CHỦ ĐỀ 1 – RÚT GỌN BIỂU THỨC

DẠNG 1: RÚT GỌN BIỂU THỨC:

Bước 1 Đặt điều kiện xác định của biểu thức:

- $\dfrac{1}{\sqrt{x}-a}(a>0)$: Điều kiện xác định là $\begin{cases} x \ge 0 \\ \sqrt{x} \ne a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x \ne a^2 \end{cases}$
- $\dfrac{1}{\sqrt{x}+a}(a>0)$: Điều kiện là $x \ge 0$
- Gặp phép chia phân thức thì đổi thành phép nhân sẽ xuất hiện thêm mẫu mới nên dạng này ta thường làm bước đặt điều kiện sau.

Bước 2 Phân tích mẫu thành tích, quy đồng mẫu chung.
Bước 3 Gộp tử, rút gọn và kết luận.

Ví dụ 1: Rút gọn biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \dfrac{3x+9}{x-9}$

Lời giải

Điều kiện: $x \ge 0, x \ne 9$

Có $A = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \dfrac{3x+9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$

$= \dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} + \dfrac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} - \dfrac{3x+9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$

$= \dfrac{x-3\sqrt{x}+2x+6\sqrt{x}-3x-9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \dfrac{3(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \dfrac{3}{\sqrt{x}+3}$

Vậy $A = \dfrac{3}{\sqrt{x}+3}$ với điều kiện $x \ge 0, x \ne 9$

Ví dụ 2: Rút gọn biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \dfrac{2}{\sqrt{x}+3} - \dfrac{9\sqrt{x}-3}{x+\sqrt{x}-6}$

Lời giải

Có $x+\sqrt{x}-6=x+3\sqrt{x}-2\sqrt{x}-6=\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)-2(\sqrt{x}+3)=(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)$

Điều kiện: $x\geq 0, x\neq 4$

Có $A=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{2}{\sqrt{x}+3}-\dfrac{9\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)}$

$=\dfrac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)}+\dfrac{2(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)}-\dfrac{9\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)}$

$=\dfrac{x+4\sqrt{x}+3+2\sqrt{x}-4-9\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)}=\dfrac{x-3\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)}$

$=\dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)}=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}$

Vậy: $A=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}$ với điều kiện $x\geq 0, x\neq 4$

Ví dụ 3: Rút gọn biểu thức $P=1:\left(\dfrac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right)$

Lời giải

Có $P=1:\left(\dfrac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right)$

$=1:\left(\dfrac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}+\dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}-\dfrac{x+\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}\right)$

$=1:\dfrac{x+2+x-1-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}=1:\dfrac{x-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}$

$=1\cdot\dfrac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}=\dfrac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$. Điều kiện $x>0, x\neq 1$.

Vậy $P=\dfrac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ với điều kiện $x>0, x\neq 1$.

Chú ý: Câu này có phép chia phân thức nên đoạn cuối xuất hiện thêm $\sqrt{x}$ ở mẫu, do đó ta làm bước đặt điều kiện sau.

Ví dụ 4: Rút gọn biểu thức $P=\left[\dfrac{a+3\sqrt{a}+2}{(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-1)}-\dfrac{a+\sqrt{a}}{a-1}\right]:\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{a}-1}\right)$

Lời giải

Có $P=\left[\dfrac{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}+2)}{(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-1)}-\dfrac{a+\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}\right]:\left(\dfrac{\sqrt{a}-1}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}+\dfrac{\sqrt{a}+1}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}\right)$

$=\left[\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}-\dfrac{a+\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}\right]:\dfrac{\sqrt{a}-1+\sqrt{a}+1}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}$

$=\left[\dfrac{(\sqrt{a}+1)^2}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}-\dfrac{a+\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}\right]:\dfrac{2\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}$

$=\dfrac{a+2\sqrt{a}+1-a-\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}\cdot\dfrac{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}{2\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt{a}+1}{2\sqrt{a}}$

Điều kiện $a > 0, a \neq 1$

Vậy $P = \dfrac{\sqrt{a}+1}{2\sqrt{a}}$ với điều kiện $a > 0, a \neq 1$.

DẠNG 2: CHO GIÁ TRỊ CỦA X. TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC

Bước 1 Đặt điều kiện và chỉ ra giá trị đã cho của x thoả mãn điều kiện.

Bước 2 Tính $\sqrt{x}$ rồi thay giá trị của $x, \sqrt{x}$ vào biểu thức đã rút gọn.

Bước 3 Tính kết quả của biểu thức bằng cách trục hết căn thức ở mẫu và kết luận.

Ví dụ 1: Tính giá trị của biểu thức $P = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$ khi:

a) $x = 36$

b) $x = 6 - 2\sqrt{5}$

c) $x = \dfrac{2}{2+\sqrt{3}}$

d) $x = \dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$

e) $x = \dfrac{6}{3-\sqrt{7}} - 2\sqrt{7} - \dfrac{\sqrt{28}-\sqrt{21}}{2-\sqrt{3}}$

f) $x = \dfrac{4}{\sqrt{3}+2} - \dfrac{4}{\sqrt{3}-2}$

g) $x = \dfrac{\sqrt[3]{27}+\sqrt[3]{-1}}{18}$

h) $x - 7\sqrt{x} + 10 = 0$

Lời giải

Điều kiện $x \geq 0, x \neq 4$

a)Có $x = 36$ thoả mãn điều kiện.

Khi đó $\sqrt{x} = 6$ thay vào P ta được $P = \dfrac{6+1}{6-2} = \dfrac{7}{4}$.

Vậy $P = \dfrac{7}{4}$ khi $x = 36$.

b)Có $x = 6 - 2\sqrt{5} = (\sqrt{5}-1)^2$ thoả mãn điều kiện

Khi đó $\sqrt{x} = \left|\sqrt{5}-1\right| = \sqrt{5} - 1 (\text{do} \sqrt{5} > 1)$

Thay vào P ta được $P = \dfrac{\sqrt{5}-1+1}{\sqrt{5}-1-2} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-3} = -\dfrac{5+3\sqrt{5}}{4}$

Vậy $P = -\dfrac{5+3\sqrt{5}}{4}$ khi $x = 6 - 2\sqrt{5}$.

c)Có $x = \dfrac{2}{2+\sqrt{3}} = \dfrac{2(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \dfrac{4-2\sqrt{3}}{4-3} = (\sqrt{3}-1)^2$ thoả mãn điều kiện.

Khi đó $\sqrt{x} = \left|\sqrt{3}-1\right| = \sqrt{3} - 1 (\text{do} \sqrt{3} > 1)$.

Thay vào P ta được $P = \dfrac{\sqrt{3}-1+1}{\sqrt{3}-1-2} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-3} = -\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

Vậy $P = -\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ khi $x = \dfrac{2}{2+\sqrt{3}}$

d)Có $x = \dfrac{2-\sqrt{3}}{2} = \dfrac{4-2\sqrt{3}}{4} = \left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2$ thoả mãn điều kiện

Khi đó $\sqrt{x} = \left|\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right| = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} (\text{do} \sqrt{3} > 1)$

Thay vào P, ta được $P=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}+1}{\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}-2}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-5}=-\dfrac{4+3\sqrt{3}}{11}$

Vậy $P=-\dfrac{4+3\sqrt{3}}{11}$ khi $x=\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$.

e) Có $x=\dfrac{6}{3-\sqrt{7}}-2\sqrt{7}-\dfrac{\sqrt{28}-\sqrt{21}}{2-\sqrt{3}}=\dfrac{6\left(3+\sqrt{7}\right)}{\left(3-\sqrt{7}\right)\left(3+\sqrt{7}\right)}-2\sqrt{7}-\dfrac{\sqrt{7}\left(\sqrt{4-\sqrt{3}}\right)}{2-\sqrt{3}}$

$=\dfrac{18+6\sqrt{7}}{9-7}-3\sqrt{7}=9$ (Thỏa mãn điều kiện) $\Rightarrow \sqrt{x}=3$.

Thay vào P, ta được: $P=\dfrac{3+1}{3-2}=4$.

Vậy $P=4$ khi $x=\dfrac{6}{3-\sqrt{7}}-2\sqrt{7}-\dfrac{\sqrt{28}-\sqrt{21}}{2-\sqrt{3}}$.

f) Có $x=\dfrac{4}{\sqrt{3}+2}-\dfrac{4}{\sqrt{3}-2}=\dfrac{4\left(\sqrt{3}-2\right)-4\left(\sqrt{3}+2\right)}{\left(\sqrt{3}+2\right)\left(\sqrt{3}-2\right)}=\dfrac{-16}{3-4}=16$ thỏa mãn điều kiện.

Khi đó $\sqrt{x}=4$ thay vào P, ta được $P=\dfrac{4+1}{4-2}=\dfrac{5}{2}$.

Vậy $P=\dfrac{5}{2}$ khi $x=\dfrac{4}{\sqrt{3}+2}-\dfrac{4}{\sqrt{3}-2}$.

g) Có $x=\dfrac{\sqrt[3]{27}+\sqrt[3]{-1}}{18}=\dfrac{3-1}{18}=\dfrac{2}{18}=\dfrac{1}{9}$ thỏa mãn điều kiện.

Khi đó $\sqrt{x}=\dfrac{1}{3}$, thay vào P, ta được $P=\dfrac{\dfrac{1}{3}+1}{\dfrac{1}{3}-2}=-\dfrac{4}{5}$.

Vậy $P=-\dfrac{4}{5}$ khi $x=\dfrac{\sqrt[3]{27}+\sqrt[3]{-1}}{18}$.

h) Có $x-7\sqrt{x}+10=0 \Leftrightarrow x-2\sqrt{x}-5\sqrt{x}+10=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-5\right)=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}=2, \sqrt{x}=5 \Leftrightarrow x=4$ (loại), $x=25$ (thỏa mãn).

Khi đó $\sqrt{x}=5$, thay vào P ta được $P=\dfrac{5+1}{5-2}=\dfrac{6}{3}=2$.

Vậy $P=2$ khi x thỏa mãn $x-7\sqrt{x}+10=0$.

DẠNG 3: ĐƯA VỀ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

Bước 1: Đặt điều kiện để biểu thức xác định.
Bước 2: Quy đồng mẫu chung
Bước 3: Bỏ mẫu, giải x, đối chiếu điều kiện và kết luận.

Đưa về phương trình tích

Ví dụ 1. Cho biểu thức $P=\dfrac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$. Tìm x để $P=\dfrac{13}{3}$.

Lời giải

Điều kiện: $x>0$.

Có $P=\dfrac{13}{3}\Leftrightarrow\dfrac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}=\dfrac{13}{3}\Leftrightarrow\dfrac{3\left(x+\sqrt{x}+1\right)}{3\sqrt{x}}=\dfrac{13\sqrt{x}}{3\sqrt{x}}$

$\Leftrightarrow 3x+3\sqrt{x}+3=13\sqrt{x}\Leftrightarrow 3x-10\sqrt{x}+3=0\Leftrightarrow 3x-9\sqrt{x}-\sqrt{x}+3=0$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-3\right)-\left(\sqrt{x}-3\right)=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-3\right)\left(3\sqrt{x}-1\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=3\\ \sqrt{x}=\dfrac{1}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=9\\ x=\dfrac{1}{9}\end{array}\right.$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy $x=9,x=\dfrac{1}{9}$ thì $P=\dfrac{13}{3}$.

Ví dụ 2. Cho biểu thức $\mathrm{M}=\dfrac{3}{\sqrt{\mathrm{x}}-2}$. Tìm x để $\mathrm{M}=\dfrac{\sqrt{\mathrm{x}}}{8}$.

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 0,x\ne 4$.

Có $M=\dfrac{\sqrt{x}}{8}\Leftrightarrow\dfrac{3}{\sqrt{x}-2}=\dfrac{\sqrt{x}}{8}\Leftrightarrow\dfrac{24}{8\left(\sqrt{x}-2\right)}=\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}{8\left(\sqrt{x}-2\right)}$

$\Leftrightarrow 24=x-2\sqrt{x}\Leftrightarrow x-2\sqrt{x}+1=25\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-1\right)^2=25$

$\Leftrightarrow\sqrt{x}-1=\pm 5\Leftrightarrow\sqrt{x}=-4$ (loại), $\sqrt{x}=6\Leftrightarrow x=36$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy $x=36$ thì $M=\dfrac{\sqrt{x}}{8}$.

Phương trình có chứa trị tuyệt đối

- $\left|f(x)\right| = a$ (với $a > 0$ và a là số cụ thể) thì giải luôn hai trường hợp $\left|f(x)\right| = \pm a$.
- $\left|f(x)\right| = g(x)$ (với $g(x)$ là một biểu thức chứa x):

__*Cách 1:*__ Xét 2 trường hợp để phá trị tuyệt đối:

Trường hợp 1: Xét $f(x) \geq 0$ thì $\left|f(x)\right| = f(x)$ nên ta được $f(x) = g(x)$.

Giải và đối chiếu điều kiện $f(x) \geq 0$.

Trường hợp 2: Xét $f(x) < 0$ thì $\left|f(x)\right| = -f(x)$ nên ta được $-f(x) = g(x)$.

Giải và đối chiếu điều kiện $f(x) < 0$.

__*Cách 2:*__ Đặt điều kiện $g(x) \geq 0$ và giải hai trường hợp $f(x) = \pm g(x)$.

Ví dụ 1. Cho 2 biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5}$ và $B = \dfrac{1}{\sqrt{x}-5}$. Tìm x để $A = B.\left|x-4\right|$.

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0, x \neq 25$.

Có $A = B.\left|x-4\right| \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5} = \dfrac{\left|x-4\right|}{\sqrt{x}-5} \Leftrightarrow \left|x-4\right| = \sqrt{x}+2$.

__*Cách 1:*__ Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Xét $x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$ thì $\left|x-4\right| = x-4$ nên ta được:

$$x-4 = \sqrt{x}+2 \Leftrightarrow x-\sqrt{x}-6 = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+2\right) = 0 \Leftrightarrow x = 9 \text{ (thỏa mãn).}$$

Trường hợp 2: Xét $x-4 < 0 \Leftrightarrow x < 4$ thì $\left|x-4\right| = -x+4$ nên ta được:

$$-x+4 = \sqrt{x}+2 \Leftrightarrow x+\sqrt{x}-2 = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn).}$$

__*Cách 2:*__ Vì $\sqrt{x}+2 > 0$ với mọi $x \geq 0, x \neq 25$ nên $\left|x-4\right| = \sqrt{x}+2$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-4 = \sqrt{x}+2 \\ x-4 = -\sqrt{x}-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\sqrt{x}-6 = 0 \\ x+\sqrt{x}-2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+2\right) = 0 \\ \left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 9 \\ x = 1 \end{array}\right. \text{(thỏa mãn).}$$

__*Cách 3:*__ Nhận xét $\left|x-4\right| = \left|\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)\right| = \left|\sqrt{x}-2\right|\left(\sqrt{x}+2\right)$

nên $\left|x-4\right| = \sqrt{x}+2 \Leftrightarrow \left|\sqrt{x}-2\right|\left(\sqrt{x}+2\right) = \sqrt{x}+2 \Leftrightarrow \left|\sqrt{x}-2\right| = 1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}-2 = \pm 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} = 3 \\ \sqrt{x} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 9 \\ x = 1 \end{array}\right. \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy $x = 9, x = 1$ thì $A = B.\left|x-4\right|$.

Ví dụ 2. Cho 2 biểu thức $A = \dfrac{x-3}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$. Tìm x để $A = B.\left|\sqrt{x}-3\right|$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0, x \neq 1$.

Có $A = B.\left|\sqrt{x} - 3\right| \Leftrightarrow \dfrac{x-3}{\sqrt{x}-1} = \dfrac{\left|\sqrt{x}-3\right|}{\sqrt{x}-1} \Leftrightarrow x - 3 = \left|\sqrt{x} - 3\right|$.

Cách 1: Ta xét 2 trường hợp:

Trường hợp 1: Xét $\sqrt{x} - 3 \ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \ge 3 \Leftrightarrow x \ge 9$ thì $\left|\sqrt{x}-3\right| = \sqrt{x} - 3$ nên ta được

$\sqrt{x} - 3 = x - 3 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 1$ (loại).

Trường hợp 2: Xét $\sqrt{x} - 3 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow x < 9$ thì $\left|\sqrt{x}-3\right| = -\sqrt{x} + 3$

nên ta được $\sqrt{x} - 3 = -x + 3 \Leftrightarrow x + \sqrt{x} - 6 = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+3\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$ (thỏa mãn).

Vậy $x = 4$ thì $A = B.\left|\sqrt{x}-3\right|$.

Cách 2: Điều kiện: $x - 3 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 3$. Khi đó $\left|\sqrt{x}-3\right| = x - 3$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} - 3 = x - 3 \\ \sqrt{x} - 3 = -x + 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \sqrt{x} = 0 \\ x + \sqrt{x} - 6 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right) = 0 \\ \left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+3\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right.$$

Kết hợp các điều kiện được $x = 4$.

Đưa về bình phương dạng $m^2 + n^2 = 0$ (hoặc $m^2 + \sqrt{n} = 0$)

Bước 1 Đặt điều kiện để biểu thức xác định và đưa phương trình về dạng

$$m^2 + n^2 = 0 \text{ (hoặc } m^2 + \sqrt{n} = 0\text{)}$$

Bước 2: Lập luận $m^2 \ge 0, n^2 \ge 0$ (hoặc $\sqrt{n} \ge 0$) nên

$$m^2 + n^2 \ge 0 \text{ (hoặc } m^2 + \sqrt{n} \ge 0\text{)}.$$

Bước 3: Khẳng định $m^2 + n^2 = 0$ (hoặc $m^2 + \sqrt{n} = 0$) chỉ xảy ra khi đồng thời

$$\begin{cases} m = 0 \\ n = 0 \end{cases}$$

Bước 4: Giải ra x, đối chiếu điều kiện và kết luận.

Ví dụ 1. Cho biểu thức $P = \dfrac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\sqrt{x}}$. Tìm x để $P.\sqrt{x} = 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x-4}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \ge 4$.

Có $P.\sqrt{x} = 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x-4} \Leftrightarrow \dfrac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\sqrt{x}}.\sqrt{x} = 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x-4}$

$\Leftrightarrow x + 2\sqrt{x} + 1 = 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x-4} \Leftrightarrow x - 4\sqrt{x} + 4 + \sqrt{x-4} = 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-2\right)^2 + \sqrt{x-4} = 0.$

Vì $\left(\sqrt{x}-2\right)^2 \ge 0, \sqrt{x-4} \ge 0$ nên $\left(\sqrt{x}-2\right)^2 + \sqrt{x-4} \ge 0.$

Do đó $\left(\sqrt{x}-2\right)^2 + \sqrt{x-4} = 0$ chỉ xảy ra khi $\begin{cases} \sqrt{x} - 2 = 0 \\ \sqrt{x-4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4$ (thỏa mãn).

Vậy $x = 4$ thì $P.\sqrt{x} = 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x-4}$.

Ví dụ 2. Cho biểu thức $P=\dfrac{x+3}{\sqrt{x}}$. Tìm x để $P.\sqrt{x}+x-1=2\sqrt{3x}+2\sqrt{x-2}$.

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 2$.

Có $P.\sqrt{x}+x-1=2\sqrt{3x}+2\sqrt{x-2}\Leftrightarrow \dfrac{x+3}{\sqrt{x}}.\sqrt{x}+x-1=2\sqrt{3x}+2\sqrt{x-2}$

$$\Leftrightarrow x+3+x-1=2\sqrt{3x}+2\sqrt{x-2}\Leftrightarrow \left(x+3-2\sqrt{3x}\right)+\left(x-1-2\sqrt{x-2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-2\sqrt{3x}+3\right)+\left(x-2-2\sqrt{x-2}+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{x-2}-1\right)^2=0.$$

Vì $\left(\sqrt{x}-\sqrt{3}\right)^2\ge 0,\left(\sqrt{x-2}-1\right)^2\ge 0$ nên $\left(\sqrt{x}-\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{x-2}-1\right)^2\ge 0$.

Do đó $\left(\sqrt{x}-\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{x-2}-1\right)^2=0$ chỉ xảy ra khi

$$\begin{cases}\sqrt{x}=\sqrt{3}\\ \sqrt{x-2}=1\end{cases}\Leftrightarrow x=3 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy $x=3$ thì $P.\sqrt{x}+x-1=2\sqrt{3x}+2\sqrt{x-2}$.

Ví dụ 3. Cho biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$. Tìm x để $81x^2-18x=A-9\sqrt{x}+4$.

Lời giải

Điều kiện: $x>0$.

Có $81x^2-18x=A-9\sqrt{x}+4\Leftrightarrow 81x^2-18x=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}-9\sqrt{x}+4$

$$\Leftrightarrow 81x^2-18x+1=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}-9\sqrt{x}+5$$

$$\Leftrightarrow (9x-1)^2=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}-\frac{9x}{\sqrt{x}}+\frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$\Leftrightarrow (9x-1)^2+\frac{9x-6\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}=0$$

$$\Leftrightarrow (9x-1)^2+\frac{\left(3\sqrt{x}-1\right)^2}{\sqrt{x}}=0.$$

Vì $(9x-1)^2\ge 0,\dfrac{\left(3\sqrt{x}-1\right)^2}{\sqrt{x}}\ge 0$ nên $(9x-1)^2+\dfrac{\left(3\sqrt{x}-1\right)^2}{\sqrt{x}}\ge 0$.

Do đó $(9x-1)^2+\dfrac{\left(3\sqrt{x}-1\right)^2}{\sqrt{x}}=0$ chỉ xảy ra khi $\begin{cases}9x-1=0\\ 3\sqrt{x}-1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{9}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy $x=\dfrac{1}{9}$ thì $81x^2-18x=A-9\sqrt{x}+4$.

Đánh giá vế này $\ge$ một số, vế kia $\le$ số đó

Bước 1: Đưa một vế về bình phương và sử dụng

$$A^2 \pm m \geq 0; -A^2 \pm m \leq 0 \pm m.$$

Bước 2: Đánh giá vế còn lại dựa vào bất đẳng thức quen thuộc như:

- Bất đẳng thức Cosi: $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ hay $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$ $\forall\ a \geq 0, b \geq 0.$

  Dấu "=" xảy ra khi $a = b.$
- Bất đẳng thức Bunhia: $(a.x+b.y)^2 \leq \left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)$ $\forall\ a,\ b,\ x,\ y.$

  Dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b}.$
- $\sqrt{a}+\sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$ $\forall\ a \geq 0,\ b \geq 0.$

  Dấu "=" xảy ra khi $a = 0$ hoặc $b = 0$.

Bước 3: Khẳng định phương trình chỉ xảy ra khi các dấu "=" ở bước 1 và bước 2 đồng thời xảy ra.

Ví dụ 1. Cho biểu thức $A = \dfrac{4}{\sqrt{x}-1}$ và $B = x\sqrt{x} - x$. Tìm x để $x^2+6 = A.B + \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$.

Lời giải

Điều kiện: $1 < x \leq 3.$

Có $x^2+6 = A.B + \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$

$\Leftrightarrow x^2+6 = \dfrac{4}{\sqrt{x}-1}.x\left(\sqrt{x}-1\right) + \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$

$\Leftrightarrow x^2-4x+6 = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$ (*)

* Có VT (*) $= x^2-4x+4+2 = (x-2)^2+2 \geq 2.$

* Chứng minh VP(*) ≤ 2:

Cách 1: (Dùng bất đăng thức Cosi)

Xét $\left[\text{VP}(*)\right]^2 = x-1+2\sqrt{(x-1)(3-x)}+3-x = 2+2\sqrt{(x-1)(3-x)}$

$$\leq 2+2.\frac{(x-1)+(3-x)}{2} = 4 \Rightarrow \text{VP}(*) \leq 2.$$

Cách 2: (Dùng bất đẳng thức Bunhia cốpxki)

Xét $\left[\text{VP}(*)\right]^2 = \left(1.\sqrt{x-1}+1.\sqrt{3-x}\right)^2 \leq \left(1^2+1^2\right)(x-1+3-x) = 4 \Rightarrow \text{VP}(*) \leq 2.$

Như vậy VT(*) ≥ 2, VP$(*) \leq 2$ nên (*) chỉ xảy ra khi

$$\begin{cases} x-2=0 \\ \sqrt{x-1} = \sqrt{3-x} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 \text{ (thỏa mãn)}.$$

Vậy $x = 2$ thì $x^2+6 = A.B + \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$.

Ví dụ 2. Cho biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$. Tìm x để $A.(\sqrt{x}-2) + 5\sqrt{x} = x+4+\sqrt{x+16}+\sqrt{9-x}.$

Lời giải

Điều kiện: $0 \leq x \leq 9,\ x \neq 4.$

Có $A.(\sqrt{x}-2) + 5\sqrt{x} = x+4+\sqrt{x+16}+\sqrt{9-x}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}.(\sqrt{x}-2)+5\sqrt{x}=x+4+\sqrt{x+16}+\sqrt{9-x}$$

$$\Leftrightarrow -x+6\sqrt{x}-4=\sqrt{x+16}+\sqrt{9-x} \qquad (*)$$

Có $\text{VT}(*)=-x+6\sqrt{x}-9+5=-\left(\sqrt{x}-3\right)^2+5\le 5.$

Ta sẽ chứng minh $\text{VP}\left(*\right)\ge 5$

Cách 1: (Chỉ ra $\left[\text{VP}(*)\right]^2\ge 25$)

Xét $\left[\text{VP}(*)\right]^2=x+16+2\sqrt{\left(x+16\right)\left(9-x\right)}+9-x$

$$=25+2\sqrt{\left(x+16\right)\left(9-x\right)}\ge 25\Rightarrow \text{VP}(*)\ge 5.$$

Cách 2: (Sử dụng $\sqrt{a}+\sqrt{b}\ge\sqrt{a+b}\ \forall\ a\ge 0,\ b\ge 0$)

Có $\text{VP}(*)=\sqrt{x+16}+\sqrt{9-x}\ge\sqrt{x+16+9-x}=\sqrt{25}=5\Rightarrow \text{VP}(*)\ge 5.$

Như vậy $\text{VT}(*)\le 5,\ \text{VP}(*)\ge 5$ nên (*) chỉ xảy ra khi

Do đó (*) chỉ xảy ra khi $\begin{cases}\sqrt{x}-3=0\\ \sqrt{\left(x+16\right)\left(9-x\right)}=0\end{cases}\Leftrightarrow x=9$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy $x=9$ thì $A.(\sqrt{x}-2)+5\sqrt{x}=x+4+\sqrt{x+16}+\sqrt{9-x}.$

DẠNG 4: ĐƯA VỀ GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Đưa về bất phương trình dạng $\frac{f(x)}{g(x)}>0;\frac{f(x)}{g(x)}\ge 0;\frac{f(x)}{g(x)}<0;\frac{f(x)}{g(x)}\le 0$

Bước 1: Đặt điều kiện để biểu thức xác định.

Bước 2: Quy đồng mẫu chung, chuyển hết sang một vế để được dạng

$$\frac{f(x)}{g(x)}>0;\frac{f(x)}{g(x)}\ge 0;\frac{f(x)}{g(x)}<0;\frac{f(x)}{g(x)}\le 0$$

Bước 3: Giải các bất phương trình này, đối chiếu điều kiện và kết luận.

Một số tình huống thường gặp

+) $\frac{-3}{\sqrt{x}-2}>0\Leftrightarrow -3$ và $\sqrt{x}-2$ cùng dấu.

Vì $-3<0$ nên ta được $\sqrt{x}-2<0$ và giải ra $0\le x<4$.

+) $\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2}\le 0$

Vì $\sqrt{x}+2>0$ nên ta được $\sqrt{x}-3\le 0$ và giải ra $0\le x\le 9$.

+) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-4}<0\Leftrightarrow\sqrt{x}$ và $\sqrt{x}-4$ trái dấu, rồi giải hai trường hợp:

$\begin{cases}\sqrt{x}<0\\ \sqrt{x}-4>0\end{cases}$ trường hợp này vô nghiệm.

$\begin{cases}\sqrt{x}>0\\ \sqrt{x}-4<0\end{cases}$ trường hợp này giải được $0<x<16$.

+) $\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-5}\ge 0$ giải hai trường hợp:

$\begin{cases}\sqrt{x}-1\ge 0\\ \sqrt{x}-5>0\end{cases}$ trường hợp này giải được $x>25$.

$\begin{cases}\sqrt{x}-1\le 0\\ \sqrt{x}-5<0\end{cases}$ trường hợp này giải được $0\le x\le 1$.

Ví dụ 1. Cho biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$. Tìm $x\in\mathbb{Z}$ để $A<1$.

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 0, x\ne 4$.

Có $A<1\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}-1<0\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2}<0\Leftrightarrow \dfrac{3}{\sqrt{x}-2}<0$

$\Leftrightarrow 3$ và $\sqrt{x}-2$ trái dấu, mà $3>0$ nên ta được

$\sqrt{x}-2<0\Leftrightarrow \sqrt{x}<2\Leftrightarrow 0\le x<4$.

Do $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy $x\in\{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$ là các giá trị cần tìm.

Ví dụ 2. Cho biểu thức $M=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$. Tìm x để $M\ge\dfrac{2}{3}$.

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 0$.

Có $M\ge\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{2}{3}\ge 0\Leftrightarrow \dfrac{3\left(\sqrt{x}-1\right)}{3\left(\sqrt{x}+2\right)}-\dfrac{2\left(\sqrt{x}+2\right)}{3\left(\sqrt{x}+2\right)}\ge 0\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}-7}{3\left(\sqrt{x}+2\right)}\ge 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}-7\ge 0$ (do $\sqrt{x}+2>0$) $\Leftrightarrow \sqrt{x}\ge 7\Leftrightarrow x\ge 49$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy $x\ge 49$ thì $M\ge\dfrac{2}{3}$

Ví dụ 3. Cho biểu thức $P=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$. Tìm x để $\sqrt{P}<\dfrac{1}{2}$.

<u>Chú ý:</u> Dạng $\sqrt{P}<m\ \left(m>0\right)$, trước hết ta cần giải điều kiện phụ $P\ge 0$ để $\sqrt{P}$ xác định, sau đó mới giải $P<m^2$.

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 0$.

* Để $\sqrt{P}$ xác định ta cần có $P\ge 0\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}\ge 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}-2\ge 0$ (do $\sqrt{x}+1>0$) $\Leftrightarrow \sqrt{x}\ge 2\Leftrightarrow x\ge 4$ (thỏa mãn điều kiện).

* Khi đó $\sqrt{P}<\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow P<\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{1}{4}<0\Leftrightarrow \dfrac{4\left(\sqrt{x}-2\right)}{4\left(\sqrt{x}+1\right)}-\dfrac{1\left(\sqrt{x}+1\right)}{4\left(\sqrt{x}+1\right)}<0$

$$\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}-9}{4\left(\sqrt{x}+1\right)}<0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x}-9<0 \text{ (do } \sqrt{x}+1>0\text{)} \Leftrightarrow \sqrt{x}<3 \Leftrightarrow 0\le x<9.$$

Kết hợp điều kiện $x\ge 4$, ta được $4\le x<9$.

Đưa về bình phương dạng $m^2\le 0; -m^2\ge 0; m^2+n^2\le 0; m^2+\sqrt{n}\le 0$.

Bước 1: Đặt điều kiện để biểu thức xác định và đưa bất phương trình về dạng

$$m^2\le 0; -m^2\ge 0; m^2+n^2\le 0; m^2+\sqrt{n}\le 0$$

Bước 2: lập luận để giải dấu "=" xảy ra:

- Dạng $m^2\le 0$:

Lập luận: Vì $m^2\ge 0$ nên khẳng định $m^2\le 0$ chỉ xảy ra khi $m^2=0$.

- Dạng $-m^2\ge 0$:

Lập luận $-m^2\le 0$ nên khẳng định $-m^2\ge 0$ chỉ xảy ra khi $m=0$.

- Dạng $m^2+n^2\le 0$ (hoặc $m^2+\sqrt{n}\le 0$):

  Lập luận $m^2\ge 0,\ n^2\ge 0$ (hoặc $\sqrt{n}\ge 0$) nên $m^2+n^2\ge 0$ (hoặc $m^2+\sqrt{n}\ge 0$) nên khẳng định $m^2+n^2\le 0$ (hoặc $m^2+\sqrt{n}\le 0$) chỉ xảy ra khi đồng thời

  $$\begin{cases} m=0 \\ n=0 \end{cases}$$

Bước 3: Giải ra x, đối chiếu điều kiện và kết luận.

Ví dụ 1. Cho 2 biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1}$ và $B=\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$. Tìm x để $\dfrac{x}{4}+5\le\dfrac{A}{B}$.

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 0,\ x\ne 1$.

Có $\dfrac{x}{4}+5\le\dfrac{A}{B} \Leftrightarrow \dfrac{x}{4}+5\le\dfrac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1}:\dfrac{1}{\sqrt{x}-1} \Leftrightarrow \dfrac{x}{4}+5\le\sqrt{x}+4$

$$\Leftrightarrow \frac{x-4\sqrt{x}+4}{4}\le 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-2\right)^2\le 0,$$

Mà $\left(\sqrt{x}-2\right)^2\ge 0$ nên $\left(\sqrt{x}-2\right)^2\le 0$ chỉ xảy ra khi $\sqrt{x}-2=0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}=2 \Leftrightarrow x=4 \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy $x=4$ thì $\dfrac{x}{4}+5\le\dfrac{A}{B}$.

Ví dụ 2. Cho biểu thức $P=\dfrac{\sqrt{a}+1}{2\sqrt{a}}$. Tìm a để $\dfrac{1}{P}-\dfrac{\sqrt{a}+1}{8}\ge 1$.

Lời giải

Điều kiện: $a>0$.

Có $\dfrac{1}{P}-\dfrac{\sqrt{a}+1}{8}\ge 1 \Leftrightarrow \dfrac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}-\dfrac{\sqrt{a}+1}{8}-1\ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{16\sqrt{a}}{8(\sqrt{a}+1)}-\dfrac{(\sqrt{a}+1)^2}{8(\sqrt{a}+1)}-\dfrac{8(\sqrt{a}+1)}{8(\sqrt{a}+1)}\ge 0$

$$\Leftrightarrow \frac{-a+6\sqrt{a}-9}{8(\sqrt{a}+1)}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{-(\sqrt{a}-3)^2}{8(\sqrt{a}+1)}\ge 0$$

Vì $\frac{-(\sqrt{a}-3)^2}{8(\sqrt{a}+1)}\le 0$ với mọi $a>0$ nên $\frac{-(\sqrt{a}-3)^2}{8(\sqrt{a}+1)}\ge 0$ chỉ xảy ra khi $\sqrt{a}-3=0\Leftrightarrow \sqrt{a}=3\Leftrightarrow a=9$ (thoả mãn điều kiện)

Vậy $a=9$ thì $\frac{1}{P}-\frac{\sqrt{a}+1}{8}\ge 1$

4.3 Tìm x để $|A|=A,|A|=-A,|A|>A,|A|>-A$

Ghi nhớ:

• $\|A\|=A\Leftrightarrow A\ge 0$ • $\|A\|=-A\Leftrightarrow A\le 0$	• $\|A\|>A\Leftrightarrow A<0$ • $\|A\|>-A\Leftrightarrow A>0$

Ví dụ 1: Cho biểu thức $P=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$. Tìm x để $|P|>P$

Điều kiện: $x\ge 0, x\ne 4$.

Có $|P|>P$ khi $P<0\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}<0 \Leftrightarrow \sqrt{x},\sqrt{x}-2$ trái dấu.

