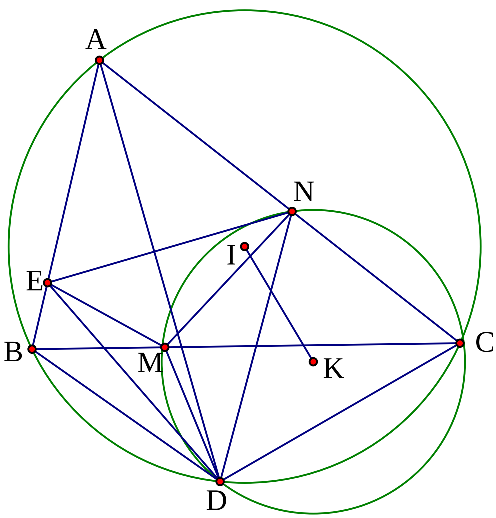
MỘT SỐ BÀI TẬP CHỌN LỌC HÌNH HỌC PHẲNG

Phân tích:

Câu 1) Cho tam giác ABC trên BC, CA, AB thứ tự lấy các điểm M, N, E sao cho $AN = NE, BM = ME.$ Gọi D là điểm đối xứng của E qua MN. Chứng minh rằng đường thẳng nối tâm hai đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và tam giác CMN vuông góc với CD.



Ta biết : Hai đường tròn cắt nhau theo dây cung l thì đường nối tâm luôn vuông góc với dây cung l. Thực nghiệm hình vẽ ta thấy D nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN. Vì vậy ta sẽ chứng minh: 2 đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và tam giác CMN cắt nhau theo dây cung CD hay các tứ giác $ABCD, CDMN$ là tứ giác nội tiếp

Từ định hướng trên ta có lời giải cho bài toán như sau:

Theo giả thiết ta có: $BM = ME, AN = NE$ nên tam giác ANE cân tại N, tam giác BME cân tại M. Hay $BEM = B, AEN = A$. Vì D, E đối xứng với nhau qua MN nên $NE = ND, ME = MD$ suy ra

$MDN = MEN = 180^0 - AEN - BEM = 180^0 - B - A = C$ hay

$MDN = MCN \Leftrightarrow DMNC$ là tứ giác nội tiếp tức là điểm D thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN

+ Ta có $ME = MB = MD$ nên M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BED

+ Ta có: $NA = NE = ND$ nên N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE

Từ đó suy ra

$$BDA = BDE + EDA = \frac{1}{2}\ BME + ANE\ = \frac{1}{2}\ 180^0 - 2B + 180^0 - 2A$$

$= 180 - B - A = C$. Như vậy tứ giác $ABCD$ nội tiếp, suy ra đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và tam giác CMN cắt nhau theo dây cung CD Hay $IK \perp CD$.

Câu 2) Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Từ A kẻ tới đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC các tiếp tuyến AP, AQ (P, Q là các tiếp điểm)

a) Chứng minh $BAP = CAQ$

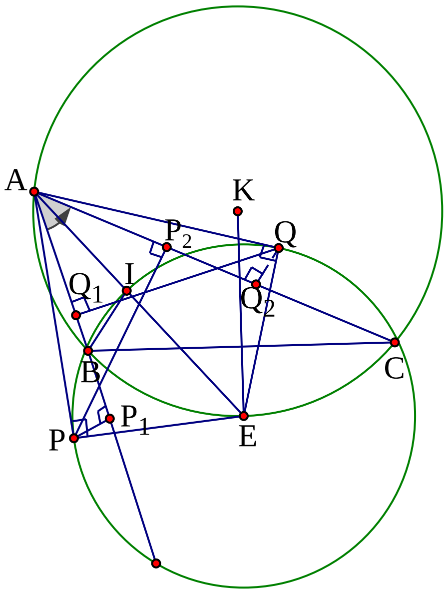
b) Gọi P_1, P_2 là hình chiếu vuông góc của P lên các đường thẳng AB, AC. Q_1, Q_2 là các hình chiếu vuông góc của Q trên AB, AC. Chứng minh P_1, P_2, Q_1, Q_2 nằm trên một đường tròn.

<u>Phân tích:</u>

Giả thiết liên quan đến tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC giúp ta liên tưởng đến tính chất: ‘’Đường phân giác trong góc A cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại E thì E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC’’. Ngoài ra các giả thiết liên quan đến tam giác vuông nên ta nghỉ đến cách dùng các góc phụ nhau hoặc các tứ giác nội tiếp để tìm mối liên hệ của góc.

Từ những cơ sở đó ta có lời giải cho bài toán như sau:

Lời giải



+ Gọi E là giao điểm của phân giác trong AI với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì $BE = CE$ (do E là điểm chính giữa cung BC). Ta có

$IBE = IBC + EBC = ABI + EAC = ABI + BAI = BIE$. Suy ra tam giác ΔBIE cân tại E hay $EB = EI$. Như vậy $EB = EI = EC$. Tức là điểm E chính là tâm vòng tròn ngoại tiếp tam giác IBC. Vì AP, AQ là các tiếp tuyến kẻ từ điểm M đến đường tròn (E) nên AE là phân giác

trong của góc PAQ. Ta có $BAP = PAE - BAE; CAQ = QEA - CAE$

Mặt khác AE cũng là phân giác của góc $BAC \Rightarrow$ $BAP = CAQ$.

+ Xét tam giác $\Delta PAP_2; \Delta QAQ_1$ .Ta có $AP = AQ$ (Tính chất tiếp tuyến),

suy ra do góc $PAP_2 = QAQ_1$ suy ra $\Delta PAP_2 = \Delta QAQ_1 \Rightarrow AQ_1 = AP_2$

Chứng minh tương tự ta có: $AQ_2 = AP_1$. Từ đó suy ra

$AP_1.AQ_1 = AP_2.AQ_2$ hay tứ giác $P_1Q_1Q_2P_2$ nội tiếp.

Câu 3). Cho hình bình hành $ABCD$ có $BAD < 90^0$. Giả sử O là điểm nằm trong tam giác ABD sao cho OC không vuông góc với BD. Dựng đường tròn tâm O bán kính OC. BD cắt (O) tại hai điểm M, N sao cho B nằm giữa M và D. Tiếp tuyến của của (O) tại C cắt AD, AB lần lượt tại P, Q

a) Chứng minh tứ giác $MNPQ$ nội tiếp

b) CM cắt QN tại K, CN cắt PM tại L. Chứng minh KL vuông góc với OC

Phân tích:

Giả thiết bài toán liên quan đến hình bình hành và các đường thẳng song nên ta nghỉ đến các hướng giải quyết bài toán là:

+ Hướng 1: Dùng định lý Thales để chỉ ra các tỷ số bằng nhau

+ Hướng 2: Dùng các góc so le, đồng vị để quy về dấu hiệu tứ giác nội tiếp theo góc

+ Ta kéo dài MN cắt PQ tại một điểm để quy về các tam giác.

Từ định hướng trên ta có lời giải cho bài toán như sau:

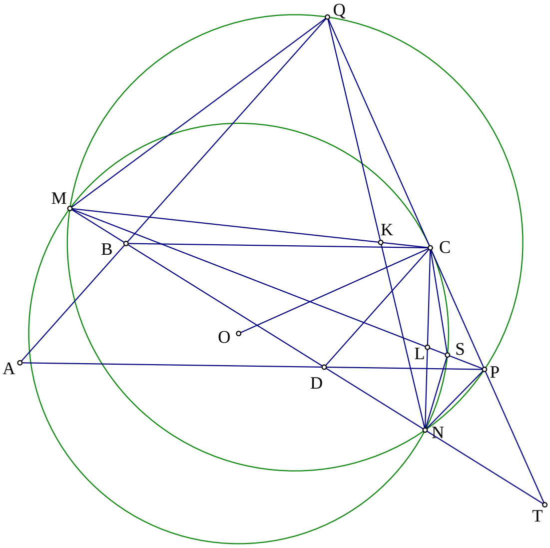
Lời giải:

+ Gọi MN giao PQ tại T.

Tam giác PCD đồng dạng

với tam giác CBQ nên ta có:

$$\frac{TP}{TC} = \frac{TD}{TB} = \frac{TC}{TQ}$$



$\Rightarrow TC^2 = TP.TQ \Rightarrow TC^2 = TP.TQ$. Mặt khác TC là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $TC^2 = TM.TN$. Như vậy ta có:
$TM.TN = TP.TQ \Leftrightarrow MNPQ$ là tứ giác nội tiếp

+ Gọi giao điểm thứ hai của (O) với MP là S. Ta có các góc biến đổi sau:

$KML = CMS = SCP$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung).

$KML = MSC - SPC$ (góc ngoài). $KML = MNC = MNQ$ (tứ giác $MNPQ$ và $MNSC$ nội tiếp . Vì $KML = KNL$ suy ra tứ giác $MKLN$ nội tiếp. Suy ra $KLM = KNM = QPM$ suy ra $KL // PQ \perp OC$. Vậy $KL \perp OC$.

Câu 4). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn K tiếp xúc với CA, AB lần lượt tại E, F và tiếp xúc trong với (O) tại S. SE, SF lần lượt cắt (O) tại M, N khác S. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEM, AFN cắt nhau tại P khác A

a) Chứng minh tứ giác $AMPN$ là hình bình hành

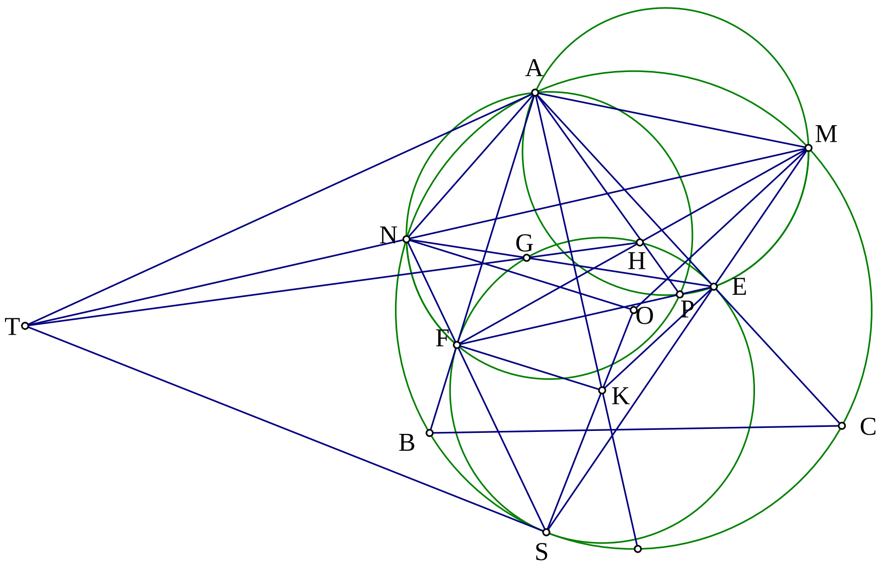
b) Gọi EN, FM lần lượt cắt (K) tại G, H khác E, F. Gọi GH cắt MN tại T. Chứng minh tam giác AST cân.

