

# BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM SỐ PHỨC

## VẬN DỤNG CAO

**Câu 1.** Gọi  $(C)$  là tập hợp các điểm trên mặt phẳng biểu diễn số phức  $z = x - 1 + yi$ ,  $(x, y \in \mathbb{R})$  thỏa mãn  $|z| = 1$  và  $N$  là điểm biểu diễn số phức  $z_0 = 1 - i$ . Tìm điểm  $M$  thuộc  $(C)$  sao cho  $MN$  có độ dài lớn nhất.

- A.  $M(1;1)$ .                      B.  $M\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .                      C.  $M(1;0)$ .                      D.  $M(0;0)$ .

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Ta có:  $M(x; y)$  nằm trên đường tròn  $(C): (x-1)^2 + y^2 = 1$ . Tâm  $I(1;0)$

Do  $N(1;-1) \in (C)$  nên  $MN$  có độ dài lớn nhất khi  $MN$  là đường kính, hay  $I(1;0)$  là trung điểm của  $MN$ . Vậy  $M(1;1)$

**Lời bình:** đây là bài toán tọa độ lớp 10, khi cho một đường tròn  $(C)$  và một điểm  $N$ . Tìm điểm  $M$  trên  $(C)$  sao cho  $MN$  đạt min, max.

**Câu 2.** Gọi  $(C)$  là tập hợp các điểm trên mặt phẳng biểu diễn số phức  $z = x - 1 + yi$ ,  $(x, y \in \mathbb{R})$  thỏa mãn  $|z| = 1$  và  $N$  là điểm biểu diễn số phức  $z_0 = 5 + 3i$ .  $M$  là một điểm thuộc  $(C)$  sao cho  $MN$  có độ dài lớn nhất. Khi đó độ dài  $MN$  lớn nhất bằng

- A. 6.                      B.  $\sqrt{34}$ .                      C.  $3\sqrt{5}$ .                      D. 5.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Ta có:  $M(x; y)$  nằm trên đường tròn  $(C): (x-1)^2 + y^2 = 1$ . Tâm  $I(1;0)$

Do  $N(5;3)$  nằm ngoài  $(C)$  nên  $MN$  có độ dài lớn nhất khi  $MN = NI + R = 5 + 1 = 6$ .

**Câu 3.** Gọi  $(C)$  là tập hợp các điểm trên mặt phẳng biểu diễn số phức  $z = x - 1 + yi$ ,  $(x, y \in \mathbb{R})$  thỏa mãn  $|z| = 1$  và  $N$  là điểm biểu diễn số phức  $z_0 = 5 + 3i$ .  $M$  là một điểm thuộc  $(C)$  sao cho  $MN$  có độ dài bé nhất. Khi đó độ dài  $MN$  bé nhất bằng

- A. 6.                      B.  $\sqrt{34}$ .                      C.  $3\sqrt{5}$ .                      D. 4.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

Ta có:  $M(x; y)$  nằm trên đường tròn  $(C): (x-1)^2 + y^2 = 1$ . Tâm  $I(1;0)$

Do  $N(5;3)$  nằm ngoài  $(C)$  nên  $MN$  có độ dài bé nhất khi  $MN = NI - R = 5 - 1 = 4$ .

**Câu 4.** Cho hai số phức  $z_1; z_2$  thỏa mãn  $|z_1 + 5| = 5; |z_2 + 1 - 3i| = |z_2 - 3 - 6i|$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của  $|z_1 - z_2|$ .

- A.  $\frac{5}{2}$                       B.  $\frac{121}{6}$                       C.  $\frac{25}{6}$                       D.  $\frac{49}{6}$

**Lời giải**

**Chọn A**

Gọi  $z_1 = a_1 + b_1i$ ,  $z_2 = a_2 + b_2i$  ( $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ ).

Khi đó  $|z_1 + 5| = 5 \Leftrightarrow (a_1 + 5)^2 + b_1^2 = 25$ .