- $\begin{cases}\sqrt{x}>0\\ \sqrt{x}-2<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ \sqrt{x}<2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x<4\end{cases}\Leftrightarrow 0<x<4$ (thoả mãn điều kiện)
- $\begin{cases}\sqrt{x}<0\\ \sqrt{x}-2>0\end{cases}$ (loại).

Vậy $0<x<4$ thì $|P|>P$

***Ví dụ* 2.** Cho biểu thức $A=\frac{x-6\sqrt{x}+9}{x-9}$. Tìm $x\in\mathbb{Z}$ và x lớn nhất để $|A|=-A$

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 0, x\ne 9$

Có $A=\frac{x-6\sqrt{x}+9}{x-9}=\frac{\left(\sqrt{x}-3\right)^2}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}=\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}$

<u>Cách 1</u> (sử dụng $|A|=-A\Leftrightarrow A\le 0$

Có $|A|=-A\Leftrightarrow A\le 0\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}\le 0$

Mà $\sqrt{x}+3>0$ nên ta được $\sqrt{x}-3\le 0\Leftrightarrow \sqrt{x}\le 3\Leftrightarrow 0\le x\le 9$

Kết hợp với điều kện, ta được $0\le x<9$. Do $x\in\mathbb{Z}$ và x lớn nhất nên ta tìm được $x = 8$.

<u>Cách 2</u> (Xét hai trường hợp để phá dấu giá trị tuyệt đối)

Có $|A|=-A\Leftrightarrow\left|\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}\right|=-\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}\Leftrightarrow\left|\sqrt{x}-3\right|=-\sqrt{x}+3$

Trường hợp 1: Xét $\sqrt{x}-3\ge 0\Leftrightarrow \sqrt{x}\ge 3\Leftrightarrow x>9$ (do $x\ne 9$) thì

$\left|\sqrt{x}-3\right|=-\sqrt{x}+3\Leftrightarrow \sqrt{x}-3=-\sqrt{x}+3\Leftrightarrow \sqrt{x}=3\Leftrightarrow x=9$ (loại)

Trường hợp 2: Xét $\sqrt{x}-3<0 \Leftrightarrow \sqrt{x}<3 \Leftrightarrow 0\le x<9$ (do $x\ne 9$) thì

$\left|\sqrt{x}-3\right| = -\sqrt{x}+3 \Leftrightarrow -\sqrt{x}+3=-\sqrt{x}+3 \Leftrightarrow 0=0$ (luôn đúng)

Do đó ta được $0\le x<9$. Do $x\in\mathbb{Z}$ và x lớn nhất nên ta tìm được $x = 8$.

Vậy $x=8$ là giá trị cần tìm

DẠNG 5: SO SÁNH, CHỨNG MINH BẰNG CÁCH XÉT HIỆU

Để chứng minh $X>Y\left(X\ge Y\right)$ ta chứng minh hiệu $X-Y>0\left(X-Y\ge 0\right)$

Để chứng minh $X<Y\left(X\le Y\right)$ ta chứng minh hiệu $X-Y<0\left(X-Y\le 0\right)$

Để so sánh hai biểu thức X và Y ta xét dấu của hiệu $X-Y$

Để so sánh P với P^2 ta xét hiệu $P-P^2=P\left(1-P\right)$ rồi thay x vào và xét dấu

- Để so sánh P và $\sqrt{P}$ (khi $\sqrt{P}$ có nghĩa) ta biến đổi hiệu

  $P-\sqrt{P}=\sqrt{P}\left(\sqrt{P}-1\right)=\sqrt{P}.\dfrac{P-1}{\sqrt{P}+1}$

  Sau đó nhận xét $\sqrt{P}\ge 0,\ \sqrt{P}+1\ge 0$ nên ta cần xét dấu của $P-1$.

Ví dụ 1. Cho biểu thức $A=\dfrac{a+3}{2\left(\sqrt{a}+1\right)}$. Chứng minh $A\ge 1$.

Lời giải

Điều kiện: $a\ge 0$.

Xét hiệu $A-1=\dfrac{a+3}{2\left(\sqrt{a}+1\right)}-1=\dfrac{a+3}{2\left(\sqrt{a}+1\right)}-\dfrac{2\left(\sqrt{a}+1\right)}{2\left(\sqrt{a}+1\right)}$

$$=\frac{a-2\sqrt{a}+1}{2\left(\sqrt{a}+1\right)}=\frac{\left(\sqrt{a}-1\right)^2}{2\left(\sqrt{a}+1\right)}\ge 0\ \forall a\ge 0 \Rightarrow A\ge 1 \Rightarrow dpcm.$$

Ví dụ 2. Cho biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}$ và $B=\dfrac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$. Khi $A>0$, hãy so sánh B với 3.

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 0; x\ne 1$.

Khi $A>0 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}>0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-1$ và $\sqrt{x}+3$ cùng dấu.

Mà $\sqrt{x}+3>0$ nên ta được $\sqrt{x}-1>0 \Leftrightarrow \sqrt{x}>1 \Leftrightarrow x>1$ (thoả mãn).

Xét hiệu $B-3=\dfrac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-3=\dfrac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{3.\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}-1}$

$$=\frac{x-4\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1}=\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)^2}{\sqrt{x}-1}\ge 0 \forall x>1 \text{ nên } B\ge 3.$$

Vậy khi $A>0$ thì $B\ge 3$.

_Ví dụ 3._ Cho biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-5}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}-1}$. Chứng minh $\left(A.B+\dfrac{x-5}{\sqrt{x}-5}\right).\dfrac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}}>2.$

Lời giải

Điều kiện: $x>0, x\neq 1, x\neq 25$.

Xét hiệu $\left(A.B+\dfrac{x-5}{\sqrt{x}-5}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}}-2=\left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-5}\cdot\dfrac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{x-5}{\sqrt{x}-5}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}}-2$

$$=\left(\frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}-5}\cdot+\frac{x-5}{\sqrt{x}-5}\right)\cdot\frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}}-2=\frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5}\cdot\frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}}-2=\frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}-2$$

$$=\frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}=\frac{\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}{\sqrt{x}}>0$$, với mọi $x>0, x\neq 1, x\neq 25$

Vậy $\left(A.B+\dfrac{x-5}{\sqrt{x}-5}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}}>2$.

_Ví dụ 4._ Cho hai biểu thức $A=\dfrac{2\sqrt{x}+1}{3\sqrt{x}+1}$ và $B=\dfrac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$.

So sánh giá trị của biểu thức $\dfrac{B}{A}$ và 3.

Lời giải

Điều kiện: $x\geq 0$.

Xét hiệu $\dfrac{B}{A}-3=\dfrac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}:\dfrac{2\sqrt{x}+1}{3\sqrt{x}+1}-3=\dfrac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}\cdot\dfrac{3\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}+1}-3$

$$=\frac{3\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}-\frac{3\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}+1}=\frac{-2}{\sqrt{x}+1}<0$$ với mọi $x\geq 0$.

Vậy $\dfrac{B}{A}<3$.

_Ví dụ 5._ Cho biểu thức $P=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$. So sánh P và P^2.

Lời giải

Điều kiện: $x\geq 0, x\neq 4$.

Xét hiệu $P-P^2=P(1-P)=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}\left(1-\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}\right)=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}\cdot\dfrac{-3}{\sqrt{x}-2}$

$$=\frac{-3\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)^2}<0\quad \forall\, x\geq 0, x\neq 4$$ nên $P<P^2$.

Vậy $P<P^2$.

Ví dụ 6. Cho biểu thức $P=\dfrac{\sqrt{x}-2}{x}$. Khi $\sqrt{P}$ xác định, hãy so sánh $\sqrt{P}$ và P.

Lời giải

Điều kiện: $x>0$.

$\sqrt{P}$ xác định khi $P\ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}-2}{x}\ge 0$, mà $x>0$ nên $\sqrt{x}-2\ge 0$ $\Leftrightarrow x\ge 4$.

Xét hiệu $\sqrt{P}-P=\sqrt{P}(1-\sqrt{P})=\sqrt{P}.\dfrac{1-P}{1+\sqrt{P}}$.

Do $\sqrt{P}\ge 0$, $1+\sqrt{P}>0$

và $1-P=1-\dfrac{\sqrt{x}-2}{x}=\dfrac{x-\sqrt{x}+2}{x}=\dfrac{\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}{x}>0,\forall x\ge 4.$

suy ra $\sqrt{P}-P\ge 0$ nên $\sqrt{P}\ge P$.

Vậy $\sqrt{P}\ge P$.

DẠNG 6: TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC

6.1 Dựa vào $x\ge 0$ để Tìm giá trị lớn nhất của $P=a+\dfrac{b}{\sqrt{x}+c}(b>0,c>0)$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $Q=a-\dfrac{b}{\sqrt{x}+c}(b>0,c>0)$

Bước 1. Đặt điều kiện $x\ge 0$ và khử x ở tử để đưa P, Q về dạng trên.

Bước 2. Chuyển từng bước từ $\sqrt{x}\ge 0$ sang $P\le a+\dfrac{b}{c}$; $Q\ge a-\dfrac{b}{c}$ như sau:

Max P	Min Q
Có $\sqrt{x}\ge 0\ \ \forall x\ge 0$ $\Rightarrow \sqrt{x}+c\ge c\,\forall x\ge 0$ $\Rightarrow \dfrac{b}{\sqrt{x}+c}\le \dfrac{b}{c}\forall x\ge 0$ $\Rightarrow a+\dfrac{b}{\sqrt{x}+c}\le a+\dfrac{b}{c}\forall x\ge 0$ $\Rightarrow P\le a+\dfrac{b}{c}\forall x\ge 0$.	Có $\sqrt{x}\ge 0\ \ \forall x\ge 0$ $\Rightarrow \sqrt{x}+c\ge c\,\forall x\ge 0$ $\Rightarrow \dfrac{b}{\sqrt{x}+c}\le \dfrac{b}{c}\forall x\ge 0$ $\Rightarrow -\dfrac{b}{\sqrt{x}+c}\ge -\dfrac{b}{c}\forall x\ge 0$ $\Rightarrow a-\dfrac{b}{\sqrt{x}+c}\ge a-\dfrac{b}{c}\forall x\ge 0$ $\Rightarrow Q\ge a-\dfrac{b}{c}\forall x\ge 0.$

<u>Bước 3:</u> Kết luận MaxP = a + $\dfrac{b}{c}$, MinQ = a $-$ $\dfrac{b}{c}$ khi $x=0$ (thỏa mãn điều kiện)

Ví dụ 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$. Từ đó, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=\dfrac{2}{P+3}+3P$

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 0$

* Tìm MinP:

Có $P=\dfrac{\sqrt{x}+1-3}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{3}{\sqrt{x}+1}=1-\dfrac{3}{\sqrt{x}+1}$

Do $\sqrt{x}\ge 0\quad \forall\, x\ge 0 \Rightarrow \sqrt{x}+1\ge 1\ \ \forall\, x\ge 0$

$\Rightarrow \dfrac{3}{\sqrt{x}+1}\le \dfrac{3}{1}\ \forall x\ge 0 \Rightarrow -\dfrac{3}{\sqrt{x}+1}\ge -3\ \forall x\ge 0$

$\Rightarrow 1-\dfrac{3}{\sqrt{x}+1}\ge 1-3\ \forall x\ge 0 \Rightarrow P\ge -2\ \forall x\ge 0$

Vậy $Min\ P = -2$ khi $x=0$ (thỏa mãn điều kiện)

* Tìm MinQ:

<u>**Cách 1:**</u> (Dùng bất đẳng thức Cô Si)

Có $Q=\dfrac{2}{P+3}+3P=2\left[\dfrac{1}{P+3}+(P+3)\right]+P-6$

Do $P\ge -2\Rightarrow P+3>0\Rightarrow \dfrac{1}{P+3}+(P+3)\ge 2\sqrt{\dfrac{1}{P+3}\cdot(P+3)}=2$

Vì $P\ge -2\Rightarrow P-6\ge -2-6=-8\Rightarrow Q\ge 4-8=-4$

Vậy $MinQ=-4$ khi $P=-2$ hay $x=0$ (thỏa mãn điều kiện)

<u>**Cách 2:**</u> (Thay $P=-2$ được $Q=-4$ nên ta dự đoán $MinQ=-4$)

Xét hiệu $Q-(-4)=\dfrac{2}{P+3}+3P+4=\dfrac{2}{P+3}+\dfrac{(3P+4)(P+3)}{P+3}=\dfrac{3P^2+13P+14}{P+3}$

$=\dfrac{3P^2+6P+7P+14}{P+3}=\dfrac{3P(P+2)+7(P+2)}{P+3}=\dfrac{(P+2)(3P+7)}{P+3}$

Do $P\ge -2\Rightarrow P+2\ge 0,\ P+3>0,\ 3P+7>0\Rightarrow Q-(-4)\ge 0\Rightarrow Q\ge -4$

Vậy $MinQ=-4$ khi $P=-2$ hay $x=0$ (thỏa mãn điều kiện)

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M=\dfrac{2\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+2}$. Từ đó tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $N=M+\dfrac{12}{M}$.

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 0$.

* Tìm Max M:

Có $M=\dfrac{2\sqrt{x}+4+2}{\sqrt{x}+2}=\dfrac{2\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{2}{\sqrt{x}+2}=2+\dfrac{2}{\sqrt{x}+2}$.

Do $\sqrt{x}\ge 0\ \forall x\ge 0\Rightarrow \sqrt{x}+2\ge 2\ \forall x\ge 0\Rightarrow \dfrac{2}{\sqrt{x}+2}\le \dfrac{2}{2}\ \forall x\ge 0$

$\Rightarrow 2+\dfrac{2}{\sqrt{x}+2}\le 2+1\ \forall x\ge 0\Rightarrow M\le 3\ \forall x\ge 0$.

Vậy MaxM=3 khi $x=0$ (thỏa mãn điều kiện).

* Tìm MinN:

<u>***Cách 1***</u> (Dùng bất đẳng thức Côsi)

Có $N=M+\dfrac{12}{M}=\left(\dfrac{4M}{3}+\dfrac{12}{M}\right)-\dfrac{M}{3}\cdot$

Do $2\sqrt{x}+6>0,\ \sqrt{x}+2>0\Rightarrow M=\dfrac{2\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+2}>0\Rightarrow \dfrac{4M}{3}+\dfrac{12}{M}\ge 2\sqrt{\dfrac{4M}{3}\cdot\dfrac{12}{M}}=8\cdot$

Vì $M\le 3\Rightarrow -\dfrac{M}{3}\ge -1\Rightarrow N\ge 8-1=7\cdot$

Vậy $MinN=7$ khi $M=3$ hay $x=0$ (thỏa mãn điều kiện).

Cách 2 (Thay $M=3$ được $N=7$ nên ta dự đoán $MinN=7$)

Xét hiệu $N-7=M+\frac{12}{M}-7=\frac{M^2-7M+12}{M}=\frac{M^2-3M-4M+12}{M}$

$$=\frac{M(M-3)-4(M-3)}{M}=\frac{(M-3)(M-4)}{M}.$$

Do $0<M\le 3\Rightarrow M-3\le 0, M-4<0, M>0\Rightarrow N-7\ge 0\Rightarrow N\ge 7\cdot$

Vậy $MinN=7$ khi $M=3$ hay $x=0$ (thỏa mãn điều kiện).

Ví dụ 3. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=\frac{5}{\sqrt{x}+3}$. Từ đó tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B=3A+\frac{10}{A}$.

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 0$.

*) Tìm MaxA:

Có $\sqrt{x}\ge 0\forall x\ge 0$

$\Rightarrow \sqrt{x}+3\ge 3\forall x\ge 0 \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{x}+3}\le\frac{5}{3}\forall x\ge 0$

$\Rightarrow A\le\frac{5}{3}\forall x\ge 0$

Vậy MaxA $=\frac{5}{3}$ khi $x=0$ (thỏa mãn điều kiện)

+) Tìm MinB:

Cách 1. (Dùng bất đẳng thức Cô si)

Có $B=3A+\frac{10}{A}=\left(\frac{18A}{5}+\frac{10}{A}\right)-\frac{3A}{5}$

Do $5>0,\sqrt{x}+3>0\Rightarrow A=\frac{5}{\sqrt{x}+3}>0\Rightarrow\frac{18A}{5}+\frac{10}{A}\ge 2\sqrt{\frac{18A}{5}.\frac{10}{A}}=12$

Vì $A\le\frac{5}{3}\Rightarrow -\frac{3A}{5}\ge -1\Rightarrow B\ge 12-1=11.$

Vậy Min B = 11 khi $A=\frac{5}{3}$ hay $x=0$ (thỏa mãn điều kiện).

Cách 2. (Thay $A=\frac{5}{3}$ được $B=11$ nên ta dự đoán MinB = 11)

Xét hiệu $B-11=3A+\frac{10}{A}-11=\frac{3A^2-11A+10}{A}=\frac{3A^2-5A-6A+10}{A}$

$$=\frac{A(3A-5)-2(3A-5)}{A}=\frac{(3A-5)(A-2)}{A}$$

Do $0\le A\le\frac{5}{3}\Rightarrow 3A-5\le, A-2<0, A>0\Rightarrow B-11\ge 0\Rightarrow B\ge 11.$

Vậy Min B = 11 khi $A=\frac{5}{3}$ hay $x=0$ (thỏa mãn điều kiện).

Ví dụ 4: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S=-\frac{2}{\sqrt{x}+4}$. Từ đó tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=14S+\frac{3}{S+1}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \ge 0$

* Tìm Min$S$:

Có $\sqrt{x} \ge 0 \quad \forall x \quad \Rightarrow \sqrt{x}+4 \quad \forall x \ge 0 \quad \Rightarrow \dfrac{2}{\sqrt{x}+4} \le \dfrac{2}{4} \quad \forall x \ge 0$

$\Rightarrow -\dfrac{2}{\sqrt{x}+4} \ge -\dfrac{1}{2} \quad \forall x \ge 0 \qquad \Rightarrow S \ge -\dfrac{1}{2} \quad \forall x \ge 0$

Vậy $MinS = -\dfrac{1}{2}$ khi $x = 0$ (thỏa mãn điều kiện)

* Tìm Min$T$:

Cách 1: (Dùng bất đẳng thức Côsi)

Có $T = \left[12(S+1) + \dfrac{3}{S+1}\right] + 2S - 12$

Do $S \ge -\dfrac{1}{2} \Rightarrow S+1 \ge \dfrac{1}{2} > 0 \Rightarrow 12(S+1) + \dfrac{3}{S+1} \ge 2\sqrt{12(S+1).\dfrac{3}{S+1}} = 12$

Vì $S \ge -\dfrac{1}{2} \Rightarrow 2S \ge -1 \qquad \Rightarrow T \ge 12 - 1 - 12 = -1$

Vậy $MinT = -1$ khi $S = -\dfrac{1}{2}$ hay $x = 0$ (thỏa mãn điều kiện)

Cách 2: (Thay $S = -\dfrac{1}{2}$ được $T = -1$ nên ta dự đoán $MinT = -1$)

Xét hiệu $T - (-1) = 14S + \dfrac{3}{S+1} + 1 = \dfrac{14S^2 + 15S + 4}{S+1} = \dfrac{14S^2 + 7S + 8S + 4}{S+1}$

$= \dfrac{7S(2S+1) + 4(2S+1)}{S+1} = \dfrac{(2S+1)(7S+4)}{S+1}$

Do $S \ge -\dfrac{1}{2} \Rightarrow 2S+1 \ge 0,\ 7S+4 > 0, S+1 > 0 \qquad \Rightarrow T - (-1) \ge 0 \Rightarrow T \ge -1$

Vậy $MinT = -1$ khi $S = -\dfrac{1}{2}$ hay $x = 0$ (thỏa mãn điều kiện)

6.2. Dùng bất đẳng thức Côsi

Bước 1: Khử x ở trên tử.

Bước 2: Dựa vào mẫu để thêm bớt hai vế với một số thích hợp.

Bước 3: Sử dụng bất đẳng thức Côsi $a + b \ge 2\sqrt{ab} \ \forall a, b \ge 0$. Dấu $"="$ xảy ra khi $a = b$.

Ví dụ 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \dfrac{x - \sqrt{x} + 10}{\sqrt{x}+2}$

Lời giải

Điều kiện: $x \ge 0$.

Có $A = \dfrac{x - 4 - \sqrt{x} - 2 + 16}{\sqrt{x}+2} = \dfrac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}+2} - \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} + \dfrac{16}{\sqrt{x}+2}$

$= \sqrt{x} - 3 + \dfrac{16}{\sqrt{x}+2}$ (Mẫu là $\sqrt{x}+2$ nên $\sqrt{x}-3$ cần cộng thêm 5)

Xét $A + 5 = (\sqrt{x}+2) + \dfrac{16}{\sqrt{x}+2}$.

Vì $\sqrt{x}+2>0, \dfrac{16}{\sqrt{x}+2}>0\ \forall x\geq 0$ nên áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$\left(\sqrt{x}+2\right)+\frac{16}{\sqrt{x}+2}\geq 2\sqrt{\left(\sqrt{x}+2\right).\frac{16}{\sqrt{x}+2}}=2\sqrt{16}=8.$$

Suy ra $A+5\geq 8\Rightarrow A\geq 3$.

Vậy $MinA=3$ khi $\left(\sqrt{x}+2\right)=\dfrac{16}{\sqrt{x}+2}\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}+2\right)^2=16\Leftrightarrow x=4$ (thỏa mãn)

Ví dụ 2. Cho $x>25$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\dfrac{x}{\sqrt{x}-5}$

Lời giải

Với $x>25$ thì M luôn xác định.

Có $M=\dfrac{x}{\sqrt{x}-5}=\dfrac{x-25+25}{\sqrt{x}-5}=\dfrac{x-25}{\sqrt{x}-5}+\dfrac{25}{\sqrt{x}-5}=\sqrt{x}+5+\dfrac{25}{\sqrt{x}-5}$.

Xét $M-10=\left(\sqrt{x}+5\right)+\dfrac{25}{\sqrt{x}-5}$.

Với $x>25$ thì $\sqrt{x}-5>0, \dfrac{25}{\sqrt{x}-5}>0$ nên áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$\sqrt{x}-5+\frac{25}{\sqrt{x}-5}\geq 2\sqrt{\left(\sqrt{x}-5\right).\frac{25}{\sqrt{x}-5}}=2\sqrt{25}=10$$

Suy ra $M-10\geq 10 \Rightarrow M\geq 20$.

Vậy MinM = 20 khi $\sqrt{x}-5=\dfrac{25}{\sqrt{x}-5}\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-5\right)^2=25\Leftrightarrow x=100$ (thỏa mãn điều kiện).

Ví dụ 3: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x+3}{\sqrt{x}}$

Lời giải

Điều kiện: $x>0$.

Ta có $P=\dfrac{x+3}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}+\dfrac{3}{\sqrt{x}}$

Vì $\sqrt{x}>0, \dfrac{3}{\sqrt{x}}>0$ nên áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}\geq 2\sqrt{\sqrt{x}.\frac{3}{\sqrt{x}}}=2\sqrt{3} \Rightarrow P\geq 2\sqrt{3}$$

Vậy MinP = $2\sqrt{3}$ khi $\sqrt{x}=\dfrac{3}{\sqrt{x}}\Leftrightarrow x=3$ (thỏa mãn điều kiện).

Ví dụ 4: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}-9\sqrt{x}$

Lời giải

Điều kiện: $x>0$.

Có A = $A=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}-9\sqrt{x}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}-9\sqrt{x}=1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+9\sqrt{x}\right)$.

Vì $9\sqrt{x} > 0, \frac{1}{\sqrt{x}} > 0$ nên áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$9\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{9\sqrt{x}.\frac{1}{\sqrt{x}}} = 2.3 = 6 \Rightarrow -\left(9\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \leq -6$$

$$\Rightarrow 1 - \left(9\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \leq 1 - 6 = -5 \Rightarrow P \leq -5.$$

Vậy MaxA = – 5 khi $9\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow 9x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{9}$ (thỏa mãn điều kiện).

6.3. Đưa về bình phương

- $A^2 \pm m \geq 0 \pm m;\ A^2 + B^2 \pm m \geq 0 + 0 \pm m.$
- $-A^2 \pm m \leq 0 \pm m;\ -A^2 - B^2 \pm m \leq 0 + 0 \pm m.$

Ví dụ 1. Cho biểu thức $P = \frac{x+2}{\sqrt{x}}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = P.\sqrt{x} + x - 2\sqrt{2x} - 2\sqrt{x-1}.$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 1.$

Có $T = P.\sqrt{x} + x - 2\sqrt{2x} - 2\sqrt{x-1} = \frac{x+2}{\sqrt{x}}.\sqrt{x} + x - 2\sqrt{2x} - 2\sqrt{x-1}$

$$= \left(x + 2 - 2\sqrt{2x}\right) + \left(x - 1 - 2\sqrt{x-1} + 1\right) = \left(\sqrt{x} - \sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{x-1} - 1\right)^2 \geq 0.$$

Vậy $MinT = 0$ khi $\begin{cases} \sqrt{x} = \sqrt{2} \\ \sqrt{x-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$ (thỏa mãn điều kiện).

Ví dụ 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C = B - A$ với $A = \frac{2x - 3\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 2}$ và $B = \frac{\sqrt{x^3} - \sqrt{x} + 2x - 2}{\sqrt{x} + 2}$, $x \geq 0, x \neq 4.$

Lời giải

$$A = \frac{2x - 3\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 2} = \frac{2x - 4\sqrt{x} + \sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 2} = \frac{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x} - 2\right) + \sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 2} = 2\sqrt{x} + 1.$$

$$B = \frac{\sqrt{x^3} - \sqrt{x} + 2x - 2}{\sqrt{x} + 2} = \frac{x\sqrt{x} - \sqrt{x} + 2x - 2}{\sqrt{x} + 2} = \frac{\sqrt{x}\left(x - 1\right) + 2\left(x - 1\right)}{\sqrt{x} + 2}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x} + 2\right)\left(x - 1\right)}{\sqrt{x} + 2} = x - 1.$$

Suy ra $C = B - A = x - 2\sqrt{x} - 2 = \left(\sqrt{x} - 1\right)^2 - 3 \geq -3.$

Vậy $MinC = -3$ khi $x = 1$ (thỏa mãn).

6.4. Tìm $x \in N$ để biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{x} - m}$ $(m \in N^*)$ lớn nhất, nhỏ nhất

Chú ý: Tính chất $a \ge b \Rightarrow \frac{1}{a} \le \frac{1}{b}$ chỉ đúng với a và b cùng dương hoặc cùng âm.

Ví dụ:

+) $\sqrt{x}+3 \ge 3 \forall x \ge \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+3} \le \frac{1}{3} \forall x \ge 0$ đúng vì $\sqrt{x}+3$ và 3 cùng dương.

+) $\sqrt{x}-2 \ge -2 \forall x \ge 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}-2} \le \frac{1}{-2} \forall x \ge 0$ sai vì ta chưa biết $\sqrt{x}-2$ và -2 có cùng âm hay không.

Phương pháp giải

*Tìm MaxA: Ta thấy trong hai trường hợp $\sqrt{x}-m>0$ và $\sqrt{x}-m<0$ thì MaxA xảy ra trong trường hợp $\sqrt{x}-m>0 \Rightarrow \sqrt{x}>m \Rightarrow x>m^2$.

Mà $x \in N$ nên $x \ge m^2+1 \Rightarrow \sqrt{x} \ge \sqrt{m^2+1} \Rightarrow \sqrt{x}-m \ge \sqrt{m^2+1}-m>0$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}-m} \le \frac{1}{\sqrt{m^2+1}-m} \Rightarrow A \le \frac{1}{\sqrt{m^2+1}-m}$.

Vậy $MaxA = \frac{1}{\sqrt{m^2+1}-m}$ khi $x=m^2+1$.

*Tìm MinA: Ta thấy trong hai trường hợp $\sqrt{x}-m>0$ và $\sqrt{x}-m<0$ thì MinA xảy ra trong trường hợp $\sqrt{x}-m<0 \Rightarrow \sqrt{x}<m \Rightarrow 0<x<m^2$.

Mà $x \in N$ nên $x \in \{0;1;2;...;m^2-1\}$.

Trường hợp này có hữu hạn giá trị nên ta kẻ bảng để chọn minA.

Ví dụ 1. Tìm $x \in N$ để biểu thức $A = \frac{3}{\sqrt{x}-2}$ đạt giá trị: a) lớn nhất. b) nhỏ nhất.

Lời giải

Điều kiện: $x \in N, x \ne 4$.

a) Ta thấy trong hai trường hợp $\sqrt{x}-2>0$ và $\sqrt{x}-2<0$ thì MaxA xảy ra trong trường hợp $\sqrt{x}-2>0 \Rightarrow \sqrt{x}>2 \Rightarrow x>4$.

Mà $x \in N \Rightarrow x \in \{5;6;7;...\} \Rightarrow x \ge 5 \Rightarrow \sqrt{x} \ge \sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{x}-2 \ge \sqrt{5}-2$

$\Rightarrow \frac{3}{\sqrt{x}-2} \le \frac{3}{\sqrt{5}-2} \Rightarrow A \le \frac{3}{\sqrt{5}-2} = 6+3\sqrt{5}$.

Vậy $MaxA = 6+3\sqrt{5}$ khi $x=5$ (thỏa mãn).

b) Ta thấy trong hai trường hợp $\sqrt{x}-2>0$ và $\sqrt{x}-2<0$ thì MaxA xảy ra trong trường hợp $\sqrt{x}-2<0 \Leftrightarrow \sqrt{x}<2 \Leftrightarrow 0 \le x<4$.

Mà $x \in N \Rightarrow x \in \{0;1;2;3\}$.

x	0	1	2	3
A	$-\frac{3}{2}$	-3	$-\frac{6+3\sqrt{2}}{2}$	$-6-3\sqrt{3}$

Vậy $MinA = -6-3\sqrt{3}$ khi $x=3$ (thỏa mãn).

Ví dụ 2. Tìm $x \in N$ để biểu thức $A = \frac{3}{\sqrt{x}-2}$ đạt giá trị: a) lớn nhất b) nhỏ nhất

Lời giải

Điều kiện: $x \in N, x \ne 9$.

Có $P=\dfrac{\sqrt{x}-3+5}{\sqrt{x}-3}=\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{5}{\sqrt{x}-3}=1+\dfrac{5}{\sqrt{x}-3}$.

a) Ta thấy trong hai trường hợp $\sqrt{x}-3>0$ và $\sqrt{x}-3<0$ thì MaxP xảy ra trong trường hợp $\sqrt{x}-3>0\Leftrightarrow\sqrt{x}>3\Leftrightarrow x>9$.

   Mà $x\in N\Rightarrow x\in\{10;11;12;...\}\Rightarrow x\geq 10\Rightarrow\sqrt{x}\geq\sqrt{10}$

   $\Rightarrow\sqrt{x}-3\geq\sqrt{10}-3\Rightarrow\dfrac{5}{\sqrt{x}-3}\leq\dfrac{5}{\sqrt{10}-3}\Rightarrow 1+\dfrac{5}{\sqrt{x}-3}\leq 1+\dfrac{5}{\sqrt{10}-3}$

   $\Rightarrow P\leq\dfrac{\sqrt{10}+2}{\sqrt{10}-3}=16+5\sqrt{10}.$

   Vậy $MaxP=16+5\sqrt{10}$ khi $x=10$ (thỏa mãn).

b) Ta thấy trong hai trường hợp $\sqrt{x}-3>0$ và $\sqrt{x}-3<0$ thì minP xảy ra trong trường hợp $\sqrt{x}-3<0\Leftrightarrow\sqrt{x}<3\Leftrightarrow 0\leq x<9$.

   Mà $x\in N\Rightarrow x\in\{0;1;2;...;8\}$.

x	0	1	2	...	8
P	$-\dfrac{2}{3}$	$-\dfrac{3}{2}$	$-\dfrac{8+5\sqrt{2}}{7}$	...	$-14-10\sqrt{2}$

Vậy $MinP=-14-10\sqrt{2}$ khi $x=8$ (thỏa mãn).

Ví dụ 3. Tìm $x\in N$ để biểu thức $M=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ đạt giá trị: a) lớn nhất b) nhỏ nhất

Lời giải

Điều kiện: $x\in N, x\neq 1$.

Có $M=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=1+\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$.

a) Ta thấy trong hai trường hợp $\sqrt{x}-1>0$ và $\sqrt{x}-1<0$ thì MaxM xảy ra trong trường hợp $\sqrt{x}-1>0\Rightarrow\sqrt{x}>1\Rightarrow x>1$.

   Mà $x\in N\Rightarrow x\in\{2;3;4;...\}\Rightarrow x\geq 2\Rightarrow\sqrt{x}\geq\sqrt{2}\Rightarrow\sqrt{x}-1\geq\sqrt{2}-1$

   $\Rightarrow\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\leq\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}\Rightarrow\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}+1\leq\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}+1\Rightarrow M\leq\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=2+\sqrt{2}.$

   Vậy $MaxM=2+\sqrt{2}$ khi $x=2$ (thỏa mãn).

b) Ta thấy trong hai trường hợp $\sqrt{x}-1>0$ và $\sqrt{x}-1<0$ thì MinM xảy ra trong trường hợp $\sqrt{x}-1<0\Rightarrow\sqrt{x}<1\Rightarrow 0\leq x<1$.

   Mà $x\in N\Rightarrow x=0\Rightarrow MinM=\dfrac{0}{0-1}=0.$

   Vậy $MinM=0$ khi $x=0$ (thỏa mãn).

DẠNG 7: TÌM X ĐỂ P NHẬN GIÁ TRỊ LÀ SỐ NGUYÊN

7.1. Tìm $x \in Z$ **để** $P = a + \dfrac{b}{c\sqrt{x}+d} \in Z(a,b,c,d \in Z)$

Bước 1 Đặt điều kiện, khử x ở trên tử, đưa P về dạng như trên.

Bước 2 Xét hai trường hợp

Trường hợp 1: Xét $x \in Z$ nhưng $\sqrt{x} \notin Z$

$\Rightarrow \dfrac{b}{c\sqrt{x}+d}$ là số vô tỷ $\Rightarrow a + \dfrac{b}{c\sqrt{x}+d}$ là số vô tỷ

$\Rightarrow$ P là số vô tỷ $\Rightarrow$ P $\notin \mathbb{Z}$ (loại)

Trường hợp 2: Xét x $\in \mathbb{Z}$ và $\sqrt{x} \in \mathbb{Z}$ thì P $\in \mathbb{Z}$ khi $\Rightarrow \dfrac{b}{c\sqrt{x}+d} \in \mathbb{Z} \Rightarrow c\sqrt{x}+d \in$ Ư (b)

Ví dụ 1: Tìm x $\in \mathbb{Z}$ để biểu thức $A = \dfrac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}$ nhận giá trị là một số nguyên.

Lời giải:

Điều kiện : $x \geq 0$

Có $A = \dfrac{2\sqrt{x}+6-7}{\sqrt{x}+3} = \dfrac{2\left(\sqrt{x}+3\right)}{\sqrt{x}+3} - \dfrac{7}{\sqrt{x}+3} = 2 - \dfrac{7}{\sqrt{x}+3}$

Trường hợp 1: Xét x $\in \mathbb{Z}$ nhưng $\sqrt{x} \notin \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \sqrt{x}$ là số vô tỷ $\Rightarrow \sqrt{x}+3$ là số vô tỷ

=> $\dfrac{7}{\sqrt{x}+3}$ là số vô tỷ $2 - \dfrac{7}{\sqrt{x}+3}$ là số vô tỷ

$\Rightarrow A$ là số vô tỷ $\Rightarrow A \notin \mathbb{Z}$ (loại)

Trường hợp 2: Xét x $\in \mathbb{Z}$ và $\sqrt{x} \in \mathbb{Z}$ thì $A \in \mathbb{Z}$ khi $\dfrac{7}{\sqrt{x}+3} \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \sqrt{x}+3 \in$ Ư (7)= $\{\pm 1; \pm 7\}$ mà $\sqrt{x}+3 \geq 3$ nên ta được:

$\sqrt{x}+3 = 7 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 16$ (thỏa mãn)

Vậy $x = 16$ là giá trị cần tìm.