Phân tích:

+ Để chứng minh $AMPN$ là hình bình hành ta chứng minh các cặp cạnh đối song song dựa vào các góc nội tiếp, góc tạo bởi tiếp tuyến và một dây

+ Để chứng minh $TA = TS$ ta nghỉ đến việc chứng minh TA, TS là các tiếp tuyến của đường tròn (O)

<u>Từ những định hướng trên ta có lời giải như sau:</u>



Ta thấy $APF = 180 - \text{ANS} = \text{AMS} = 180 - APE$ suy ra F, P, E thẳng hàng. Ta có $APM = AEM$ góc nội tiếp chắn cung AM, $AEM = SEC$ (đối đỉnh) . Vì AC là tiếp tuyến của đường tròn K nên $SEC = \text{EF}S$ (Tính chất góc tạo bởi tia tiếp tuyến và một dây). Mà $\text{EF}S = PAN$ do tứ giác $\text{ANF}P$ nội tiếp. Vậy $APM = PAN \Rightarrow AN / /PM$. Chứng minh tương tự ta cũng có: $AM / /PN \Rightarrow AMEN$ là hình bình hành.

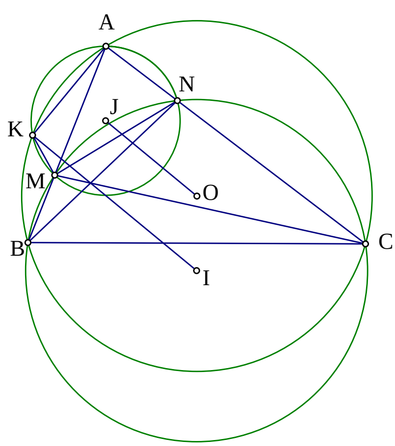
+ Các tam giác SKF, SON cân có chung đỉnh S nên đồng dạng suy ra $KF / /ON$, tương tự $KE / /OM$ suy ra $\dfrac{SF}{SN} = \dfrac{SK}{SO} = \dfrac{SE}{SM}$ suy ra $MN / /EF$. Từ đó $HGE = HFE = HMN$ suy ra tứ giác $MNGH$ nội tiếp. Giả sử TS cắt O và K lần lượt tại S_1, S_2 thì

$TS.TS_1 = TM.TN = TH.TG = TS.TS_2$ suy ra $TS_1 = TS_2$ suy ra $S_1 \equiv S_2 \equiv S$. Vậy TS là tiếp tuyến của O. Tứ giác $AMEN$ là hình bình hành nên AP và MN cắt nhau tại trung điểm I mỗi đường. Ta có theo tính chất góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung $IAM = PES = FST = NAS$. Ta lại có $AMI = AMN = ASN$. Vậy $\Delta AIM \sim \Delta ANS$ suy ra $AM.SN = AI.AS$. Tương tự $AN.SM = AI.SN = AM.SN$. Từ đó theo tính chất tiếp tuyến do TS tiếp xúc với O suy ra $\frac{TM}{TN} = \frac{SM^2}{SN^2} = \frac{AM^2}{AN^2}$.

Vậy TA tiếp xúc với O. Suy ra $TA = TS$.

Câu 5) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn O. Đường tròn I luôn đi qua B và C cắt AB, AC lần lượt tại M, N. Đường tròn J ngoại tiếp tam giác AMN cắt đường tròn O tại điểm thứ hai là K. Chứng minh rằng $KI / /OJ$.

<u>Phân tích</u> Ta thấy OJ là đường nối tâm của hai đường tròn $(O),(J)$ như vậy OJ $\perp AK$. Do đó để chứng minh $KI / /OJ$ ta quy về chứng minh <u>$IK \perp AK$</u>



Lời giải:

Nối M với K và K với I

thì $MIC = 2MBC$ (1)

Ta lại có: $MKC = MKA - CKA$

$= 180^0 - ANM - CKA$

Mà $CKA = ABC = MBC$ (2).

Vì tứ giác $BMNC$ nội tiếp đường tròn I nên $ANM = MBC$. Từ (1) và (2) suy ra $MKC = 180^0 - 2MBC = 180^0 - MIC$. Do đó $MKC + MIC = 180^0$ nên tứ giác $MKCI$ nội tiếp.

Suy ra $IKC = IMC$. Trong tam giác IMC ta có:

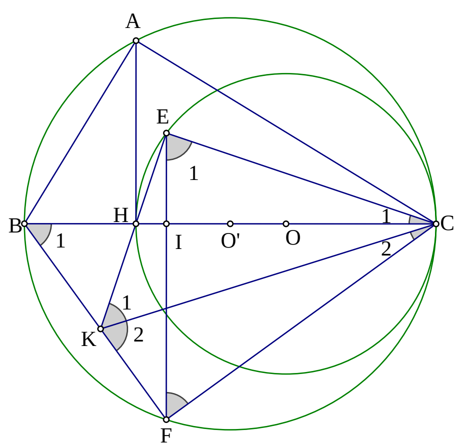
$IMC = \dfrac{180^0 - MIC}{2} = \dfrac{180^0 - 2MBC}{2} = 90^0 - MBC$.Suy ra

$IMC + MBC = 90^0$ nên $IKC + AKC = 90^0$. Do đó $IK \perp AK$. Đường tròn J và đường tròn O cắt nhau tại A, K nên $OJ \perp AK$. Suy ra $OJ//IK$.

Câu 6) Cho tam giác ABC vuông tại A đường cao AH. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa A vẽ đường tròn O đường kính HC. Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa A vẽ nửa đường tròn O' đường kính BC. Qua điểm E thuộc nửa đường tròn O kẻ EI vuông góc với BC cắt nửa đường tròn O' ở F. Gọi K là giao điểm của EH và BF. Chứng minh rằng $CA = CK$.

Lời giải:

Phân tích: Ta có $CA^2 = CB.CH$ nên để chứng minh $CA = CK$, ta sẽ chứng minh $CK^2 = CB.CH$. Điều này làm ta nghĩ đến chứng minh $\Delta CKH \sim \Delta CBK$, do đó cần chứng minh $K_1 = B_1$. Xét góc



phụ với hai góc trên, cần chứng minh

$ECK = BCF$. Muốn vậy cần chứng minh $C_1 = C_2$. Chỉ cần chứng minh hai góc phụ với chúng là E_1 và K_2 bằng nhau (do $CEKF$ là tứ giác nội tiếp).

Cách giải:

Tứ giác $CEKF$ có: $E + F = 90^0 + 90^0 = 180^0$ nên là tứ giác nội tiếp, suy ra $E_1 = K_1$. Do đó hai góc phụ với chúng bằng nhau là $C_1 = C_2$. Cùng cộng thêm BCK, ta được $ECK = BCF$. Do đó hai góc phụ với chúng bằng nhau là $K_1 = B_1$. $\Delta CKH \sim \Delta CBK$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{CK}{CB} = \dfrac{CH}{CK} \Rightarrow CK^2 = CB.CH$ (1). Theo hệ thức lượng trong tam giác ABC vuông tại A ta có: $CA^2 = CB.CH$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $CA = CK$.

Câu 7) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn O. Đường vuông góc với AB tại B cắt CD ở I. Gọi K là giao điểm của IO và AD. Chứng minh rằng:

a) $IBK = IDK$.

b) $CBK = 90^0$.

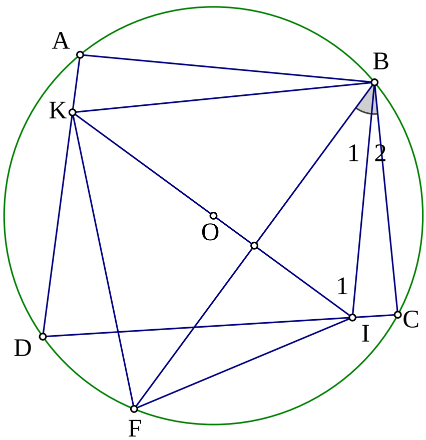
Phân tích:

IBK và IDK là hai góc của ΔIBK và ΔIDK, nhưng hai tam giác này không bằng nhau. Các đỉnh B và D của hai góc đó nằm khác phía đối với OI, mà OI là trục đối xứng của O. Có thể đổi phía của góc IBK bằng cách lấy F đối xứng với B qua OI, ta có $IBK = IFK$. Chỉ cần chứng minh $IDK = IFK$ bằng cách chứng minh tứ giác $IKDF$ nội tiếp (hình vẽ ứng với $F \in CD$). Ta sẽ chứng minh $KIF + KDF = 180^0$. Chú ý đến sự bằng nhau của các góc $KIF, I_1.ABF$ (đừng quên $AB \perp BI$). Xét

$CBK = IBK + B_2$. Chú ý đến $IBK = IDK$ (câu a),

Lời giải:

a). Kẻ dây BF vuông góc với OI.



Ta có IK là đường trung trực của

BF nên các tam giác BKF, BIF cân.

Suy ra $IBK = IFK$ (1) và $KIF = I_1$.

Ta lại có $I_1 = ABF$ (cùng phụ góc B_1)

nên $KIF = ABF$. $ABFD$ là tứ giác

nội tiếp nên $ABF + ADF = 180^0$. Suy ra $KIF + ADF = 180^0$, do đó $IKDF$ là tứ giác nội tiếp nên $IDK = IFK$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $IBK = IDK$.

b) $IDK = 180^0 - ABC$ ($ABCD$ nội tiếp)

$= 180^0 - ABI - B_2$ $= 180^0 - 90^0 - B_2$

(vì $ABI = 90^0 - B_2$). Ta lại có $IDK = IBK$ (câu a) nên

$IBK = 90^0 - B_2$. Do đó $IBK + B_2 = 90^0$.

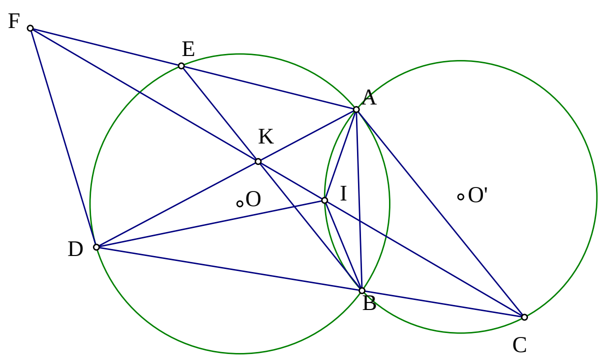
Lưu ý: Hình vẽ trong bài ứng với $F \in CD$. Các trường hợp khác được chứng minh tương tự.

Câu 8) Cho đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Dây AC của đường tròn (O') tiếp xúc với đường tròn (O) tại A. Tia CB cắt đường tròn (O) ở điểm thứ hai D. Gọi K là điểm thuộc dây AD. Vẽ dây BE của đường tròn (O) sao cho BE đi qua K. Tia CK cắt đường tròn (O') ở điểm thứ hai I và cắt AE ở F. Chứng minh rằng:

a) $AIDF$ là tứ giác nội tiếp

b) DF là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Phân tích:



a). Để chứng minh tứ giác $AIDF$ nội tiếp, ta sẽ chứng minh $A_1 = FID$.