Tập hợp điểm biểu diễn  $z_1$  là đường tròn tâm  $I(-5;0); R = 5$

Cũng theo giả thiết, ta có:

$$|z_2 + 1 - 3i| = |z_2 - 3 - 6i| \Leftrightarrow (a_2 + 1)^2 + (b_2 - 3)^2 = (a_2 - 3)^2 + (b_2 - 6)^2 \\ \Rightarrow 8a_2 + 6b_2 - 35 = 0.$$

Tập hợp điểm biểu diễn  $z_2$  là đường thẳng  $\Delta: 8x + 6y - 35 = 0$

$$d(I, \Delta) = \frac{|-5 \cdot 8 - 35|}{\sqrt{8^2 + 6^2}} = \frac{15}{2} \Rightarrow d(I, \Delta) > R$$

$$\Rightarrow \min |z_1 - z_2| = d(I, \Delta) - R = \frac{5}{2}.$$

**Câu 5.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $|z + 1| + |z - 1| = 4$ . Gọi  $m = \min |z|$  và  $M = \max |z|$  khi đó  $M \cdot n$  bằng

- A. 2                      B.  $2\sqrt{3}$                       C.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$                       D.  $\sqrt{3}$ .

**Câu 6.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $|z - 2 - 3i| = 1$ . Gọi  $M = \max |\bar{z} + 1 + i|$ ,  $m = \min |\bar{z} + 1 + i|$ . Tính giá trị của biểu thức  $(M^2 + m^2)$

- A. 28                      B. 24                      C. 26                      D. 20

**Câu 7.** Kí hiệu  $z_1$  là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình  $4z^2 - 16z + 17 = 0$ . Trên mặt phẳng tọa độ điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức  $w = (1 + 2i)z_1 - \frac{3}{2}i$ ?

- A.  $M(-2; 1)$ .                      B.  $M(3; -2)$ .                      C.  $M(3; 2)$ .                      D.  $M(2; 1)$ .

**Câu 8.** Cho hai số phức  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $|z_1 + 1 - i| = 2$  và  $z_2 = iz_1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất  $m$  của biểu thức  $|z_1 - z_2|$ ?

- A.  $m = \sqrt{2} - 1$ .                      B.  $m = 2\sqrt{2}$ .                      C.  $m = 2$ .                      D.  $m = 2\sqrt{2} - 2$ .

**Lời giải**

**Chọn D.**

Do  $|z_1 + 1 - i| = 2$  nên điểm biểu diễn  $M_1$  của  $z_1$  thuộc đường tròn tâm  $I(-1; 1)$  bán kính  $R = 2$ .

Do  $z_2 = iz_1$  nên điểm  $M_2$  (điểm biểu diễn của  $z_2$ ) là ảnh của  $M_1$  qua phép quay tâm  $O$ , góc quay  $90^\circ$ . Suy ra  $|z_1 - z_2| = M_1M_2 = \sqrt{2}OM_1$  ngắn nhất khi  $OM_1$  ngắn nhất.

Ta có:  $\min OM_1 = R - OI = 2 - \sqrt{2}$ .

Vậy:  $m = \sqrt{2}(2 - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 2$ .

Đề xuất

Do  $|z_1 + 1 - i| = 2$  nên điểm biểu diễn  $M_1$  của  $z_1$  thuộc đường tròn tâm  $I(-1; 1)$  bán kính  $R = 2$ .

$$|z_1 - z_2| = |z_1 - iz_1| = |(1 - i)z_1| = \sqrt{2}|z_1| = \sqrt{2}OM_1 \geq \sqrt{2}(R - OI) = \sqrt{2}(2 - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 2.$$

(Vẽ hình thể hiện mô tả cho phần đánh giá)

**Câu 9.** Tính môđun của số phức  $z$  thỏa mãn  $3z\bar{z} + 2017(z + \bar{z}) = 48 - 2016i$

- A.  $|z| = 4$ .                      B.  $|z| = \sqrt{2020}$ .                      C.  $|z| = \sqrt{2017}$ .                      D.  $|z| = 2$

**Lời giải**

**Chọn A.**

- Đặt  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ )  $\bar{z} = a - bi$ .

- Ta có:  $3z\bar{z} + 2017(z + \bar{z}) = 48 - 2016i$

$$\hat{U} \quad 3(a^2 + b^2) + 4034bi = 48 - 2016i \quad \hat{P} \quad a^2 + b^2 = 16$$

- Vậy  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = 4$ . Chọn A.

**Câu 11:** Tính môđun của số phức  $z$  thỏa mãn  $|z| + 2z\bar{z} - 3 = 0$ .

- A.  $|z| = \frac{3}{2}$ .                      B.  $|z| = \frac{3}{2}$ .                      C.  $|z| = 1$ .                      D.  $|z| = 3$ .