Chú ý:

- P nguyên âm khi $\begin{cases} P\in\mathbb{Z} \\ P>0 \end{cases}$

  Bước 1: Giải $P \in \mathbb{Z}$ giống như ví dụ 1.

  Bước 2: Kẻ bảng để chọn P>0 hoặc giải P>0 rồi kết hợp $P \in \mathbb{Z}$

- P là số tự nhiên khi $\begin{cases} P\in\mathbb{Z} \\ P\geq 0 \end{cases}$

  Bước 1. Giải $P \in \mathbb{Z}$ giống như ví dụ 1.

  Bước 2: Kẻ bảng để chọn $P \geq 0$ hoặc giải $P \geq 0$ rồi kết hợp $P \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 2: Tìm x $\in \mathbb{Z}$ để biểu thức $M = \dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}$ nhận giá trị nguyên âm

Lời giải:

$$M = \frac{\sqrt{x}-3+6}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-3} + \frac{6}{\sqrt{x}-3} = 1 + \frac{6}{\sqrt{x}-3}$$

M nguyên âm khi $\begin{cases} M\in\mathbb{Z} \\ M<0 \end{cases}$

- $M \in \mathbb{Z}$:

Trường hợp 1: Xét x $\in\mathbb{Z}$ nhưng $\sqrt{x}\notin\mathbb{Z}$

$\Rightarrow \sqrt{x}$ là số vô tỷ $\Rightarrow \sqrt{x}-3$ là số vô tỷ

=> $\frac{6}{\sqrt{x}-3}$ là số vô tỷ $1+\frac{6}{\sqrt{x}-3}$ là số vô tỷ

$\Rightarrow M$ là số vô tỷ $\Rightarrow M\notin\mathbb{Z}$ (loại)

Trường hợp 2: Xét x $\in\mathbb{Z}$ và $\sqrt{x}\in\mathbb{Z}$

=> $M\in\mathbb{Z}$ khi $\frac{6}{\sqrt{x}-3}\in\mathbb{Z}\Rightarrow\sqrt{x}-3\in$ Ư (6)= $\{\pm1;\pm2;\pm3;\pm6\}$

$\sqrt{x}-3$	1	-1	2	-2	3	-3	6	-6
$\sqrt{x}$	4	2	5	1	6	0	9	-3
x	16	4	25	1	36	0	81	ϕ

$\Rightarrow x\in\{0;1;4;16;25;36;81\}$ (thỏa mãn điều kiện)

- M <0:

Cách 1: (Kẻ bảng để thử trực tiếp các giá trị)

x	0	1	4	16	25	36	81
M	-1	-2	-7	7	4	3	2

Từ bảng trên ta được $x\in\{0;1;4\}$ thì M có giá trị là số nguyên âm

Cách 2: (Giải M<0)

$M<0\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}<0\Leftrightarrow\sqrt{x}-3<0\left(do\sqrt{x}+3>0\right)\Leftrightarrow\sqrt{x}<3\Leftrightarrow0\le x\le9$ Kết hợp với

$x\in\{0;1;4;16;25;36;81\}$ ta được $x\in\{0;1;4\}$

Vậy $x\in\{0;1;4\}$ là các giá trị cần tìm.

Ví dụ 3: Tìm x $\in\mathbb{Z}$ để biểu thức $P=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$ nhận giá trị là một số tự nhiên.

Lời giải:

Điều kiện $x\ge0$; $x\ne9$

Có $P=\frac{2\sqrt{x}-4+4}{\sqrt{x}-2}=\frac{2\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}-2}+\frac{4}{\sqrt{x}-2}$

P nhận giá trị là một số tự nhiên khi $\begin{cases} P\in\mathbb{Z} \\ P\ge0 \end{cases}$

- $P\in\mathbb{Z}$:

Trường hợp 1: Xét x $\in\mathbb{Z}$ nhưng $\sqrt{x}\notin\mathbb{Z}$

$\Rightarrow \sqrt{x}$ là số vô tỷ $\Rightarrow \sqrt{x}-2$ là số vô tỷ

=> $\frac{4}{\sqrt{x}-2}$ là số vô tỷ $2+\frac{4}{\sqrt{x}-2}$ là số vô tỷ

$\Rightarrow P$ là số vô tỷ $\Rightarrow P\notin\mathbb{Z}$ (loại)

Trường hợp 2: Xét x $\in\mathbb{Z}$ và $\sqrt{x}\in\mathbb{Z}$

=> $P\in\mathbb{Z}$ khi $\frac{4}{\sqrt{x}-2}\in\mathbb{Z}\Rightarrow\sqrt{x}-2\in$ Ư (4)= $\{\pm1;\pm2;\pm4\}$

$\sqrt{x}-2$	1	-1	2	-2	4	-4
$\sqrt{x}$	3	1	4	0	6	-2
x	9	1	16	0	36	ϕ

$\Rightarrow x \in \{0;1;9;16;36\}$ (thỏa mãn điều kiện)

- P≥ 0:

  Cách 1: (Kẻ bảng để thử trực tiếp các giá trị)

x	0	1	9	16	36
P	0	-2	6	4	3

  Từ bảng trên ta được $x \in \{0;9;16;36\}$ thì M có giá trị là một số tự nhiên

  Cách 2 (Giải P≥ 0)

$$P \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2\sqrt{x} \geq 0 \\ \sqrt{x}-2 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2\sqrt{x} \leq 0 \\ \sqrt{x}-2 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0 \\ x > 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq 0 \\ x < 4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 4 \\ x = 0 \end{array}\right.$$

  Kết hợp với $x \in \{0;1;9;16;36\}$ ta được $x \in \{0;9;16;36\}$

  Vậy $x \in \{0;9;16;36\}$ là các giá trị cần tìm

Chú ý: Dạng tìm x $\in \mathbb{Z}$ để P = $a\sqrt{x}+b+\dfrac{m}{c\sqrt{x}+d} \in \mathbb{Z}\left(a,b,c,d,m \in \mathbb{Z}\right)$ thì khi giải ta vẫn phải xét trường hợp x $\in \mathbb{Z}$, $\sqrt{x} \notin \mathbb{Z}$ và trường hợp x $\in \mathbb{Z}$ và $\sqrt{x} \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 4: Tìm x $\in \mathbb{Z}$ để biểu thức $F = \dfrac{x-2}{\sqrt{x}-3} \in \mathbb{Z}$

Lời giải:

Điều kiện : $x \geq 0$; $x \neq 9$

Có $F = \dfrac{x-9+7}{\sqrt{x}-3} = \sqrt{x}+3+\dfrac{7}{\sqrt{x}-3}$

Trường hợp 1: Xét x =2 => F=0$\in \mathbb{Z}$ => x =2 (thỏa mãn)

Trường hợp 2: Xét $x \neq 2$; x $\in \mathbb{Z}$ và $\sqrt{x} \notin \mathbb{Z}$ $\dfrac{7}{\sqrt{x}+3} \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \sqrt{x}$ là số vô tỷ $\Rightarrow \sqrt{x}-3$ là số vô tỷ

Mà x-2 là số nguyên khác 0 nên $\dfrac{x-2}{\sqrt{x}-3}$ là số vô tỷ

$\Rightarrow F$ là số vô tỷ $\Rightarrow F \notin \mathbb{Z}$ (loại)

Trường hợp 3: Xét x $\in \mathbb{Z}$ và $\sqrt{x} \in \mathbb{Z}$

Vì $\sqrt{x}+3 \in \mathbb{Z}$ nên $F \in \mathbb{Z}$ khi $\dfrac{7}{\sqrt{x}-3} \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow \sqrt{x}-3 \in$ Ư (7)= $\{\pm 1;\pm 7\}$

$\sqrt{x}-3$	1	-1	7	-7
	4	2	10	-4
x	16	4	100	

(thỏa mãn điều kiện)

Vậy là các giá trị cần tìm

7.2. Tìm $x \in \mathbb{R}$ **để** $P = \dfrac{a}{b\sqrt{x}+c} \in \mathbb{Z}\left(a,b,c \in \mathbb{N}^*\right)$

Bước 1 Đặt điều kiện và chặn hai đầu của P:

- $a > 0, b\sqrt{x}+c > 0 \Rightarrow P > 0.$
- $b\sqrt{x}+c \geq c \Rightarrow \dfrac{a}{b\sqrt{x}+c} \leq \dfrac{a}{c} \Rightarrow P \leq \dfrac{a}{c}.$

Như vậy ta chặn hai đầu của P là $0 < P \leq \dfrac{a}{c}$.

Bước 2 Chọn $P \in \mathbb{Z}, 0 < P \leq \dfrac{a}{c}$. Từ đó suy ra x.

Ví dụ 1. Tìm $x \in \mathbb{R}$ để các biểu thức sau nhận giá trị là số nguyên :

$a) A = \dfrac{10}{\sqrt{x}+3}$ b) $P = \dfrac{5}{3\sqrt{x}+2}$

Lời giải

Điều kiện : $x \geq 0$

a)Vì $10 > 0,\ \sqrt{x}+3 > 0$ nên $A > 0$

Mặt khác, $\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+3 \geq 3 \Rightarrow \dfrac{10}{\sqrt{x}+3} \leq \dfrac{10}{3} \Rightarrow A \leq \dfrac{10}{3}$

Do đó $0 < A \leq \dfrac{10}{3}$ nên $A \in \mathbb{Z}$ khi

$$\left[\begin{array}{l} A=1 \\ A=2 \\ A=3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{10}{\sqrt{x}+3}=1 \\ \dfrac{10}{\sqrt{x}+3}=2 \\ \dfrac{10}{\sqrt{x}+3}=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 10=\sqrt{x}+3 \\ 10=2\sqrt{x}+6 \\ 10=3\sqrt{x}+9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}=7 \\ \sqrt{x}=2 \\ \sqrt{x}=\dfrac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=49 \\ x=4 \\ x=\dfrac{1}{9} \end{array}\right. \text{(thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy $x \in \left\{49; 4; \dfrac{1}{9}\right\}$ là giá trị cần tìm.

b)Vì $5 > 0,\ 3\sqrt{x}+2 > 0$ nên $P > 0$

Mặt khác $\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow 3\sqrt{x}+2 \geq 2 \Rightarrow \dfrac{5}{3\sqrt{x}+2} \leq \dfrac{5}{2} \Rightarrow P \leq \dfrac{5}{2}$

Do $0 < P \leq \dfrac{5}{2}$ nên $P \in \mathbb{Z}$ khin

$$\left[\begin{array}{l} P=1 \\ P=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{5}{3\sqrt{x}+2}=1 \\ \dfrac{5}{3\sqrt{x}+2}=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5=3\sqrt{x}+2 \\ 5=6\sqrt{x}+4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}=1 \\ \sqrt{x}=\dfrac{1}{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{1}{36} \end{array}\right. \text{(TMĐK)}$$

Vậy $x \in \left\{1; \dfrac{1}{36}\right\}$ là các giá trị cần tìm.

Chú ý: Với bài toán $x \in \mathbb{R}$ để $m \pm \dfrac{a}{b\sqrt{x}+c} \in \mathbb{Z}$ $(\mathrm{a,b,c} \in \mathbb{N}^*, \mathrm{m} \in \mathbb{Z})$

Bước 1: Lập luận: Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \pm \dfrac{a}{b\sqrt{x}+c} \in \mathbb{Z}$ khi $\dfrac{a}{b\sqrt{x}+c} \in \mathbb{Z}$

Bước 2: Giải theo cách chặn 2 đầu của $\dfrac{a}{b\sqrt{x}+c}$ như **ví dụ 1.**

Ví dụ 2: Tìm $m \in \mathbb{Z}$ để các biểu thức sau có giá trị là số nguyên.

a) $A = \dfrac{2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+1}$. b) $P = \dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2}$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0$

a) Có $A = \dfrac{2\sqrt{x}+2+3}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} + \dfrac{3}{\sqrt{x}+1} = 2 + \dfrac{3}{\sqrt{x}+1}$

Vì $2 \in \mathbb{Z}$ nên $A \in \mathbb{Z}$ khi $B = \dfrac{3}{\sqrt{x}+1} \in \mathbb{Z}$

Vì $3 > 0,\ \sqrt{x}+1 > 0$ nên $B > 0$

Mặt khác $\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+1 \geq 1 \Rightarrow \dfrac{3}{\sqrt{x}+1} \leq \dfrac{3}{2} \Rightarrow B \leq 3$

Do đó: $0 < B \leq 3 \Rightarrow B \in \mathbb{Z}$ khi

$$\left[\begin{array}{l} B=1 \\ B=2 \\ B=3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{3}{\sqrt{x}+1}=1 \\ \dfrac{3}{\sqrt{x}+1}=2 \\ \dfrac{3}{\sqrt{x}+1}=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3=\sqrt{x}+1 \\ 3=2\sqrt{x}+2 \\ 3=3\sqrt{x}+3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}=2 \\ \sqrt{x}=\dfrac{1}{2} \\ \sqrt{x}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=\dfrac{1}{4} \\ x=0 \end{array}\right. \text{(TMĐK)}$$

Vậy $x \in \left\{0;\ \dfrac{1}{4};\ 4\right\}$ là các giá trị cần tìm.

b) Có $P = \dfrac{\sqrt{x}+2-5}{\sqrt{x}+2} = 1 - \dfrac{5}{\sqrt{x}+2}$. Vì $1 \in \mathbb{Z}$ nên $P \in \mathbb{Z}$ khi $Q = \dfrac{5}{\sqrt{x}+2} \in \mathbb{Z}$

Vì $5 > 0;\ \sqrt{x}+2 > 0$ nên $Q > 0$

Mặt khác ta có $\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+2 \geq 2 \Rightarrow \dfrac{5}{\sqrt{x}+2} \leq \dfrac{5}{2} \Rightarrow Q \leq \dfrac{5}{2}$

Do đó, $0 < Q \leq \dfrac{5}{2} \Rightarrow Q \in \mathbb{Z}$ khi

$$\left[\begin{array}{l} Q=1 \\ Q=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{5}{\sqrt{x}+2}=1 \\ \dfrac{5}{\sqrt{x}+2}=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}+2=5 \\ \sqrt{x}+2=\dfrac{5}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}=3 \\ \sqrt{x}=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=9 \\ x=\dfrac{1}{4} \end{array}\right. \text{(TMĐK)}$$

Vậy $x \in \left\{\dfrac{1}{4}, 9\right\}$ là các giá trị cần tìm.

DẠNG 8: TÌ THAM SỐ ĐỂ PHƯƠNG TRÌNH $P = m$ CÓ NGHIỆM

Bước 1: Đặt điều kiện để P xác định

Bước 2: Từ $P = m$ rút $\sqrt{x}$ theo m.

Bước 3: Dựa vào điều kiện của x để giải m.

Ví dụ 1: Cho biểu thức $P=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$. Tìm m để phương trình $P=m$ có nghiệm.

Lời giải

Điều kiện: $x\geq 0$.

Có $P=m\Rightarrow \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}=m\Rightarrow m(\sqrt{x}+2)=\sqrt{x}-1\Rightarrow (\mathrm{m}-1).\sqrt{x}=-2m-1$.

* Xét $m=1\Rightarrow 0.\sqrt{x}=-3$ (loại)

*Xét $m\neq 1\Rightarrow \sqrt{x}=\dfrac{-2m-1}{m-1}$

Do $\sqrt{x}\geq 0$ nên phương trình đã cho có nghiệm khi $\dfrac{-2m-1}{m-1}\geq 0\Leftrightarrow \dfrac{2m+1}{m-1}\leq 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2m+1\leq 0\\ m-1>0\end{cases}\\ \begin{cases}2m+1\geq 0\\ m-1<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m\leq -\dfrac{1}{2}\\ m>1\end{cases}\\ \begin{cases}m\geq -\dfrac{1}{2}\\ m<1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}\leq m<1$. Vậy $-\dfrac{1}{2}\leq m<1$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 2. Cho hai biểu thức $A=\dfrac{4\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-4}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$. Tìm $m\in\mathbb{Z}$ để phương trình $\dfrac{A}{B}=\dfrac{m}{2}$ có nghiệm.

Lời giải

Điều kiện : $x\geq 0, x\neq 4$

Có $\dfrac{A}{B}=\dfrac{m}{2}\Leftrightarrow \dfrac{4\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-4}\cdot\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{m}{2}\Leftrightarrow \dfrac{4}{\sqrt{x}+2}=\dfrac{m}{2}\Leftrightarrow m\left(\sqrt{x}+2\right)=8\Rightarrow m\sqrt{x}=8-2m$

*Xét $m=0\Rightarrow 0.\sqrt{x}=8$ (loại)

*Xét $m\neq 0\Rightarrow \sqrt{x}=\dfrac{8-2m}{m}$

Do $\sqrt{x}\geq 0,\sqrt{x}\neq 2$ nên phương trình đã cho có nghiệm khi $\dfrac{8-2m}{m}\geq 0,\dfrac{8-2m}{m}\neq 2$

+Giải $\dfrac{8-2m}{m}\geq 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}8-2m\geq 0\\ m<0\end{cases}\\ \begin{cases}8-2m\leq 0\\ m>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m\leq 4\\ m<0\end{cases}\\ \begin{cases}m\geq 4\\ m>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow 0<m\leq 4$

+ Giải $\dfrac{8-2\mathrm{m}}{\mathrm{m}}\neq 2\Leftrightarrow 8-2\mathrm{m}\neq 2\mathrm{m}\Leftrightarrow \mathrm{m}\neq 2$

Như vậy $0<\mathrm{m}\leq 4,\mathrm{m}\neq 2,$ mà $\mathrm{m}\in\mathbb{Z}$ nên $\mathrm{m}\in\{1;3;4\}$

Vậy $\mathrm{m}\in\{1;3;4\}$ là giá trị cần tìm.

HỆ THỐNG BÀI TẬP SỬ DỤNG TRONG CHỦ ĐỀ

Bài 1. Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}+\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\dfrac{3x+9}{x-9}$

Bài 2. Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{2}{\sqrt{x}+3}-\dfrac{9\sqrt{x}-3}{x+\sqrt{x}-6}$

Bài 3. Rút gọn biểu thức $P=1:\left(\dfrac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right)$

Bài 4. Rút gọn biểu thức $P=\left[\dfrac{a+3\sqrt{a}+2}{\left(\sqrt{a}+2\right)\left(\sqrt{a}-1\right)}-\dfrac{a+\sqrt{a}}{a-1}\right]:\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{a}-1}\right)$

Bài 5. Tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$ khi:

a) $x=36$

b) $x=6-2\sqrt{5}$

c) $x=\dfrac{2}{2+\sqrt{3}}$

d) $x=\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$

e) $x=\dfrac{6}{3-\sqrt{7}}-2\sqrt{7}-\dfrac{\sqrt{28}-\sqrt{21}}{2-\sqrt{3}}$

f) $x=\dfrac{4}{\sqrt{3}+2}-\dfrac{4}{\sqrt{3}-2}$

g) $x=\dfrac{\sqrt[3]{27}+\sqrt[3]{-1}}{18}$

h) $x-7\sqrt{x}+10=0$

Bài 6. Cho biểu thức: $P=\dfrac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$. Tìm x để $P=\dfrac{13}{3}$.

Bài 7. Cho biểu thức $M=\dfrac{3}{\sqrt{x}-2}$. Tìm x để $M=\dfrac{\sqrt{x}}{8}$

Bài 8. Cho biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5}$ và $B=\dfrac{1}{\sqrt{x}-5}$. Tìm x để $A=B.\left|x-4\right|$.

Bài 9. Cho hai biểu thức $A=\dfrac{x-3}{\sqrt{x}-1}$ và $B=\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$. Tìm x để $A=B.\left|\sqrt{x}-3\right|$.

Bài 10. Cho biểu thức $P=\dfrac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\sqrt{x}}$. Tìm x để $P.\sqrt{x}=6\sqrt{x}-3-\sqrt{x-4}$

Bài 11. Cho biểu thức $P=\dfrac{x+3}{\sqrt{x}}$ .Tìm x để $P.\sqrt{x}+x-1=2\sqrt{3x}+2\sqrt{x-2}$.

Bài 12. Cho biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$. Tìm x để $81x^2-18x=A-9\sqrt{x}+4$

Bài 13. Cho hai biểu thức $A=\dfrac{4}{\sqrt{x}-1}$ và $B=x\sqrt{x}-x$. Tìm x để $x^2+6=A.B+\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}$.

Bài 14. Cho biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$. Tìm x để $A.\left(\sqrt{x}-2\right)+5\sqrt{x}=x+4+\sqrt{x+16}+\sqrt{9-x}$.

Bài 15. Cho biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$. Tìm $x\in\mathbb{Z}$ để $A<1$

Bài 16. Cho biểu thức $M=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$. Tìm x để $M\geq\dfrac{2}{3}$

Bài 17. Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$. Tìm x để $\sqrt{P} < \frac{1}{2}$

Bài 18. Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$. Tìm x để $\frac{x}{4} + 5 \le \frac{A}{B}$.

Bài 19. Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{a}+1}{2\sqrt{a}}$. Tìm a để $\frac{1}{P} - \frac{\sqrt{a}+1}{8} \ge 1$

Bài 20. Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$. Tìm x để $|P| > P$.

Bài 21. Cho biểu thức $A = \frac{x-6\sqrt{x}+9}{x-9}$. Tìm $x \in \mathbb{Z}$ và x lớn nhất để $|A| = -A$

Bài 22. Cho biểu thức $A = \frac{a+3}{2\left(\sqrt{a}+1\right)}$. Chứng minh $A \ge 1$

Bài 23. Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}$ và $B = \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$. Khi A > 0, hãy so sánh B với 3.

Bài 24. Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-5}, B = \frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}-1}$. Chứng minh $\left(A.B + \frac{x-5}{\sqrt{x}-5}\right).\frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}} > 2$

Bài 25. Cho hai biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}+1}{3\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$. So sánh giá trị của biểu thức $\frac{B}{A}$ và 3

Bài 26. Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$. So sánh P và P^2.

Bài 27. Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}-2}{x}$. Khi $\sqrt{P}$ xác định, hãy so sánh $\sqrt{P}$ và P

Bài 28. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$. Từ đó tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = \frac{2}{P+3} + 3P$.

Bài 29. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = \frac{2\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+2}$. Từ đó tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $N = M + \frac{12}{M}$.

Bài 30. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{5}{\sqrt{x}+3}$.

Từ đó tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = 3A + \frac{10}{A}$.

Bài 31. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = -\frac{2}{\sqrt{x}+4}$. Từ đó tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$T = 14S + \frac{3}{S+1}$

Bài 32. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{x-\sqrt{x}+10}{\sqrt{x}+2}$.

Bài 33. Cho x > 25. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \frac{x}{\sqrt{x}-5}$.

Bài 34. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x+3}{\sqrt{x}}$.

Bài 35. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}-9\sqrt{x}$.

Bài 36. Cho biểu thức $P=\frac{x+2}{\sqrt{x}}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=P.\sqrt{x}+x-2\sqrt{2x}-2\sqrt{x-1}$.

Bài 37. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức C = B – A

với $A=\frac{2x-3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2}$ và $B=\frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}+2x-2}{\sqrt{x}+2}, x\ge 0, x\ne 4$.

Bài 38. Tìm $x\in\mathbb{N}$ để biểu thức $A=\frac{3}{\sqrt{x}-2}$ đạt giá trị

a) lớn nhất b) nhỏ nhất

Bài 39. Tìm $x\in\mathbb{N}$ để biểu thức $P=\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}$ đạt giá trị

a) lớn nhất b) nhỏ nhất

Bài 40. Tìm $x\in\mathbb{N}$ để biểu thức $M=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ đạt giá trị

a) lớn nhất b) nhỏ nhất

Bài 41. Tìm $x\in\mathbb{N}$ để biểu thức $A=\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}$ nhận giá trị nguyên.

Bài 42. Tìm $x\in\mathbb{Z}$ để biểu thức $M=\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}$ nhận giá trị nguyên âm.

Bài 43. Tìm $x\in\mathbb{Z}$ để biểu thức $P=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$ nhận giá trị là một số tự nhiên.

Bài 44. Tìm $x\in\mathbb{Z}$ đề biểu thức $F=\frac{x-2}{\sqrt{x}-3}\in\mathbb{Z}$.

Bài 45. Tìm $x\in\mathbb{R}$ để các biểu thức sau nhận giá trị là số nguyên:

a. $A=\frac{10}{\sqrt{x}+3}$ b. $P=\frac{5}{3\sqrt{x}+2}$

Bài 46. Tìm $x\in\mathbb{R}$ để các biểu thức sau nhận giá trị là số nguyên:

a. $A=\frac{2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+1}$ b. $P=\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2}$

Bài 47. Cho biểu thức $P=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$. Tìm m để phương trình $P=m$ có nghiệm.

Bài 48. Cho hai biểu thức $A=\frac{4(\sqrt{x}+1)}{x-4}$ và $B=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$

Tìm $m \in \mathbb{Z}$ để phương trình $\frac{A}{B} = \frac{m}{2}$ có nghiệm.

CHỦ ĐỀ 2 – HỆ PHƯƠNG TRÌNH

I. HỆ KHÔNG CHỨA THAM SỐ

DẠNG 1: HỆ ĐA THỨC BẬC NHẤT ĐỐI VỚI X VÀ Y

Cách giải *Rút gọn về hệ phương trình bậc nhất hai ẩn dạng:* $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x+4)(y+4)=xy+216 \\ (x+2)(y-5)=xy-50 \end{cases}$

Lời giải

Có $\begin{cases} (x+4)(y+4)=xy+216 \\ (x+2)(y-5)=xy-50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy+4x+4y+16=xy+216 \\ xy-5x+2y-10=xy-50 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+4y=200 \\ -5x+2y=-40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y=100 \\ -5x+2y=-40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x=140 \\ x+y=50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=20 \\ y=30 \end{cases}$

Vậy: $(x\,;\,y)=(20\,;\,30)$

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2(x+1)+3(x+y)=15 \\ 4(x-1)-(x+2y)=0 \end{cases}$

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} 2(x+1)+3(x+y)=15 \\ 4(x-1)-(x+2y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2+3x+3y=15 \\ 4x-4-x-2y=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x+3y=13 \\ 3x-2y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x+6y=26 \\ 9x-6y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 19x=38 \\ 3x-2y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

Vậy: $(x;y)=(2;1)$

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3(x+1)+2(x+2y)=4 \\ 4(x+1)-(x+2y)=9 \end{cases}$ (3)

Lời giải

Cách 1: (Giải trực tiếp)

Ta có: $\begin{cases}3(x+1)+2(x+2y)=4\\4(x+1)-(x+2y)=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x+3+2x+4y=4\\4x+4-x-2y=9\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}5x+4y=1\\3x-2y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x+4y=1\\6x-4y=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}11x=11\\5x+4y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}$

Vậy: $(x;y)=(1;-1)$

Cách 2: Đặt ẩn phụ

Đặt: $\begin{cases}a=x+1\\b=x+2y\end{cases}\Rightarrow(3):\begin{cases}3a+2b=4\\4a-b=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a+2b=4\\8a-2b=18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}11a=22\\3a+2b=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=-1\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}x+1=2\\x+2y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}$

Vậy: $(x;y)=(1;-1)$.

DẠNG 2: HỆ CHỨA PHÂN THỨC

Bước 1: Đặt điều kiện cho hệ phương trình.

Bước 2: Giải bằng cách đặt ẩn phụ hoặc quy đồng giải trực tiếp.

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{1}{y+2}=2\\\dfrac{8}{x-1}-\dfrac{3}{y+2}=1\end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $x\neq 1, y\neq -2$

Cách 1: Đặt ẩn phụ

Đặt $a=\dfrac{1}{x-1}, b=\dfrac{1}{y+2}$ hệ phương trình trở thành

$\begin{cases}2a+b=2\\8a-3b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6a+3b=6\\8a-3b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}14a=7\\2a+b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\b=1\end{cases}$

Suy ra $\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{2}\\\dfrac{1}{y+2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=2\\y+2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=-1\end{cases}$ (thoả mãn điều kiện)

Vậy: $(x;y)=(3;-1)$

Cách 2: (Giải trực tiếp)

Có $\begin{cases}\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{1}{y+2}=2\\\dfrac{8}{x-1}-\dfrac{3}{y+2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{6}{x-1}+\dfrac{3}{y+2}=6\\\dfrac{8}{x-1}-\dfrac{3}{y+2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{14}{x-1}=7\\\dfrac{8}{x-1}-\dfrac{3}{y+2}=1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=2\\\dfrac{3}{y+2}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=-1\end{cases}$(thỏa mãn điều kiện)

Vậy (x;y) = (3; – 1)

Ví dụ 2 Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}+3(y+1)=5 \\ \dfrac{2}{x+y}-5(y+1)=-1 \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $x + y \neq 0$

Cách 1: (Đặt ẩn phụ)

Đặt $\dfrac{1}{x+y}=a;\ \ y+1=b$ hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} a+3b=5 \\ 2a-5b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+6b=10 \\ 2a-5b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11b=11 \\ 2a-5b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=2 \end{cases}$$

Suy ra $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}=2 \\ y+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy $(x\,;y)=(\dfrac{1}{2};0)$

Cách 2: (Giải trực tiếp)

Có $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}+3(y+1)=5 \\ \dfrac{2}{x+y}-5(y+1)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{x+y}+6(y+1)=10 \\ \dfrac{2}{x+y}-5(y+1)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11(y+1)=11 \\ \dfrac{2}{x+y}-5(y+1)=-1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x+y}=2 \\ y+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy $(x\,;y)=(\dfrac{1}{2};0)$

Ví dụ 3 Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{y+2}=-3\ (1) \\ \dfrac{3x}{x+1}+\dfrac{4y}{y+2}=2\ (2) \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $x \neq -1;\ y \neq -2$

Trước hết ta khử x , trên tử trong phương trình (2) của hệ

Có $\begin{cases} \dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{y+2}=-3 \\ \dfrac{3x}{x+1}+\dfrac{4y}{y+2}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{y+2}=-3 \\ \dfrac{3x+3-3}{x+1}+\dfrac{4y+8-8}{y+2}=2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{y+2}=-3\\3-\dfrac{3}{x+1}+4-\dfrac{8}{y+2}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{y+2}=-3\\\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{8}{y+2}=5\end{cases}$$

Cách 1: (Đặt ẩn phụ)

Đặt $\dfrac{1}{x+1}=a;\ \dfrac{1}{y+2}=b$ hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases}a-2b=-3\\3a+8b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4a-8b=-12\\3a+8b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7a=-7\\3a+8b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=1\end{cases}$$

Suy ra $\begin{cases}\dfrac{1}{x+1}=-1\\\dfrac{1}{y+2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=-1\end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy (x ; y) = (– 2 ; – 1)

Cách 2: (Giải trực tiếp)

Có $\begin{cases}\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{y+2}=-3\\\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{8}{y+2}=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{4}{x+1}-\dfrac{8}{y+2}=-12\\\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{8}{y+2}=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{7}{x+1}=-7\\\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{8}{y+2}=5\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{x+1}=-1\\\dfrac{1}{y+2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=-1\end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy (x ; y) = (– 2 ; – 1)

DẠNG 3: HỆ CHỨA CĂN

Bước 1: Đặt điều kiện xác định của hệ

Bước 2: Giải bằng cách đặt hai ẩn phụ cho gọn hoặc giải trực tiếp

Ví dụ 1 Giải hệ phương trình $\begin{cases}2\sqrt{x+1}+3\sqrt{y-2}=8\\3\sqrt{x+1}-2\sqrt{y-2}=-1\end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: x ≥ – 1 ; y ≥ 2

Cách 1: (Đặt ẩn phụ)

Đặt $\sqrt{x+1}=a;\ \sqrt{y-2}=b$ (điều kiện a ≥ 0 ; b ≥ 0)hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases}2a+3b=8\\3a-2b=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4a+6b=16\\9a-6b=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}13a=13\\3a-2b=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}\text{(TM)}$$

Suy ra $\begin{cases}\sqrt{x+1}=1\\\sqrt{y-2}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=1\\y-2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=6\end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy (x ; y) = (0; 6)

Cách 2: (Giải trực tiếp)

Có $\begin{cases} 2\sqrt{x+1}+3\sqrt{y-2}=8 \\ 3\sqrt{x+1}-2\sqrt{y-2}=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\sqrt{x+1}+6\sqrt{y-2}=16 \\ 9\sqrt{x+1}-6\sqrt{y-2}=-3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 13\sqrt{x+1}=13 \\ 3\sqrt{x+1}-2\sqrt{y-2}=-1 \end{cases} \Leftrightarrow\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1}=1 \\ \sqrt{y-2}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=6 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy (x ; y) = (0; 6)

Ví dụ 2 Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{1}{3x-4}+3\sqrt{y+1}=2 \\ \dfrac{3}{3x-4}+5\sqrt{y+1}=4 \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $x \neq \dfrac{4}{3}$; $y \geq -1$

<u>Cách 1:</u> (Đặt ẩn phụ)

Đặt $\dfrac{1}{3x-4}=a$; $\sqrt{y+1}=b$ điều kiện $b \geq 0$ hệ đã cho trở thành

$\begin{cases} a+3b=2 \\ 3a+5b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+9b=6 \\ 3a+5b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4b=2 \\ 3a+5b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{1}{2} (\text{TM}) \\ a=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Suy ra $\begin{cases} \dfrac{1}{3x-4}=\dfrac{1}{2} \\ \sqrt{y+1}=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-\dfrac{3}{4} \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện). Vậy (x ; y) = (2; $-\dfrac{3}{4}$)

<u>Cách 2:</u> (Giải trực tiếp)

Có $\begin{cases} \dfrac{1}{3x-4}+3\sqrt{y+1}=2 \\ \dfrac{3}{3x-4}+5\sqrt{y+1}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{3x-4}+9\sqrt{y+1}=6 \\ \dfrac{3}{3x-4}+5\sqrt{y+1}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\sqrt{y+1}=2 \\ \dfrac{3}{3x-4}+5\sqrt{y+1}=4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y+1}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{3x-4}=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=\dfrac{-3}{4} \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện). Vậy (x ; y) = (2; $-\dfrac{3}{4}$)

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{4}{\sqrt{2x-y}}-\dfrac{21}{x+y}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3}{\sqrt{2x-y}}+\dfrac{7-x-y}{x+y}=1 \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $2x-y>0$, $x+y \neq 0$.

Trước hết ta khử x, y ở trên tử trong phương trình sau của hệ:

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{\sqrt{2x-y}}-\dfrac{21}{x+y}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3}{\sqrt{2x-y}}+\dfrac{7}{x+y}-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{\sqrt{2x-y}}-\dfrac{21}{x+y}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3}{\sqrt{2x-y}}+\dfrac{7}{x+y}=2 \end{cases}$

Cách 1 (Đặt ẩn phụ)

Đặt $a=\dfrac{a}{\sqrt{2x-y}},\ b=\dfrac{7}{x+y}$ (điều kiện: $a>0, b\neq 0$), hệ trở thành

$$\begin{cases} 4a-3b=\dfrac{1}{2} \\ 3a+b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a-3b=\dfrac{1}{2} \\ 9a+3b=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13a=\dfrac{13}{2} \\ 9a+3b=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$ (thỏa mãn).

Suy ra $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2x-y}}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{7}{x+y}=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=4 \\ x+y=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=8 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy $(x;y)=(6;8)$.