Vì $A_1 = B_1$ nên cần chứng minh $B_1 = FID$, tức là cần chứng minh tứ giác $DKIB$ nội tiếp. Để chứng minh tứ giác này nội tiếp, ta xét góc BDK. Góc này bằng BAC, do đó bằng BIC.

b) Để chứng minh DF là tiếp tuyến, ta chứng minh $ADF = ABD$.

Từ câu a, ta có $ADF = AIF$. Do đó cần chứng minh $ABD = AIF$. Xét hai góc kề bù với hai góc này là ABC và AIC, chúng bằng nhau.

Lời giải:

a) Ta có $BDA = BAC$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến với dây cùng chắn một cung), $BAC = BIC$ (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung) nên $BDA = BIC$. Suy ra $DKIB$ là tứ giác nội tiếp.

Tứ giác $DKIB$ nội tiếp nên $KID = B_1$, mà $B_1 = A_1$ nên $KID = A_1$, tức là $FID = A$. Do đó tứ giác $AIDF$ là tứ giác nội tiếp (theo cung chứa góc).

b) Tứ giác $AIDF$ nội tiếp theo câu a nên $ADF = AIF$ (1). Ta có $AIC = ABC$ (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung) nên hai góc kề bù với chúng bằng nhau là $AIF = ABD$ (2) và $ABD = \frac{1}{2}\text{sđ}AmD$ (3). Từ (1),(2),(3) suy ra $ADF = \frac{1}{2}\text{sđ}AmD$, do đó DF là tiếp tuyến của đường tròn O .

Câu 9) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), BE, CF là hai đường cao ($E \in CA, F \in AB$). Tiếp tuyến tại B, C của đường tròn (O) cắt nhau tại T, TC, TB lần lượt cắt EF tại P, Q. M là trung điểm của BC

a) Chứng minh M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác TPQ

b) Gọi AD là đường kính của (O). DM cắt (O) tại R khác D. Chứng minh các tứ giác $RQBM, RPCM, RQTP$ là tứ giác nội tiếp

c) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác TPQ tiếp xúc với đường tròn (O) tại R.

Phân tích:

+ Ta luôn có MT là phân giác của góc QTP tính chất quen thuộc của hai tiếp tuyến xuất phát từ một điểm ngoài đường tròn. Như vậy ta cần chứng minh PM là phân giác của góc QPT

a). Tứ giác $BFEC$ nội tiếp

và CP là tiếp tuyến nên

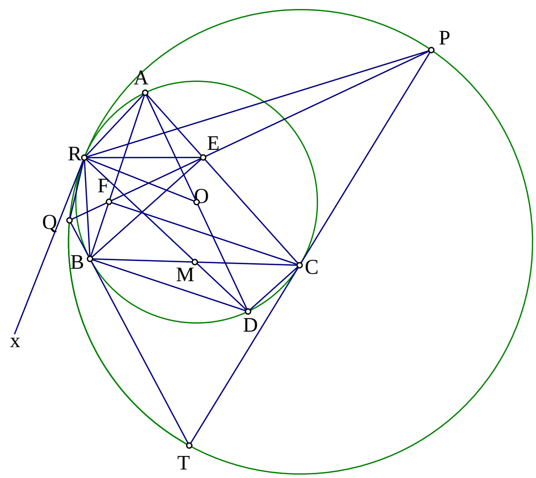
$PEC = ABC = PCE$

$\Rightarrow \Delta PEC$ cân tại $P \Rightarrow$

$PC = PE$, dễ thấy

$ME = MC \Rightarrow PM$

là trung trực của EC hay



PM là phân giác của góc QPT. Tương tự QM là phân giác góc $PQT \Rightarrow M$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác TPQ

b). Do AD là đường kính của đường tròn (O) nên $MR \perp RA$, từ câu a) ta cũng dễ dàng suy ra $MP \perp AC$ suy ra

$RMP = 180^0 - RAC = RBC = RCP$ do CP tiếp xúc với (O) vậy tứ giác $BPCM$ nội tiếp. Tương tự $QRBM$ nội tiếp. Từ hai tứ giác này ta có:

$RQT = RMC = 180^0 - RPT \Rightarrow RQTP$ nội tiếp

c) Kẻ Rx là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại R. Gọi RB cắt đường tròn ngoại tiếp ΔTPQ tại N khác R. Chú ý $QRMB$ nội tiếp nên ta có:

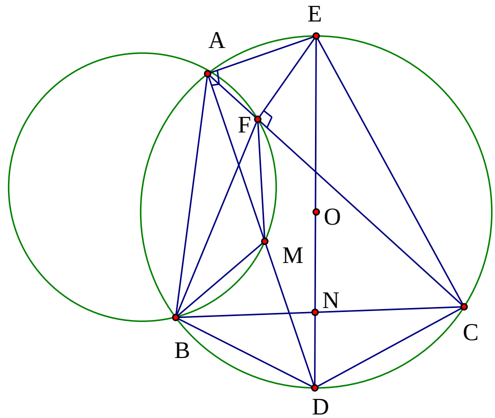
$QPN = QRB = QMB = QMT - 90^0 = QPM$. Do M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $TPQ \Rightarrow PM$ đi qua A. Từ đó ta có:

$xRN = xRB = RBC = RPM = RPN$ nên Rx tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác TPQ. Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác TPQ tiếp xúc với (O) tại R

Câu 10) (Trích đề tuyển sinh vào lớp 10 chuyên ĐHQG Hà Nội năm 2013) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O và $AB < AC$.

Đường phân giác trong góc BAC cắt đường tròn (O) tại D khác A. Gọi M là trung điểm của AD và E là điểm đối xứng với D qua tâm O. Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM cắt đoạn thẳng AC tại điểm F khác A. Chứng minh các tam giác BMD và BFC đồng dạng và $EF \perp AC$

Giải:



+ Ta có $BDM = BCF$ cùng chắn cung AB

$BMA = BFA$ mà các góc BMD, BFC cùng bù với BMA, BFA nên ta suy ra

$BMD = BFC$. Từ đó ta có các tam giác BMD và BFC đồng dạng

+ Với giả thiết ED là đường kính ta có các góc $EAD = AEC = 90^0$.

Ta nghỉ đến việc chứng minh $EFC = EAD$ hoặc $\text{EF}C = AEC = 90^0$. Ta thấy $ADE = FCE$ cùng chắn cung AE (1). Theo giả thiết ta có $DB = DC$ nên $DE \perp BC$ tại trung điểm N của BC. Từ BMD và BFC đồng dạng ta suy ra

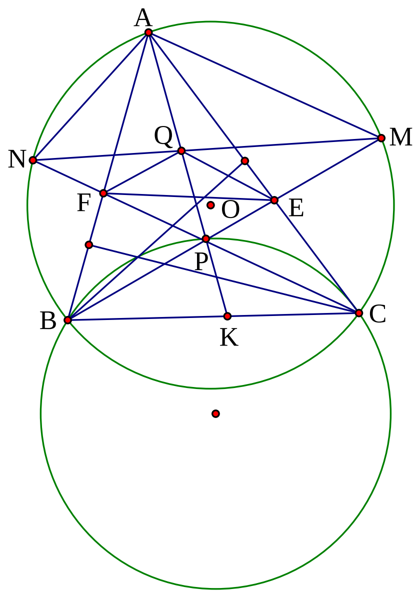
$\dfrac{DM}{CF} = \dfrac{BD}{BC} \Rightarrow \dfrac{DA}{CF} = \dfrac{2DM}{CF} = \dfrac{2DB}{BC} = \dfrac{CD}{CN} = \dfrac{DE}{CE}$ (2) . Từ (1) và (2) suy ra $\Delta EAD \sim \Delta \text{EF}C \Rightarrow EFC = EAD = 90^0 \Rightarrow \text{EF} \perp AC$

Câu 11) (Trích đề tuyển sinh vào lớp 10 chuyên ĐHQG Hà Nội năm 2013) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) có trực tâm H. Gọi P là điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC $(P \neq B, C, H)$ và nằm trong tam giác ABC. PB cắt đường tròn (O) tại M khác B. PC cắt (O) tại N khác C. BM cắt AC tại E, CN cắt AB tại F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AME và đường tròn ngoại tiếp tam giác ANF cắt nhau tại Q khác A.

a) Chứng minh M, N, Q thẳng hàng,

b) Giả sử AP là phân giác góc MAN. Chứng minh PQ đi qua trung điểm của BC

Giải:



a). Ta có $PBC = HBC = 180^0 - BAC$

nên tứ giác $AEPF$ nội tiếp , suy ra

$BFC + BEC = 180^0$. Từ các tứ giác

$AQFN, AQEM$ nội tiếp ta có

$MQN = MQA + NQA$

$= MEA + NFA = 180^0$

vậy 3 điểm M, N, Q thẳng hàng.

b). Ta có: $QAF = ANQ = ANM = ABM$

suy ra $FQ//BE$ tương tự $EQ//CF$ suy ra tứ giác $EQFP$ là hình bình hành. Vậy $QAN = QFP = QEP = QAM$ hay AQ là phân giác MAN suy ra A, P, Q thẳng hàng. Gọi $K = PQ \cap BC$ thì

$KAC = QAC = QME = NMB = PCK$. Từ đó ta có:

$\Delta AKC \sim \Delta CKP$ hay $KC^2 = KP.KA$ tương tự

$KB^2 = KP.KA \Rightarrow KB = KC$

Câu 12. (Đề thi vào lớp 10 chuyên Amsterdam – Chu Văn An- Năm 2013)

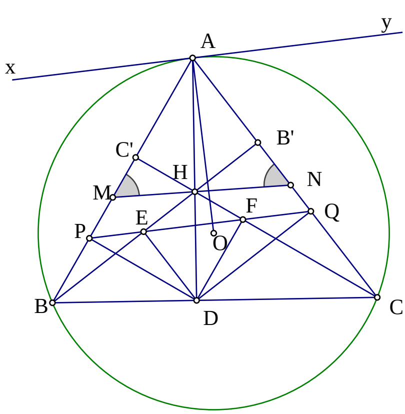
Cho đường tròn $O;R$ và dây cung BC cố định $BC < 2R$. Điểm A di động trên đường tròn $O;R$ sao cho tam giác ABC là tam giác nhọn. AD là đường cao và H là trực tâm của tam giác ABC .

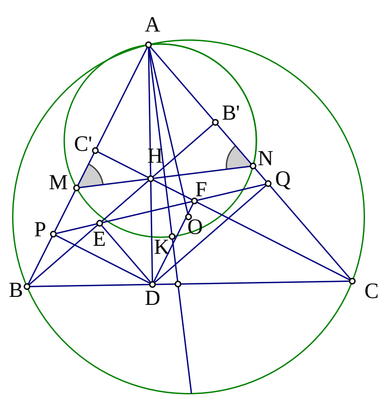
a) Đường thẳng chứa phân giác ngoài của góc BHC cắt AB, AC lần lượt tại các điểm M, N . Chứng minh AMN là tam giác cân.

b) Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của D trên các đường thẳng BH, CH . Chứng minh $OA \perp EF$.