**Câu 12:** Số số phức  $z$  thỏa mãn đẳng thức:  $|z|^2 + \frac{1}{2}(z - \bar{z}) = 1 + \frac{1}{2}(z + \bar{z})i$  là

- A. 1.                      B. 2.                      C. 3.                      D. 4.

**Câu 13:** Cho số phức  $z$  thỏa mãn điều kiện  $|z - 1| = \sqrt{2}$ . Tính giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T = |z + i| + |z - 2 - i|$$

- A.  $\max T = 8\sqrt{2}$ .                      B.  $\max T = 8$ .                      C.  $\max T = 4\sqrt{2}$ .                      D.  $\max T = 4$ .

### Hướng dẫn giải

#### Chọn C

Đặt  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ), ta có:

$$|z - 1| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |x - 1 + yi| = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2x + 1 (*)$$

Lại có:  $T = |z + i| + |z - 2 - i| = |x + (y + 1)i| + |x - 2 + (y - 1)i|$

$$= \sqrt{x^2 + (y + 1)^2} + \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2 + 2y + 1} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5}$$

Kết hợp với (\*), ta được:

$$T = \sqrt{2x + 2y + 2} + \sqrt{6 - 2x - 2y}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhacopxki ta được

$$T \leq \sqrt{(1^2 + 1^2) \left( \frac{1}{2} \sqrt{2x + 2y + 2} \right)^2 + \left( \frac{1}{2} \sqrt{6 - 2x - 2y} \right)^2} = 4$$

Vậy  $\max T = 4$ .

**Câu 14 (ĐỀ THI THPT QUỐC GIA NĂM 2019):** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z| = \sqrt{2}$ . Trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , tập hợp điểm biểu diễn của các số phức  $w = \frac{4 + iz}{1 + z}$  là một đường tròn có bán kính bằng

A.  $\sqrt{34}$ .

B. 26.

C. 34.

D.  $\sqrt{26}$ .

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } w = \frac{4+iz}{1+z} \Rightarrow w(1+z) = 4+iz \Leftrightarrow z(w-i) = 4-w \Rightarrow \sqrt{2}|w-i| = |4-w|$$

$$\text{Đặt } w = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$$

$$\text{Ta có } \sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + y^2} \Leftrightarrow 2(x^2 + y^2 - 2y + 1) = x^2 - 8x + 16 + y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 8x - 4y - 14 = 0 \Leftrightarrow (x+4)^2 + (y-2)^2 = 34$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn của các số phức  $w$  là đường tròn có bán kính bằng  $\sqrt{34}$

**Câu 15:** Gọi  $M$  và  $m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của  $P = \left| \frac{z+i}{z} \right|$  với  $z$  là số phức khác 0 và thỏa mãn  $|z| \geq 2$ . Tính  $2M - m$ .

A.  $2M - m = \frac{3}{2}$ .

B.  $2M - m = \frac{5}{2}$ .

C.  $2M - m = 10$ .

D.  $2M - m = 6$ .

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Ta có } P = \left| 1 + \frac{i}{z} \right| \leq 1 + \frac{1}{|z|} \leq \frac{3}{2}. \text{ Mặt khác: } \left| 1 + \frac{i}{z} \right| \geq 1 - \frac{1}{|z|} \geq \frac{1}{2}.$$

Vậy, giá trị nhỏ nhất của  $P$  là  $\frac{1}{2}$ , xảy ra khi  $z = -2i$ ; giá trị lớn nhất của  $P$  bằng  $\frac{3}{2}$  xảy ra

$$\text{khi } z = 2i. \Rightarrow 2M - m = \frac{5}{2}.$$

**Câu 16:** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $|z| = 1$ . Gọi  $M$  và  $m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = |z+1| + |z^2 - z + 1|$ . Tính giá trị của  $M \cdot m$ .

A.  $\frac{13\sqrt{3}}{4}$ .

B.  $\frac{39}{4}$ .

C.  $3\sqrt{3}$ .

D.  $\frac{13}{4}$ .

**Câu 17:** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $|z-3| + |z+3| = 8$ . Gọi  $M, m$  lần lượt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất  $|z|$ . Khi đó  $M + m$  bằng