Cách 2 (Giải trực tiếp)

Có $\begin{cases} \dfrac{4}{\sqrt{2x-y}}-\dfrac{21}{x+y}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3}{\sqrt{2x-y}}+\dfrac{7}{x+y}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{\sqrt{2x-y}}-\dfrac{21}{x+y}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{9}{\sqrt{2x-y}}+\dfrac{21}{x+y}=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{13}{\sqrt{2x-y}}=\dfrac{13}{2} \\ \dfrac{9}{\sqrt{2x-y}}+\dfrac{21}{x+y}=6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2x-y}}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{7}{x+y}=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=4 \\ x+y=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=8 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy $(x;y)=(6;8)$.

DẠNG 4: HỆ THỨC CHỨA TRỊ TUYỆT ĐỐI

Bước 1 Đặt điều kiện xác định của hệ.

Bước 2 Giải bằng cách đặt hai ẩn phụ cho gọn hoặc giải trực tiếp.

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} |x+2|+4\sqrt{y-1}=5 \\ 3|x+2|-2\sqrt{y-1}=1 \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $y\geq 1$.

Cách 1 (Đặt ẩn phụ)

Đặt $a=|x+2|, b=\sqrt{y-1}$ (điều kiện: $a\geq 0, b\geq 0$), hệ đã cho trở thành

$\begin{cases} a+4b=5 \\ 3a-2b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+4b=5 \\ 6a-4b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7a=7 \\ a+4b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện)

Suy ra $\begin{cases}|x+2|=1\\ \sqrt{y-1}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+2=\pm 1\\ y-1=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\\ y=2\end{cases}, \begin{cases}x=-3\\ y=2\end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy $\begin{cases}x=-1\\ y=2\end{cases}, \begin{cases}x=-3\\ y=2\end{cases}$

Cách 2 (Giải trực tiếp)

Có $\begin{cases}|x+2|+4\sqrt{y-1}=5\\ 3|x+2|-2\sqrt{y-1}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|x+2|+4\sqrt{y-1}=5\\ 6|x+2|-4\sqrt{y-1}=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}7|x+2|=7\\ 3|x+2|-2\sqrt{y-1}=1\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}|x+2|=1\\ \sqrt{y-1}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+2=\pm 1\\ y-1=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\\ y=2\end{cases}, \begin{cases}x=-3\\ y=2\end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện). Vậy $\begin{cases}x=-1\\ y=2\end{cases}, \begin{cases}x=-3\\ y=2\end{cases}$

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{8}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{1}{|2y-1|}=5\\ \dfrac{4}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{1}{|1-2y|}=3\end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0, x \neq 9, y \neq \dfrac{1}{2}$. Do $|1-2y|=|2y-1|$ nên hệ $\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{8}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{1}{|2y-1|}=5\\ \dfrac{4}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{1}{|2y-1|}=3\end{cases}$

Cách 1 (Đặt ẩn phụ)

Đặt $a=\dfrac{4}{\sqrt{x}-3}, b=\dfrac{1}{|2y-1|}$ (điều kiện: $a \neq 0, b > 0$), hệ đã cho trở thành

$\begin{cases}2a+b=5\\ a+b=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).

Suy ra $\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}-3}=\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{|2y-1|}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x}-3=2\\ |2y-1|=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x}=5\\ 2y-1=\pm 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=25\\ y=1\end{cases}; \begin{cases}x=25\\ y=0\end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).

Cách 2 (Giải trực tiếp)

Có $\begin{cases}\dfrac{8}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{1}{|2y-1|}=5\\ \dfrac{4}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{1}{|1-2y|}=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}-3}=\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{|2y-1|}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=25\\ y=1\end{cases}; \begin{cases}x=25\\ y=0\end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy $\begin{cases}x=25\\ y=1\end{cases}; \begin{cases}x=25\\ y=0\end{cases}$

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases}|x-2|+2\sqrt{y+3}=9\\ x+\sqrt{y+3}=-1\end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $y \geq -3$.

Cách 1 (Đặt ẩn phụ)

Có $\begin{cases} |x-2|+2\sqrt{y+3}=9 \\ x+\sqrt{y+3}=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-2|+2\sqrt{y+3}=9 \\ x-2+\sqrt{y+3}=-3 \end{cases}$

Đặt $a=x-2;\ b=\sqrt{y+3}$ (điều kiện: $b\ge 0$), hệ trở thành

$$\begin{cases} |a|+2b=9 \\ a+b=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a|+2b=9 \\ 2a+2b=-6 \end{cases} \Leftrightarrow |a|-2a=15.$$

Trường hợp 1: Xét $a\ge 0$ thì $|a|-2a=15 \Leftrightarrow a-2a=15 \Leftrightarrow a=-15$ (loại).

Trường hợp 2: Xét $a<0$ thì $|a|-2a=15 \Leftrightarrow -a-2a=15 \Leftrightarrow a=-5$ (thỏa mãn).

Suy ra $x-2=-5 \Leftrightarrow x=-3$.

Thay $x=-3$ vào $x+\sqrt{y+3}=-1$ ta được $-3+\sqrt{y+3}=-1 \Leftrightarrow y=1$ (thỏa mãn).

Vậy $(x;y)=(-3;1)$.

Cách 2 (Giải trực tiếp)

Có $\begin{cases} |x-2|+2\sqrt{y+3}=9 \\ x+\sqrt{y+3}=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-2|+2\sqrt{y+3}=9 \\ 2x+2\sqrt{y+3}=-2 \end{cases} \Rightarrow |x-2|-2x=11.$

Trường hợp 1: Xét $x-2\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 2$ thì

$$|x-2|-2x=11 \Leftrightarrow x-2-2x=11 \Leftrightarrow x=-13 \text{ (loại)}$$

Trường hợp 2: Xét $x-2<0 \Leftrightarrow x<2$ thì

$$|x-2|-2x=11 \Leftrightarrow -x+2-2x=11 \Leftrightarrow x=-3 \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy $(x;y)=(-3;1)$.

II. HỆ CHỨA THAM SỐ

Bài toán thường gặp: Cho hệ $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ chứa tham số m.

Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện cho trước

Bước 1 Dùng phương pháp thế, cộng, trừ để đưa hệ đã cho về phương trình bậc nhất một ẩn $Ax=B$.

Bước 2: Lập luận: Hệ có nghiệm duy nhất khi phương trình Ax = B có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ $A\neq 0$

Bước 3: Giải nghiệm (x; y) theo m và xử lý điều kiện của bài toán.

Chú ý:

* Hệ vô nghiệm khi phương trình Ax = B vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} A=0 \\ B\neq 0 \end{cases}$

* Hệ vô số nghiệm khi phương trình Ax = B vô số nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases}$

* Đối với hệ: $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ khi a′ , b′ , c′ $\neq 0$ thì ta có các điều kiện sau:

+) Hệ có nghiệm duy nhất khi $\dfrac{a}{a'}\neq\dfrac{b}{b'}$

+) Hệ vô nghiệm $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\neq\dfrac{c}{c'}$

+) Hệ vô số nghiệm $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}$

Ví dụ 1. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 4x + my = 2m + 18 \end{cases}$ với m là tham số.

1. Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất (x; y) và tìm nghiệm duy nhất đó.
2. Với (x; y) là nghiệm duy nhất ở trên, hãy tìm m để:

   a) $2x - 3y > 0$.

   b) Cả x và y là các số nguyên.

   c) Biểu thức $S = x^2 + y^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

   d) Biểu thức $T = xy$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

1. Từ $2x + y = 8 \Rightarrow y = 8 - 2x$, thay vào $4x + my = 2m + 18$ ta được

$4x + m(8 - 2x) = 2m + 18 \Leftrightarrow (4 - 2m)x = 18 - 6m$ (*)

Hệ có nghiệm duy nhất (x; y) khi phương trình (*) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow 4 - 2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$.

Khi đó $x = \dfrac{18-6m}{4-2m} = \dfrac{3m-9}{m-2} \Rightarrow y = 8 - 2x = 8 - 2.\dfrac{3m-9}{m-2} = \dfrac{2m+2}{m-2}$

Vậy $m \neq 2$ thì hệ đã cho có nghiệm duy nhất là $(x;y) = \left(\dfrac{3m-9}{m-2};\dfrac{2m+2}{m-2}\right)$.

2. a) Có $2x - 3y > 0 \Leftrightarrow \dfrac{6m-18}{m-2} - \dfrac{6m+6}{m-2} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{-24}{m-2} > 0$

$\Leftrightarrow m - 2 < 0$ (do $-24 < 0$) $\Leftrightarrow m < 2$ (thỏa mãn).

Vậy $m < 2$ thì $2x - 3y > 0$.

b) Có $\begin{cases} x = \dfrac{3m-9}{m-2} = \dfrac{3m-6-3}{m-2} = 3 - \dfrac{3}{m-2} \\ y = \dfrac{2m+2}{m-2} = \dfrac{2m-4+6}{m-2} = 2 + \dfrac{6}{m-2} \end{cases}$

Do đó cả $x, y \in Z \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \vdots m-2 \\ 6 \vdots m-2 \end{cases} \Leftrightarrow m - 2 \in UC(3;6) = \{\pm1;\pm3\}$

$\Leftrightarrow m \in \{3;1;5;-1\}$ (thỏa mãn $m \neq 2$)

Vậy $m \in \{3;1;5;-1\}$ thì cả x và y là các số nguyên.

c) $S = x^2 + y^2 = \left(3 - \dfrac{3}{m-2}\right)^2 + \left(2 + \dfrac{6}{m-2}\right)^2$

Đặt $a = \dfrac{3}{m-2}$, thì $S = (3-a)^2 + (2+2a)^2 = 5a^2 + 2a + 13$

$$= 5\left(a^2 + \frac{2}{5}a + \frac{13}{5}\right) = 5\left(a + \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{64}{5} \geq \frac{64}{5}.$$

Vậy $MinS = \dfrac{64}{5}$ khi $a = -\dfrac{1}{5} \Rightarrow \dfrac{3}{m-2} = -\dfrac{1}{5} \Leftrightarrow m = -13$ (thỏa mãn $m \neq 2$).

d) Có $T = xy = \left(3 - \dfrac{3}{m-2}\right)\left(2 + \dfrac{6}{m-2}\right)$

Đặt $a = \dfrac{3}{m-2}$, ta được $T = (3-a)(2+2a) = -2a^2 + 4a + 6 = -2(a-1)^2 + 8 \leq 8$.

Vậy MaxT=8 khi $a = 1 \Leftrightarrow \dfrac{3}{m-2} = 1 \Leftrightarrow m = 5$ (thỏa mãn $m \neq 2$).

Ví dụ 2. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx-2y=2m-1 \\ 2x-my=9-3m \end{cases}$ với m là tham số.

1. Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)$ và tìm nghiệm duy nhất đó.

2. Với $(x;y)$ là nghiệm duy nhất ở trên:

a) Tìm một hệ thức liên hệ giữa x và y không phụ thuộc vào m.

b) Tìm m nguyên để cả x và y là các số nguyên.

c) Tìm m để biểu thức $S=x^2+y^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

d) Tìm m để biểu thức $T=xy$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

1. Từ $mx-2y=2m-1 \Rightarrow y=\dfrac{mx-2m+1}{2}$, thay vào $2x-my=9-3m$ ta được

$2x-m.\dfrac{mx-2m+1}{2}=9-3m \Leftrightarrow \left(4-m^2\right)x=18-5m-2m^2$ (*)

Hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)$ khi phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow 4-m^2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$.

Khi đó $x=\dfrac{18-5m-2m^2}{4-m^2}=\dfrac{2m^2+5m-18}{m^2-4}=\dfrac{(m-2)(2m+9)}{(m-2)(m+2)}=\dfrac{2m+9}{m+2}$

$y=\dfrac{1}{2}\left(m.\dfrac{2m+9}{m+2}-2m+1\right)=\dfrac{3m+1}{m+2}$.

Vậy $m \neq \pm 2$ thì hệ đã cho có nghiệm duy nhất là $(x;y)=\left(\dfrac{2m+9}{m+2};\dfrac{3m+1}{m+2}\right)$.

2. a) Có $(x;y)=\left(\dfrac{2m+4+95}{m+2};\dfrac{3m+6-5}{m+2}\right)=\left(2+\dfrac{5}{m+2};3-\dfrac{5}{m+2}\right)$.

Suy ra $x+y=\left(2+\dfrac{5}{m+2}\right)+\left(3-\dfrac{5}{m+2}\right)=5$ không phụ thuộc m.

Vậy $x+y=5$ là hệ thức cần tìm.

b) Có $(x;y)=\left(2+\dfrac{5}{m+2};3-\dfrac{5}{m+2}\right)$

Do đó cả $x,y \in Z \Leftrightarrow 5 \vdots m+2 \in \text{U}(5)=\{\pm 1;\pm 5\}$

$m \in \{-1;-3;3;-7\}$ (thỏa mãn $m \neq 2$).

Vậy $m \in \{-1;-3;3;-7\}$ thì x và y là các số nguyên.

c) Có $S=x^2+y^2=\left(2+\dfrac{5}{m+2}\right)^2+\left(3-\dfrac{5}{m+2}\right)^2$

Đặt $a=\dfrac{5}{m+2}$, ta được $S=(2+a)^2+(3-a)^2=2a^2-2a+13$.

Xét $2S=4a^2-4a+26=(2a-1)^2+25 \geq 25 \Rightarrow S \geq \dfrac{25}{2}$.

Vậy $MinS=\dfrac{25}{2}$ khi $a=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{5}{m+2}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow m=8$ (thỏa mãn $m \neq 2$).

d) Có $T=xy=\left(2+\dfrac{5}{m+2}\right)\left(3-\dfrac{5}{m+2}\right)$

Đặt $a=\dfrac{5}{m+2}$, ta được $T=(2+a)(3-a)=-a^2+a+6=-\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{25}{4} \leq \dfrac{25}{4}$.

Vậy MaxT=$\frac{25}{4}$ khi $a=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{5}{m+2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow m=8$ (thỏa mãn $m\neq 2$).

HỆ THỐNG BÀI TẬP SỬ DỤNG TRONG CHỦ ĐỀ

I. HỆ KHÔNG CHỨA THAM SỐ

Giải các hệ phương trình sau

Bài 1. $\begin{cases}(x+4)(y+4)=xy+216\\(x+2)(y-5)=xy-50\end{cases}$

Bài 2. $\begin{cases}2(x+1)+3(x+y)=15\\4(x-1)-(x+2y)=0\end{cases}$

Bài 3. $\begin{cases}3(x+1)+2(x+2y)=4\\4(x+1)-(x+2y)=9\end{cases}$

Bài 4. $\begin{cases}\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{1}{y+2}=2\\\dfrac{8}{x-1}-\dfrac{3}{y+2}=1\end{cases}$

Bài 5. $\begin{cases}\dfrac{1}{x+y}+3(y+1)=5\\\dfrac{2}{x+y}-5(y+1)=-1\end{cases}$

Bài 6. $\begin{cases}\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{y+2}=-3\\\dfrac{3x}{x+1}+\dfrac{4y}{y+2}=2\end{cases}$

Bài 7. $\begin{cases}2\sqrt{x+1}+3\sqrt{y-2}=8\\3\sqrt{x+1}-2\sqrt{y-2}=-1\end{cases}$

Bài 8. $\begin{cases}\dfrac{1}{3x-4}+3\sqrt{y+1}=2\\\dfrac{3}{3x-4}+5\sqrt{y+1}=4\end{cases}$

Bài 9. $\begin{cases}\dfrac{4}{\sqrt{2x-y}}-\dfrac{21}{x+y}=\dfrac{1}{2}\\\dfrac{3}{\sqrt{2x-y}}+\dfrac{7-x-y}{x+y}=1\end{cases}$

Bài 10. $\begin{cases}|x+2|+4\sqrt{y-1}=5\\3|x+2|-2\sqrt{y-1}=1\end{cases}$

Bài 11. $\begin{cases}\dfrac{8}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{11}{|2y-1|}=5\\\dfrac{4}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{1}{|1-2y|}=3\end{cases}$

Bài 12. $\begin{cases}|x-2|+2\sqrt{y+3}=9\\x+\sqrt{y+3}=-1\end{cases}$

II. HỆ CHỨA THAM SỐ

Bài 1. Cho hệ phương trình $\begin{cases}2x+y=8\\4x+my=2m+18\end{cases}$ với m là tham số.

1. Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)$ và tìm nghiệm duy nhất đó.

2. Với $(x;y)$là nghiệm duy nhất ở trên, hãy tìm m để:

a) $2x-3y>0$.

b) Cả x và y là các số nguyên.

c) Biểu thức $S=x^2+y^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

d) Biểu thức $T=xy$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 2. Cho hệ phương trình $\begin{cases}mx-2y=2m-1\\2x-my=9-3m\end{cases}$ với m là tham số.

1. Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)$ và tìm nghiệm duy nhất đó.

2. Với $(x;y)$ là nghiệm duy nhất ở trên:

a) Tìm một hệ thức liên hệ giữa x và y không phụ thuộc vào m.

b) Tìm m nguyên để cả x và y là các số nguyên.

c) Tìm m để biểu thức $S = x^2 + y^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

d) Tìm m để biểu thức $T = xy$ đạt giá trị lớn nhất.

CHỦ ĐỀ 3 – GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH

I. GIẢI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Phương pháp chung

Bước 1 Kẻ bảng nếu được, gọi các ẩn, kèm theo đơn vị và điều kiện cho các ẩn.

Bước 2 Giải thích từng ô trong bảng, lập luận để thiết lập hệ phương trình.

Bước 3 Giải hệ phương trình, đối chiếu nghiệm với điều kiện, rồi trả lời bài toán.

DẠNG 1: TOÁN CHUYỂN ĐỘNG

1.1 Chuyển động trên bộ

- **Ghi nhớ công thức:** Quãng đường = Vận tốc $\times$ thời gian
- **Các bước giải**

Bước 1 Kẻ bảng gồm vận tốc, thời gian, quãng đường và điền các thông tin vào bảng đó rồi gọi các ẩn, kèm theo đơn vị và điều kiện cho các ẩn.

Bước 2 Giải thích từng ô trong bảng, lập luận để thiết lập hệ phương trình.

Bước 3 Giải hệ phương trình, đối chiếu nghiệm với điều kiện, rồi trả lời bài toán.

Ví dụ. Một xe máy đi A từ đến B trong thời gian dự định. Nếu vận tốc tăng thêm $20km/h$ thì đến B sớm 1 giờ so với dự định, nếu vận tốc giảm đi $10km/h$ thì đến B muộn 1 giờ so với dự định. Tính quãng đường AB.

Lời giải

	Vận tốc	Thời gian	Quãng đường
Dự định	x	y	xy
Trường hợp 1	$x+20$	$y-1$	$(x+20)(y-1)$
Trường hợp 2	$x-10$	$y+1$	$(x-10)(y+1)$

Gọi vận tốc và thời gian dự định lần lượt là $x\ (km/h)$ và y (giờ).

Điều kiện $x>10, y>1$.

Quang đường AB là $xy\ (km)$.

Trong trường hợp 1: Vận tốc là $x+20\ (km/h)$, thời gian là $y-1$ (giờ).

Suy ra quãng đường AB là $(x+20)(y-1)(km)$

Do quãng đường không đổi nên ta có phương trình

$$(x+20)(y-1)=xy \Leftrightarrow xy-x+20y-20=xy \Leftrightarrow x-20y=-20 \quad (1)$$

Trong trường hợp 2: Vận tốc là $x-10\ (km/h)$, thời gian là $y+1$ (giờ).

Suy ra quãng đường AB là $(x-10)(y+1)(km)$

Do quãng đường không đổi nên ta có phương trình

$$(x-10)(y+1)=xy \Leftrightarrow xy+x-10y-10=xy \Leftrightarrow x-10y=10 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$\begin{cases} x-20y=-20 \\ x-10y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-20y=-20 \\ 2x-20y=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=40 \\ y=3 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy quãng đường AB là $xy=120(km)$.

1.2. Chuyển động trên dòng nước của ca nô

- Vận tốc xuôi dòng = Vận tốc riêng của ca nô + Vận tốc dòng nước (viết tắt là $v_x = v_r + v_n$).

- Vận tốc ngược dòng = Vận tốc riêng của ca nô – Vận tốc dòng nước

(viết tắt là $v_{ng} = v_r - v_n$, chú ý $v_r > v_n$).

- Quãng đường = Vận tốc $\times$ thời gian; $S_x = v_x.t_x; S_{ng} = v_{ng}.t_{ng}$.

Ví dụ. Một ca nô chạy trên một khúc sông, xuôi dòng $20km$ rồi ngược dòng $18km$ hết 1 giờ 25 phút. Lần khác, ca nô đó đi xuôi dòng $15km$ rồi ngược dòng $24km$ thì hết 1 giờ 30 phút. Tính vận tốc riêng của ca nô và vận tốc của dòng nước, biết các vận tốc đó không đổi.

Lời giải

	Vận tốc	Thời gian	Quãng đường
Xuôi dòng lần 1	$x+y$	$\frac{20}{x+y}$	20
Ngược dòng lần 1	$x-y$	$\frac{18}{x-y}$	18
Xuôi dòng lần 2	$x+y$	$\frac{15}{x+y}$	15
Ngược dòng lần 2	$x-y$	$\frac{24}{x-y}$	24

Đổi 1 giờ 25 phút $= \frac{17}{12}$ giờ; 1 giờ 30 phút $= \frac{3}{2}$ giờ.

Gọi vận tốc riêng của ca nô và vận tốc của dòng nước lần lượt là x và $y\,(km/h)$. Điều kiện $x > 0, y > 0, x > y$.

Trong lần 1

+) Vận tốc xuôi dòng là $x+y\ (km/h)$, quãng đường xuôi dòng là $20\,(km)$ nên thời gian xuôi dòng là $\frac{20}{x+y}$ (giờ).

+) Vận tốc ngược dòng là $x-y\ (km/h)$, quãng đường ngược dòng là $18\,(km)$ nên thời gian ngược dòng là $\frac{18}{x-y}$ (giờ).

Vì tổng thời gian xuôi dòng và ngược dòng hết $\frac{17}{12}$ giờ nên ta có phương trình

$$\frac{20}{x+y} + \frac{18}{x-y} = \frac{17}{12} \qquad (1)$$

Trong lần 2

+) Vận tốc xuôi dòng là $x+y\ (km/h)$, quãng đường xuôi dòng là $15(km)$ nên thời gian xuôi dòng là $\frac{15}{x+y}$ (giờ).

+) Vận tốc ngược dòng là $x-y\ (km/h)$, quãng đường ngược dòng là $24\,(km)$ nên thời gian ngược dòng là $\frac{24}{x-y}$ (giờ).

Vì tổng thời gian xuôi dòng và ngược dòng hết $\frac{3}{2}$ giờ nên ta có phương trình

$$\frac{15}{x+y}+\frac{24}{x-y}=\frac{3}{2} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}\frac{20}{x+y}+\frac{18}{x-y}=\frac{17}{12}\\ \frac{15}{x+y}+\frac{24}{x-y}=\frac{3}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{60}{x+y}+\frac{54}{x-y}=\frac{17}{4}\\ \frac{60}{x+y}+\frac{96}{x-y}=\frac{7}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{60}{x+y}+\frac{54}{x-y}=\frac{17}{4}\\ \frac{42}{x-y}=\frac{7}{4}\end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x+y=30\\ x-y=24\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=27\\ y=3\end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy vận tốc riêng của ca nô và vận tốc dòng nước lần lượt là 27 và $3(km/h)$.

DẠNG 2: TOÁN NĂNG SUẤT

- Năng suất là lượng công việc làm được trong một đơn vị thời gian.
- Tổng lượng công việc = Năng suất × Thời gian.
- Năng suất = Tổng lượng công việc : Thời gian.
- Thời gian = Tổng lượng công việc : Năng suất.

Ví dụ 1. Để hoàn thành một công việc theo dự định thì cần một số công nhân làm trong một số ngày nhất định. Nếu tăng thêm 10 công nhân thì công việc hoàn thành sớm được 2 ngày. Nếu bớt đi 10 công nhân thì phải mất thêm 3 ngày nữa mới hoàn thành công việc. Hỏi theo dự định thì cần bao nhiêu công nhân và làm trong bao nhiêu ngày?

Lời giải

	Số công nhân	Số ngày	Lượng công việc
Dự định	x	y	xy
Trường hợp 1	$x+10$	$y-2$	$(x+10)(y-2)$
Trường hợp 2	$x-10$	$y+3$	$(x-10)(y+3)$

Gọi số công nhân và số ngày theo dự định lần lượt là x (công nhân), y (ngày).

Điều kiện: $x>10, y>2, x\in N$.

Lượng công việc theo dự định là xy (ngày công).

Trường hợp 1: Số công nhân là $x+10$ (công nhân), số ngày là $y-2$ (ngày).

Do đó lượng công việc là $(x+10)(y-2)$ (ngày công).

Vì lượng công việc không đổi nên ta có phương trình

$$(x+10)(y-2)=xy \Leftrightarrow -2x+10y=20 \qquad (1)$$

Trường hợp 2: Số công nhân là $x-10$ (công nhân), số ngày là $y+3$ (ngày).

Do đó lượng công việc là $(x-10)(y+3)$ (ngày công).

Vì lượng công việc không đổi nên ta có phương trình

$$(x-10)(y+3)=xy \Leftrightarrow 3x-10y=30 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}-2x+10y=20\\ 3x-10y=30\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=50\\ y=12\end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy số công nhân và số ngày theo dự định lần lượt là 50 (công nhân), 12 (ngày).

DẠNG 3: TOÁN LÀM CHUNG CÔNG VIỆC

Bài toán cơ bản 1 Nếu hai người làm chung thì sau k ngày (giờ, phút,...) xong công việc. Nếu người I làm một mình m ngày rồi nghỉ và người II làm tiếp n ngày (giờ, phút,...) nữa thì xong công việc. Hỏi nếu làm một mình thì để hoàn thành công việc mỗi người mất mấy ngày (giờ, phút,...)?

Phương pháp giải

Gọi thời gian người I, người II làm một mình xong công việc lần lượt là x, y (ngày). Điều kiện: $x > 0, y > 0$.

1 ngày người I làm được $\frac{1}{x}$, người II làm được $\frac{1}{y}$ (lượng công việc).

* k ngày người I làm được $\frac{k}{x}$, người II làm được $\frac{k}{y}$ (lượng công việc).

Do hai người làm chung thì sau k ngày xong công việc nên ta có phương trình

$$\frac{k}{x}+\frac{k}{y}=1 \qquad (1)$$

* m ngày người I làm được $\frac{m}{x}$, n ngày người II làm được $\frac{n}{y}$ (lượng công việc).

Do người I làm một mình m ngày rồi nghỉ và người II làm tiếp n ngày nữa thì xong công việc nên ta có phương trình $\frac{m}{x}+\frac{n}{y}=1 \qquad (2)$

Giải hệ (1), (2); đối chiếu điều kiện và trả lời bài toán.

Bài toán cơ bản 2 Nếu hai người làm chung thì sau k ngày (giờ, phút,...) xong công việc. Làm chung được m ngày thì người I nghỉ và người II làm tiếp n ngày (giờ, phút,...) nữa thì xong công việc. Hỏi nếu làm một mình thì để hoàn thành công việc mỗi người mất mấy ngày (giờ, phút,...)?

Phương pháp giải

Gọi thời gian người I, người II làm một mình xong công việc lần lượt là x, y (ngày). Điều kiện: $x > 0, y > 0$.

Suy ra 1 ngày người I làm được $\frac{1}{x}$, người II làm được $\frac{1}{y}$ (lượng công việc).

* k ngày người I làm được $\frac{k}{x}$, người II làm được $\frac{k}{y}$ (lượng công việc).

D hai người làm chung thì sau k ngày xong công việc nên ta có phương trình

$$\frac{k}{x}+\frac{k}{y}=1 \qquad (1)$$

* m ngày cả hai người làm được $\frac{m}{x}+\frac{m}{y}$ (lượng công việc).

n ngày người II làm được $\frac{n}{y}$ (lượng công việc).

Do làm chung được m ngày thì người I nghỉ và người II làm tiếp n ngày nữa thì xong công việc nên ta có phương trình $\left(\frac{m}{x}+\frac{m}{y}\right)+\frac{n}{y}=1 \qquad (2)$

Giải hệ (1), (2); đối chiếu điều kiện và trả lời bài toán.

_Ví dụ 1._ Hai người thợ cùng làm một công việc trong 4 giờ 30 phút thì xong. Nếu người thứ nhất làm một mình trong 3 giờ và người thứ hai làm một mình trong 2 giờ thì tổng số họ làm được 50% công việc. Hỏi mỗi người làm công việc đó một mình thì trong bao lâu sẽ xong?

Lời giải

Đổi 4 giờ 30 phút = $\frac{9}{2}$ giờ.

Gọi thời gian người I, người II làm một mình xong công việc lần lượt là x, y (giờ).
Điều kiện: $x > 0, y > 0$.

Suy ra 1 giờ người I và người II lần lượt làm được $\frac{1}{x}$ và $\frac{1}{y}$ (lượng công việc).

* 4 giờ 30 phút cả hai người làm được $\frac{9}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ (lượng công việc).

Do cả hai người thợ cùng làm một công việc trong 4 giờ 30 phút thì xong nên ta có phương trình

$$\frac{9}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1 \Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{9} \qquad (1)$$

* 3 giờ người thứ I làm được $\frac{3}{x}$ (lượng công việc)

* 2 giờ người thứ II làm được $\frac{2}{y}$ (lượng công việc)

Vì người I làm một mình trong 3 giờ và người II làm một mình trong 2 giờ thì tổng số họ làm được 50% công việc nên ta có phương trình $\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=\frac{1}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{9}\\ \frac{3}{x}+\frac{2}{y}=\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{2}{x}+\frac{2}{y}=\frac{4}{9}\\ \frac{3}{x}+\frac{2}{y}=\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{x}=\frac{1}{18}\\ \frac{1}{x}=\frac{1}{6}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=18\\ y=6\end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy nếu làm một mình xong công việc, người I cần 18 giờ, người II cần 6 giờ.

_Ví dụ 2._ Hai người thợ cùng làm một công việc thì sau 2 giờ 40 phút sẽ hoàn thành. Nếu người thứ nhất làm một mình và 3 giờ sau người thứ hai cùng vào làm thì mất 40 phút nữa mới hoàn thành. Hỏi mỗi người đó làm một mình thì trong mấy giờ sẽ xong?

Lời giải

Đổi 2 giờ 40 phút = $\frac{8}{3}$ giờ; 40 phút = $\frac{2}{3}$ giờ.

Gọi thời gian người I, người II làm một mình xong công việc lần lượt là x, y (giờ).
Điều kiện: $x > 0, y > 0$.

Suy ra 1 giờ người I và người II lần lượt làm được $\frac{1}{x}$ và $\frac{1}{y}$ (lượng công việc).

* 2 giờ 40 phút cả hai người làm được $\frac{8}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ (lượng công việc).

Do cả hai người thợ cùng làm một công việc trong 2 giờ 40 phút thì xong nên ta có phương trình

$$\frac{8}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1 \Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{8} \qquad (1)$$

* 3 giờ người thứ I làm được $\frac{3}{x}$ (lượng công việc)

* 40 phút cả hai người làm được $\frac{2}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ (lượng công việc).

Vì người thứ nhất làm một mình và 3 giờ sau người thứ hai cùng vào làm thì mất 40 phút nữa mới hoàn thành nên ta có phương trình $\frac{3}{x}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{8}\\ \frac{3}{x}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{2}{x}+\frac{2}{y}=\frac{3}{4}\\ \frac{11}{x}+\frac{2}{y}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{9}{x}=\frac{9}{4}\\ \frac{11}{x}+\frac{2}{y}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\ y=8\end{cases}\text{(thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy nếu làm một mình xong công việc, người I cần 4 giờ, người II cần 8 giờ.

Ví dụ 3. Hai vòi nước cùng chảy vào bể cạn thì sau 2 giờ đầy bể. Nếu mở vời I trong 45 phút rồi khóa lại và mở vòi II trong 30 phút thì cả hai vòi chảy được $\frac{1}{3}$ bể. Hỏi mỗi vời chảy riêng đầy bể trong bao lâu?

Lời giải

Đổi 45 phút = $0,75$ giờ; 40 phút = $0,5$ giờ.

Gọi thời gian vòi I, vòi II chảy một mình đầy bể lần lượt là x, y (giờ).

Điều kiện: $x>0$, $y>0$.

Suy ra 1 giờ vòi I và vòi II lần lượt chảy được $\frac{1}{x}$ và $\frac{1}{y}$ (bể).

* 2 giờ cả hai vòi chảy được $2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ (bể).

Do cả hai người vòi cùng chảy thì sau 2 giờ đầy bể nên ta có phương trình

$$2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1\Leftrightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}\qquad(1)$$

* 3 giờ người thứ I làm được $\frac{3}{x}$ (bể)

* 45 phút vòi I chảy được $\frac{0,75}{x}$ (bể), 30 phút vời II chảy được $\frac{0,5}{y}$ (bể) .

Vì mở vời I trong 45 phút rồi khóa lại và mở vời II trong 30 phút thì cả hai vòi chảy được $\frac{1}{3}$ bể nên ta có phương trình $\frac{0,75}{x}+\frac{0,5}{y}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=\frac{4}{3}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}\\ \frac{3}{x}+\frac{2}{y}=\frac{4}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{2}{x}+\frac{2}{y}=1\\ \frac{3}{x}+\frac{2}{y}=\frac{4}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{x}=\frac{1}{3}\\ \frac{1}{y}=\frac{1}{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\ y=6\end{cases}\text{(thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy nếu chảy riêng để đầy bể, vòi I cần 3 giờ, vòi II cần 6 giờ.

_Ví dụ 4._ Hai vòi nước cùng chảy vào một bể cạn thì sau 6 giờ đầy bể. Cùng chảy được 2 giờ thì khóa vòi I lại và vòi II phải chảy thêm 12 giờ nữa mới đầy bể. Hỏi mỗi vòi chảy riêng đầy bể trong bao lâu?

Lời giải

Gọi thời gian vòi I, vòi II chảy một mình đầy bể lần lượt là x, y (giờ).

Điều kiện: $x > 0, y > 0$.

Suy ra 1 giờ vòi I và vòi II lần lượt chảy được $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}$ (bể).

6 giờ cả hai vòi chảy được $6\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ (bể).

Do cả hai vòi cùng chảy thì sau 6 giờ sẽ đầy bể nên ta có phương trình

$$6\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1 \Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6} \qquad (1)$$

2 giờ cả hai vòi chảy được $2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ (bể), 12 giờ vòi II chảy được $\frac{12}{y}$ (bể).

Vì cùng chảy được 2 giờ thì khóa vòi I lại và vòi II phải chảy thêm 12 giờ nữa mới đầy bể nên ta có phương trình $2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{12}{y}=1$ (2)

Từ (1)(2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}\\ 2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{12}{y}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}\\ \frac{1}{3}+\frac{12}{y}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{x}=\frac{1}{9}\\ \frac{1}{y}=\frac{1}{18}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=9\\ y=18\end{cases} \text{(thỏa mãn)}$$

Vậy nếu chảy riêng để đầy bể, vòi I cần 9 giờ, vòi II cần 18 giờ.