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt đường phân giác trong của góc BAC tại K . Chứng minh đường thẳng HK luôn đi qua điểm cố định.

Lời giải:





Phân tích hướng giải:

+ Để chứng minh tam giác AMN cân ta có các hướng: sử dụng góc, chứng minh hai cạnh bên bằng nhau, chứng minh đường cao xuất phát từ đỉnh là đường trung tuyến, … Với giả thiết liên quan phân giác ngoài ta dễ nghỉ đến hướng dùng góc.

+ Ta thấy rằng bán kính OA luôn vuông góc với tiếp tuyến tại A, vì vậy ta sẽ chứng minh $EF\,//$ với tiếp tuyến

+ Với giả thiết ta thấy: Chỉ có BC là cố định, thực nghiệm cho thấy HK luôn đi qua trung điểm BC đó là định hướng để ta giải quyết bài toán

a) Gọi B' là hình chiếu của B trên AC, C' là hình chiếu của C trên AB

$AMN = ABH + MHB; ANM = ACH + NHC$ (1). Tứ giác $BCB'C'$ là tứ giác nội tiếp nên $ABH = ACH$ (2). MN là phân giác ngoài góc BHC nên $MHB = NHC$ (3). Từ (1),(2),(3) suy ra $AMN = ANM$ hay tam giác AMN cân.

b) Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu của D trên AB, AC.

Ta có $BEP = BDP$ (tứ giác $BPED$ nội tiếp), $BDP = BAD$ (cùng phụ ABD), $BAD = HDF$ (do $\Delta AC'H \sim \Delta DFH$), $HDF = HEF$ (tứ giác $HEDF$ nội tiếp). Suy ra $BEP = HEF$. Ta có:
$BEP + BEF = BEF + FEH = 180^0 \Rightarrow P, E, F$ thẳng hàng. Tương tự Q, F, E thẳng hàng. Vậy đường thẳng EF trùng với đường thẳng PQ (4).
Kẻ tiếp tuyến xAy của đường tròn O, ta có $OA \perp xAy$

(5). $AP.AB = AD^2 = AQ.AC \Rightarrow \dfrac{AP}{AC} = \dfrac{AQ}{AB} \Rightarrow \Delta APQ \sim \Delta ACB$

$\Rightarrow APQ = ACB$ mà $ACB = xAB$ (cùng bằng $\dfrac{1}{2}$ sđ AB) suy ra

$APQ = xAB \Rightarrow xAy\,//\,PQ$ (6). Từ (4),(5),(6) suy ra $OA \perp EF$.

c) Gọi T là giao điểm của KM và BH, S là giao điểm của KN và CH.

Do $AM = AN$ và AK là phân giác của MAN nên AK là đường kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN. Suy ra $HTKS$ là hình bình hành $\Rightarrow HK$ đi qua trung điểm của TS (7). Ta có $\frac{TH}{TB} = \frac{MC'}{MB}$ (vì $KM / /CC'$), $\frac{MC'}{MB} = \frac{HC'}{HB}$ (vì HM là phân giác góc BHC') suy ra $\frac{TH}{TB} = \frac{HC'}{HB}$. Tương tự $\frac{SH}{SC} = \frac{HB'}{HC}$. Tứ giác $BC'B'C$ nội tiếp $\Rightarrow C'BH = B'CH \Rightarrow \frac{TH}{TB} = \frac{SH}{SC} \Rightarrow TS / /BC$ (8). Từ (7),(8) suy ra HK đi qua trung điểm của BC.

Câu 13. . (Đề thi vào lớp 10 chuyên Lê Quý Đôn – Đà Nẵng– năm 2013)

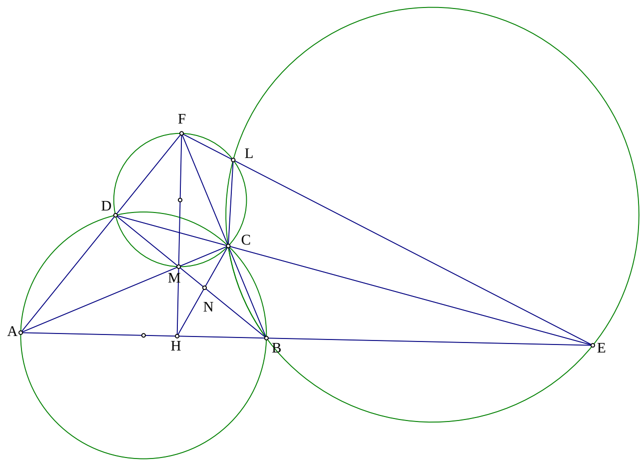
Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn đường kính AB. Biết rằng các cặp đường thẳng AB,CD cắt nhau tại E và AD,BC cắt nhau tại F. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại M. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên đường thẳng AB. Hai đường thẳng CH và BD cắt nhau tại N.

a) Chứng minh rằng $\frac{DB}{DM}.\frac{NM}{NB} = 1$.

b) Hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác BCE và CDF cắt nhau tại điểm thứ hai là L. Chứng minh rằng ba điểm E,F,L thẳng hàng.

Phân tích định hướng giải toán:

a). Tứ giác $BCMH$ nội tiếp đường tròn đường kính $MB \Rightarrow ACN = ABD$ (cùng chắn cung MH).



Lại có $ACD = ABD \Rightarrow$ $ACN = ACD \Rightarrow CM$ là phân giác của DCN.

Mà $CM \perp CB \Rightarrow \Delta CDN$ có hai đường phân giác trong và ngoài của góc C là CM và CB. $\Rightarrow \dfrac{MD}{MN} = \dfrac{CD}{CN} = \dfrac{BD}{BN}$ (tính chất đường phân giác). Vậy

$$\frac{DB}{DM} \cdot \frac{NM}{NB} = \frac{BD}{BN} \cdot \frac{MN}{MD} = \frac{BD}{BN} \cdot \frac{MD}{MN} = 1.$$

b) $DLC = AFB$ (cùng chắn cung DC của đường tròn CDF) (1) tứ giác $BCLE$ nội tiếp nên $CLE + CBE = 180^0$ mà $ABF + CBE = 180^0$ nên $ABF = CLE$ (2), $FAB = DCF$ (cùng bù góc BCD). Mặt khác $DCF = FLD$ (cùng chắn cung DF của đường tròn CDF) $\Rightarrow FLD = FAB$ (3). Từ (1),(2),(3) suy ra

$FLE = FLD + DLC = FAB + AFB + ABF = 180^0$.

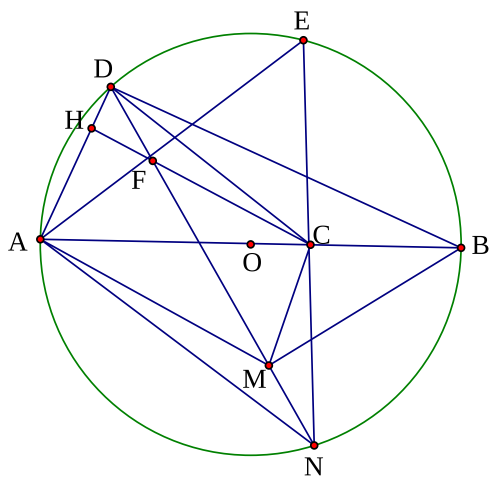
Nhận xét: Câu c của bài toán thực chất là một kết quả của định lý Miquel.

Câu 14. (Đề thi vào lớp 10 chuyên Phan Bội Châu- Nghệ An – năm 2013) Cho đường tròn O đường kính AB. Trên đường tròn lấy điểm D khác A và $DAB > 60^0$. Trên đường kính AB lấy điểm C (C khác A, B) và kẻ CH vuông góc với AD tại H. Phân giác trong của góc DAB cắt đường tròn tại E và cắt CH tại F. Đường thẳng DF cắt đường tròn tại điểm thứ hai N.

a) Chứng minh rằng tứ giác $AFCN$ nội tiếp đường tròn và ba điểm N, C, E thẳng hàng.

b) Cho $AD = BC$, chứng minh rằng DN đi qua trung điểm của AC.

<u>Phân tích định hướng giải:</u>



a). Ta có $ACH = AND$

(cùng bằng ABD),

hay $ANF = ACF$,

do đó tứ giác $AFCN$ nội tiếp

suy ra $CND = BAE$.

Lại có $BAE = DAE = DNE$

nên $CND = END$. Do đó ba điểm N, C, E thẳng hàng.

b) Qua C kẻ $CM / / AD$ $M \in DN$ rồi chứng minh tứ giác $BCMN$ nội tiếp. Suy ra $CBM = END; CMB = ENB$. Mặt khác

$END = ENB \Rightarrow CBM = CMB \Rightarrow CB = CM$. Lại có $CB = AD$ (gt) nên $AD = CM$. Do đó tứ giác $ADCM$ là hình bình hành, suy ra DN đi qua trung điểm của AC.

Câu 15. (Đề thi vào lớp 10 chuyên ĐHSP Hà Nội – năm 2013)

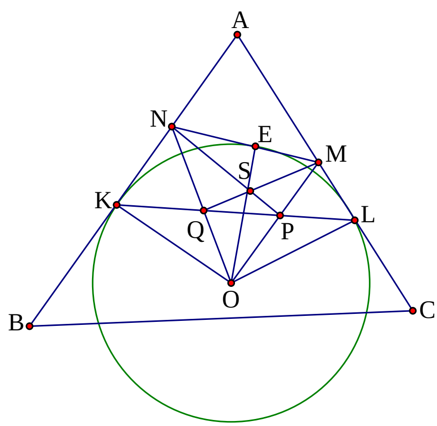
Cho tam giác ABC. Đường tròn ω có tâm O và tiếp xúc với các đoạn thẳng AB, AC tương ứng tại K, L. Tiếp tuyến d của đường tròn ω tại điểm E thuộc cung nhỏ KL cắt các đường thẳng AL, AK tương ứng tại M, N. Đường thẳng KL cắt các đường thẳng AL, AK tương ứng tại M, N. Đường thẳng KL cắt OM tại P và cắt ON tại Q.

a) Chứng minh $MON = 90^0 - \frac{1}{2}BAC$.

b) Chứng minh rằng các đường thẳng MQ, NP và OE cùng đi qua một điểm.

c) Chứng minh $KQ.PL = EM.EN$.

Lời giải:



a) Ta có: $MON = MOE + EON = \frac{1}{2}EOL + \frac{1}{2}EOK + \frac{1}{2}KOL$. Do ω tiếp xúc với AB, AC tại K, L nên $OK \perp AK, OL \perp AL$. Suy ra tứ giác $AKOL$ nội tiếp và do đó: $KOL = 180^0 - KAL = 180^0 - BAC$. Vậy

$MON = 90^0 - \frac{1}{2}BAC$.

b) Tam giác KAL cân tại A nên $QLM = 90^0 - \frac{1}{2}KAL$. Kết hợp với câu a ta có: $QOM = QLM$. Vậy tứ giác $MLOQ$ nội tiếp. Do đó $MQO = MLO = 90^0$. Vậy MQ vuông góc với NO. Tương tự NP vuông góc với MO. Do MN tiếp xúc với ω tại E nên OE vuông góc với MN. Vậy MQ, NP, OE là ba đường cao trong tam giác MNO và do đó chúng đồng quy.

c) Theo phần chứng minh câu b, ta có tứ giác $MLOQ$ nội tiếp. Do đó $LMP = PQO = KQN$. Mặt khác $MLP = QKN$. Do đó $\Delta MPL \sim \Delta QNK \Rightarrow KQ.PL = ML.NK = ME.EN$.

