - 5x^2$       8)  $H = 10x - 6x^2 + 5$   
 9)  $I = 11 - 5x^2 + 10x$       10)  $K = -3x^2 - 6x - 12$

**Bài 17:** Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau

- 1)  $A = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 6$       2)  $B = 7 + x^2 + y^2 - 2(x + y)$   
 3)  $C = 2 + x^2 + y^2 + 2(x + y)$       4)  $D = x^2 - 4x + y^2 + 2y - 10$   
 5)  $E = 2x - 2xy + 2x^2 + y^2$       6)  $F = x^2 + 2y^2 + 2xy + 5 - 2y$   
 7)  $G = x^2 - x + 2y^2 - 4y + 3$

**Bài 18:** Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau

- 1)  $A = -x^2 - 4x - y^2 + 2y$       2)  $B = 1 - 5x^2 - y^2 - 4xy + x$   
 3)  $C = -x^2 + 2x - y^2 - 4y + 6$       4)  $D = -x^2 - 2x - y^2 + 4y + 6$   
 5)  $E = -x^2 - y^2 - 2(x + y) + 3$       6)  $-F = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2y + 1$