DẠNG 4. TOÁN VỀ CẤU TẠO SỐ

- Chú ý đặt đúng điều kiện của ẩn:
  + Với số có hai chữ số $\overline{ab}$ do chữ số đầu tiên khác 0 nên điều kiện là :
  $1 \le a \le 9, 0 \le b \le 9; a, b, c \in \mathbb{N}$.
- Số $\overline{ab} = 10a + b; \overline{abc} = 100a + 10b + c$.
- Đổi chỗ hai chữ số của số $\overline{ab}$ ta được $\overline{ba} = 10b + a$.
- Chèn số 0; 1; 2 vào giữa số $\overline{a0b} = 100a + b; \overline{a1b} = 100a + 10 + b;\ \overline{a2b} = 100a + 20 + b$.

_Ví dụ 1._ Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng tổng các chữ số của nó bằng 14 và nếu đổi chỗ hai chữ số của nó thì được số nhỏ hơn số ban đầu 18 đơn vị.

Lời giải

Gọi số cần tìm là $\overline{ab}$, điều kiện $a, b \in \mathbb{N}, 1 \le a \le 9, 0 \le b \le 9$.

Vì tổng hai chữ số của nó là 14 nên ta có phương trình $a + b = 14$ (1)

Do đổi chỗ hai chữ số của số $\overline{ab}$ thì ta được số mới nhỏ hơn số ban đầu 18 đơn vị nên ta có phương trình $\overline{ba} = \overline{ab} - 18 \Leftrightarrow 10b + a = 10a + b - 18 \Leftrightarrow a - b = 2$ (2)

Từ (1)(2) ta có hệ phương trình

$\begin{cases} a+b=14 \\ a-b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a=16 \\ a-b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=8 \\ b=6 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy số cần tìm là 86.

Ví dụ 2. Cho một số tự nhiên có hai chữ số. Biết rằng tổng của chữ số hàng chục và hai lần chữ số hàng đơn vị là 12. Nếu thêm số 0 vào giữa hai chữ số thì ta được một số mới có ba chữ số lớn hơn số ban đầu 180 đơn vị. Tìm số ban đầu.

Lời giải

Gọi số ban đầu là $\overline{ab}$, điều kiện $a,b \in \mathbb{N}, 1 \le a \le 9, 0 \le b \le 9$.

Vì tổng của chữ số hàng chục và hai lần chữ số hàng đơn vị là 12 nên ta có phương trình $a+2b=12$.

Do thêm số 0 vào giữa hai chữ số của số $\overline{ab}$ thì ta được số mới có ba chữ số lớn hơn số ban đầu 180 đơn vị nên ta có phương trình

$\overline{a0b} = \overline{ab} + 180 \Leftrightarrow 100a+b=10a+b+180 \Leftrightarrow 90a=180 \Leftrightarrow a=2$ (thỏa mãn).

Thay $a=2$ vào $a+2b=12$ ta được $2+2b=12 \Leftrightarrow b=5$ (thỏa mãn).

Vậy số ban đầu là 25.

Ví dụ 3. Cho một số tự nhiên có hai chữ số. Biết tổng hai chữ số của nó bằng 9. Nếu lấy số đó chia cho số viết theo thứ tự ngược lại thì được thương là 2 và dư 18. Tìm số ban đầu.

Lời giải

Gọi số cần tìm là $\overline{ab}$, điều kiện $a,b \in \mathbb{N}, 1 \le a \le 9, 0 \le b \le 9$.

Vì tổng hai chữ số của nó là 9 nên ta có phương trình $a+b=9$ (1)

Do lấy số $\overline{ab}$ chia cho số viết theo thứ tự ngược lại thì được thương là 2 và dư 18 nên ta có phương trình

$\overline{ab} = 2.\overline{ba} + 18 \Leftrightarrow 10a+b=2(10b+a)+18 \Leftrightarrow 8a-19b=18$ (2)

Từ (1)(2) ta có hệ phương trinh

$\begin{cases} a+b=9 \\ 8a-19b=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a+8b=72 \\ 8a-19b=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 27b=54 \\ a+b=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ a=7 \end{cases}$ (thoả mãn).

Vậy số cần tìm là 72.

DẠNG 5. TOÁN PHẦN TRĂM

- Dự kiến mỗi ngày làm được x (sản phẩm).
- Thực tế mỗi ngày tăng $a\%$ nghĩa là :
  + Số sản phẩm tăng thêm mỗi ngày là $a\%.x$ (sản phẩm).
  + Thực tế mỗi ngày làm được $x+a\%.x$ (sản phẩm).

Ví dụ 1. Theo kế hoạch, hai tổ sản xuất phải làm 700 sản phẩm. Nhưng do tổ I làm vượt mức 15% so với kế hoạch, tổ II làm vượt mức 20% nên cả hai tổ làm được 820 sản phẩm. Tính số sản phẩm mỗi tổ phải làm theo kế hoạch.

Lời giải

	Tổ 1	Tổ 2	Cả hai tổ
Kế hoạch	x	y	700
Thực tế	$x+15\%.x$	$y+20\%.y$	820

Gọi số sản phẩm tổ I, tổ II phải làm theo kế hoạch lần lượt là x, y (sản phẩm).

Điều kiện $x, y > 0$.

Vì theo kế hoạch, hai tổ sản xuất phải làm 700 sản phẩm nên ta có phương trình

$$x + y = 700 \qquad (1)$$

Trong thực tế, tổ I làm được $x + 15\%.x = 1,15.x$ (sản phẩm), còn tổ II làm được $y + 20\%.y = 1,2y$ (sản phẩm) và cả hai tổ làm được 820 sản phẩm nên ta có phương trình

$1,15x + 1,2y = 820 \Leftrightarrow 115x + 120y = 82000 \qquad (2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 700 \\ 115x + 120y = 82000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 120x + 120y = 84000 \\ 115x + 120y = 82000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 400 \\ y = 300 \end{cases} \text{ (thỏa mãn) .}$$

Vậy theo kế hoạch, tổ I và tổ II phải làm lần lượt là 400 và 300 (sản phẩm) .

Ví dụ 2. Trong kì thi tuyển sinh vào lớp 10, hai trường A và B có 840 học sinh thi đỗ vào lớp 10 công lập và đạt tỉ lệ thi đỗ là 84%. Riêng trường A tỉ lệ thi đỗ là 80%, riêng trường B tỉ lệ thi đỗ là 90%. Tính số thí sinh dự thi của mỗi trường.

Lời giải

Gọi số học sinh dự thi của trường A và trường B lần lượt là x và y (học sinh). Điều kiện: $x, y \in N^*$.

Do cả hai trường có 840 học sinh thi đỗ vào lớp 10 và đạt tỉ lệ thi đỗ là 84% nên ta có phương trình:

$$84\%.(x + y) = 840 \Leftrightarrow x + y = 1000 \qquad (1)$$

Vì trường A tỉ lệ thi đỗ là 80%, trường B tỉ lệ thi đỗ là 90% nên ta có phương trình:

$$80\%.x + 90\%.y = 840 \Leftrightarrow 0,8x + 0,9y = 840 \Leftrightarrow 8x + 9y = 8400 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 1000 \\ 8x + 9y = 8400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x + 9y = 9000 \\ 8x + 9y = 8400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 600 \\ y = 400 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy số học sinh dự thi của trường A và trường B lần lượt là 600 và 400 (học sinh).

DẠNG 6: TOÁN CÓ NỘI DUNG HÌNH HỌC

Dạng này ta cần ghi nhớ các công thức về chu vi, diện tích các hình tam giác, hình vuông, hình chữ nhật,…

Ví dụ 1. Một khu vườn hình chữ nhật. Nếu tăng mỗi cạnh thêm $4m$ thì diện tích của mảnh vườn tăng thêm $216\ m^2$. Nếu chiều rộng tăng thêm $2m$ và chiều dài giảm đi $5\ m$ thì diện tích mảnh vườn sẽ giảm đi $50\ m^2$. Tính độ dài các cạnh của khu vườn.

Lời giải

	Chiều rộng	Chiều dài	Diện tích
Khu vườn	x	y	xy
Trường hợp 1	$x+4$	$y+4$	$(x+4)(y+4)$
Trường hợp 2	$x+2$	$y-5$	$(x+2)(y-5)$

Gọi chiều rộng và chiều dài của khu vườn lần lượt là x và y (m).

Điều kiện : $x > 0, y > 5$ và $x < y$.

Trường hợp 1: Chiều rộng là $x + 4$ (m), chiều dài là $y + 4$ (m).

Suy ra diện tích trong trường hợp 1 là $(x + 4)(y + 4) \quad (m^2)$.

Do diện tích tăng thêm $216\ m^2$ nên ta có phương trình

$$(x+4)(y+4)=xy+216 \Leftrightarrow x+y=50$$

Trường hợp 2: Chiều rộng là $x+2$ (m), chiều dài là $y-5$ (m).

Suy ra diện tích trong trường hợp 1 là $(x+2)(y-5)\quad (m^2)$.

Do diện tích tăng thêm $50\ m^2$ nên ta có phương trình

$$(x+2)(y-5)=xy-50 \Leftrightarrow -5x+2y=-40$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y=50 \\ -5x+2y=-40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=20 \\ y=30 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy chiều dài và chiều rộng của khu vườn lần lượt là $20\ m$ và $30\ m$.

Ví dụ 2. Trong một phòng họp hình chữ nhật, ghế được sắp theo hàng và số ghế trong mỗi hàng là như nhau. Nếu kê bọt đi 2 hàng và mỗi hàng bót đi 2 ghế thì tổng số ghế trong phòng họp đó giảm đi 80 ghế so với ban đầu. Nếu kê thêm 1 hàng và mỗi hàng kê thêm 2 ghế thì tổng số ghế trong phòng học đó tăng thêm 68 ghế so với ban đầu. Tính số hàng ghế và số ghế trong phòng họp đó lúc ban đầu.

Lời giải

	Số hàng ghế	Số ghế / hàng	Tổng số ghế
Ban đầu	x	y	xy
Trường hợp 1	$x-2$	$y-2$	$(x-2)(y-2)$
Trường hợp 2	$x+1$	$y+2$	$(x+1)(y+2)$

Gọi số hàng ghế và số ghế trong một hàng lúc đầu lần lượt là x (hàng) và y (ghế).

Điều kiện: $x>2, y>2, y\in\mathbb{N}$.

Tổng số ghế lúc đầu là xy (ghế).

Trường hợp 1: Số ghế là $x-2$ (ghế), số ghế trong một hàng là $y-2$ (ghế).

Suy ra tổng số ghế trong trường hợp 1 là $(x-2)(y-2)$ (ghế).

Do toonge số ghế trong trường hợp 1 giảm đi 80 ghế so với ban đầu nên ta có phương trình:

$$(x-2)(y-2)=xy-80 \Leftrightarrow x+y=42 \qquad (1)$$

Trường hợp 2: Số ghế là $x+1$ (ghế), số ghế trong một hàng là $y+2$ (ghế).

Suy ra tổng số ghế trong trường hợp 1 là $(x+1)(y+2)$ (ghế).

Do tổng số ghế trong trường hợp 2 tăng thêm 68 ghế so với ban đầu nên ta có phương trình:

$$(x+1)(y+2)=xy+68 \Leftrightarrow 2x+y=66 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y=42 \\ 2x+y=66 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=24 \\ y=18 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy trong phòng họp đó lúc ban đầu có 24 (hàng ghế) và có tổng số ghế là: $18.24=432$ (ghế)

II. GIẢI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Phương pháp chung

Bước 1: Kẻ bảng nếu được, gọi ẩn, kèm theo đơn vị và điều kiện cho ẩn.
Bước 2: Giải thích từng ô trong bảng, lập luận để thiết lập phương trình bậc hai.
Bước 3: Giải phương trình, đối chiếu điều kiện và trả lời bài toán.

DẠNG 1: TOÁN CHUYỂN ĐỘNG

1.1.Chuyển động trên bộ

- **Ghi nhớ công thức** Quãng đường = Vận tốc × Thời gian.
- *Các bước giải*

Bước 1: Kẻ bảng gồm vận tốc, thời gian, quãng đường và điền các thông tin vào bảng đó rồi gọi ẩn, kèm theo đơn vị và điều kiện cho ẩn.
Bước 2: Giải thích từng ô trong bảng, lập luận để thiết lập phương trình bậc hai.
Bước 3: Giải phương trình, đối chiếu điều kiện và trả lời bài toán.

Ví dụ 1. Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 24 km. Khi từ B trở về A người đó tăng vận tốc lên 4 km/h so với lúc đi, vì vậy thời gian về ít hơn thời gian đi 30 phút. Tính vận tốc của xe đạp khi đi từ A đến B.

Lời giải

	Vận tốc	Thời gian	Quãng đường
Lúc đi	x	$\frac{24}{x}$	24
Lúc về	$x+4$	$\frac{24}{x+4}$	24

Gọi vận tốc của xe đạp khi đi từ A đến B là x (km/h). Điều kiện: $x>0$.
Vận tốc khi từ B trở về A là $x+4$ (km/h).
Thời gian lúc đi và lúc về lần lượt là $\frac{24}{x}$ và $\frac{24}{x+4}$ (giờ).
Vì thời gian về ít hơn thời gian đi là 30 phút $=\frac{1}{2}$ giờ nên ta có phương trình :

$$\frac{24}{x}-\frac{24}{x+4}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{24(x+4)-24x}{x(x+4)}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{96}{x(x+4)}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2+4x-192=0 \Leftrightarrow x^2+4x+4-196=0 \Leftrightarrow (x+2)^2=196$$

$$\Leftrightarrow x+2=\pm 14 \Leftrightarrow x=12 \text{ (TM)}, x=-16 \text{ (L)}.$$

Vậy vận tốc lúc đi là 12 (km/h).

Ví dụ 2. Quãng đường từ A đến B dài 90 km. Một người đi xe máy từ A đến B. Khi đi đến B, người đó nghỉ 30 phút rồi quay trở về A với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi là 9 (km/h). Thời gian kể từ lúc bắt đầu đi từ A đến lúc trở về A là 5 giờ. Tính vận tốc xe máy lúc đi từ A đến B.

Lời giải

	Vận tốc	Thời gian	Quãng đường
Lúc đi	x	$\frac{90}{x}$	90

Lúc về	$x+9$	$\dfrac{90}{x+9}$	90

Gọi vận tốc của xe đạp khi đi từ A đến B là x (km/h). Điều kiện: $x>0$.
Vận tốc khi từ B trở về A là $x+9$ (km/h).

Thời gian lúc đi và lúc về lần lượt là $\dfrac{90}{x}$ và $\dfrac{90}{x+9}$ (giờ).

Vì thời gian nghỉ là 30 phút $=\dfrac{1}{2}$ giờ và thời gian kể từ lúc bắt đầu đi từ A đến lúc trở về A là 5 giờ nên ta có phương trình :

$$\frac{90}{x}+\frac{90}{x+9}+\frac{1}{2}=5 \Leftrightarrow \frac{90(x+9)+90x}{x(x+9)}=\frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{20x+90}{x(x+9)}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2+9x=40x+180 \Leftrightarrow x^2-31x-180=0$$

Có $\Delta = (-31)^2 - 4.1.(-180) = 1681 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=41$ nên

$x = \dfrac{31 \pm 41}{2} \Leftrightarrow x=36$ (thỏa mãn), $x = -5$ (loại)

Vậy vận tốc lúc đi là 36 (km/h).

Ví dụ 3. Một người dự định đi xe đạp từ Ađến B cách nhau 60 km trong một thời gian nhất định. Sau khi đi được 30 km người đó đã dừng lại nghỉ 30 phút . Do đó, để đến B đúng thời gian dự định người đó phải tăng vận tốc thêm 2 km/h. Tính vận tốc dự định của người đó.

Lời giải

	Vận tốc	Thời gian	Quãng đường
Dự định	x	$\dfrac{60}{x}$	60
Thực tế	x	$\dfrac{30}{x}$	30
	x + 2	$\dfrac{30}{x+2}$	30

Đổi 30 phút = $\dfrac{1}{2}$ giờ

Gọi vận tốc dự định là x (km/h). Điều kiện: $x > 0$

Thời gian dự định là $\dfrac{60}{x}$ (giờ)

Thời gian người đó đi 30 km đầu là $\dfrac{30}{x}$ (giờ).

Thời gian người đó đi 60 – 30 = 30 km còn lại là $\dfrac{30}{x+2}$ (giờ).

Do xe đến B đúng hạn nên ta có phương trình

$$\frac{30}{x}+\frac{30}{x+2}+\frac{1}{2}=\frac{60}{x} \Leftrightarrow \frac{30}{x}-\frac{30}{x+2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{60}{x(x+2)}=\frac{1}{2}$$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 120 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - 121 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 121$

$\Leftrightarrow x+1=\pm 11 \Leftrightarrow x=10$ (thỏa mãn), $x=-12$ (loại)

Vậy vận tốc dự định là 10 (km/h)

_Ví dụ 4._ Một ô tô dự định đi từ A đến B cách nhau 120 km trong một thời gian quy định. Sau khi đi được 1 giờ thì ô tô bị chặn bởi xe cứu hỏa 10 phút. Do đó để đến đúng hạn xe phải tăng tốc thêm 6km/h. Tính vận tốc lúc đầu của ô tô.

Lời giải

	Vận tốc	Thời gian	Quãng đường
Dự định	x	$\frac{120}{x}$	120
Thực tế	x	1	x
	x + 6	$\frac{120-x}{x+6}$	120 - x

Đổi 10 phút = $\frac{1}{6}$ giờ

Gọi vận tốc lúc đầu của ô tô là x (km/h). Điều kiện: x > 0

Thời gian dự định của ô tô là $\frac{120}{x}$ (giờ).

Trong 1 giờ đầu ô tô đi được x (km) nên quãng đường còn lại là 120 - x (km).

Thời gian ô tô đi trên quãng đường còn lại là $\frac{120-x}{x+6}$ (giờ).

Do xe đến B đúng hạn nên ta có phương trình

$$\frac{120-x}{x+6}+1+\frac{1}{6}=\frac{120}{x} \Leftrightarrow \frac{120}{x}-\frac{120-x}{x+6}=\frac{7}{6} \Leftrightarrow \frac{x^2+720}{x(x+6)}=\frac{7}{6}$$

$\Leftrightarrow$ $6(x^2+720)=7(x^2+6x) \Leftrightarrow x^2+42x-4320=0$

$\Leftrightarrow (x-48)(x+90)=0$

$\Leftrightarrow$ x= 48 (thỏa mãn), x= - 90 (loại)

Vậy vận tốc lúc đầu của ô tô là 48 (km/h)

1.2. Chuyển động trên dòng nước

- Vận tốc xuôi dòng = vận tốc riêng của ca nô + vận tốc dòng nước
  (viết tắt là $v_x = v_r + v_n$)
  Vận tốc ngược dòng = Vận tốc riêng của ca nô – vận tốc dòng nước
  (viết tắt là $v_{ng} = v_r - v_n$, chú ý $v_r > v_n$)
- Quãng đường = vận tốc x thời gian; $S_x = v_x.t_x$; $S_{ng} = v_{ng}.t_{ng}$.

_Ví dụ 1:_ Một tàu tuần tra chạy ngược dòng 60km, sau đó chạy xuôi dòng 48 km trên cùng một dòng sông có vận tốc của dòng nước là 2km/h. Tính vận tốc của tàu tuần tra khi nước yên lặng, biết thời gian xuôi dòng ít hơn thời gian ngược dòng là 1 giờ.

Lời giải

	Vận tốc	Thời gian	Quãng đường
Xuôi dòng	x + 2	$\frac{48}{x+2}$	48
Ngược dòng	x - 2	$\frac{60}{x-2}$	60

Gọi vận tốc của tàu khi nước yên lặng là x (km/h). Điều kiện: x > 2.

Vận tốc lúc xuôi dòng và ngược dòng lần lượt là x + 2; x – 2 (km/h).

Thời gian khi xuôi dòng và ngược dòng lần lượt là $\frac{48}{x+2}$ và $\frac{60}{x-2}$ (giờ).

Vì thời gian xuôi dòng ít hơn thời gian ngược dòng 1 giờ nên ta có phương trình

$$\frac{60}{x-2} - \frac{48}{x+2} = 1 \Leftrightarrow \frac{60(x+2)-48(x-2)}{(x-2)(x+2)} = 1 \Leftrightarrow \frac{12x-216}{x^2-4} = 1$$

$\Leftrightarrow x^2 - 12x - 220 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 12x + 36 - 256 = 0 \Leftrightarrow (x-6)^2 = 256$

$\Leftrightarrow x - 6 = \pm 16 \Leftrightarrow x = 22$ (thỏa mãn), $x = -10$ (loại)

Vậy vận tốc của tàu thủy khi nước yên lặng là 22 (km/h).

Ví dụ 2. Lúc 6 giờ 30 phút sáng, một ca nô xuôi dòng sông từ A đến B dài $48km$. Khi đến B, ca nô nghỉ 30 phút sau đó lại ngược dòng từ B về đến A lúc 10 giờ 36 phút cùng ngày. Tìm vẫn tốc riêng của ca nô, biết vận tốc dòng nước là $3km/h$.

Lời giải

	Vận tốc	Thời gian	Quãng đường
Xuôi dòng	x + 3	$\frac{48}{x+3}$	48
Ngược dòng	x - 3	$\frac{48}{x-3}$	48

Gọi vận tốc riêng của ca nô là x (km/h). Điều kiện: $x > 3$.

Vận tốc lúc xuôi dòng và ngược dòng lần lượt là $x + 3$; $x - 3$ (km/h).

Thời gian khi xuôi dòng và ngược dòng lần lượt là $\frac{48}{x+3}$ và $\frac{48}{x-3}$ (giờ).

Vì tổng thời gian cả đi,về, nghỉ là 10 giờ 36 phút – 6 giờ 30 phút $= \frac{41}{10}$ giờ và thời gian nghỉ là 30 phút $= \frac{1}{2}$ giờ nên ta có phương trình

$$\frac{48}{x+3} + \frac{48}{x-3} + \frac{1}{2} = \frac{41}{10} \Leftrightarrow \frac{48(x-3)+48(x+3)}{x^2-9} = \frac{36}{10}$$

$$\Leftrightarrow \frac{96x}{x^2-9} = \frac{36}{10} \Leftrightarrow \frac{8x}{x^2-9} = \frac{3}{10} \Leftrightarrow 3x^2 - 80x - 27 = 0 .$$

Có $\Delta' = (-40)^2 - 3.(-27) = 1681 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 41$ nên

$x = \frac{40 \pm 41}{3} \Rightarrow x = 27$ (thỏa mãn), $x = -\frac{1}{3}$ (loại)

Vậy vận tốc riêng của ca nô là 27 (km/h)

DẠNG 2: TOÁN NĂNG SUẤT

- Năng suất là lượng công việc làm được trong một đơn vị thời gian.
- Tổng lượng công việc = Năng suất x thời gian
- Năng suất = Tổng lượng công việc : Thời gian
- Thời gian = Tổng lượng công việc : Năng xuất

Ví dụ 1: Một phân xưởng theo kế hoạch cần sản xuất 1100 sản phẩm trong một số ngày quy định. Do mỗi ngày phân xưởng đó vượt mức 5 sản phẩm nên phân xưởng đó đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn thời gian quy định là 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch thì mỗi ngày phân xưởng đó cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

Lời giải

	Số sản phẩm / ngày	Số ngày	Tổng số sản phẩm
Kế hoạch	x	$\frac{1100}{x}$	1100
Thực tế	x + 5	$\frac{1100}{x+5}$	1100

Gọi số sản phẩm mỗi ngày xưởng đó cần làm theo kế hoạch là x (sản phẩm).
Điều kiện: $x>0$
Số sản phẩm mỗi ngày phân xưởng đó làm được trong thực tế là $x+5$ (sản phẩm).
Số ngày phân xưởng đó cần làm theo kế hoạch là $\frac{1100}{x}$ (ngày).
Số ngày phân xưởng đó cần làm trong thực tế là $\frac{1100}{x+5}$ (ngày).
Vì phân xưởng đó hoàn thành kế hoạch sớm hơn 2 ngày nên ta có phương trình:

$$\frac{1100}{x}-\frac{1100}{x+5}=2 \Leftrightarrow \frac{1100(x+5)-1100x}{x(x+5)}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{5500}{x^2+5x}=2 \Leftrightarrow \frac{2750}{x^2+5x}=1 \Leftrightarrow x^2+5x-2750=0$$

Có $\Delta=5^2-4.1.(-2750)=11025>0 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=105$ nên

$x=\frac{-5\pm105}{2} \Rightarrow x=50$ (thỏa mãn), $x=-55$ (loại)

Vậy theo kế hoạch thì mỗi ngày phân xưởng đó cần làm 50 (sản phẩm).

Ví dụ 2. Một đội xe dự định dùng một số xe cùng loại để chở 60 tấn hàng. Lúc sắp khởi hành có 3 xe phải điều đi làm việc khác nên không thể tham gia chở hàng. Vì vậy, mỗi xe còn lại phải chở nhiều hơn dự định 1 tấn hàng. Tính số xe theo dự định của đội đó, biết mỗi xe chở khối lượng hàng như nhau.

Lời giải:

	Số hàng/xe	Số xe	Tổng số hàng
Dự định	$\frac{60}{x}$	x	60

Thực tế	$\dfrac{60}{x-3}$	$x-3$	60

Gọi số xe theo dự định của đội là x (xe). Điều kiện: $x>3$.
Thực tế số xe là $x-3$ (xe).

Số hàng trên mỗi xe theo dự định và trong thực tế lần lượt là $\dfrac{60}{x}$ và $\dfrac{60}{x-3}$ (tấn).

Vì mỗi xe thực tế phải chở nhiều hơn dự định 1 tấn hàng nên ta có phương trình:

$$\frac{60}{x-3}-\frac{60}{x}=1 \Leftrightarrow \frac{180}{x(x-3)}=1 \Leftrightarrow x^2-3x-180=0.$$

Có $\Delta=(-3)^2-4.1.(-180)=729>0 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=27$ nên

$x=\dfrac{3\pm 27}{2} \Leftrightarrow x=-12$ (loại), $x=15$ (thỏa mãn).

Vậy số xe dự định của đội là 15 (xe).

Ví dụ 3. Một tổ sản xuất phải làm 600 sản phẩm trong một thời gian quy định với năng suất như nhau. Sau khi làm được 400 sản phẩm, tổ đã tăng năng suất thêm mỗi ngày 10 sản phẩm, do đó đã hoàn thành công việc sớm hơn một ngày. Tính số sản phẩm làm trong mỗi ngày theo quy định.

Lời giải

	Số sản phẩm/ngày	Số ngày	Tổng số sản phẩm
Dự kiến	x	$\dfrac{600}{x}$	600
Thực tế	x	$\dfrac{400}{x}$	400
	$x+10$	$\dfrac{200}{x+10}$	200

Gọi số sản phẩm dự kiến làm trong mỗi ngày là x (sản phẩm).
Điều kiện: $x>0$.

Thời gian dự kiến là $\dfrac{600}{x}$ (ngày).

Thời gian làm 400 sản phẩm đầu là $\dfrac{400}{x}$ (ngày).

Thời gian làm 600 - 400 = 200 sản phẩm sau là $\dfrac{200}{x+10}$ (ngày).

Vì thực tế công việc hoàn thành sớm hơn dự kiến 1 ngày nên ta có phương trình:

$$\frac{600}{x}-\left(\frac{400}{x}+\frac{200}{x+10}\right)=1 \Leftrightarrow \frac{200}{x}-\frac{200}{x+10}=1 \Leftrightarrow \frac{200(x+10)-200x}{x(x+10)}=1$$

$$\Leftrightarrow x^2+10x-2000=0 \Leftrightarrow x^2+10x+25-2025=0 \Leftrightarrow (x+5)^2=2025.$$

$\Leftrightarrow x+5=\pm 45 \Leftrightarrow x=40$ (thỏa mãn), $x=-50$ (loại).

Vậy số sản phẩm dự kiến làm trong mỗi ngày là 40 (sản phẩm).

Ví dụ 4. Một người thợ làm 120 sản phẩm trong một thời gian và năng suất dự định. Khi làm được 50 sản phẩm, người thợ đó nhận thấy làm với năng suất như vậy sẽ thấp hơn năng suất dự định là 2 sản phẩm một ngày. Do đó, để hoàn thành đúng thời gian đã định, người thợ đó tăng năng suất thêm 2 sản phẩm một ngày so với dự định. Tính năng suất dự định của người thợ đó.

Lời giải

	Số sản phầm/ngày	Số ngày	Tổng số sản phẩm
Dự định	x	$\frac{120}{x}$	120
Thực tế	$x-2$	$\frac{50}{x-2}$	50
	$x+2$	$\frac{70}{x+2}$	70

Gọi số sản phẩm mỗi ngày người thợ đó cần làm theo dự định là x (sản phẩm).
Điều kiện: $x>2$.

Số ngày theo dự định là $\frac{120}{x}$ (ngày).

Trong 50 sản phẩm đầu, mỗi ngày người thợ đó làm được $x-2$ (sản phẩm) nên số ngày làm 50 sản phẩm đầu là $\frac{50}{x-2}$ (ngày).

Trong 120-50=70 sản phẩm sau, mỗi ngày người thợ đó làm được $x+2$ (sản phẩm) nên số ngày làm 70 sản phẩm đầu là $\frac{70}{x+2}$ (ngày).

Do thực tế người đó hoàn thành đúng như dự định nên ta có phương trình:

$$\frac{50}{x-2}+\frac{70}{x+2}=\frac{120}{x}\Leftrightarrow\frac{120x-40}{x^2-4}=\frac{120}{x}$$

$$\Leftrightarrow 120x^2-40x=120x^2-480\Leftrightarrow x=12 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy số sản phẩm mỗi ngày người thợ dó cần làm theo dự định là 12 (sản phẩm).

DẠNG 3: TOÁN LÀM CHUNG CÔNG VIỆC

Bài toán cơ bản: Nếu hai người làm chung thì sau k ngày (giờ, phút, …) xong công việc. Nếu làm một mình thì người thứ nhất hoàn thành công việc sớm hơn người thứ hai là m ngày (giờ, phút, …). Hỏi nếu làm một mình thì để hoàn thành công việc mỗi người mất mấy ngày (giờ, phút, …)?

Phương pháp giải

Gọi thời gian người I, người II làm một mình xong công việc lần lượt là x, y (ngày).
Điều kiện: $x > 0$, $y > 0$.

Suy ra 1 ngày người I làm được $\frac{1}{x}$, người II làm được $\frac{1}{y}$ (lượng công việc).

* k ngày người I làm được $\frac{k}{x}$, người II làm được $\frac{k}{y}$ (lượng công việc).

Do hai người làm chung thì sau k ngày xong công việc nên ta có phương trình:

$$\frac{k}{x} + \frac{k}{y} = 1 \qquad (1)$$

* Vì làm một mình thì người thứ nhất hoàn thành công việc nhanh hơn người thứ hai là m ngày nên ta có phương trình $y = x + m$ (2)

Thay (2) vào (1) ta được phương trình $\frac{k}{x} + \frac{k}{x+m} = 1$ (3)

* Đưa (3) về phương trình bậc hai, giải x, đối chiếu điều kiện và trả lời bài toán.

Ví dụ 1. Hai người thợ cùng làm chung một công việc trong 6 giờ thì xong. Nếu họ làm riêng thì người thứ nhất hoàn thành công việc nhanh hơn người thứ hai là 5 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi người cần bao nhiêu giờ để xong công việc đó?

Lời giải

Gọi thời gian người I, người II làm một mình xong công việc lần lượt là x, y (ngày).
Điều kiện: $x > 0$, $y > 0$.

Suy ra 1 giờ người I và người II lần lượt làm được $\frac{1}{x}$ và $\frac{1}{y}$ (lượng công việc).

* 6 giờ cả hai người làm được $6\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$(lượng công việc).

Do hai người cùng làm trong 6 giờ thì xong công việc nên ta có phương trình:

$$6\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \qquad (*)$$

* Vì làm một mình thì người thứ nhất hoàn thành công việc nhanh hơn người thứ hai là 5 giờ nên ta có phương trình $y = x + 5$, thay vào (*), ta được:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+5} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{x+5+x}{x(x+5)} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{2x+5}{x^2+5x} = \frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow x^2+5x=12x+30 \Leftrightarrow x^2-7x-30=0$$

Có $\Delta = (-7)^2 - 4.1.(-30) = 169 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=13$ nên

$x = \dfrac{7\pm 13}{2} \Rightarrow x = -3$ (loại), $x = 10 \Rightarrow y = 15$ (thoả mãn điều kiện).

Vậy, nếu làm một mình để xong công việc, người I cần 10 giờ, người II cần 15 giờ.

Ví dụ 2. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể cạn thì sau 1 giờ 20 phút đầy bể. Nếu để chảy một mình thì vòi thứ nhất chảy đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai là 2 giờ. Hãy tính thời gian mỗi vòi chảy một mình đầy bể.

Lời giải

Gọi thời gian vòi I, vòi II chảy một mình đầy bể lần lượt là x, y (giờ).
Điều kiện: $x > 0$, $y > 0$.

Suy ra 1 giờ vòi I và vòi II lần lượt chảy được $\dfrac{1}{x}$ và $\dfrac{1}{y}$ (bể).

* 1 giờ 20 phút $=\dfrac{4}{3}$ giờ cả hai vòi chảy được $\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$ (bể).

Do cả hai vòi cùng chảy thì sau 1 giờ 20 phút sẽ đầy bể nên ta có phương trình

$$\frac{4}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1 \Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{4}{3} \qquad (*)$$

* Vì chảy một mình cho đến khi đầy bể thì vòi I nhanh hơn vòi II là 2 giờ nên ta có phương trình $y = x + 2$, thay vào (*), ta được

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}=\frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{x+2+x}{x(x+2)}=\frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{2x+2}{x^2+2x}=\frac{3}{4}$$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 6x = 8x + 8 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 8 = 0$

Có $\Delta' = (-1)^2 - 3.(-8) = 25 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 5$ nên

$x = \dfrac{1\pm 5}{3} \Rightarrow x = -\dfrac{4}{3}$ (loại), $x = 2 \Rightarrow y = 4$ (thỏa mãm điều kiện).

Vậy nếu chảy một mình thì để đầy bể, vòi I cần 2 giờ, vòi II cần 4 giờ.

DẠNG 4: TOÁN CÓ NỘI DUNG HÌNH HỌC

Dạng này ta cần ghi nhớ các công thức về chu vi, diện tích của các hình tam hình vuông, hình chữ nhật,...

Ví dụ 1. Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi bằng 28 mét và một đường chéo bằng 10 mét. Tính chiều dài chiều rộng mảnh đất đó theo đơn vị là mét.

Lời giải

Gọi chiều dài và chiều rộng của mảnh đất đó lần lượt là x, y (m)
Điều kiên: $x > 0$, $y > 0$, $x > y$.

Do chu vi mảnh đất là 28 m nên ta có phương trình

$$2(x+y)=28 \Rightarrow x+y=14 \Leftrightarrow y=14-x \quad (1)$$

Vì độ dài đườngchéo bằng 10 m nêntheo định lý Pylago,ta có: $x^2+y^2=10$ (2)

Thay (1) vào (2) ta được $x^2+(14-x)^2=100 \Leftrightarrow x^2-14x+48=0$

$$\Leftrightarrow x^2-6x-8x+48=0 \Leftrightarrow x(x-6)-8(x-6)=0 \Leftrightarrow (x-6)(x-8)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-6=0 \\ x-8=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=6 \Rightarrow y=8 \\ x=8 \Rightarrow y=6 \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện ta được x = 8, y = 6.

Vậy chiều dài và chiều rộng của mảnh đất đó lần lượt là 8 m và 6m.

Ví dụ 2. Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi là 200 m. Sau khi người ta làm một lối đi rộng 2m xung quanh vườn (thuộc đất của vườn) thì phần đất còn lại để trồng cây là một hình chữ nhật có diện tích là 2016 m². Tính các kích thước của khu vườn lúc đầu.