Câu 16. (Đề thi vào lớp 10 chuyên ĐHSP Hà Nội – năm 2013)

Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn O. Điểm M thuộc cung nhỏ CD của O, M khác C và D. MA cắt DB, DC theo thứ tự tại X, Z; MB cắt DC, AC theo thứ tự tại Y, T; CX và DY cắt nhau tại K.

a) Chứng minh rằng $MXT = TXC, MYZ = ZYD$ và $CKD = 135^0$.

b) Chứng minh rằng $\frac{KX}{MX} + \frac{KY}{MY} + \frac{ZT}{CD} = 1$.

c) Gọi I là giao điểm của MK và CD. Chứng ming rằng XT, YZ, OI cùng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác KZT.

Phân tích định hướng giải:

Trước tiên ta hãy quan sát xem góc MXT có thể bằng góc nào:

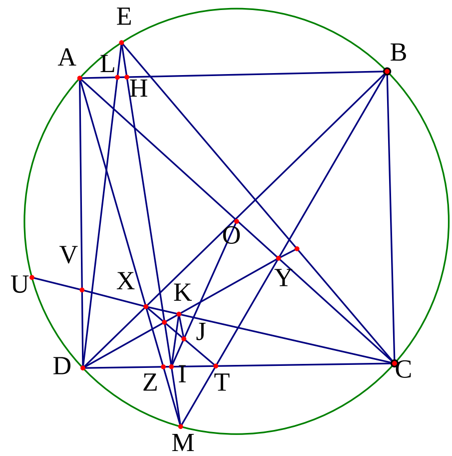
Dễ thấy $XDT = 45^0 = XMT$

nên tứ giác $XDMT$ nội tiếp từ

đó suy ra $MXT = TDM$ (1)

Góc TXC làm ta nghỉ đến tứ giác

$TXBC$: Ta có $BTC = \frac{1}{2}$sđ$\left(BC + DM\right)$



$= \frac{1}{2}$sđADM, $BXC = VXD$. Để tận dụng góc nội tiếp ta nghỉ đến việc kéo dài CX cắt đường tròn (O) tại V. Ta có $UXD \equiv VXD = DXM = \frac{1}{2}$sđ$\left(AB + DM\right) = \frac{1}{2}$sđ$ADM$. Từ đó suy ra tứ giác $TXBC$ nội tiếp. Như vậy ta có: $TXC = TBC = CAM = CDM$ (2). Từ (1), (2) ta suy ra $MXT = TXC$. Tương tự cho trường hợp $MYZ = ZYD$.

<u>Cách 2:</u> Vì $\begin{cases} XDT = 45^0 = XMT \\ YCZ = 45^0 = YMZ \end{cases}$ nên các tứ giác $XDMT, YCMZ$ nội tiếp (1). Từ (1), chú ý rằng $DMT = 90^0 = CMZ$, suy ra $BXT = 90^0 = AYZ$. Tam giác AXC có XO là phân giác trong góc X. Mặt khác, XT vuông góc với XO nên XT là phân giác ngoài góc X của tam giác AXC. Vậy $XMT = TXC$. Tương tự $MYZ = ZYD$. Đường thẳng qua M vuông góc với CD cắt đường tròn O tại điểm thứ hai E. CX cắt AD tại V; DE cắt AB tại L. Do X thuộc trục đối xứng BD của hình vuông nên $DZ = DV$. Do $ADME$ là hình thang cân nên $DZ = AL$. Vậy $DV = AL$. Do đó CV vuông góc với DL. Tương tự DY vuông góc với CE. Do đó EM, CX, DY là ba đường cao trong tam giác ECD và do đó chúng cùng đi qua K. Do vậy

$CKD = XKY = 180^0 - CED = 135^0$.

b) Ta có $KMX = DAM = DBM = YMO$ (2). Tứ giác $MXOC$ nôi tiếp nên $MXK = MOY$. Kết hợp với (2) ta có: $\Delta MXK \sim \Delta MOY$. Do đó: $\frac{KX}{MX} = \frac{YO}{MO} = \frac{YO}{CO}$ (3). Do $YZ // OD$ (cùng vuông góc với OC) nên $\frac{YO}{CO} = \frac{ZD}{CD}$. Kết hợp với (3) ta có: $\frac{KX}{MX} = \frac{ZD}{CD}$. Tương tự $\frac{KY}{MY} = \frac{TC}{CD}$. Do đó $\frac{KX}{MX} + \frac{KY}{MY} + \frac{ZT}{CD} = \frac{CD + TC + ZT}{CD} = 1$.

c) Gọi J là giao điểm của XT và YZ. Theo định lý Ta-lét ta có: $\frac{IT}{IC} = \frac{MT}{MB} = \frac{ZT}{AB} = \frac{ZT}{CD} = \frac{TJ}{CO}$ (để ý rằng JTZ và OCD là hai tam giác vuông cân). Mặt khác, $TJ // CO$. Do đó I, J, O thẳng hàng. Vậy XT, YZ, OI đồng quy. Gọi H là giao điểm của EM và AB. Ta có: $\frac{IJ}{IO} = \frac{IT}{IC} = \frac{MT}{MB} = \frac{MI}{MH} = \frac{IK}{IE}$ (để ý rằng K là trực tâm tam giác ECD nên K và M đối xứng với nhau qua CD). Vậy $IK // OE$. Suy ra $\frac{JK}{OE} = \frac{IJ}{IO} = \frac{JT}{OC}$. Mặt khác $OE = OC$, nên $JK = JT = JZ$. Do đó J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác KZT.

Chú ý:

- Có thể chứng minh câu b bằng việc dùng tính chất đường phân giác và định lý Ta-lét.

- Có thể chứng minh XT, YZ, OI đồng quy bằng cách dùng định lý Sê-va.

- Tam giác ZKT là ảnh của tam giác DEC qua một phép vị tự tâm I.

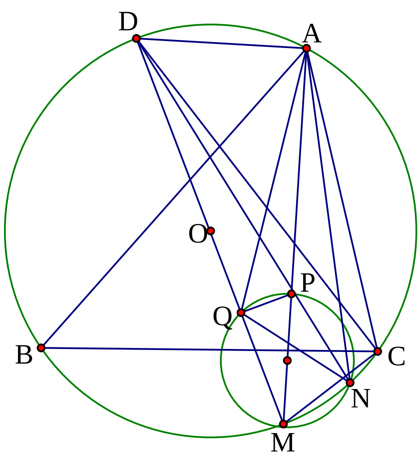
Câu 17. (Đề thi vào lớp 10 chuyên ĐHQG Hà Nội – năm 2013)

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi M là một điểm trên cung nhỏ BC (M khác B,C và AM không đi qua O). Giả sử P là một điểm thuộc đoạn thẳng AM sao cho đường tròn đường kính MP cắt cung nhỏ BC tại điểm N khác M.

a) Gọi D là điểm đối xứng với điểm M qua O. Chứng minh rằng ba điểm N,P,D thẳng hàng.

b) Đường tròn đường kính MP cắt MD tại điểm Q khác M. Chứng minh rằng P là tâm đường tròn nội tiếp tam giác AQN.

Lời giải:



a) Vì MP là đường kính suy ra

b) $PN \perp MN$ (1). Vì MD là đường kính suy ra $DN \perp MN$ (2). Từ (1) và (2) suy ra N,P,D thẳng hàng.

b) Tứ giác $APQD$ nội tiếp $PQD = MAD = 90^0$, suy ra $PAQ = PDQ = NDM$ (3). Xét O ta có $NDM = NAM$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $PAQ = NAP$, do đó AP là phân giác của NAQ (*).

Xét O ta có $AND = AMD$. Xét đường tròn đường kính MP có

$QMP = QNP$, suy ra $ANP = QNP$, do đó NP là phân giác của ANQ (**). Từ (*) và (**) suy ra P là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ANQ.

Câu 18. (Đề thi vào lớp 10 chuyên ĐHQG Hà Nội – năm 2013)

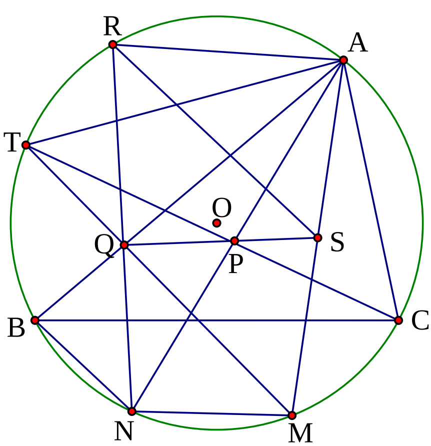
Cho tam giác nhọn ABC $AB > AC$, nội tiếp đường tròn O . Giả sử

M, N là hai điểm thuộc cung nhỏ BC sao cho MN song song với BC và tia AN nằm giữa hai tia AM, AB. Gọi P là hình chiếu vuông góc của điểm C trên AN và Q là hình chiếu vuông góc của điểm M trên AB.

a) Giả sử CP cắt QM tại điểm T. Chứng minh rằng T nằm trên đường tròn O .

b) Gọi giao điểm của NQ và O là R khác N. Giả sử AM cắt PQ tại S. Chứng minh rằng bốn điểm A, R, Q, S cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải:



a). Do $TPA = TQA = 90^0$

nên tứ giác $TAPQ$ nội tiếp.

Do đó $MTC = QTP =$

$QAP = BAN = MAC$

(do tứ giác $TAPQ$ nội tiếp và $MN//BC$) $\Rightarrow$ tứ giác $MTAC$ nội tiếp $\Rightarrow T \in \; O$. Ta có điều phải chứng minh.

b) Từ tứ giác $TAPQ$ nội tiếp ta có $PQA = PTA = CTA = ABC$

$\Rightarrow PQ//BC//MN$. Từ đó $QSA = NMA$ (1). Mà tứ giác $AMNR$ nội tiếp $\Rightarrow ARN + AMN = 180^0$ (2). Kết hợp (1) và (2) suy ra

$QRA + QSA = 180^0 \Rightarrow$ tứ giác $ARQS$ nội tiếp.

Câu 19. (Đề thi vào lớp 10 chuyên ĐHSP TP Hồ Chí Minh– năm 2013)

Cho tam giác ABC vuông tại A $AB < AC$, có đường cao AH và O là trung điểm của BC. Đường tròn tâm I đường kính AH cắt AB, AC lần lượt tại M và N.

1) Chứng minh rằng:

a) $AM.AB = AN.AC$

b) Tứ giác $BMNC$ nội tiếp.