Lời giải

	Chiều rộng	Chiều dài	Diện tích
Ban đầu	x	y	xy
Sau	x - 4	y - 4	(x-4)(y-4)

Gọi chiều dài và chiều rộng của khu vườn lần lượt là x, y (m).

Điều kiện: x > 0, y >*0, x* > y.

* Do khu vườn lúc đầu có chu vi là 200m nên ta có phương trình

$$2(x+y)=200 \Leftrightarrow y=100-x \quad (1)$$

Sau khi làm lối đi rộng 2m xung quanh vườn thì chiều rộng là x – 4 (m) và chiều dài là y – 4 (m) nên diện tích là $(x-4)(y-4)=2016$ (2)

Thay (1) vào (2) ta được $(x-4)(96-x)=2016 \Leftrightarrow x^2-100x+2400=0$

$$\Leftrightarrow x^2-40x-60x+2400=0 \Leftrightarrow x(x-40)-60(x-40)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-40)(x-60)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-40=0 \\ x-60=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=40 \Rightarrow y=60 \\ x=60 \Rightarrow y=40 \end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện ta được x = 40, y = 60.

Vậy khu vườn lúc đầu có chiều rộng và chiều dài lần lượt là 40 m và 60 m.

HỆ THỐNG BÀI TẬP SỬ DỤNG TRONG CHỦ ĐỀ

I. GIẢI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Bài 1. Một xe máy đi từ A đến B trong thời gian dự định. Nếu vận tốc tăng thêm 20 km/h thì đến B sớm 1 giờ so với dự định, nếu vận tốc giảm đi 10 km/h thì đến B muộn 1 giờ so với dự định. Tính quãng đường AB.

Bài 2. Một ca nô chạy trên một khúc sông, xuôi dòng 20 km rồi ngược dòng 18km hết 1 giờ 25 phút. Lần khác, ca nô đó đi xuôi dòng 15km rồi ngược dòng 24 km thì hết 1 giờ 30 phút. Tính vận tốc riêng của ca nô và vận tốc của dòng nước, biết các vận tốc đó không đổi.

Bài 3. Để hoàn thành một công việc theo dự định thì cần một số công nhân làm trong một số ngày nhất định. Nếu tăng thêm 10 công nhân thì công việc hoàn thành sớm được 2 ngày. Nếu bớt đi 10 công nhân thì phải mất thêm 3 ngày nữa mới hoàn thành công việc. Hỏi theo dự định thì cần bao nhiêu công nhân và làm trong bao nhiêu ngày?

Bài 4. Hai người thợ cùng làm một công việc trong 4 giờ 30 phút thì xong. Nếu người thứ nhất làm một mình trong 3 giờ và người thứ hai làm một mình trong 2 giờ thì tổng số họ làm được 50% công việc. Hỏi mỗi người làm công việc đó một mình thì trong bao lâu sẽ xong?

Bài 5. Hai người thợ cùng làm một công việc thì sau 2 giờ 40 phút sẽ hoàn thành. Nếu người thứ nhất làm một mình và 3 giờ sau người thứ hai cùng vào làm thì mất 40 phút nữa mới hoàn thành. Hỏi mỗi người làm công việc đó một mình thì trong mấy giờ sẽ xong?

Bài 6. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể cạn thì sau 2 giờ đầy bể. Nếu mở vòi I trong 45 phút rồi khoá lại và mở vòi II trong 30 phút thì cả hai vòi chảyđược $\frac{1}{3}$ bể. Hỏi mỗi vòi chảy riêng đầy bể trong bao lâu?

Bài 7. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể cạn thì sau 6 giờ đầy bể. Cùng được 2 giờ thì khoá vòi I lại và vòi II phải chảy thêm 12 giờ nữa mới đầy bể. Hỏi mỗi vòi chảy riêng đầy bể trong bao lâu?

Bài 8. Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng tổng các chữ số của nó bằng 14 và nếu đổi chỗ hai chữ số của nó thì được số nhỏ hơn số ban đầu 18 đơn vị.

Bài 9. Cho một số tự nhiên có hai chữ số. Biết rằng tổng của chữ số hàng chục và hai lần chữ số hàng đơn vị là 12. Nếu thêm số 0 vào giữa hai chữ số thì ta đượcmột sô mới có ba chữ sô lớn hơn sô ban đầu 180 đơn vị. Tìm sô ban đầu.

Bài 10. Cho một số tự nhiên có hai chữ số. Biết tổng hai chữ số của nó bằng 9 Nếu lấy số đó chia cho số viết theo thứ tự ngược lại thì được thương là 2 và dư 18. Tìm số ban đầu.

Bài 11. Theo kế hoạch, hai tổ sản suất phải làm 700 sản phẩm. Nhưng do tổ I làm vượt mức 15% so với kế hoạch, tổ II làm vượt mức kế hoạch 20% nên cả hai tổ đã làm được 820 sản phẩm. Tính số sản phẩm mỗi tổ phải làm theo kế hoạch.

Bài 12. Trong kì thi tuyển sinh vào lớp 10, hai trường A và B có 840 học sinh thi đỗ vào lớp 10 công lập và đạt tỉ lệ thi đỗ là 84%. Riêng trường A tỉ lệ thi đỗ là 80%, riêng trường B tỉ lệ thi đỗ là 90%. Tính số học sinh dự thi của mỗi trường.

Bài 13. Một khu vườn hình chữ nhật. Nếu tăng mỗi cạnh thêm 4m thì diện tich mảnh vườn tăng thêm 216m^2. Nếu chiều rộng tăng thêm 2m và chiều dàigiảm đi 5m thì diện tích mảnh vườn sẽ giảm đi 50m^2. Tính độ đài các cạnh của khu vườn.

Bài 14. Trong một phòng họp hình chữ nhật, ghế được sắp xếp theo hàng và số ghế trong mỗi hàng là như nhau. Nếu kê bớt đi 2 hàng và mỗi hàng bớt đi 2 ghế thì tổng số ghế trong phòng họp đó giảm đi 80 ghế so với ban đầu. Nếu kê thêm 1 hàng và mỗi hàng kê thêm 2 ghế thì tổng số ghế trong phòng họp đó tăng thêm 68 ghế so với ban đầu. Tính số hàng ghế và số ghế trong phòng họp đó lúc ban đầu.

II. GIẢI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Bài 1. Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 24 km. Khi từ B trở về A người đó tăng vận tốc lên 4 km/h so với lúc đi, vì vậy thời gian về ít hơn thờigian đi 30 phút. Tính vân tốc của xe đạp khi đi từ A đến B.

Bài 2. Quãng đường từ A đến B dài 90km. Một người đi xe máy từ A đến B. Khi đến B, người đó nghỉ 30 phút rồi quay trở về A với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi là 9 (km/h). Thời gian kể từ lúc bắt đầu đi từ A đến lúc trở về đến A là 5 giờ. Tính vận tốc xe máy lúc đi từ A đến B.

Bài 3. Một người dự định đi xe đạp từ A đến B cách nhau 60km trong một thời gian nhất định. Sau khi đi được 30km người đó đã dừng lại nghỉ 30 phút. Do đó, để đến B đúng thời gian dự định người đó phải tăng vận tốc thêm 2km/h. Tính vận tốc dự định của người đó.

Bài 4. Một ô tô dự định đi từ A đến B cách nhau 120 km trong một thời gian quy định. Sau khi đi được 1 giờ thì ô tô bị chặn bởi xe cứu hỏa 10 phút. Do đó để đến B đúng hạn xe phải tăng vận tốc thêm 6 km/h. Tính vận tốc lúc đầu của ô tô.

Bài 5. Một tàu tuần tra chạy ngược dòng 60km, sau đó chạy xuôi dòng 48km trên cùng một dòng sông có vận tốc của dòng nước là 2km/h. Tính vận tốc của tàu tuần tra khi nước yên lặng, biết thời gian xuôi dòng ít hơn thời gian ngược dòng 1 giờ.

Bài 6. Lúc 6 giờ 30 sáng, một ca nô xuôi dòng từ A đến B dài 48km. Khi đến B, ca nô nghỉ 30 phút sau đó lại ngược dòng từ B về đến A lúc 10 giờ 36 phút cùng ngày. Tìm vận tốc riêng của ca nô, biết vận tốc dòng nước là 3 km/h.

Bài 7. Một phân xưởng theo kế hoạch cần sản xuất 1100 sản phẩm trong một số ngày quy định. Do mỗi ngày phân xưởng đó vượt mức 5 sản phẩm nên phân xưởng đó đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn thời gian quy định là 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch thì mỗi ngày phân xưởng đó cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

Bài 8. Một đội xe dự định dùng một số xe cùng loại để chở 60 tấn hàng. Lúc sắp khởi hành có 3 xe phải điều đi làm việc khác nên không thể tham gia chở hàng. Vì vậy mỗi xe còn lại phải chở nhiều hơn dự định 1 tấn hàng. Tính số xe theo dự định của đội đó, biết mỗi xe chở khối lượng hàng như nhau.

Bài 9. Mỗi tổ sản xuất phải làm 600 sản phẩm trong một thời gian quy định với năng suất như nhau. Sau khi làm được 400 sản phẩm, tổ đã tăng năng suất thêm mỗi ngày 10 sản phẩm, do đó đã hoàn thành công việc sớm hơn một ngày. Tính số sản phẩm trong mỗi ngày theo quy định.

Bài 10. Một người thợ làm 120 sản phẩm trong một thời gian và năng suất dự định. Khi làm được 50 sản phẩm, người thợ đó nhận thấy làm với năng suất như vậy sẽ thấp hơn năng suất dự định là 2 sản phẩm một ngày. Do đó để hoàn thành đúng thời gian đã định, người thợ đó tăng năng suất thêm 2 sản phẩm một ngày so với dự định Tính năng suất dự định của người thợ đó.

Bài 11. Hai người thợ cùng làm chung một công việc trong 6 giờ thì xong. Nếu họ làm riêng thì người thứ nhất hoàn thành công việc nhanh hơn người thứ hai là 5 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi người cần bao nhiêu giờ để xong công việc đó?

Bài 12. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể cạn thì sau 1 giờ 20 phút đầy bể. Nếu để chảy một mình thì vòi thứ nhất chảy nhanh hơn vòi thứ hai là 2 giờ. Hãy tính thời gian mỗi vòi chảy một mình đầy bể.

Bài 13. Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi bằng 28 mét và độ dài đường chéo bằng 10 mét. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất đó theo đơn vị là mét.

Bài 14. Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi là 200m. Sau khi người ta làm một lối đi rộng 2m xung quanh vườn (thuộc đất của vườn) thì phần đất còn lại để trồng cây là một hình chữ nhật có diện tích là $2016m^2$. Tính các kích thước của khu vườn lúc đầu.

CHỦ ĐỀ 4 – PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VÀ ĐỊNH LÝ VI-ET

I. ĐỊNH LÍ VIÉT

DẠNG 1 CÁC NGHIỆM THỎA MÃN MỘT BIỂU THỨC ĐỐI XỨNG

Bài toán thường gặp Tìm m để phương trình $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$ có hai nghiệm (phân biệt) $x_1,\ x_2$ thỏa mãn một biểu thức đối xứng đối với $x_1,\ x_2$

Bước 1. Tìm điều kiện để phương trình có hai nghiệm (phân biệt) $x_1,\ x_2$

- $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$ có hai nghiệm $x_1,\ x_2 \Leftrightarrow \Delta \geq 0\ \left(\Delta' \geq 0\right)$
- $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2 \Leftrightarrow \Delta > 0\ \left(\Delta' > 0\right)$

Bước 2. Biến đổi biểu thức đối xứng đối với $x_1,\ x_2$ về tổng $x_1 + x_2$ và tích $x_1.x_2$

Bước 3. Sử dụng định lý Viet, ta có $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$, $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$ và thay vào biểu thức chứa tổng $x_1 + x_2$ và tích x_1x_2 ở trên. Giải ra m, đối chiếu điều kiện ở bước 1.

Một số phép biến đổi thường gặp

- $x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$
- $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2) = (x_1 + x_2)\left[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2\right]$

Hoặc $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$.

- $x_1^4 + x_2^4 = \left(x_1^2\right)^2 + \left(x_2^2\right)^2 + 2x_1^2x_2^2 - 2x_1^2x_2^2 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 - 2x_1^2x_2^2$.
- $x_1^5 + x_2^5$ thì tính $x_1^2 + x_2^2$ và $x_1^3 + x_2^3$ rồi xét tích $\left(x_1^2 + x_2^2\right)\left(x_1^3 + x_2^3\right)$.
- $x_1^6 + x_2^6 = \left(x_1^2\right)^3 + \left(x_2^2\right)^3 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)\left(x_1^4 + x_2^4 - x_1^2x_2^2\right)$

Hoặc $x_1^6 + x_2^6 = \left(x_1^3\right)^2 + \left(x_2^3\right)^2 = \left(x_1^3 + x_2^3\right)^2 - 2x_1^3x_2^3$.

- $x_1^7 + x_2^7$ thì tính $x_1^3 + x_2^3$ và $x_1^4 + x_2^4$ rồi xét tích $\left(x_1^3 + x_2^3\right)\left(x_1^4 + x_2^4\right)$.
- $|x_1 - x_2|$ thì xét $|x_1 - x_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$.
- $|x_1| + |x_2|$ thì xét $\left(|x_1| + |x_2|\right)^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + 2|x_1|.|x_2|$

$= x_1^2 + x_1^2 + 2|x_1x_2| = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2|x_1x_2|$.

Chú ý : $|A|^2 = A^2,\ |A \pm B|^2 = (A \pm B)^2,\ |A|.|B| = |A.B|$.

Ví dụ 1. Cho phương trình $x^2 - 2(m+3)x + m^2 + 3 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $(2x_1 - 1)(2x_2 - 1) = 9$.

Lời giải

Có $\Delta' = \left[-(m+3)\right]^2 - 1.(m^2 + 3) = (m+3)^2 - m^2 - 3 = 6m + 6$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ khi $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 6m + 6 > 0 \Leftrightarrow m > -1$

$\Delta' > 0 \Leftrightarrow 6m + 6 > 0 \Leftrightarrow m > -1$

Có $(2x_1 - 1)(2x_2 - 1) = 9 \Leftrightarrow 4x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 1 = 9$ (*).

Theo định lý Viét, ta có $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = 2(m+3)$, $x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = m^2 + 3$

Thay vào (*) ta được $4(m^2 + 3) - 4(m+3) + 1 = 9 \Leftrightarrow (2m - 1)^2 = 9$

$\Leftrightarrow 2m - 1 = \pm 3 \Leftrightarrow m = -1$ (loại), $m = 2$ (thỏa mãn).

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 2. Cho phương trình $x^2-2(m-3)x+2(m-1)=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ sao cho biểu thức $T=x_1^2+x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Có $\Delta'=\left[-(m-3)\right]^2-1.\left[-2(m-1)\right]=(m-3)^2+2m-2=m^2-4m+7=(m-2)^2+3>0\,\forall m$

Do đó phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$

Có $T=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$.

Theo định lý Viét, ta có $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=2(m-3)$, $x_1x_2=\dfrac{c}{a}=-2(m-1)$

Thay vào T ta được

$T=\left[-2(m-3)\right]^2-2\left[-2(m-1)\right]=4m^2-20m+32=(2m-5)^2+7\ge 7$

$\Rightarrow Min\,T=7$ khi $m=\dfrac{5}{2}$.

Vậy $m=\dfrac{5}{2}$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 3. Cho phương trình $x^2-2(m+1)x+4m-m^2=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ sao cho biểu thức $A=|x_1-x_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Có $\Delta'=\left[-(m+1)\right]^2-1.(4m-m^2)=(m+1)^2-4m+m^2=2m^2-2m+1>0\,\forall m$

Do đó phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$

Có $A^2=|x_1-x_2|^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$.

Theo định lý Viét, ta có $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=2(m+1)$, $x_1x_2=\dfrac{c}{a}=4m-m^2$

Thay vào $A^2=|x_1-x_2|^2$ ta được

$A^2=|x_1-x_2|^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$

$A^2=4(m+1)^2-4(4m-m^2)=8m^2-8m+4=8\left(m-\dfrac{1}{2}\right)^2+2\ge 2$

$\Rightarrow A\ge\sqrt{2}\Rightarrow Min\,A=\sqrt{2}$ khi $m=\dfrac{1}{2}$

Vậy $m=\dfrac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 4. Cho phương trình $x^2+mx-3=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $|x_1|+|x_2|=4$.

Lời giải

Có $ac=-3<0\,\forall m$ do đó phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$

Theo định lý Viét, ta có $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=-m$, $x_1x_2=\dfrac{c}{a}=-3$

Xét $\left(|x_1|+|x_2|\right)^2=x_1^2+x_2^2+2|x_1x_2|=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+2|x_1x_2|$

$=m^2-2.(-3)+2|-3|=m^2+12$

Do đó $|x_1|+|x_2|=4\Leftrightarrow m^2+12=16\Rightarrow m=\pm 2$

Vậy $m=\pm 2$ là giá trị cần tìm.

_Ví dụ 5._ _Cho phương trình $x^2+mx+2m-4=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $|x_1|+|x_2|=3$._

Lời giải

Có $\Delta=(-m)^2-4.(2m-4)=m^2-8m+16=(m-4)^2$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ khi $\Delta'>0 \Leftrightarrow m\neq 4$

Theo định lý Viét, ta có $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=m$, $x_1x_2=\dfrac{c}{a}=2m-4$

Xét $\left(|x_1|+|x_2|\right)^2=x_1^2+x_2^2+2|x_1x_2|=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+2|x_1x_2|$

$=m^2-2.(2m-4)+2|2m-4|=m^2-4m+8+4.|m-2|=(m-2)^2+4|m-2|+4$

Nên $|x_1|+|x_2|=3 \Rightarrow (m-2)^2+4|m-2|+4=9$

$(m-2)^2+4|m-2|-5=0 \Rightarrow |m-2|=1 \Rightarrow m=1, m=3$ (thảo mãn).

Vậy $m=1, m=3$ là giá trị cần tìm.

DẠNG 2: KẾT HỢP ĐỊNH LÝ VIÉT ĐỂ GIẢI CÁC NGHIỆM

Bước 1: Tìm điều kiện để phương trình có hai nghiệm (phân biệt) $x_1,\ x_2$.

. $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ có hai nghiệm $x_1,\ x_2 \Leftrightarrow \Delta\geq 0\ (\Delta'\geq 0)$

. $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2 \Leftrightarrow \Delta>0\ (\Delta'>0)$

Bước 2: Sử dụng định lý Vi ét, ta có $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a},\ \ x_1x_2=\dfrac{c}{a}$ (*)

Bước 3: Giải hệ $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ và biểu thức đã cho để tìm $x_1,\ x_2$ theo m.

Bước 4: Thay $x_1,\ x_2$ vừa tìm được vào $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$ để giải m.

Ví dụ 1. Cho phương trình $x^2-4x-m^2-1=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ phân biệt thỏa mãn $x_2=-5x_1$.

Lời giải

Có $\Delta'=(-2)^2-1.(-m^2-1)=m^2+5>0\ \forall m.$

Do đó phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$

Theo định lý Viét, ta có $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=4$, $x_1x_2=\dfrac{c}{a}=-m^2-1$

Giải hệ $\begin{cases} x_2=-5x_1 \\ x_1+x_2=4 \end{cases} \Rightarrow -5x_1+x_1=4 \Rightarrow x_1=-1 \Rightarrow x_2=5.$

Thay $x_1=-1, x_2=5$ vào $x_1x_2=\dfrac{c}{a}=-m^2-1$, ta được $m^2=4 \Leftrightarrow m=\pm 2$

Vậy $m=\pm 2$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 2. Cho phương trình $x^2-2(k-1)x-4k=0$. Tìm k để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ phân biệt thỏa mãn $3x_1-x_2=2$.

Lời giải

Có $\Delta'=\left[-(k-1)\right]^2-1.(-4k)=(k-1)^2+4k=(k+1)^2$

Do đó phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ khi $k\neq -1$

Theo định lý Viét, ta có $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=2k-2$, $x_1x_2=\dfrac{c}{a}=-4k$

Giải hệ $\begin{cases}3x_1-x_2=2\\x_1+x_2=2k-2\end{cases}\Rightarrow 4x_1=2k\Rightarrow x_1=\dfrac{k}{2}\Rightarrow x_2=\dfrac{3k-4}{2}$.

Thay $x_1=\dfrac{k}{2}\Rightarrow x_2=\dfrac{3k-4}{2}$. vào $x_1x_2=\dfrac{c}{a}=-4k$, ta được

$\dfrac{k}{2}\cdot\dfrac{3k-4}{2}=-4k\Leftrightarrow 3k^2+12k=0\Leftrightarrow k=0,k=-4$ (thỏa mãn).

Vậy $k=0,k=-4$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 3. Cho phương trình $x^2-6x+m+3=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 phân biệt thỏa mãn $x_2=x_1^2$.

Lời giải

Có $\Delta'=(-3)^2-1.(m+3)=6-m$.

Do đó phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi $\Delta'>0\Leftrightarrow 6-m>0\Leftrightarrow m<6$

Theo định lý Viét, ta có $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=6$, $x_1x_2=\dfrac{c}{a}=m+3$

Giải hệ $\begin{cases}x_2=x_1^2\\x_1+x_2=6\end{cases}\Rightarrow x_1^2+x_1-6=0\Rightarrow x_1=-3\Rightarrow x_1=2.$

- Với $x_1=-3\Rightarrow x_2=9$ thay vào $x_1x_2=m+3\Rightarrow m=-30$ (thỏa mãn)
- Với $x_1=2\Rightarrow x_2=4$ thay vào $x_1x_2=m+3\Rightarrow m=5$ (thỏa mãn)

Vậy $m=-30$; $m=5$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 4. Cho phương trình $x^2-3x-m^2+1=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1,x_2 phân biệt thỏa mãn $|x_1|+2|x_2|=3$

Lời giải

Có $\Delta=(-3)^2-4(-m^2+1)=4m^2+5>0\quad\forall m$

Do đó phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt.

Theo định lý Viét, ta có: $x_1+x_2=3$, $x_1x_2=-m^2+1$

Trường hợp 1: Xét $x_1\ge 0$, $x_2\ge 0$ thì $|x_1|+2|x_2|=3\Leftrightarrow x_1+2x_2=3$

Kết hợp $x_1+x_2=3$ được $x_2=0$, $x_1=3$ (thỏa mãn $x_1\ge 0$, $x_2\ge 0$)

Thay vào $x_1x_2=-m^2+1$ được $0=-m^2+1\Leftrightarrow m=\pm 1$

Trường hợp 2: Xét $x_1\le 0$, $x_2\le 0$ thì $|x_1|+2|x_2|=3\Leftrightarrow -x_1-2x_2=-3$

Kết hợp $x_1+x_2=3$ được $x_2=-6$, $x_1=9$ (không thỏa mãn $x_1\le 0$, $x_2\le 0$)

Trường hợp 3: Xét $x_1>0$, $x_2<0$ thì $|x_1|+2|x_2|=3\Leftrightarrow x_1-2x_2=3$

Kết hợp $x_1+x_2=3$ được $x_2=0$, $x_1=3$ (không thỏa mãn $x_1>0$, $x_2<0$)

Trường hợp 4: Xét $x_1<0$, $x_2>0$ thì $|x_1|+2|x_2|=3\Leftrightarrow -x_1+2x_2=3$

Kết hợp $x_1+x_2=3$ được $x_2=2$, $x_1=1$ (không thỏa mãn $x_1<0$, $x_2>0$)

Vậy $m=\pm 1$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 5. Cho phương trình $x^2-(m-3)x-5=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1,x_2 là các số nguyên.

Lời giải

Có $\Delta=[-(m-3)]^2-4.(-5)=(m-3)^2+20>0\quad\forall m$

Do đó phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt.

Cách 1: **(Theo định lý Viét)**

Theo định lý Viét, ta có: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=\text{m}-3,\ x_1x_2=\frac{c}{a}=-5$

Từ $x_1x_2=-5,\ x_1,x_2\in\mathbb{Z}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-1\\x_2=5\end{cases};\ \begin{cases}x_1=-5\\x_2=1\end{cases};\ \begin{cases}x_1=1\\x_2=-5\end{cases};\ \begin{cases}x_1=5\\x_2=-1\end{cases}$

Thay vào $x_1x_2=m-3\Rightarrow m=7;m=-1$

Vậy $m=7;m=-1$ là giá trị cần tìm.

Cách 2: **(Sử dụng Δ phải là số chính phương)**

Từ $x_1+x_2=\text{m}-3\in\mathbb{Z}$

Do đó để $x_1,x_2\in\mathbb{Z}$ thì trước hết $\Delta=(m-3)^2+20$ phải là số chính phương

$\Rightarrow(m-3)^2+20=n^2,n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow(m-3-n)(m-3+n)=-20$

Mà $m-3-n<m-3+n$ và tổng $(m-3-n)+(m-3+n)=2m-6$ chẵn và tích $(m-3-n)(m-3+n)=-20$ chẵn nên $m-3-n;\ m-3+n$ phải cùng chẵn, do đó:

* $\begin{cases}m-3-n=-2\\m-3-n=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=7\\n=6\end{cases}$ thử lại thỏa mãn

* $\begin{cases}m-3-n=-10\\m-3-n=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-1\\n=6\end{cases}$ thử lại thỏa mãn

Vậy $m=7,\ m=-1$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 6. Cho phương trình $x^2-20x+m+5=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1,x_2 là các số nguyên tố.

Lời giải

Có $\Delta'=(-10)^2-1(m+5)=95-m$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 khi $\Delta'>0\Leftrightarrow95-m>0\Leftrightarrow m<95$.

Theo định lý Viét, ta có: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=20,\ x_1x_2=\frac{c}{a}=m+5$

Từ $x_1+x_2=20$ và x_1,x_2 là các số nguyên tố, suy ra:

$\begin{cases}x_1=3\\x_2=17\end{cases};\ \begin{cases}x_1=17\\x_2=3\end{cases};\ \begin{cases}x_1=7\\x_2=13\end{cases};\ \begin{cases}x_1=13\\x_2=7\end{cases}$

Thay vào $x_1x_2=m+5\Rightarrow m=46,m=86$ (thỏa mãn)

Vậy $m=46,m=86$ là giá trị cần tìm.

DẠNG 3: GIẢI CÁC NGHIỆM DỰA VÀO $\Delta,\ \Delta'$ LÀ BÌNH PHƯƠNG

Khi tính Δ hoặc Δ' mà ra bình phương của một biểu thức thì ta giải theo cách tìm cả hai nghiệm x_1,x_2 đó ra.

Giải theo cách này cần chú ý phải xét hai trường hợp

Trường hợp 1: Xét $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a};x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

Trường hợp 2: Xét $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a};x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Ví dụ 1. Cho phương trình $x^2-2(m+1)x+4m=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $x_1=-3x_2$

Lời giải

Có $\Delta' = \left[-(m+1)\right]^2 - 1.4m = (m+1)^2 - 4m = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi $\Delta' > 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 1$

Vì $\Delta' = (m-1)^2$ nên hai nghiệm của phương trình là

$x = (m+1) \pm (m-1) \Leftrightarrow x = 2, x = 2m$

Trường hợp 1: Xét $x_1 = 2, x_2 = 2m$ thay vào $x_1 = -3x_2$ ta được

$2 = -3.2m \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{3}$ (thỏa mãn)

Trường hợp 2: Xét $x_1 = 2m, x_2 = 2$ thay vào $x_1 = -3x_2$ ta được

$2m = -3.2 \Leftrightarrow m = -3$ (thỏa mãn)

Vậy $m = -3, m = -\dfrac{1}{3}$ là giá trị cần tìm.

Chú ý: Bài này ta có thể giải theo cách kết hợp định lý Viét để giải x_1, x_2 như trong dạng 2.

Ví dụ 2. Cho phương trình $x^2 + 4x + 4a - a^2 = 0$. Tìm a để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt thỏa mãn $x_1 = x_2^2 - 6$.

Lời giải

Có $\Delta' = 2^2 - (4a - a^2) = a^2 - 4a + 4 = (a-2)^2$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi $\Delta' > 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 > 0 \Leftrightarrow a \neq 2$

Vì $\Delta' = (a-2)^2$ nên hai nghiệm của phương trình là

$x = -2 \pm (a-2) \Leftrightarrow x = a-4, x = -a$

Trường hợp 1: Xét $x_1 = a-4, x_2 = -a$ thay vào $x_1 = x_2^2 - 6$ ta được

$a - 4 = (-a)^2 - 6 \Leftrightarrow 0 = a^2 - a - 2 \Leftrightarrow a^2 + a - 2a - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (a-2)(a+1) = 0 \Leftrightarrow a = 2$ (loại), $a = -1$ (thỏa mãn)

Trường hợp 2: Xét $x_1 = -a, x_2 = a-4$ thay vào $x_1 = x_2^2 - 6$ ta được

$-a = (a-4)^2 - 6 \Leftrightarrow 0 = a^2 - 7a + 10 \Leftrightarrow a^2 - 2a - 5a + 10 = 0$

$\Leftrightarrow (a-2)(a-5) = 0 \Leftrightarrow a = 2$ (loại), $a = 5$ (thỏa mãn)

Vậy $a = -1, a = 5$ là giá trị cần tìm.

Chú ý: Bài này ta có thể giải theo cách kết hợp định lý Viét để giải x_1, x_2 như trong dạng 2.

Ví dụ 3. Cho phương trình $x^2 - (2m+5)x - 2m - 6 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt thỏa mãn $|x_1| + |x_2| = 7$.

Lời giải

Có $\Delta = \left[-(2m+5)\right]^2 - 4.1.(-2m-6) = (2m+5)^2 + 8m + 24 = (2m+7)^2$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi $\Delta > 0 \Leftrightarrow (2m+7)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq -\dfrac{7}{2}$

Phương trình có hai nghiệm là $x = \dfrac{2m+5 \pm (2m+7)}{2} \Leftrightarrow x = 2m+6, x = -1.$

Trường hợp 1: Xét $x_1 = 2m+6,\ x_2 = -1$ thay vào $|x_1| + |x_2| = 7$ ta được

$|2m+6| + |-1| = 7 \Leftrightarrow |2m+6| = 6 \Leftrightarrow 2m+6 = \pm 6$

$\Leftrightarrow m = 0, m = -6$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2: Xét $x_1 = -1,\ x_2 = 2m+6$ thay vào $|x_1|+|x_2| = 7$ ta được
$|-1| + |2m+6| = 7 \Leftrightarrow m = 0, m = -6$ (thỏa mãn).

Chú ý

- Ta có thể lập luận: " Từ $|x_1|+|x_2| = 7$ ta thấy x_1, x_2 có vai trò như nhau nên không mất tính tổng quát, ta giả sử $x_1 = -1,\ x_2 = 2m+6$"
- Ta có thể giải bài này theo cách xét $\left(|x_1|+|x_2|\right)^2 = \left(x_1+x_2\right)^2 - 2x_1x_2 + 2|x_1x_2|$ rồi sử dụng định lý Viét.

Ví dụ 4. Cho phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - 4 = 0$. Tìm m để cho phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{3}{x_2} = 1$.

Lời giải

Có $\Delta' = (-m)^2 - (m^2-4) = m^2 - m^2 + 4 = 4 > 0\ \forall m$.
Do đó phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt $x = m \pm 2$.
Điều kiện: $x_1 \neq 0, x_2 = 0 \Leftrightarrow m \pm 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$.

Trường hợp 1: Xét $x_1 = m+2,\ x_2 = m-2$ thay vào $\frac{1}{x_1} + \frac{3}{x_2} = 1$ ta được

$$\frac{1}{m+2} + \frac{3}{m-2} = 1 \Leftrightarrow \frac{m-2+3(m+2)}{(m+2)(m-2)} = 1 \Leftrightarrow \frac{4m+4}{m^2-4} = 1$$

$\Leftrightarrow 4m+4 = m^2-4 \Leftrightarrow m^2 - 4m - 8 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 4 - 12 = 0$
$\Leftrightarrow (m-2)^2 = 12 \Leftrightarrow m - 2 = \pm\sqrt{12} \Leftrightarrow m = 2 \pm 2\sqrt{3}$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2: Xét $x_1 = m-2,\ x_2 = m+2$ thay vào $\frac{1}{x_1} + \frac{3}{x_2} = 1$ ta được

$$\frac{1}{m-2} + \frac{3}{m+2} = 1 \Leftrightarrow \frac{m+2+3(m-2)}{(m+2)(m-2)} = 1 \Leftrightarrow \frac{4m-4}{m^2-4} = 1$$

$\Leftrightarrow 4m-4 = m^2-4 \Leftrightarrow m^2 - 4m = 0 \Leftrightarrow m = 0, m = 4$ (thỏa mãn).
Vậy $m \in \left\{0; 4; 2 \pm 2\sqrt{3}\right\}$ là giá trị cần tìm.

DẠNG 4: TÍNH x_1^2 THEO x_1 VÀ x_2^2 THEO x_2 DỰA VÀO PHƯƠNG TRÌNH ax^2+bx+c

Bước 1: Tìm điều kiện để phương trình có hai nghiệm (phân biệt) x_1, x_2.

+ $ax^2+bx_1+c=0\ (a\neq 0)$ có hai nghiệm $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta\geq 0\ (\Delta'\geq 0)$.

+ $ax^2+bx+c=0 (a\neq 0)$ có hai nghiêm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta>0\ (\Delta'>0)$.

Bước 2: Sử dụng x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2+bx+c=0$ nên

$$\begin{cases} ax_1^2+bx_1+c=0 \\ ax_2^2+bx_2+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax_1^2=-bx_1-c \\ ax_2^2=-bx_2-c \end{cases}.$$

Ví dụ 1. Cho phương trình $x^2-mx-8=0$. Chứng minh với mọi m, phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và giá trị của biểu thức $H=\frac{2x_1^2+5x_1-16}{3x_1}-\frac{2x_2^2+5x_2-16}{3x_2}$ không phụ thuộc vào m.

Lời giải

Có $\Delta=(-m)^2-4.1.(-8)=m^2+32>0\ \forall m$.

Do đó phương trình đã cho luôn có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt với mọi m.

Theo định lý Viét, ta có $x_1x_2=\frac{c}{a}=-8<0\Rightarrow x_1\neq 0,\ x_2\neq 0$.

Do x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2-mx-8=0$ nên

$$\begin{cases} x_1^2-mx_1-8=0 \\ x_2^2-mx_2-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2=mx_1+8 \\ x_2^2=mx_2+8 \end{cases}$$

Thay vào H, ta được

$$H=\frac{2\left(mx_1+8\right)+5x_1-16}{3x_1}-\frac{2\left(mx_2+8\right)+5x_2-16}{3x_2}$$

$$=\frac{2\left(mx_1+8\right)+5x_1-16}{3x_1}-\frac{2(mx_2+8)+5x_2-16}{3x_2}$$

$$=\frac{2mx_1+5x_1}{3x_1}-\frac{2mx_2+5x_2}{3x_2}=\frac{2m+5}{3}-\frac{2m+5}{3}=0$$

Không phụ thuộc vào m (đpcm).

Ví dụ 2. Cho phương trình $x^2-2x+m-1=0$. Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{x_1}{x_2^2+2x_1+1}+\frac{x_2}{x_1^2+2x_1+1}=\frac{1}{4}$.

Lời giải

Có $\Delta'=(-1)^2-1.(m-1)=2-m$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi $\Delta'>0\Leftrightarrow 2-m>0\Leftrightarrow m<2$.

Do x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2-2x+m-1=0$ nên

$$\begin{cases} x_1^2-2x_1+m-1=0 \\ x_2^2-2x_2+m-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2=2x_1-m+1 \\ x_2^2=2x_2-m+1 \end{cases}$$

Thay vào $\frac{x_1}{x_2^2+2x_1+1}+\frac{x_2}{x_1^2+2x_2+1}=\frac{1}{4}$, ta được

$$\frac{x_1}{2x_2+2x_1-m+2}+\frac{x_2}{2x_1+2x_2-m+2}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{x_1+x_2}{2(x_1+x_2)-m+2}=\frac{1}{4}.$$

Theo định lý Viet, ta có $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=2$ nên ta được

$\frac{2}{2.2-m+2}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{2}{6-m}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow 6-m=8\Leftrightarrow m=-2$ (thỏa mãn).

Vậy $m=-2$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 3. Cho phương trình $x^2+2mx-2m-1=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $P=\frac{2x_1x_2+1}{x_1^2-2mx_2+1-2m}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Có $\Delta'=m^2-1.(-2m-1)=m^2+2m+1=(m+1)^2$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta'>0\Leftrightarrow(m+1)^2>0\Leftrightarrow m\neq-1$

Do x_1 là nghiệm của phương trình $x^2+2mx-2m-1=0$ nên

$$x_1{}^2+2mx_1-2m-1=0\Rightarrow x_1{}^2=-2mx_1+2m+1.$$

Thay vào P, ta được $P=\frac{2x_1x_2+1}{-2mx_1+2m+1-2mx_2+1-2m}=\frac{2x_1x_2+1}{-2m(x_1+x_2)+2}$

Theo định lý Viet, ta có $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-2m,\ x_1.x_2=\frac{c}{a}=-2m-1$ nên ta được

$P=\frac{2.(-2m-1)+1}{-2m.(-2m)+2}=\frac{-4m-1}{4m^2+2}$

$\Rightarrow P(4m^2+2)=-4m-1\Leftrightarrow 4P.m^2+4m+2P+1=0$

$*\ P=0\Rightarrow m=-\frac{1}{4}$.

$*\ P\neq0\Rightarrow\Delta_M{}'=4-4P(2P+1)\geq0\Rightarrow 2P^2+P-1\leq0\Rightarrow-1\leq P\leq\frac{1}{2}$.

Vậy $MinP=-1$ khi $-4m^2+4M-1=0\Rightarrow M=\frac{1}{2}$ (thỏa mãn).

II. HỆ QUẢ CỦA ĐỊNH LÝ VIÉT

Cho phương trình $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ có hai nghiệm x_1, x_2.

Định lý Viet: $x_1+x_2=-\frac{a}{b},\ x_1.x_2=\frac{c}{a}$.

Hệ quả 1. Nếu $x=1$ là nghiệm của phương trình thì

$$a.1^2+b.1+c=0 \text{ hay } a+b+c=0.$$

Ngược lại, nếu $a+b+c=0$ thì $x=1$ là một nghiệm, nghiệm còn lại là $x=\frac{c}{a}$

Hệ quả 2. Nếu $x=-1$ là một nghiệm của phương trình thì

$$a.(-1)^2+b.(-1)+c=0 \text{ hay } a-b+c=0.$$

Ngược lại, nếu $a-b+c=0$ thì $x=-1$ là một nghiệm,nghiệm còn lại là $x=-\frac{c}{a}$.

Hệ quả 3. Nếu a và c trái dấu thì phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt, đồng thời hai nghiệm luôn trái dấu nhau.

Hệ quả 4. Điều kiện để $x_1>0,\ x_2>0$ (cả hai nghiệm đều dương) là

$$\begin{cases} x_1+x_2>0 \\ x_1x_2>0 \end{cases}$$

Hệ quả 5. Điều kiện để $x_1<0,\ x_2<0$ (cả hainghiệm đều âm) là

$$\begin{cases} x_1+x_2<0 \\ x_1x_2>0 \end{cases}$$

Hệ quả 6. Điều kiện để $x_1<0<x_2$ (cả hai nghiệm trái dấu) là $x_1.x_2<0$ hay a và c trái dấu.

DẠNG 1: DẠNG TOÁN CÓ THÊM ĐIỀU KIỆN PHỤ

Nếu bình phương hai vế ta cần thêm điều kiện phụ là hai vế lớn hơn hoặc bằng 0.

Nếu có $\sqrt{x_1},\sqrt{x_2}$ ta cần thêm diều kiện phụ là $x_1\geq 0; x_2\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2\geq 0 \\ x_1x_2\geq 0 \end{cases}$

Nếu x_1,x_2 là độ dài hai cạnh đa giác ta cần thêm diều kiện phụ là: $x_1>0, x_2>0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2>0 \\ x_1x_2>0 \end{cases}$

Ví dụ 1. Cho phương trình $x^2-2mx+m-1=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=2$.

Lời giải.

Có $\Delta'=(-m)^2-1.(m-1)=m^2-m+1=\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0 \qquad \forall m$.

Do đó phương trình đã cho luôn có hai nghiệm x_1,x_2 phân biệt với mọi m.

Theo định lý Viét, ta có $x_1+x_2=\frac{-b}{a}=2m, x_1x_2=\frac{c}{a}=m-1$.

Để tồn tại $\sqrt{x_1};\sqrt{x_2}$ ta cần có $x_1\geq 0; x_2\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2\geq 0 \\ x_1x_2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m\geq 0 \\ m-1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\geq 1$

Có $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=2 \Leftrightarrow (x_1+x_2)+2\sqrt{x_1x_2}=4 \Leftrightarrow \sqrt{m-1}=2-m$.

Điều kiện để có bình phương hai vế của $\sqrt{m-1}=2-m$ là $1\leq m\leq 2$.

Khi đó $\sqrt{m-1}=2-m \Leftrightarrow m-1=(2-m)^2 \Leftrightarrow m^2-5m+5=0 \Leftrightarrow m=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$

Kết hợp các điều kiện ta được $m=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$. Vậy $m=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ là giá trị cần tìm.

Chú ý: bài này ta càn lưu ý điều kiện $1\le m\le 2$ trong quá trình giải.

Ví dụ 2. Cho phương trình $x^2-(2m+5)x+2m+1=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 mà biểu thức $M=\left|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Có $\Delta=\left[-(2m+5)\right]^2-4.(2m+1)=(2m+5)^2-8m-4$

$=4m^2+12m+21=(2m+3)^2+12>0\forall m$

Do đó phương trình đã cho luôn có hai nghiệm x_1,x_2 phân biệt với mọi m.

Theo định lý Viét, ta có $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=2m+5, x_1x_2=\frac{c}{a}=2m+1$

Để tồn tại $\sqrt{x_1};\sqrt{x_2}$ ta cần có $x_1\ge 0;x_2\ge 0\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2\ge 0\\x_1x_2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2m+5\ge 0\\2m+1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow m\ge-\frac{1}{2}$

Xét $M^2=\left|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right|^2=\left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right)^2=x_1+x_2-2\sqrt{x_1x_2}$

Thay $x_1+x_2=2m+5, x_1x_2=2m+1$ vào M^2 ta được

$M^2=2m+5-2\sqrt{2m+1}=\left(2m+1-2\sqrt{2m+1}+1\right)+3$

$=\left(\sqrt{2m+1}-1\right)^2+3\ge 3\Rightarrow M\ge\sqrt{3}$. Vậy $\min M=\sqrt{3}$ khi $\sqrt{2m+1}=1\Leftrightarrow m=0$ (thỏa mãn).

Ví dụ 3. Cho phương trình $x^2-5x+m-1=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 sao cho $2x_1=\sqrt{x_2}$.

Lời giải.

Có $\Delta=(-5)^2-4.1.(m-1)=29-4m$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta>0\Leftrightarrow 29-4m>0\Leftrightarrow m<\frac{29}{4}$.

Theo định lý Viét ta có $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=5, x_1x_2=\frac{c}{a}=m-1$

Điệu kiện để bình phương hai vế của $2x_1=\sqrt{x_2}$ là $x_1\ge 0,x_2\ge 0\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2\ge 0\\x_1x_2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5\ge 0\\m-1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow m\ge 1$

Khi đó $2x_1=\sqrt{x_2}\Leftrightarrow x_2=4x_1^2$ thay vào $x_1+x_2=5$ ta được

$4x_1^2+x_1-5=0\Leftrightarrow x_1=1$ (thỏa mãn), $x_1=-\frac{5}{4}$ (loại).

Với $x_1=1\Rightarrow x_2=4$ thay vào $x_1x_2=m-1$ ta được $1.4=m-1\Leftrightarrow m=5$ (thỏa mãn).

Vậy $m=5$ là gái trị cần tìm.

Chú ý: Bài này ta cần lưu ý điều kiện $x_1\ge 0,x_2\ge 0$ trong quá trình giải.

Ví dụ 4. Cho phương trình $x^2-(m+5)x+3m+6=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 là độ dài của hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng 5.

Lời giải

Có $\Delta=\left[-(m+5)\right]^2-4.1.(3m+6)=(m+5)^2-12m-24=(m-1)^2$

Phương trình có hai nghiệm x_1,x_2 phân biệt khi $\Delta>0\Leftrightarrow(m-1)^2>0\Leftrightarrow m\ne 1$.

Theo định ký Viét, ta có $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = m + 5, x_1x_2 = \frac{c}{a} = 3m + 6$.

Do x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một tam giác nên $x_1 > 0, x_2 > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 5 > 0 \\ 3m + 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -2$$

Do độ dài cạnh huyền bằng 5 nên $x_1^2 + x_2^2 = 25 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 25$

Thay $x_1 + x_2 = m + 5, x_1x_2 = 3m + 6$ vào $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 25$ ta được

$(m + 5)^2 - 2(3m + 6) = 25 \Leftrightarrow m^2 + 4m - 12 = 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m + 4 - 16 = 0$

$\Leftrightarrow (m + 2)^2 = 16 \Leftrightarrow m + 2 = \pm 4 \Leftrightarrow m = -6$ (loại), $m = 2$ (thỏa mãn).

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm.

<u>Chú ý:</u> Bài này ta cần lưu ý đến điều kiện $m > -2$ trong quá trình giải.

Ví dụ 5. Cho phương trình $x^2 - (m - 2)x + m - 3 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một tam giác vuông cân.

Lời giải

Có $\Delta = [-(m - 2)]^2 - 4.1.(m - 3) = (m - 2)^2 - 4m + 12 = (m - 4)^2$

Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt khi $\Delta > 0 \Leftrightarrow (m - 4)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 4$

Theo định ký Viét, ta có $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = m - 2, x_1x_2 = \frac{c}{a} = m - 3$.

Do x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một tam giác nên $x_1 > 0, x_2 > 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 > 0 \\ m - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3$.

Vì $\Delta = (m - 4)^2$ nên hai nghiệm của phương trình là $x = \frac{m - 2 \pm (m - 4)}{2} \Leftrightarrow x = 1, x = m - 3$

Do $x_1 \neq x_2$ nên x_1, x_2 không thể cùng là độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác vuông cân. Giả sử x_1 là độ dài cạnh huyền, x_2 là độ dài cạnh góc vuông thì theo định lý Pytago ta có

$x_1^2 = x_2^2 + x_2^2 \Leftrightarrow x_1 = \sqrt{2}x_2$.

Trường hợp 1. Xét $x_1 = 1, x_2 = m - 3$, thay vào $x_1 = \sqrt{2}x_2$ ta được

$1 = \sqrt{2}(m - 3) \Leftrightarrow m = \frac{1}{\sqrt{2}} + 3$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2. Xét $x_1 = m - 3, x_2 = 1$ thay vào $x_1 = \sqrt{2}x_2$ ta được

$m - 3 = \sqrt{2}.1 \Leftrightarrow m = \sqrt{2} + 3$ (thỏa mãn)

Vậy $m = \frac{1}{\sqrt{2}} + 3, m = \sqrt{2} + 3$ là giá trị cần tìm.

<u>Chú ý:</u> ta có thể nhận xét $a + b + c = 0$ để được hai nghiệm của phương trình $(*)$ là $x = 1, x = m - 3$.

DẠNG 2. SO SÁNH NGHIỆM VỚI SỐ 0 VÀ SỐ α

Cho phương trình $ax^2+bx+c=0\left(a\neq 0\right)$ có hai nghiệm x_1,x_2.

$x_1>0,x_2>0\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2>0\\x_1x_2>0\end{cases}$

$x_1<0,x_2<0\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2<0\\x_1x_2>0\end{cases}$

$x_1<0<x_2\Leftrightarrow x_1x_2<0$

$x_1>\alpha,x_2>\alpha\Leftrightarrow x_1-\alpha>0,x_2-\alpha>0\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x_1-\alpha\right)+\left(x_2-\alpha\right)>0\\\left(x_1-\alpha\right)\left(x_2-\alpha\right)>0\end{cases}$

$x_1<\alpha,x_2<\alpha\Leftrightarrow x_1-\alpha<0,x_2-\alpha<0\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x_1-\alpha\right)+\left(x_2-\alpha\right)<0\\\left(x_1-\alpha\right)\left(x_2-\alpha\right)>0\end{cases}$

$x_1<\alpha<x_2\Leftrightarrow x_1-\alpha<0,x_2-\alpha>0\Leftrightarrow\left(x_1-\alpha\right)\left(x_2-\alpha\right)<0$

Ví dụ 1. Cho phương trình $x^2+\left(m+2\right)x-m-4=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $x_1<0\leq x_2$.

Lời giải

Có $\Delta=\left(m+2\right)^2-4.1.\left(-m-4\right)=m^2+8m+20=\left(m+4\right)^2+4>0\qquad\forall m$

Do đó phương trình đã cho luôn có hai nghiệm x_1,x_2 phân biệt với mọi m.

Trường hợp 1: Xét riêng $x_2=0$, thay vào phương trình đã cho ta được

$$0^2+\left(m+2\right).0-m-4=0\Rightarrow m=-4$$

Thay $m=-4$ vào phương trình đã cho ta được

$$x^2-2x=0\Rightarrow x=0,x=2\Rightarrow x_2=0,x_1=2\text{ (loại)}$$

Trường hợp 2: Xét $x_1<0<x_2\Leftrightarrow a$ và c trái dấu

$$\Leftrightarrow 1.\left(-m-4\right)<0\Leftrightarrow m>-4$$

Vậy $m>-4$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 2. Cho phương trình $x^2+\left(m-2\right)x+m-5=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $x_1\leq 0<x_2$.

Lời giải

Có $\Delta=\left(m-2\right)^2-4.1.\left(m-5\right)=m^2-8m+24=\left(m-4\right)^2+8>0\,\forall m$

Do đó phương trình đã cho luôn có hai nghiệm x_1,x_2 phân biệt với mọi m.

Trường hợp 1: Xét riêng $x_1=0$, thay vào phương trình đã cho ta được

$$0^2+\left(m-2\right).0+m-5=0\Rightarrow m=5$$

Thay $m=5$ vào phương trình đã cho ta được $x^2+3x=0\Rightarrow x=0,x=-3\Rightarrow x_1=0,x_2=-3$ (loại).

Trường hợp 2: xét $x_1<0<x_2\Leftrightarrow a$ và c trái dấu $\Leftrightarrow 1\cdot(m-5)<0\Leftrightarrow m<5$. Vậy $m<5$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 3. Cho phương trình $x^2+2mx+4m-4=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ thoả mãn $x_1<2,\ x_2<2$

Lời giải

Ta có $\Delta'=m^2-1.\left(4m-4\right)=m^2-4m+4=\left(m-2\right)^2$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ khi $\Delta'>0\Leftrightarrow\left(m-2\right)^2>0\Leftrightarrow m\neq 2$

Cách 1: (sử dụng định lí viét)

Theo định lý viét ta có: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-2m, x_1x_2=\frac{c}{a}=4m-4$.

$x_1<2, x_2<2 \Leftrightarrow x_1-2<0, x_2-2<0$

$\Leftrightarrow \begin{cases}(x_1-2)+(x_2-2)<0\\(x_1-2)(x_2-2)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1+x_2-4<0\\x_1x_2-2(x_1+x_2)+4>0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-2m-4<0\\4m-4+4m+4>0\end{cases} \Leftrightarrow m>0$

Kết hợp với $m\neq 2$ ta được $m>0;\ m\neq 2$ là giá trị cần tìm.

Cách 2: (Giải x_1, x_2 dựa vào $\Delta'=(m-2)^2$)

Do $\Delta'=(m-2)^2$ nên hai nghiệm của phương trình đã cho là $x=-m\pm(m-2) \Leftrightarrow x=-2, x=-2m+2$

Do đó $\begin{cases}x_1<2\\x_2<2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2<2\\-2m+2<2\end{cases} \Leftrightarrow m>0$.

Kết hợp với $m\neq 2$ ta được $m>0;\ m\neq 2$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 4. Cho phương trình $x^2-(m+3)x+m-1=0$ Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt thoả mãn $x_1<-\frac{3}{2}<x_2$.

Lời giải

Ta có $\Delta=[-(m+3)]^2-4.1.(m-1)=(m+3)^2-4m+4 \ =m^2+2m+13=(m+1)^2+12>0\forall m$

Do phương trình đã cho luôn có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt với mọi m.

Theo định lý viét, ta có $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=m+3;\ x_1x_2=\frac{c}{a}=m-1$.

Có $x_1<-\frac{3}{2}<x_2 \Leftrightarrow x_1+\frac{3}{2}<0<x_2+\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \left(x_1+\frac{3}{2}\right)\left(x_2+\frac{3}{2}\right)<0 \Leftrightarrow x_1x_2+\frac{3}{2}(x_1+x_2)+\frac{9}{4}<0$

Thay $x_1+x_2=m+3;\ x_1x_2=m-1$ ta được

$(m-1)+\frac{3}{2}(m+3)+\frac{9}{4}<0 \Leftrightarrow \frac{5}{2}m+\frac{23}{4}<0 \Leftrightarrow m<-\frac{23}{10}$

Vậy: $m<-\frac{23}{10}$ là giá trị cần tìm.

DẠNG 3: ĐẶT ẨN PHỤ

<u>Bước 1</u>: Đặt $t=\sqrt{x}\geq 0$ (và các điều kiện khác nếu có)

<u>Bước 2</u>: Đưa về phương trình quy về bậc hai theo ẩn t: $at^2+bt+c=0$.

<u>Bước 3</u>: Lập luận số nghiệm của phương trình đã cho bằng số nghiệm thoả mãn, với $t\geq 0$ (và các điều kiện của t nếu có) của phương trình $at^2+bt+c=0$

Ví dụ 1. Tìm m để phương trình sau có nghiệm $\frac{x-7-3m}{\sqrt{x}-3}=m$ (1)

Lời giải

Điều kiện: $x\geq 0, x\neq 9$. Ta có $\frac{x-7-3m}{\sqrt{x}-3}=m \Leftrightarrow x-7-3m=m\sqrt{x}-3m \Leftrightarrow x-m\sqrt{x}-7=0$

Đặt $t=\sqrt{x}\geq 0$ kết hợp điều kiện ta được $t\geq 0;\ t\neq 3$.

Phương trình trở thành $t^2 - mt - 7 = 0$ (2)

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm thoả mãn điều kiện $t \geq 0;\ t \neq 3$.
Xét (2) có $a = 1 > 0,\ c = -7 < 0$ nên (2) luôn có hai nghiệm phân biệt trai dấu do đó (2) luôn có nghiệm thoả mãn $t > 0$.
Để $t \neq 3$ ta phải có $3^2 - m\cdot 3 - 7 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{2}{3}$. Vậy: $m \neq \frac{2}{3}$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 2. Cho phương trình $\frac{x-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1} = m$. Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0, x \neq \frac{1}{4}$

Ta có: $\frac{x-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1} = m \Leftrightarrow x - \sqrt{x} = 2m\sqrt{x} - m \Leftrightarrow x - (2m+1)\sqrt{x} + m = 0$

Đặt $t = \sqrt{x}$ do $x \geq 0, x \neq \frac{1}{4}$ nên điều kiện $t \geq 0, t \neq \frac{1}{2}$

Phương trình trở thành $t^2 - (2m+1)t + m = 0$ (2)

(1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (2)$ có hai nghiệm phân biệt $t \geq 0, t \neq \frac{1}{2}$

Ta có $\Delta = [-(2m+1)]^2 - 4.1.m = (2m+1)^2 - 4m = 4m^2 + 1 > 0 \forall m$

Do phương trình (2) luôn có hai nghiệm phân biệt $t_1,\ t_2$.

Theo định lý Viét ta có $t_1 + t_2 = -\frac{b}{a} = 2m+1, t_1t_2 = \frac{c}{a} = m$

$t_1, t_2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 + t_2 \geq 0 \\ t_1t_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+1 \geq 0 \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 0$

$t_1, t_2 \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{4} - \frac{2m+1}{2} + m \neq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \neq 0$

Vậy $m \geq 0$ là giá trị cần tìm.

III. SỰ TƯƠNG GIAO CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ PARABOL

DẠNG 1: TÌM THAM SỐ ĐỂ ĐƯỜNG THẲNG TIẾP XÚC PARABOL, TÌM TỌA ĐỘ TIẾP ĐIỂM

Giả sử đường thẳng là $d: y = mx + n$ và parabol là $(P): y = ax^2\ (a \neq 0)$.

Bước 1 Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P)

$$ax^2 = mx + n \Leftrightarrow ax^2 - mx - n = 0\ (*)$$

Bước 2 Lập luận: d tiếp xúc với $(P) \Leftrightarrow$ Phương trình (*) có nghiệm kép

$\Delta = 0$ (hoặc $\Delta' = 0$) thì tìm được tham số.

Bước 3 Thay giá trị tham số tìm được vào phương trình $(*)$ ta tìm được x, thay x vừa tìm vào $y = ax^2$ hoặc $y = mx + n$ thì tìm được y và kết luận.

Ví dụ 1. Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2(m+3)x - m^2 - 3$. Tìm m để d tiếp xúc với (P). Khi đó hãy tìm tọa độ tiếp điểm.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P):

$$x^2 = 2(m+3)x - m^2 - 3 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+3)x + m^2 + 3 = 0\ (*)$$

Có $\Delta' = \left[-(m+3)\right]^2 - 1.(m^2+3) = 6m + 6$.

Để d tiếp xúc với $(P) \Leftrightarrow$ Phương trình (*) có nghiệm kép

$$\Delta' = 0 \Leftrightarrow 6m + 6 = 0 \Leftrightarrow m = -1.$$

Thay $m = -1$ vào (*) ta được

$x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 2^2 = 4$

Vậy $m = -1$ thì d tiếp xúc với (P) và tọa độ tiếp điểm là $M(2;4)$.

Ví dụ 2. Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2x + 3$.

a) Tìm tọa độ các giao điểm A và B của d và (P), trong đó A là điểm có hoành độ âm. Vẽ d và (P) trên cùng một hệ trục tọa độ.

b) Tìm tọa độ điểm C thuộc cung AB để $S_{\Delta ABC}$ lớn nhất.

Lời giải

a) Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P):

$$x^2 = 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 2 \\ x - 1 = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \Rightarrow y = (-1)^2 = 1 \\ x = 3 \Rightarrow y = 3^2 = 9 \end{array}\right.$$

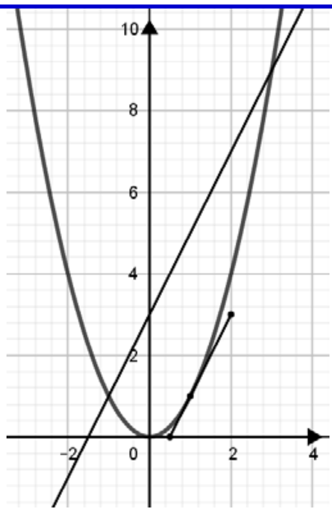
Vậy tọa độ các giao điểm của d và (P) là $A(-1;1), B(3;9)$.

* $d: y = 2x + 3$

x	0	$-\frac{3}{2}$
y	3	0

* $y = x^2$

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4



b) Có $A(-1;1), B(3;9)$ cố định nên độ dài đoạn thẳng AB không đổi, do đó $S_{\Delta ABC}$ lớn nhất khi khoảng cách từ C đến đường thẳng d lớn nhất, khi đó C là tiếp điểm của đường thẳng $d_1 // d$ và d_1 tiếp xúc (P).

Gọi phương trình đường thẳng $d_1 : y = ax + b$.

Do $d_1 // d$ nên $\begin{cases} a_{d_1} = a_d \\ b_{d_1} \neq b_d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b \neq 3 \end{cases}$

Suy ra $d_1 : y = 2x + b, b \neq 3$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và (P):

$$x^2 = 2x + b \Leftrightarrow x^2 - 2x - b = 0$$

(*) có $\Delta' = (-1)^2 - 1.(-b) = b + 1$

d_1 tiếp xúc với (P) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow b = -1$ (thỏa mãn).

Thay $b = -1$ vào (*) ta được

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1^2 = 1$$

Vậy $C(1;1)$ là điểm cần tìm.

DẠNG 2: TÌM THAM SỐ ĐỂ ĐƯỜNG THẲNG CẮT PARABOL TẠI HAI ĐIỂM PHÂN BIỆT *A*, *B* THỎA MÃN MỘT BIỂU THỨC ĐỐI XỨNG ĐỐI VỚI x_A VÀ x_B

Giả sử đường thẳng $d : y = mx + n$ và parabol là $(P): y = ax^2 \, (a \neq 0)$.

Bước 1 Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P)

$ax^2 = mx + n \Leftrightarrow ax^2 - mx - n = 0$ (*)

Bước 2 Tìm điều kiện để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B

$\Leftrightarrow$ Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0$ (hoặc $\Delta' > 0$).

Bước 3 Biến đổi biểu thức đối xứng với x_A, x_B về $x_A + x_B; x_A.x_B$ rồi sử dụng định lý Viét với x_A, x_B là hai nghiệm của phương trình (*).

Một số điều kiện và phép biến đổi cần nhớ

- Hai điểm A và B nằm bên phải trục Oy khi x_A, x_B cùng dương.
- Hai điểm A và B nằm bên trái trục Oy khi x_A, x_B cùng âm.
- Hai điểm A và B nằm cùng một phía trục Oy khi x_A, x_B cùng dấu.
- Hải điểm A và B nằm về hai phía trục Oy khi x_A, x_B trái dấu.

- Công thức tính y_A theo x_A và tính y_B theo x_B

Cách 1 Tính theo (P): vì $A,B\in(P): y=ax^2$ nên $y_A=ax_A^2; y_B=ax_B^2$.

Cách 2 Tính theo d: vì $A,B\in d: y=mx+n$ nên $y_A=mx_A+n; y_B=mx_B+n$

Giả sử $x_A=x_1; x_B=x_2$

- Gặp $x_1^2+x_2^2=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$
- Gặp $|x_1-x_2|$ thì xét $|x_1-x_2|^2=(x_1-x_2)^2=x_1^2-2x_1x_2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$
- Gặp $|x_1|+|x_2|$ thì xét $(|x_1|+|x_2|)^2=|x_1|^2+|x_2|^2+2|x_1||x_2|=x_1^2+x_2^2+2|x_1x_2|=(x_1+x_2)^2+2|x_1x_2|-2x_1x_2$
- Gặp $\sqrt{x_1},\sqrt{x_2}$ thì cần thêm điều kiện phụ $x_1\ge0; x_2\ge0\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2\ge0\\x_1x_2\ge0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{b}{a}\ge0\\\dfrac{c}{a}\ge0\end{cases}$
- Gặp x_1,x_2 là độ dài hai cạnh tam giác ta cần thêm điều kiện phụ $x_1,x_2>0\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}>0\\x_1x_2=\dfrac{c}{a}>0\end{cases}$
- Nếu bình phương hai vế ta cần thêm điều kiện phụ là hai vế lớn hơn hoặc bằng 0.

Ví dụ 1. Cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $d: y=2(m-1)x-2m+4$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2 sao cho biểu thức $A=x_1^2+x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là

$x^2=2(m-1)x-2m+4\Leftrightarrow x^2-2(m-1)x+2m-4=0.$

Có $\Delta'=[-(m-1)]^2-1.(2m-4)=(m-1)^2-2m+4$

$=m^2-4m+5=(m-2)^2+1>0\forall m$

Do đó phương trình đã cho luôn có hai nghiệm x_1,x_2 phân biệt với mọi m.

Theo định lý Viét, ta có: $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=2m-2;\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}=2m-4$

Có $A=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$

Thay $x_1+x_2=2m-2;\ x_1x_2=2m-4$ vào A ta được:

$A=(2m-2)^2-2(2m-4)=4m^2-12m+12=(2m-3)^2+3\ge3\qquad\forall m$

Vậy $MinA=3$ khi $2m-3=0\Leftrightarrow m=\dfrac{3}{2}$

Ví dụ 2. Cho Parabol $(P): y=-x^2$ và đường thẳng d đi qua $I(0;-1)$ hệ số góc k.

a) Viết phương trình *d* theo *k*
b) Chứng minh *d* luôn cắt *(P)* tại hai điểm *A, B* phân biệt thuộc hai phía *Oy*.
c) Gọi hoành độ *A* và *B* lần lượt là x_1 và x_2. Chứng minh: $|x_1-x_2|\ge2$
d) Giả sử $x_1<x_2$. Tìm *m* để $|x_1|>|x_2|$.

Lời giải

a) Gọi phương trình *d* là: $y=ax+b\quad(a\ne0)$.

Do d đi qua $I(0;-1)$ nên $-1 = a.0 + b \quad \Leftrightarrow b = -1$
Vì d có hệ số góc k nên $a = k$
Vậy phương trình d là: $y = kx - 1$
b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P):

$$-x^2 = kx - 1 \Leftrightarrow x^2 + kx - 1 = 0 \ (*)$$

Có $\Delta = k^2 - 4.1.(-1) = k^2 + 4 > 0 \ \forall k$ nên $(*)$ luôn có hai nghiệm phân biệt
Do đó d luôn cắt (P) tại hai điể A, B phân biệt
Theo định lý Viét, ta có $x_A + x_B = -\dfrac{b}{a} = -k$; $x_A x_B = \dfrac{c}{a} = -1$
Vì $x_A x_B = -1 < 0 \Rightarrow x_A, x_B$ trái dấu
Vậy A, B thuộc hai phía Oy.
c) Xét $|x_1 - x_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$
Thay $x_1 + x_2 = -k$; $x_1x_2 = -1$ vào $|x_1 - x_2|^2$ ta được
$|x_1 - x_2|^2 = (-k)^2 - 4.(-1) = k^2 + 4 \geq 4 \Rightarrow |x_1 - x_2| \geq 2 \Rightarrow$ đpcm
d) ***<u>Cách 1</u>***: (Xét dấu của x_1, x_2)
Do $x_1 < x_2$ và x_1, x_2 trái dấu nên $x_1 < 0$, $x_2 > 0$
Suy ra $|x_1| = -x_1$; $|x_2| = x_2$ nên $|x_1| > |x_2| \Leftrightarrow -x_1 > x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 < 0$
Mà $x_1 + x_2 = -k$ nên ta được $-k < 0 \Leftrightarrow k > 0$
<u>Cách 2</u>: (bình phương):
Có $|x_1| > |x_2| \Leftrightarrow |x_1|^2 > |x_2|^2 \Leftrightarrow x_1^2 > x_2^2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) > 0$
$\Leftrightarrow x_1 - x_2$ và $x_1 + x_2$ cùng dấu
Mà $x_1 < x_2$ hay $x_1 - x_2 < 0$ nên $x_1 + x_2 < 0 \Leftrightarrow -k < 0 \Leftrightarrow k > 0$
Vậy $k > 0$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 3. Cho Parabol $(P): y = x^2$ và $d: y = mx - m + 1$. Tìm m để (P) và d cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1| + |x_2| = 4$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là:

$$x^2 = mx - m + 1 \Leftrightarrow x^2 - mx + m - 1 = 0 \qquad (*)$$

Có $\Delta = (-m)^2 - 4.1.(m-1) = m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2$
d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow (m-2)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 2$$

Theo định lý Viét, ta có $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = m$; $x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = m - 1$
Xét $(|x_1| + |x_2|)^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + 2|x_1|.|x_2| = x_1^2 + x_2^2 + 2|x_1x_2|$

$$= x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_2 + 2|x_1x_2| = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2|x_1x_2|$$

$$= m^2 - 2.(m-1) + 2.|m-1| = m^2 - 2m + 2 + 2.|m-1|$$

$$= (m-1)^2 + 2.|m-1| + 1 = (|m-1| + 1)^2$$

Do đó $|x_1| + |x_2| = 4 \Leftrightarrow (|x_1| + |x_2|)^2 = 16 \Leftrightarrow (|m-1| + 1)^2 = 16$

$\Leftrightarrow |m-1|+1=4 \Leftrightarrow |m-1|=3 \Leftrightarrow m=-1, m=5$ (thỏa mãn)

Vậy $m=-1, m=5$ là giá trị cần tìm.

Chú ý: Ta có thể giải theo cách chỉ ra hai nghiệm của $(*)$ là $x=1, x=m-1$ dựa vào Δ là bình phương hoặc dựa vào nhận xét $a+b+c=0$.

Ví dụ 4. Cho $(P): y=x^2$ và $d: y=2(m-1)x+3-2m$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một hình chữ nhật có độ dài đường chéo bằng $\sqrt{10}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là:

$$x^2=2(m-1)x+3-2m \Leftrightarrow x^2-2(m-1)x+2m-3=0 \qquad (*)$$

Có $\Delta'=\left[-(m-1)\right]^2-1.(2m-3)=(m-1)^2-2m+3=m^2-4m+4=(m-2)^2$

d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta'>0 \Leftrightarrow (m-2)^2>0 \Leftrightarrow m\neq 2$

Theo định lý Viét, ta có: $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=2m-2$; $x_1x_2=\dfrac{c}{a}=2m-3$

Do x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một hình chữ nhật nên $x_1>0$, $x_2>0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2>0 \\ x_1x_2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-2>0 \\ 2m-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow m>\frac{3}{2}$$

Do $x_1\neq x_2$ và hình chữ nhật có độ dài đường chéo bằng $\sqrt{10}$ nên theo định lý Pytago ta có: $x_1^2+x_2^2=10 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=10$

Thay $x_1+x_2=2m-2$, $x_1x_2=2m-3$ vào $(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=10$ ta được

$(2m-2)^2-2(2m-3)=10 \Leftrightarrow 4m^2-12m+10=10$

$\Leftrightarrow 4m(m-3)=0 \Leftrightarrow m=0$ (loại), $m=3$ (thỏa mãn)

Vậy $m=3$ là giá trị cần tìm.

Chú ý

- Bài này ta cần lưu ý điều kiện $m>\dfrac{3}{2}$ trong quá trình giải
- Ta có thể giải theo cách chỉ ra hai nghiệm của $(*)$ là $x=1$; $x=2m-3$ dựa vào Δ' là bình phương hoặc dựa vào nhận xét $a+b+c=0$.