2) Gọi D là giao điểm của OA và MN. Chứng minh rằng:

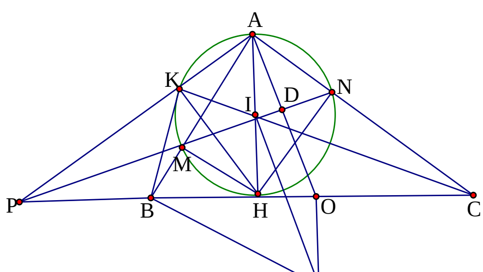
a) Tứ giác $ODIH$ nội tiếp.

b) $\dfrac{1}{AD} = \dfrac{1}{HB} + \dfrac{1}{HC}$.

3) Gọi P là giao điểm của đường thẳng MN và đường thẳng BC. Đường thẳng AP cắt đường tròn đường kính AH tại điểm K (khác A). Tính số đo BKC.

4) Cho $AB = 6, AC = 8$. Hãy tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN.

<u>Phân tích định hướng giải:</u>



Lời giải:

1). a) Ta có $AMH = ANH = 90^0$,

suy ra $AH^2 = AM.AB$ và

$AH^2 = AN.AC$. Do đó $AM.AB = AN.AC$.

b) $\Delta ANM \sim \Delta ABC$

(c.g.c)$\Rightarrow ANM = ABC \Rightarrow MBC + MNC = 180^0$. Vậy tứ giác $BMNC$ nội tiếp.

2) a) Ta có $AIN = 2AMI, AOH = 2ACO$, mà $AMI = ACO$ (do tứ giác $BMNC$ nội tiếp) nên $AIN = AOH$, dẫn đến $DIH + DOH = 180^0$. Vậy tứ giác $ODIH$ nội tiếp.

b) $\Delta AID \sim \Delta AOH$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AI}{AD} = \dfrac{AO}{AH}$. Mà $AI = \dfrac{1}{2}AH; AO = \dfrac{1}{2}BC$

suy ra $\dfrac{1}{AD} = \dfrac{BC}{AH^2} = \dfrac{HB + HC}{HB.HC} = \dfrac{1}{HB} + \dfrac{1}{HC}$.

3) Ta có: $PKM = ANM = MBC$ nên tứ giác $PKMB$ nội tiếp. Suy ra

$PKB = PMB = ACB$. Do đó tứ giác $AKBC$ nội tiếp. Suy ra

$BKC = ABC = 90^0$.

4) Ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC = 8;$

$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} \Rightarrow AH = 4,8$. Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN thì tứ giác $AIJO$ là hình bình hành.

Suy ra $OJ = \dfrac{AH}{2} = 2,4$. Tam giác vuông OBJ có

$JB^2 = OB^2 + OJ^2 = 5^2 + 2,4^2 = \dfrac{769}{2} \Rightarrow JB = \dfrac{\sqrt{769}}{5}$. Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN là $\dfrac{\sqrt{769}}{5}$.

Câu 20. (Đề thi vào lớp 10 chuyên ĐHSP TP Hồ Chí Minh– năm 2013)

1. Cho tam giác ABC có B,C cố định và A di động sao cho $AB = 2AC$

a) Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho $IB = 2IC$. Chứng minh rằng AI là tia phân giác của BAC.

b) Chứng minh rằng điểm A luôn di động trên một đường tròn cố định.

2. Cho tam giác ABC. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC có tâm I tiếp xúc với BC tại D. Đường tròn bang tiếp góc A của tam giác ABC có tâm J, tiếp xúc với BC tại E.

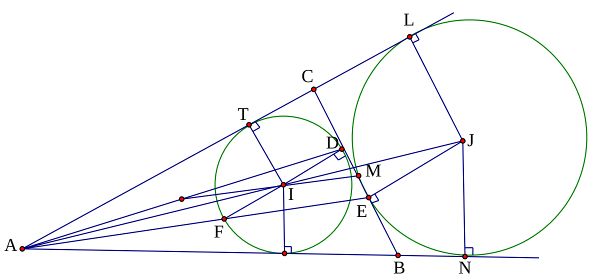
a) Gọi F là giao điểm của AE và DI. Chứng minh rằng F thuộc đường tròn I .

b) Gọi M là trung điểm của BC . chứng minh rằng đường thẳng MI luôn đi qua trung điểm của AD.

Phân tích định hướng giải:

Lời giải:

1). a) Vận dụng tính chất đường phân giác trong tam giác.



b) A di động trên đường tròn cố định đường kính ID (trong đó D ở ngoài đoạn BC sao cho $\dfrac{DB}{DC} = 2$).

2) a) Hai đường tròn I , J tiếp xúc với AC tại T và L. Ta có

$IT\,//\,JK, IF\,//\,EJ$ nên $\dfrac{AI}{AJ}=\dfrac{IF}{JE}=\dfrac{IT}{JL}$. Mà $JE=JL$ nên $IF=IT$.

Suy ra $F \in \quad I \quad$.

b) Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau suy ra

$BD=CE\left(=\dfrac{AB+BC-AC}{2}\right)$.Do đó $MD=ME$. Vì $\dfrac{MD}{ME}=\dfrac{ID}{IF}=1$

nên $MI\,//\,EF$. Từ đó suy ra MI đi qua trung điểm của AD.

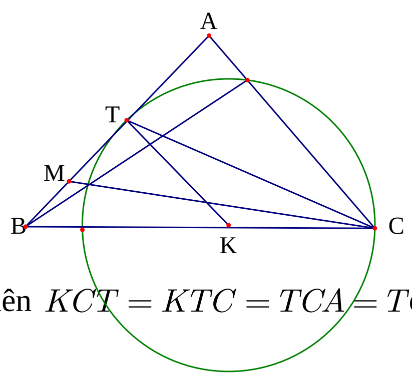
Câu 21). Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi CT là đường phân giác trong của tam giác $\quad T \in AB \quad$.

a) Chứng minh rằng đường tròn $\quad K \quad$ đi qua C, T tiếp xúc với AB có tâm K thuộc BC.

b) Gọi giao điểm của AC và $\quad K \quad$ là D khác C, giao điểm của DB và $\quad K \quad$ là E khác D. Chứng minh rằng $ABD=BCE$.

c) Gọi giao điểm của CE và AB là M. Chứng minh rằng M là trung điểm của đoạn thẳng BT.

Lời giải:



a) $\quad K \quad$ tiếp xúc với AB tại T

nên $KT \perp AB$ do đó KT

song song với AB. Vì ΔKTC cân nên $KCT=KTC=TCA=TCB$.
Do đó K thuộc BC.

b) Gọi F là giao điểm của $\quad K \quad$ và BC (F khác C). Tứ giác $FEDC$ nội tiếp và do $K \in BC$ nên $FEC=90^0$.

Từ đó $ABD=90^0-ADB=90^0-EFC=BCE$.

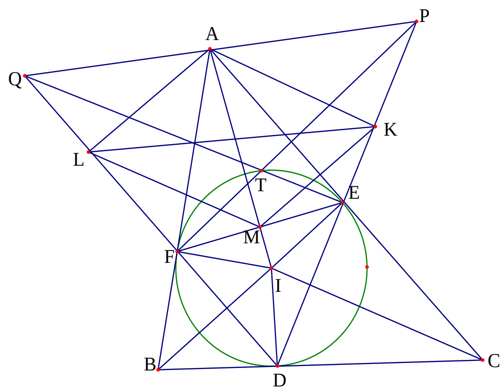
c) Từ câu b suy ra $MBE = BCM$, do đó
$\Delta MBE \sim \Delta MCB \Rightarrow ME.MC = MB^2$. Mặt khác, do MT tiếp xúc với K nên $MT^2 = ME.MC = MB^2$. Vậy M là trung điểm của BT.

Câu 22) Cho tam giác ABC, đường tròn (I) nội tiếp tam giác tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại D, E, F. Gọi K, L lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên DE, DF. Giả sử AI cắt EF tại M

a) Chứng minh M là trực tâm của tam giác DKL

b) Gọi P đối xứng với E qua K, Q đối xứng với F qua L. Chứng minh giao điểm của QE, PF nằm trên đường tròn (I)

Phân tích định hướng giải:



a). Để chứng minh M là trực tâm của tam giác DKL ta sẽ chứng minh $KM \perp LD, ML \perp KD$.

Để ý rằng giả thiết cho biết $AK \perp DK$ vuông góc với DK như vậy để chứng minh $ML \perp DK$ ta cần chứng minh

$ML // AK$ tức là $LMA = MAK$. Nhưng ta có $LMA = MFA$ (do tứ giác $ALFM$ nội tiếp), $LFA = BFD = FED$ do AB là tiếp tuyến của (I). Mặt khác $FED = KAM$ do tứ giác $MAKE$ nội tiếp. Từ đó suy ra $LMA = MAK$. Hoàn toàn tương tự ta cũng chứng minh được $KM \perp LD$.

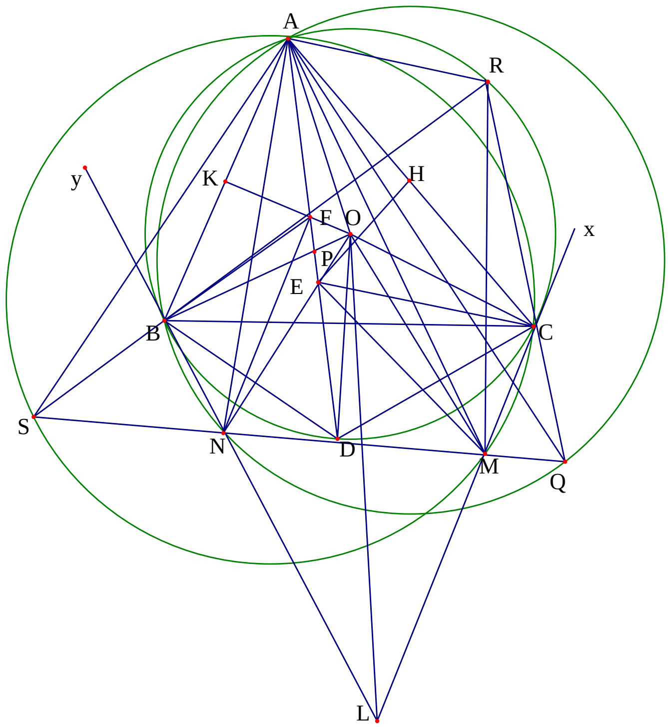
b). Gọi giao điểm của QE, PF với đường tròn là T và T'. Để chứng minh Chứng minh giao điểm của QE, PF nằm trên đường tròn (I) bản chất là chứng minh $T \equiv T'$. Để ý rằng: MK là đường trung bình của tam giác PEF nên $PF//MK \Rightarrow PF \perp FD$ (kết quả câu a). Suy ra DT là đường kính của (I). Hoàn toàn tương tự ta cũng chứng minh được DT' là đường kính của (I) suy ra $T \equiv T'$.

Câu 23) Cho tam giác ABC nội tiếp (O). P là một điểm nằm trong tam giác ABC. Trung trực của CA, AB cắt PA tại E, F. Đường thẳng qua E song song với AC cắt tiếp tuyến tại C của (O) tại M. Đường thẳng qua F song song với AB cắt tiếp tuyến tại B của (O) tại N.

a) Chứng minh MN là tiếp tuyến của (O)

b) Giả sử MN cắt đường tròn ngoại tiếp các tam giác ACM, ABN lần lượt tại S, Q khác MN. Chứng minh $\Delta ABC \sim \Delta \mathrm{AS}Q$ và SB cắt CQ tại một điểm nằmtrên (O).

Phân tích định hướng giải:



a). Bằng thực nghiệm hình vẽ ta dự đoán MN tiếp xúc với đường tròn (O) tại giao điểm D của AP với đường tròn (O). Như vậy ta cần chứng minh

$ODM = 90^0$ và $ODN = 90^0$. Nếu điều này xảy ra thì tứ giác $OEDM$ và $OFND$ nội tiếp. Trong bài toán có các giả thiết liên quan đến tiếp tuyến CM, BN nên ta cần chú ý đến các tính chất về góc tạo bởi tiếp tuyến và một dây cung để tìm liên hệ về góc. Ngoài ra các giả thiết liên quan đến đường trung trực giúp ta nghỉ đến các tam giác cân hoặc tính chất đối xứn qua trung trực của một cạnh tam giác.

+ Muốn chứng minh $OEDM$ nội tiếp ta cần chỉ ra góc $OME = ODE$

nhưng $OME = OCE$ (do $OEMC$ nội tiếp) mà $OCE = OAE$ (OE là trung trực của AC). Mặt khác tam giác OAD cân tại O suy ra

$OAE = ODE$. Từ đó suy ra $OME = ODE$ hay $OEDM$ nội tiếp suy ra

$OEM = ODM = 90^0$

+ Hoàn toàn tương tự ta cũng có $ODN = 90^0$ hay MN là tiếp tuyến của (O).

b). + Ta thấy rằng $ASQ \equiv ASM = 180^0 - ACM = ACx$ do tứ giác $ASMC$ nội tiếp. Mặt khác MC là tiếp tuyến của (O) nên

$ACx = ABC \Rightarrow ASQ = ABC$. Tương tự ta có:

$AQS \equiv AQN = 180^0 - ABN = ABy = ACB$ suy ra $\Delta ABC \sim \Delta ASQ$.

+ Giả sử SB cắt QC tại điểm R. Muốn chứng minh R thuộc đường tròn (O) ta quy về chứng minh $ABCR$ là tứ giác nội tiếp. Tức là ta quy về chứng minh $RCA = RBA$. Để ý rằng trong tam giác ARQ và trong tam giác ASR nếu $RCA = RBA$ thì sẽ xảy ra $ACQ = ABS$. Nhưng điều này là hiển nhiên do $\Delta ABC \sim \Delta ASQ$.(Bài toán kết thúc)

Câu 24). Cho tam giác ABC nội tiếp (O) cố định với B, C cố định. Điểm A di chuyển trên đường tròn (O) sao cho $AB < AC$. Lấy điểm D thuộc đoạn BC sao cho AD là phân giác góc BAC. Đường tròn (K) qua A và tiếp xúc với BC tại D lần lượt cắt AC, AB tại E, F khác điểm A. BE, CF lần lượt cắt (K) tại G, H khác E, F. AG, AH cắt BC tại M, N

a) Chứng minh (K) tiếp xúc với (O)

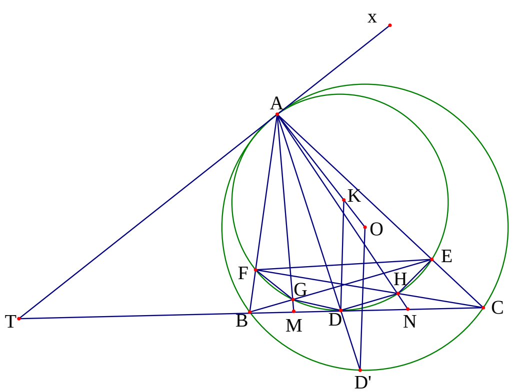
b) Tìm vị trí điểm A trên đường tròn (O) để diện tích tam giác AMN lớn nhất.

Phân tích định hướng giải:

Giả thiết liên quan đến

đường phân giác trong

AD ta nghỉ đến việc kéo



dài AD cắt đường tròn (O) tại D' thì ta có tính chất quen thuộc $OD' \perp BC$. Mặt khác $KD \perp BC$ và D cũng chính là giao điểm của đường phân giác trong góc A với (K) suy ra $KD \perp \text{EF} \Rightarrow \text{EF} / / BC$. Để chứng minh hai đường tròn tiếp xúc trong với nhau ta kẻ tiếp tuyến $Ax \cap BC = T$ của đường tròn (K). Ta sẽ chứng minh Ax là tiếp tuyến chung của hai đường tròn. Ta có: $TAF = AEF$ mà $AEF = ACB$ đồng vị . Từ đó suy ra $TAF \equiv TAB = ACB$. Điều này chứng tỏ AT cũng là tiếp tuyến của (O).

Cách 2: Kẻ tiếp tuyến $Ax \cap BC = T$ của đường tròn (O) Ta có $TDA = DAC + ACD = DAB + TAB = TAD$ suy ra tam giác TAD cân tại T, mà TD tiếp xúc với $(K) \Rightarrow TA$ tiếp xúc với (K). Vậy TA là tiếp tuyến chung tại A của hai đường tròn .

b). Ta có

$GBM = G\text{EF} = GAB \Rightarrow \Delta BGM \sim \Delta ABM \Leftrightarrow MB^2 = MG.MA$. Mặt khác theo tính chất tiếp tuyến và cát tuyến ta cũng có: $MD^2 = MG.MA \Rightarrow MB = MD$. Tương tự ta chứng minh được N là trung điểm của CD. Suy ra $MN = \frac{1}{2}BC$ không đổi. Ta có $S_{\Delta AMN} = \frac{1}{2}AL.MN$. Trong đó AL là đường cao kẻ từ A đến BC. Như vậy $S_{\Delta AMN}$ lớn nhất khi và chỉ khi AL lớn nhất. Suy ra AL phải đi qua tâm O. Suy ra A là trung điểm của cung BC.

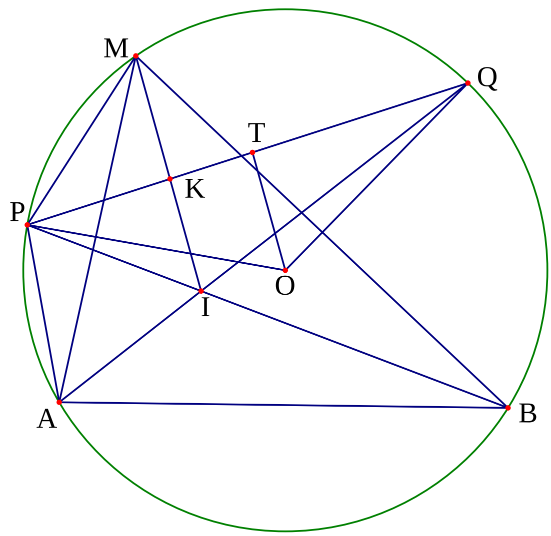
Câu 25). Cho đường tròn (O) và dây cung AB (không phải là đường kính). Điểm M thuộc cung lớn AB, I là tâm vòng tròn nội tiếp ΔMAB, P là điểm chính giữa của cung AM không chứa điểm B, K là trung điểm của MI

a) Chứng minh $PK \perp MI$

b) Gọi Q là giao điểm của PK và AI. Chứng minh $ABQP$ nội tiếp.

c) Khi M thay đổi trên cung lớn AB. Chứng minh PQ luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định

Phân tích định hướng giải:



+ Để chứng minh $PK \perp MI$ ta phải chứng minh ΔPMI cân tại P đây là tính chất hình học quen thuộc.

+ Để chứng minh $ABPQ$ nội tiếp ta chứng minh $PQA = PBA$ để tận dụng các giả thiết liên quan đến phân giác và tính chất điểm P.

+ Ta thấy rằng $PQ \perp MI$, như vậy PQ sẽ tiếp xúc với đường tròn có bán kính cố định và song song với MI, điều này giúp ta liên tưởng đến tâm O và đường thẳng qua O vuông góc với PQ

Từ những định hướng trên ta có lời giải như sau:

a). Trước hết ta chứng minh ΔPMI cân tại P. Thật vậy ta có: $PMI = PMA + AMI = PBA + IMB = PBM + BMI = PIM$ suy ra tam giác ΔPMI cân tại P do đó $PK \perp MI$.

b) Tacó

$PQA = 90^0 - KIQ = 90^0 - \left(IMA + IAM \right) = 90^0 - \frac{1}{2}\left(AMB + MAB \right)$

$= \frac{1}{2} MAB = PBA$. Như vậy tứ giác $ABPQ$ nội tiếp.

c) Kẻ OT vuông góc với PQ thì T là trung điểm của dây PQ. Ta cũng có PQ là phân giác của góc MPB nên $POQ = \frac{1}{2}$sđAMB không đổi. Từ đó ta có $OT = R.\cos\left(\frac{POQ}{2}\right)$ không đổi. Vậy PQ luôn tiếp xúc với đường tròn tâm O bán kính $r = OT = R.\cos\left(\frac{POQ}{2}\right)$

Câu 26) Cho AB là dây cung (không là đường kính) của $(O), (O')$ là trung điểm của OB, (O_1), (O_2) là các đường tròn đường kính $OA, O'B$. MN là tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn (O_1), (O_2) với $M \in (O_1), N \in (O_2)$. Gọi C là giao điểm của AM với đường tròn (O) $(C \neq A)$.

a) Chứng minh $CO \perp MN$

b) Chứng minh: $AMNB$ là tứ giác nội tiếp

c) Chứng minh $MN = \frac{\sqrt{6}}{4} AB$

Phân tích định hướng giải:

a). Ta thấy $MO_1 // NO_2 \perp MN$

vậy để chứng minh $CO \perp MN$

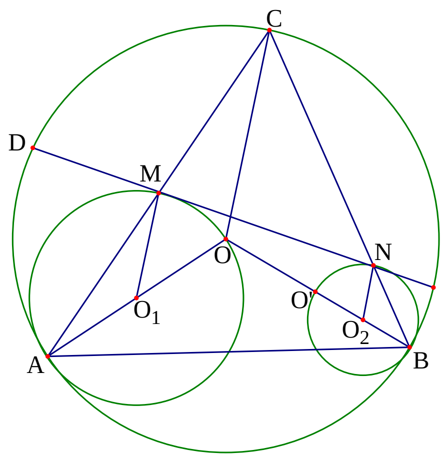
ta sẽ chứng minh $CO // MO_1$ hoặc

$CO // NO_2$. Tức là ta chứng minh

$AMO_1 = ACO$ nhưng điều này

là hiển nhiên do các tam giác

O_1AM, OAC cân tại O_1 và O



b). Kéo dài MN cắt (O) tại D.Dễ thấy B, N, C thẳng hàng , thật vậy nếu ta gọi C' là giao điểm của BN và (O) thì $C'O \perp MN \Rightarrow C \equiv C'$. Để chứng minh $AMNB$ nội tiếp thì ta cần chứng minh $ABN = CMN$ nhưng ta có: $CMN = DMA = \frac{1}{2}AO_1C = \frac{1}{2}AOC$ và $ABC = \frac{1}{2}AOC$ từ đó suy ra điều phải chứng minh:

Chú ý: Việc kéo dài MN cắt đường tròn (O) tại D là chìa khóa để tính các góc dựa trên tính chất của tiếp tuyến MN

c). Ta có

$$\Delta CMN \sim \Delta CBA \Rightarrow \frac{MN}{BA} = \frac{CM}{CB} = \frac{CN}{CA} \Rightarrow \frac{MN}{BA} = \sqrt{\frac{CM}{CB}.\frac{CN}{CA}} = \sqrt{\frac{CM}{CA}.\frac{CN}{CB}}$$

mặt khác $\frac{CM}{CA} = \frac{OO_1}{OA} = \frac{1}{2}; \frac{CN}{CB} = \frac{OO_2}{OB} = \frac{3}{4} \Rightarrow MN = \frac{\sqrt{6}}{4}AB$

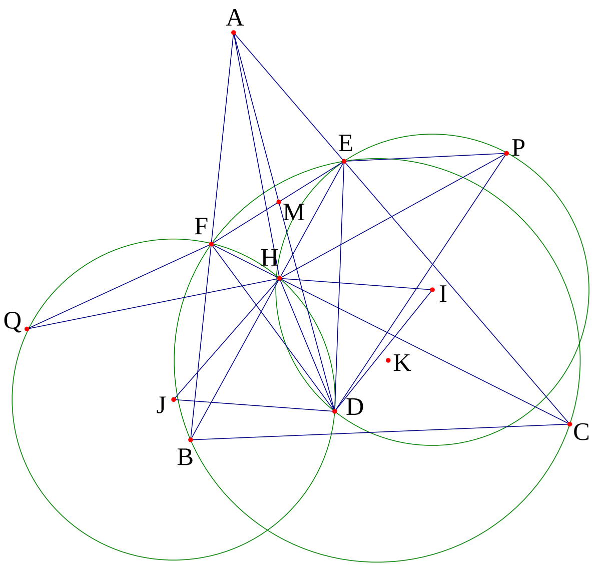
Câu 27). Cho tam giác ABC. Một đường tròn (K) qua B, C cắt các đoạn CA, AB tại E, F khác C và B. Đường thẳng BE cắt CF tại H. Gọi M là trung điểm của $EF.$ Gọi P, Q lần lượt đối xứng với A qua BE, CF.

a) Chứng minh đường tròn (I) ngoại tiếp tam giác HEP và đường tròn (J) ngoại tiếp tam giác HFQ cắt nhau trên AM

b) Chứng minh (I) và (J) có bán kính bằng nhau.

Phân tích định hướng giải:

a). Nếu D là giao điểm thứ hai của hai đường tròn $(I),(J)$. Thực nghiệm hình vẽ giúp ta dự đoán tứ giác $AEDF$ là hình bình hành. Nếu chứng minh được điều này thì ta sẽ kết luận được AM qua D. Tuy nhiên việc chứng minh



trực tiếp $AEDF$ là hình bình là tương đối khó.

+ Để khắc phục điều này ta sẽ gọi D là đỉnh thứ 4 của hình bình hành $AEDF$ sau đó ta chứng minh các tứ giác $QFHD, PEHD$ nội tiếp. Khi đó các đường tròn $(I),(J)$ cùng đi qua D. Ta có: $HPE = EAH = CAH$ (1).

Ta cần chỉ ra $CAH = EDH$ để ý đến hai tam giác ΔCAH và ΔEDH ta thấy

$HED = FED - FEH = \text{AF}E - FCB = ECB - FCB = ECF = ECH$.

Mặt khác ta cũng có $\Delta FEH \sim \Delta BCH \Rightarrow \frac{HE}{HC} = \frac{\text{EF}}{CB}$ và

$\Delta AEF \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{\text{AF}}{AC} = \frac{\text{EF}}{BC}$ suy ra $\frac{HE}{HC} = \frac{\text{AF}}{AC} = \frac{DE}{AC}$ (do

$\text{AF} = DE$) như vậy $\Delta CAH \sim \Delta EDH$ do đó $CAH = EDH$ kết hợp với

(1) ta suy ra $HPE = EDH$ hay tứ giác $PEHD$ nội tiếp, hoàn toàn tương tự ta cũng có $QFHD$ nội tiếp suy ra đường tròn (I) ngoại tiếp tam giác HEP và đường tròn (J) ngoại tiếp tam giác HFQ cắt nhau tại điểm D nằm trên AM.

b). Ta có $HID = 2HED = 2HCA = 2HFD = HJD$ hai tam giác $\Delta HJD, \Delta HID$ có chung cạnh đáy, góc ở đỉnh bằng nhau nên $\Delta HJD = \Delta HID \Rightarrow JD = ID$

Câu 28) Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Các điểm E, F thuộc cung BC không chứa điểm A sao cho $EF / / BC$ và tia AE nằm giữa tia AB, AF. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. FH cắt (O) tại điểm G khác F. Gọi (L) là đường tròn ngoại tiếp tam giác AGH. Giả sử $K \in AE$ sao cho $AHK = 90^0$

a) Chứng minh L nằm trên AE

b) Giả sử (L) cắt CA, AB lần lượt tại M, N khác A. Chứng minh $\text{AF} \perp MN$ tại điểm P

c) $GK \cap MN = Q, AQ \cap (O) = R \neq A$. Chứng minh đường thẳng qua R vuông góc với AF cắt GP tại một điểm nằm trên (O).

Phân tích định hướng giải:

a). Nếu L nằm trên AE thì 4 điểm A, G, H, K nằm trên cùng 1 đường tròn (L). Như vậy bản chất câu hỏi là chứng minh $AGHK$ nội tiếp.

Thật vậy : Ta có:

Do $K \in AE$ sao cho $AHK = 90^0$

suy ra $HK \perp AH \Rightarrow$

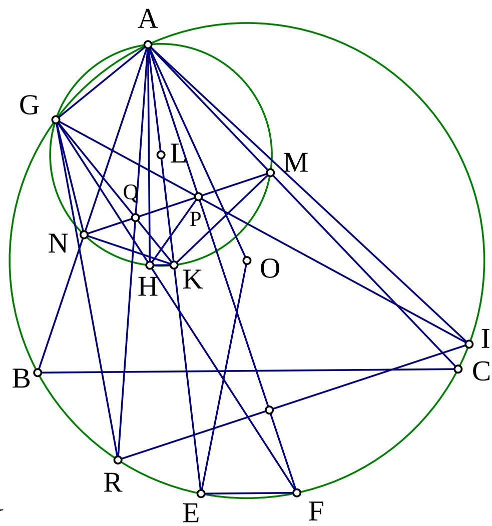
$HK / /BC / /EF$

Do đó $KHF = HFE$

mà $HFE = EAG$

(cùng chắn cung FG)

suy ra $KHF = KAG$ hay $AGHK$



nội tiếp. Mặt khác $AHK = 90^0$ nên L là trung điểm của AK.

b). Ta có: $AMN + M\text{AF} = AKN + BAE = 90^0$ (Do $AMN = AKN$ cùng chắn cung AN, $M\text{AF} = BAE$ do hai cung BE, CF bằng nhau.)

Suy ra $\text{AF} \perp MN$ tại điểm P.

c). Giả sử đường thẳng qua R vuông góc với AF cắt GP tại I. Ta cần chứng minh $AGRI$ là tứ giác nội tiếp. Thật vậy từ việc xác định điểm I ta suy ra $RI / /MN$ suy ra $RIG = QPG$ (đồng vị). Mặt khác ta cũng dễ thấy $QPG = QAG$ (Do tứ giác $APQG$ nội tiếp) suy ra $RIG = RAG$ $\Leftrightarrow AGRI$ là tứ giác nội tiếp. Tức là điểm I nằm trên đường tròn (O).

Câu 29) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Điểm P nằm trong tam giác sao cho AP là phân giác trong của góc BAC. Gọi E,F lần lượt là hình chiếu vuông góc của của P lên CA,AB. Đường thẳng qua A vuông góc với AP cắt đường tròn (O) tại D khác A, PD cắt EF tại Q, M là trung điểm của BC.

a) Chứng minh $MQ//AP$

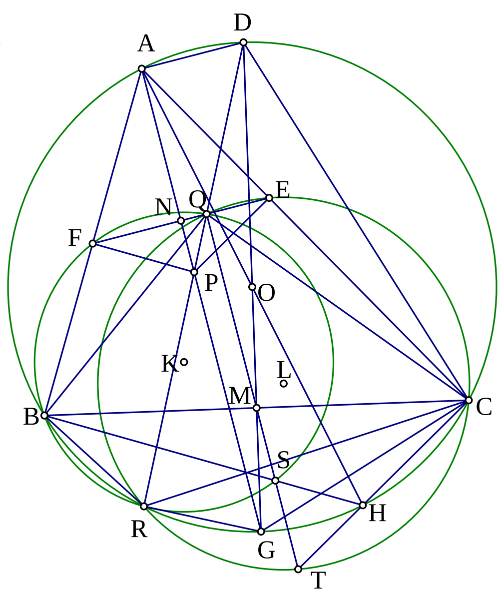
b) Gọi K , L lần lượt là đường tròn ngoại tiếp các tam giác BQF,CQE. Chứng minh K , L có một điểm chung với (O).

c) Giả sử QM cắt K , L lần lượt tại S,T khác Q. Chứng minh rằng đường trung trực của ST và AO cắt nhau trên O .

Phân tích định hướng giải:

a). Kéo dài AP cắt (O) tại G dễ thấy GD là đường kính của (O).

Ta thấy các tam giác $\Delta APE\backsim\Delta DGC$ có các đường cao tương ứng là EN,CM nên $\dfrac{MG}{MD}=\dfrac{NP}{NA}$. Mặt khác ta cũng có $\dfrac{NP}{NA}=\dfrac{QP}{QD}$ do $NQ//AD$



từ đó suy ra $\dfrac{MG}{MD} = \dfrac{QP}{QD} \Rightarrow QM\ / \ /GN \equiv AP$.

b). Gọi R là giao điểm của (O) với DP. Ta sẽ chứng minh các tứ giác $BFQR, CEQR$ khi đó các đường tròn $(K),(L),(O)$ sẽ có một điểm chung là R. Thật vậy vì $AD\ / \ /\mathrm{EF}$ nên $BAD = BFQ$ mà $BAD = 180 - BRD$ $\Rightarrow BFQ + BRD = 180^0$ hay tứ giác $BFQR$ nội tiếp. Tương tự ta cũng có: $CEQR$ nội tiếp nên K, L có một điểm chung với (O) là R.

c).Dựng đường kính AH của (O). Ta sẽ chứng minh đường trung trực của ST đi qua H. Điều này có nghĩa là tam giác SHT cân tại H.

Tứ giác $FQSB$ nội tiếp mà $SQF = 90^0 \Rightarrow BS \perp BF \perp BH \Rightarrow B,S,H$ thẳng hàng. Tương tự C,T,H thẳng hàng nên

$SHT = QSB = AFE = AEF = QRC = STH \Rightarrow \Delta SHT$ cân (đpcm).