DẠNG 3: TÌM THAM SỐ ĐỂ ĐƯỜNG THẲNG CẮT PARABOL TẠI HAI ĐIỂM PHÂN BIỆT A, B THỎA MÃN MỘT BIỂU THỨC KHÔNG ĐỐI XỨNG ĐỐI VỚI X_A VÀ X_B

Cách 1 Kết hợp điều kiện của bài toán với $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ để giải x_1, x_2 theo tham số rồi thay x_1, x_2 vừa giải được vào $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$

Cách 2 Nếu tính Δ hoặc Δ' mà ra một biểu thức bình phương thì ta tìm hai nghiệm đó và phải xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Xét $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

Trường hợp 2: Xét $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Ví dụ 1. Cho Parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $d: y=mx+m+1$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $2x_1-3x_2=5$

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P):

$$x^2=mx+m+1 \qquad \Leftrightarrow x^2-mx-m-1=0\ (*)$$

Có $\Delta=(-m)^2-4.1.(-m-1)=m^2+4m+4=(m+2)^2$

D cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta>0 \Leftrightarrow (m+2)^2>0 \Leftrightarrow m\neq -2$$

<u>Cách 1</u> (Giải x_1, x_2 dựa vào định lý Viét)

Theo định lý Viét ta có: $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=m,\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}=-m-1$

Giải hệ: $\begin{cases} x_1+x_2=m \\ 2x_1-3x_2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1+3x_2=3m \\ 2x_1-3x_2=5 \end{cases} \Leftrightarrow x_1=\dfrac{3m+5}{5},\ x_2=\dfrac{2m-5}{5}$

Thay $x_1=\dfrac{3m+5}{5}, x_2=\dfrac{2m-5}{5}$ vào $x_1x_2=-m-1$ ta được

$\dfrac{3m+5}{5}\cdot\dfrac{2m-5}{5}=-m-1 \Leftrightarrow 6m^2+20m=0$

$\Leftrightarrow 2m(3m+10)=0 \Leftrightarrow m=0, m=-\dfrac{10}{3}$ (thỏa mãn)

Cách 2: (Giải x_1, x_2 dựa vào Δ là bình phương)

Do $\Delta=(m+2)^2$ nên hai nghiệm của phương trình (*) là

$x=\dfrac{m\pm(m+2)}{2} \Leftrightarrow x=-1, x=m+1$

Trường hợp 1: Xét $x_1=-1$, $x_2=m+1$, thay vào $2x_1-3x_2=5$ ta được $-2\ -\ 3(m+1)\ =5 \Leftrightarrow m=-\dfrac{10}{3}$ (thỏa mãn)

Trường hợp 2: Xét $x_1=m+1$, $x_2=-1$, thay vào $2x_1-3x_2=5$ ta được $2(m+1)-3.(-1)=5 \Leftrightarrow m=0$ (thỏa mãn)

Vậy $m=0, m=-\dfrac{10}{3}$ là giá trị cần tìm.

<u>Chú ý:</u> Ta có thể nhận xét a - b +c =0 để được hai nghiệm của phương trình (*) là x =-1, x =m+1.

Ví dụ 2: Chp parabol (P): $y=x^2$ và đường tròn d: $y=2(m+1)+3$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $2|x_1|+|x_2|=5$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ của d và (P):

$x^2=2(m+1)x+3 \Leftrightarrow x^2-2(m+1)x-3=0$ (*)

Có $\Delta'=[-(m+1)]^2-1.(-3)=(m+1)^2+3>0\ \forall m$ nên phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2, do đó d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

Theo định lý Viét, ta có $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=2m+2,\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}=-3$

Do $x_1x_2=-3<0$ nên x_1, x_2 trái dấu.

Cách 1 (Giải hệ $2|x_1|+|x_2|=5$ và $x_1+x_2=2m+2$)

Trường hợp 1: Xét $x_1<0, x_2>0 \Rightarrow |x_1|=-x_1; |x_2|=x_2$ nên $2|x_1|+|x_2|=5 \Leftrightarrow -2x_1+x_2=5$

Giải hệ $\begin{cases}-2x_1+x_2=5\\ x_1+x_2=2m+2\end{cases} \Rightarrow 3x_1=2m-3 \Rightarrow x_1=\dfrac{2m-3}{3} \Rightarrow x_2=\dfrac{4m+9}{3}$

Thay $x_1=\dfrac{2m-3}{3}, x_2=\dfrac{4m+9}{3}$ vào $x_1x_2=-3$ ta được

$\dfrac{2m-3}{3}\cdot\dfrac{4m+9}{3}=-3 \Leftrightarrow 8m^2+6m=0 \Rightarrow m=0, m=-\dfrac{3}{4}$

Trường hợp 2: Xét $x_1>0, x_2<0 \Rightarrow |x_1|=x_1; |x_2|=-x_2$ nên $2|x_1|+|x_2|=5 \Leftrightarrow 2x_1-x_2=5$

Giải hệ $\begin{cases}2x_1-x_2=5\\ x_1+x_2=2m+2\end{cases} \Rightarrow 3x_1=2m+7 \Rightarrow x_1=\dfrac{2m+7}{3} \Rightarrow x_2=\dfrac{4m-1}{3}$

Thay $x_1=\dfrac{2m+7}{3}, x_2=\dfrac{4m-1}{3}$ vào $x_1x_2=-3$ ta được

$\dfrac{2m+7}{3}\cdot\dfrac{4m-1}{3}=-3 \Leftrightarrow 8m^2+26m+20=0 \Rightarrow m=-2, m=-\dfrac{5}{4}$

Cách 2: (Giải hệ $2|x_1|+|x_2|=5$ và $x_1x_2=-3$):

Trường hợp 1: Xét $x_1<0, x_2>0 \Rightarrow |x_1|=-x_1; |x_2|=x_2$ nên $2|x_1|+|x_2|=5 \Leftrightarrow -2x_1+x_2=5$

$\Leftrightarrow -2x_1+x_2=5 \Leftrightarrow x_2=2x_1+5$, thay vào $x_1x_2=-3$ ta được

$x_1(2x_1+5)=-3 \Leftrightarrow 2x_1^2+5x_1+3=0 \Leftrightarrow 2x_1^2+2x_1+3x_1+3=0$

$\Leftrightarrow 2x_1(x_1+1)+3(x_1+1)=0 \Leftrightarrow (x_1+1)(2x_1+3)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_1=-1 \Rightarrow x_2=3\\ x_1=-\dfrac{3}{2} \Rightarrow x_2=2\end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Thay vào $x_1+x_2=2m+2$ được $m=0, m=-\dfrac{3}{4}$

Trường hợp 2: Xét $x_1>0, x_2<0 \Rightarrow |x_1|=x_1; |x_2|=-x_2$ nên $2|x_1|+|x_2|=5 \Leftrightarrow 2x_1-x_2=5$

$x_2=2x_1-5$, thay vào $x_1x_2=-3$ ta được

$x_1(2x_1-5)=-3 \Leftrightarrow 2x_1^2-5x_1+3=0 \Leftrightarrow 2x_1^2-2x_1-3x_1+3=0$

$\Leftrightarrow 2x_1(x_1-1)-3(x_1-1)=0 \Leftrightarrow (x_1-1)(2x_1-3)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_1=1 \Rightarrow x_2=-3\\ x_1=\dfrac{3}{2} \Rightarrow x_2=-2\end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Thay vào $x_1+x_2=2m+2$ được $m=-2, m=-\dfrac{5}{4}$

Vậy $m\in\left\{0; 2; -\dfrac{3}{4}; -\dfrac{5}{4}\right\}$ là các giá trị cần tìm.

Ví dụ 3: Cho parabol (P): $y=x^2$ và đường thẳng d: $y=-4x+m^2-4$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_2=x_1^3+4x_1^2$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P):

$x^2=-4x+m^2-4 \Leftrightarrow x^2+4x-m^2+4=0$ (*)

Có $\Delta'=2^2-1\left(-m^2+4\right)=m^2$

d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta'>0 \Leftrightarrow m^2>0 \Leftrightarrow m\neq 0.$

Theo định lý Viét, ta có $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=-4, x_1x_2=\dfrac{c}{a}=-m^2+4$

Cách 1: (Giải dựa vào định lí Viét)

Thay $x_2=x_1^3+4x_1^2$ vào $x_1+x_2=-4$ ta được

$x_1+\left(x_1^3+4x_1^2\right)=-4 \Leftrightarrow x_1^2\left(x_1+4\right)+x_1+4=0$

$\Leftrightarrow \left(x_1+4\right)\left(x_1^2+1\right)=0 \Leftrightarrow x_1=-4 \Rightarrow x_2=0$

Thay $x_1=-4$, $x_2=0$ vào $x_1x_2=-m^2+4 \Rightarrow -m^2+4=0 \Rightarrow m=\pm 2$ (thỏa mãn)

Cách 2 (Giải x_1, x_2 dựa vào Δ' là bình phương)

Do $\Delta'=m^2$ nên hai nghiệm của phương trình (*) là $x=-2\pm m$.

Trường hợp 1: Xét $x_1=-2-m, x_2=-2+m,$ thay vào $x_2=x_1^3+4x_1^2$ ta được

$-2+m=\left(-2+m\right)^3+4\left(-2-m\right)^2 \Leftrightarrow \left(m+2\right)^3-4\left(m+2\right)^2+m-2=0$

$\Leftrightarrow \left(m+2\right)^2\left(m+2-4\right)+\left(m-2\right)=0 \Leftrightarrow \left(m-2\right)\left[\left(m+2\right)^2+1\right]=0$

$\Leftrightarrow m=2$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2: Xét $x_1=-2+m, x_2=-2-m,$ thay vào $x_2=x_1^3+4x_1^2$ ta được

$-2-m=\left(-2+m\right)^3+4\left(-2+m\right)^2 \Leftrightarrow \left(m-2\right)^3-4\left(m-2\right)^2+m+2=0$

$\Leftrightarrow \left(m-2\right)^2\left(m-2+4\right)+\left(m+2\right)=0 \Leftrightarrow \left(m+2\right)\left[\left(m-2\right)^2+1\right]=0$

$\Leftrightarrow m=-2$ (thỏa mãn).

Vậy $m=\pm 2$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 4: Cho parabol (P): $y=x^2$ và đường thẳng d: $y=(2m-1)x-m^2+m$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $\sqrt{x_1}=\sqrt{2x_2}$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P):

$x^2=\left(2m-1\right)x-m^2+m \Leftrightarrow x^2-\left(2m-1\right)x+m^2-m=0 \quad (*)$

Có $\Delta=\left[-\left(2m-1\right)\right]^2-4.1\left(m^2-m\right)=\left(2m-1\right)^2-4m^2+4m=1>0\ \forall m.$

Do đó (*) luôn có hai nghiệm phân biệt nên d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

Có $\Delta=1$ nên hai nghiệm của (*) là $x=\dfrac{2m-1\pm 1}{2} \Leftrightarrow x=m, x=m-1$

Để tồn tại $\sqrt{x_1},\sqrt{2x_2}$ ta cần có $x_1\geq 0, x_2\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m\geq 0 \\ m-1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\geq 1.$

Khi đó $\sqrt{x_1}=\sqrt{2x_2} \Leftrightarrow x_1=2x_2$

Trường hợp 1: Xét $x_1=m$, $x_2=m-1$ thay vào $x_1=2x_2$ ta được

$m=2(m-1) \Leftrightarrow m=2$ (thỏa mãn)

Trường hợp 2: Xét $x_1=m-1$, $x_2=m$ thay vào $x_1=2x_2$ ta được

$m-1=2m \Leftrightarrow m=-1$ (loại)

Vậy m = 2 là giá trị cần tìm.

Chú ý: Bài này ta cần lưu ý điều kiện $m \geq 1$ trong quá trình giải.

VD5. Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng $d: y = (m-3)x - m + 4$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một tam giác vuông cân.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P):

$x^2 = (m-3)x - m + 4 \Leftrightarrow x^2 - (m-3)x + m - 4 = 0 \quad (*)$

Có $\Delta = \left[-(m-3)\right]^2 - 4.1.(m-4) = (m-3)^2 - 4m + 16 = (m-5)^2$

d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow (m - 5)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 5.$

Theo định lý Viét, ta có $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = m - 3,\ x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = m - 4$

Do x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một tam giác nên $x_1 > 0, x_2 > 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 3 > 0 \\ m - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 4.$

Vì $\Delta = (m-5)^2$ nên hai nghiệm của phương trình (*) là

$x = \dfrac{m - 3 \pm (m-5)}{2} \Leftrightarrow x = 1, x = m - 4$. Do $x_1 \neq x_2$ nên x_1, x_2 không thể cùng là độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác vuông cân. Giả sử x_1 là độ dài cạnh huyền, x_2 là độ dài cạnh góc vuông thì theo định lí Pytago ta có $x_1^2 = x_2^2 + x_2^2 \Leftrightarrow x_1 = \sqrt{2}.x_2$

Trường hợp 1: Xét $x_1 = 1, x_2 = m - 4$, Thay vào $x_1 = \sqrt{2}.x_2$ ta được

$1 = \sqrt{2}(m-4) \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + 4$ (thỏa mãn)

Trường hợp 2: Xét $x_1 = m - 4,\ x_2 = 1$, thay vào $x_1 = \sqrt{2}x_2$ ta được

$m - 4 = \sqrt{2}.1 \Leftrightarrow m = \sqrt{2}(m-4)$ (thỏa mãn)

Vậy $m = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + 4$, $m = \sqrt{2}(m-4)$ là giá trị cần tìm

Chú ý: Ta có thể nhận xét $a + b + c = 0$ để được hai nghiệm của phương trình (*) là $x = 1, x = m - 4$.

DẠNG 4: TÌM THAM SỐ ĐỂ ĐƯỜNG THẲNG CẮT PARAPOL TẠI HAI ĐIỂM PHÂN BIỆT A, B LIÊN QUAN ĐẾN TUNG ĐỘ A, B.

Dạng này ta cần tính y_A theo x_A và tính y_B theo x_B theo một trong hai cách:

Cách 1: Tính theo (P): Vì A,B $\in$ (P): $y = ax^2$ nên $y_A = ax_A^2, y_B = ax_B^2$

Cách 2: Tính theo d: Vì A,B $\in d: y = mx + n$ nên $y_A = mx_A + n,\ y_B = mx_B + n$

Ví dụ 1: Cho paraboara $(P): y = x^2$ và đường thẳng d: $y = 2mx - m^2 + m + 1$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$ thỏa mãn $y_1 + y_2 + 2x_1 + 2x_2 = 22$

Lời giải:

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P):

$x^2 = 2mx - m^2 + m + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - m - 1 = 0$ (*)

Có $\Delta' = (-m)^2 - 1.(m^2 - m - 1) = m + 1$

d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$

Theo định lý Viét, ta có $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = 2m,\ x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = m^2 - m - 1$

Vì A, B $\in$ (P): $y = x^2$ nên $y_1 = x_1^2, y_2 = x_2^2$

Do đó $y_1 + y_2 + 2x_1 + 2x_2 = 22 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 + 2x_2 = 22$

$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 22$

Thay $x_1 + x_2 = 2m,\ x_1x_2 = m^2 - m - 1$ Ta được

$(2m)^2 - 2(m^2 - m - 1) + 2.2m = 22 \Leftrightarrow m^2 + 3m - 10 = 0$

$\Leftrightarrow (m-5)(m-2) = 0 \Leftrightarrow m = -5$ (loại), $m = 2$ (thỏa mãn)

Vậy m=2 là giá trị cần tìm

Ví dụ 2. Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng $d: y = (2m+1)x - 2m$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1, y_1); b(x_2, y_2)$ Sao cho biểu thức $T = y_1 + y_2 - x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P):

$x^2 = (2m+1)x - 2m \Leftrightarrow x^2 - (2m+1)x + 2m = 0$ (*)

Có $\Delta = [-(2m+1)]^2 - 4.1.2m = (2m+1)^2 - 8m = (2m-1)^2$

d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow (2m-1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq \dfrac{1}{2}$

Theo định lí Vi-et ta có $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = 2m + 1,\ x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = 2m$

Vì A,B $\in$ (P): $y = x^2$ nên $y_1 = x_1^2, y_2 = x_2^2$

Do đó $T = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2$

Thay $x_1 + x_2 = 2m + 1,\ x_1x_2 = 2m$ vào T ta được

$T = (2m+1)^2 - 3.2m = 4m^2 - 2m + 1 = (2m - \dfrac{1}{2})^2 + \dfrac{3}{4} \geq \dfrac{3}{4}$

Vậy $\text{Min}T = \dfrac{3}{4}$ khi $2m - \dfrac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{4}$ (thỏa mãn)

Ví dụ 3: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng d: $y = 2mx - m^2 + 1$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$ thỏa mãn $y_1 - y_2 > 4$

Lời giải:

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P):

$x^2 = 2mx - m^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ (*)

Có $\Delta' = (-m)^2 - 1.(m^2 - 1) = 1 > 0\ \forall m$, do đó Phương trình (*) luôn có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt nên d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt

Do $\Delta' = 1$ nên hai nghiệm của (*) là $x = m \pm 1 \Leftrightarrow x = m - 1, x = m + 1$

Trường hợp 1: Xét $x_1 = m - 1, x_2 = m + 1 \Rightarrow y_1 = (m - 1)^2, y_2 = (m+1)^2$

nên $y_1 - y_2 > 4 \Leftrightarrow (m+1)^2 - (m-1)^2 > 4 \Rightarrow m > 1$

Vậy $m > 1$ hoặc $m < -1$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 4: Cho parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng $d: y = 2x + m - 1$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$ mà $x_1y_1 - x_2y_2 - x_1x_2 = -4$

Lời giải:

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P):

$-x^2 = 2x + m - 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + m - 1 = 0$ (*)

Có $\Delta' = 1^2 - 1.(m-1) = 2 - m$

d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 2 - m > 0 \Leftrightarrow m < 2.$

Theo định lí vi-et ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -2,\ x_1x_2 = \frac{c}{a} = m - 1$

Vì $A, B \in (P): y = -x^2$ nên $y_1 = -x_1^2, y_2 = -x_2^2$

Do đó :

$x_1y_1 - x_2y_2 - x_1x_2 = -4 \Leftrightarrow -x_1^3 + x_2^3 - x_1x_2 = -4 \Leftrightarrow x_1^3 - x_2^3 + x_1x_2 = 4$

$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2) + x_1x_2 = 4$

$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)\left[(x_1 + x_2)^2 - x_1x_2\right] + x_1x_2 = 4$

Thay $x_1 + x_2 = -2,\ x_1x_2 = m - 1$, ta được :

$(x_1 - x_2)\left[(-2)^2 - m + 1\right] + m - 1 = 4 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)(5 - m) + m - 5 = 0$

$\Leftrightarrow (x_1 - x_2 - 1)(5 - m) = 0 \Leftrightarrow m = 5$ (loại), $x_1 - x_2 = 1$

Giải hệ $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2},\ x_2 = -\frac{3}{2}$, thay vào $x_1x_2 = m - 1$ ta được

$\frac{3}{4} = m - 1 \Leftrightarrow m = \frac{7}{4}$ (thỏa mãn).

Vậy $m = \frac{7}{4}$ là giá trị cần tìm.

DẠNG 5: BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐỘ DÀI, DIỆN TÍCH

Ghi nhớ một số công thức về khoảng cách

- Khoảng cách từ gốc tọa độ đến một điểm

+) Nếu $A(a;0)\in Ox$ thì $OA=|x_A|=|a|$.

+) Nếu $B(0;b)\in Oy$ thì $OB=|y_B|=|b|$.

+) Nếu $M(a;b)$ bất kì thì $OM=\sqrt{a^2+b^2}$.

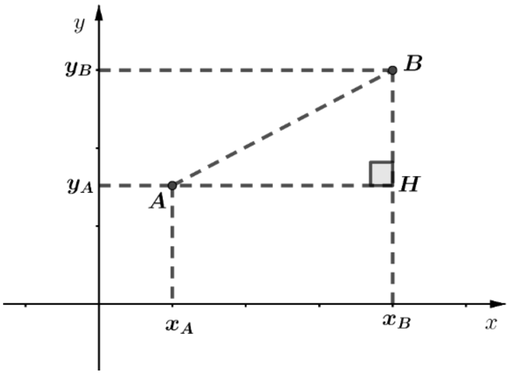
- Khoảng cách giữa hai điểm trên cùng một trục Ox hoặc Oy

+) Nếu $A,\ B\in Ox$ (hoặc $AB//Ox$) thì $AB=|x_A-x_B|$.

+) Nếu $M,\ N\in Oy$ (hoặc $MN//Oy$) thì $MN=|y_M-y_N|$.

- Khoảng cách giữa hai điểm $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ *bất kỳ*

(Công thức này cần chứng minh khi sử dụng)



$AH=|x_A-x_B|$

$BH=|y_A-y_B|$

$AB=\sqrt{AH^2+BH^2}=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$.

Ví dụ 1: Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = mx + 2$.

a) Chứng minh d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B thuộc hai phía Oy.

b) Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên trục hoành. Tính độ dài MN theo m và tìm m để $S_{\Delta OAM} = S_{\Delta OBN}$.

c) Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên trục tung. Tính độ dài đoạn HK theo m.

d) Tính độ dài đoạn AB theo m và chứng minh $AB \geq \sqrt{m^2+8}\ \forall m$.

e) Tính diện tích ΔOAB theo m và tìm m để $S_{\Delta OAB} = 2m+1$ (đvdt).

f) Chứng minh với mọi m, ΔOAB không thể vuông tại O.

Lời giải

a) Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P):

$$x^2 = mx + 2 \Leftrightarrow x^2 - mx - 2 = 0 \qquad (*)$$

Có $\Delta = (-m)^2 - 4.1.(-2) = m^2 + 8 > 0\ \forall m$ nên (*) luôn có hai nghiệm phân biệt.

Do đó d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B.

Theo định lý Viét, ta có $x_A + x_B = -\dfrac{b}{a} = m$, $x_Ax_B = \dfrac{c}{a} = -2 < 0$.

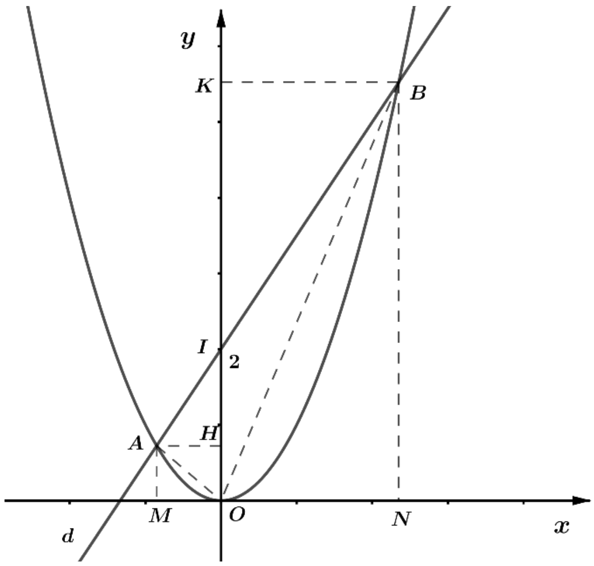
Vì $x_Ax_B = -2 < 0 \Rightarrow x_A,\ x_B$ trái dấu nên A, B thuộc hai phía Oy.

Vậy d luôn cắt (P) tại hai điểm A, B thuộc hai phía Oy.

b) Có

$$MN = |x_A - x_B| \Rightarrow MN^2 = |x_A - x_B|^2 = (x_A - x_B)^2 - 4x_Ax_B$$
$$= m^2 + 8 \Rightarrow MN = \sqrt{m^2+8}$$

Vậy $MN = \sqrt{m^2+8}$.



Do ΔOAM, ΔOBN lần lượt vuông tại M, N nên

$$S_{\Delta OAM} = \frac{1}{2}AM.OM = \frac{1}{2}|x_A^3|;\ S_{\Delta OBN} = \frac{1}{2}BN.ON = \frac{1}{2}|x_B^3|.$$

Do đó $S_{\Delta OAM} = S_{\Delta OBN} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}|x_A^3| = \dfrac{1}{2}|x_B^3| \Leftrightarrow |x_A^3| = |x_B^3| \Leftrightarrow |x_A| = |x_B|$

$\Leftrightarrow x_A = x_B$ (loại), $x_A = -x_B \Leftrightarrow x_A + x_B = 0 \Leftrightarrow m = 0$ (thỏa mãn).

Vậy $m = 0$ thì $S_{\Delta OAM} = S_{\Delta OBN}$.

c) Có $HK = |y_A - y_B| = |x_A^2 - x_B^2| = |(x_A + x_B)(x_A - x_B)| = |m.(x_A - x_B)|$

$$HK^2 = m^2\left[\left(x_A + x_B\right)^2 - 4x_Ax_B\right] = m^2\left(m^2 + 8\right).$$

Vậy $HK = |m|\sqrt{m^2+8}$.

d) Có

$$AB = \sqrt{\left(x_A - x_B\right)^2 + \left(y_A - y_B\right)^2} = \sqrt{\left(x_A - x_B\right)^2 + \left(mx_A + 2 - mx_B - 2\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(x_A - x_B\right)^2\left(m^2+1\right)} = \sqrt{\left(m^2+8\right)\left(m^2+1\right)} \ge \sqrt{\left(m^2+8\right)}.$$

e) Gọi I là giao điểm của d và Oy $\Rightarrow I(0;2) \Rightarrow OI = |y_I| = 2$.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên trục tung nên

$$AH = |x_A|,\ BK = |x_B|.$$

$$S_{\Delta OAB} = S_{\Delta OAI} + S_{\Delta OBI} = \frac{1}{2}\left(OI.AH + OI.BK\right) = |x_A| + |x_B|$$

$$= m^2 - 2.(-2) + 2.|2| = m^2 + 8 \Rightarrow |x_A| + |x_b| = \sqrt{m^2+8}$$

Vậy $S_{\Delta OAB} = \sqrt{m^2+8}$.

Có $S_{\Delta OAB} = 2m+1 \Leftrightarrow \sqrt{m^2+8} = 2m+1$ (điều kiện $2m+1>0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{2}$)

$$\Leftrightarrow m^2 + 8 = 4m^2 + 4m + 1 \Leftrightarrow 3m^2 + 4m - 7 = 0 \Leftrightarrow 3m^2 - 3m + 7m - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3m(m-1) + 7(m-1) \Leftrightarrow (m-1)(3m+7) = 0$$

$\Leftrightarrow m = -\frac{7}{3}$ (loại), $m = 1$ (thỏa mãn).

Vậy $m=1$ thì $S_{\Delta OAB} = 2m+1$ (đvdt).

Chú ý Câu này ta cần lưu ý đến điều kiện $m > -\frac{1}{2}$ trong quá trình giải.

f) Ta có $OA^2 = x_A^2 + y_A^2$, $OB^2 = x_B^2 + y_B^2$.

$$AB^2 = \left(x_A - x_B\right)^2 + \left(y_A - y_B\right)^2 = x_A^2 + x_B^2 - 2x_Ax_B + y_A^2 + y_B^2 - 2y_Ay_B.$$

Xét $OA^2 + OB^2 - AB^2 = 2x_Ax_B + 2y_Ay_B = 2\left(x_Ax_B + x_A^2x_B^2\right)$

$$= 2x_Ax_B\left(x_Ax_B + 1\right) = 2.(-2)(-2+1) = 4 \ne 0$$

Do đó $OA^2 + OB^2 \ne AB^2$ nên ΔOAB không thể vuông tại O (đpcm).

Bài 2: Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = -2x+3$.

a) Tìm tọa độ giao điểm A, B của d và (P) với $x_A > 0$ và vẽ d, (P).

b) Tìm tọa độ điểm C thuộc cung AB của (P) sao cho diện tích ΔABC lớn nhất.

c) Tìm tọa độ điểm $M \in Oy$ để $S_{MAB} = 4$ (đvdt).

d) Cho điểm $E(3;0)$. Tìm tọa độ điểm $F \in (P)$ sao cho độ dài EF ngắn nhất.

Lời giải

a) Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P):

$$x^2 = -2x + 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 = 4 \Leftrightarrow x + 1 = \pm 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = 1^2 \\ x = -3 \Rightarrow y = (-3)^2 = 9 \end{array}\right.$$

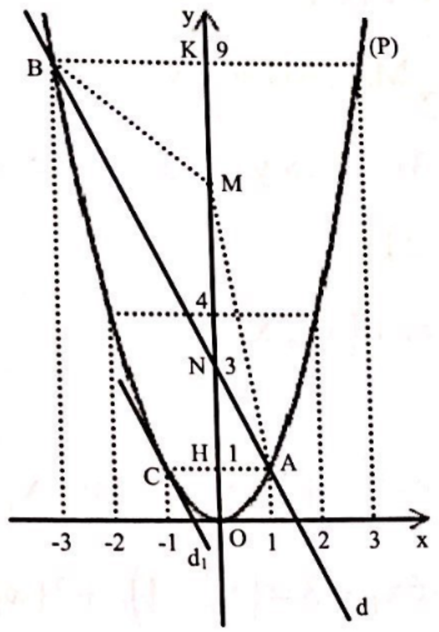
Vậy $A(1;1)$, $B(-3;9)$.

* $d: y = -2x + 3$

x	0	$\frac{3}{2}$
y	3	0

* $(P): y = x^2$

x	–2	–1	0	1	2
y	4	1	0	1	4



b) Có A(1; 1) , B(-3; 9) cố định nên độ dài đoạn AB không đổi, do đó S_{ABC} lớn nhất khi khoảng cách từ C đến đường thẳng d lớn nhất, khi đó C là tiếp điểm của đường thẳng d_1//d_2 và d_1 tiếp xúc với (P).

Gọi phương trình của d_1: y = ax + b

Do d_1//d_2 nên ta có: $\begin{cases} a_{d_1} = a_d \\ b_{d_1} = b_d \end{cases} \Rightarrow d_1 : y = -2x + b\ (b \neq 3)$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và (P): $x^2 = -2x + b \Leftrightarrow x^2 + 2x - b = 0$ (*)

d_1 tiếp xúc với (P) $\Leftrightarrow$ (*) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = 1 + b = 0 \Leftrightarrow b = -1$ (thỏa mãn)

Khi đó x_c là nghiệm kép của (*): $x_c = -1 \Rightarrow y_c = (-1)^2 = 1$

Vậy C(1; –1) là điểm cần tìm

c) Gọi N là giao điểm của d và Oy $\Rightarrow$ N(0; 3)

Do M $\in$ Oy $\Rightarrow x_M = 0 \Rightarrow$ M(0; y_M), $y_M \neq 3$ (do M $\neq$ N) $\Rightarrow MN = |y_M - y_N| = |y_M - 3|$

Kẻ AH $\perp$ Oy tại H, BK $\perp$ Oy tại K thì: $AH = |x_A| = |1| = 1$, $BK = |x_B| = |-3| = 3$

Vì A và B thuộc hai phía của Oy nên:

$$S_{MAB} = S_{MAN} + S_{MBN} = \frac{1}{2}MN.AH + \frac{1}{2}MN.BK = 2|y_M - 3| \text{ (đvdt)}$$

Do đó $S_{AMB} = 4 \Rightarrow |y_M - 3| = 2 \Rightarrow y_M - 3 = \pm 2 \Rightarrow y_M = 5, y_M = 1$ (thỏa mãn)

Vậy M(0; 1) hoặc M(0; 5)

d) Do $F \in (P) \Rightarrow y_F = x_F^2 \Rightarrow F(x_F; x_F^2)$

Có : $EF = (x_E - x_F)^2 + (y_E - y_F)^2 = (3 - x_F)^2 + (0 - x_F^2)^2 = x_F^4 + x_F^2 - 6x_F + 9$

$= x_F^4 - 2x_F^2 + 1 + 3x_F^2 - 6x_F + 3 = \left(x_F^2 - 1\right)^2 + 3\left(x_F - 1\right)^2 + 5 \ge 5 \Rightarrow EF \ge 5$

Vậy $MinEF = \sqrt{5} \Leftrightarrow x_F = 1 \ hay \ F(1;1)$

HỆ THỐNG BÀI TẬP SỬ DỤNG TRONG CHỦ ĐỀ

I. ĐỊNH LÍ VIÉT

Bài 1. Cho phương trình $x^2 - 2(m + 3)x + m^2 + 3 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn: $(2x_1 - 1)(2x_2 - 1) = 9$

Bài 2. Cho phương trình $x^2 - 2(m - 3)x - 2(m - 1) = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn sao cho biểu thức $T = x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 3. Cho phương trình $x^2 - 2(m + 1)x + 4m - m^2 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho biểu thức $A = |x_1 - x_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 4. Cho phương trình $x^2 + mx - 3 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn: $|x_1| + |x_2| = 4$.

Bài 5. Cho phương trình $x^2 - mx + 2m - 4 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1| + |x_2| = 3$.

Bài 6. Cho phương trình: $x^2 - 4x - m^2 - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt thỏa mãn $x_2 = 5x_1$

Bài 7. Cho phương trình: $x^2 - 2(k - 1)x - 4k = 0$. Tìm k để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $3x_1 - x_2 = 2$

Bài 8. Cho phương trình: $x^2 - 6x + m + 3 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 = x_1^2$

Bài 9. Cho phương trình $x^2 - 3x - m^2 + 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1| + 2|x_2| = 3$.

Bài 10. Cho phương trình: $x^2 - (m - 3)x - 5 = 0$. Tìm k để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 là các số nguyên

Bài 11. Cho phương trình: $x^2 - 20x + m + 5 = 0$. Tìm k để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 là các số nguyên tố.

Bài 12. Cho phương trình $x^2 - 2(m + 1)x + 4m = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 = -3x_2$

Bài 13. Cho phương trình: $x^2 + 4x + 4a - a^2 = 0$. Tìm a để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt thỏa mãn $x_1 = x_2^2 - 6$

Bài 14. Cho phương trình $x^2 - (2m + 5)x - 2m - 6 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1| + |x_2| = 7$.

Bài 15. Cho phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - 4 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{3}{x_2} = 1$

Bài 16. Cho phương trình $x^2 - mx - 8 = 0$. Chứng minh rằng với mọi m, phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và giá trị của biểu thức $H = \frac{2x_1^2 + 5x_1 - 16}{3x_1} - \frac{2x_2^2 + 5x_2 - 16}{3x_2}$ không phụ thuộc vào m

Bài 17. Cho phương trình $x^2 - 2x + m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{x_1}{x_2^2 + 2x_1 + 1} + \frac{x_2}{x_1^2 + 2x_2 + 1} = \frac{1}{4}$

Bài 18. Cho phương trình $x^2 + 2mx - 2m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $P = \dfrac{2x_1x_2 + 1}{x_1^2 - 2mx_2 + 1 - 2m}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

II. HỆ QUẢ CỦA ĐỊNH LÍ VIET

Bài 1. Cho phương trình $x^2 - 2mx + m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 2$

Bài 2. Cho phương trình $x^2 - (2m + 5)x + 2m + 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 mà biểu thức $M = \left|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 3. Cho phương trình $x^2 - 5x + m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $2x_1 = \sqrt{x_2}$

Bài 4. Cho phương trình $x^2 - (m + 5)x + 3m + 6 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 :

+ Là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng 5.
+ Là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông cân

Bài 5. Cho phương trình $x^2 + (m + 2)x - m - 4 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 0 \le x_2$

Bài 6. Cho phương trình $x^2 + (m - 2)x + m - 5 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \le 0 < x_2$

Bài 7. Cho phương trình $x^2 + 2mx + 4m - 4 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 2$, $x_2 < 2$

Bài 8. Cho phương trình $x^2 - (m + 3)x + m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < -\dfrac{3}{2} < x_2$

Bài 9. Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $\dfrac{x - 7 - 3m}{\sqrt{x} - 3} = m$

Bài 10. Cho phương trình $\dfrac{x - \sqrt{x}}{2\sqrt{x} - 1} = m$

Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt

III. SỰ TƯƠNG GIAO CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ PARABOL

Bài 1. Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = 2(m+3)x - m^2 - 3$

Tìm m để (d) tiếp xúc với (P). Khi đó hãy tìm tọa độ tiếp điểm.

Bài 2. Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = 2x + 3$

a) Tìm tọa độ các giao điểm A và B của d và (P), trong đó A là điểm có hoành độ âm. Vẽ (P) và (d) trên cùng một hệ trục tọa độ
b) Tìm tọa độ điểm C thuộc cung AB của (P) để $S_{\Delta ABC}$ lớn nhất

Bài 3. Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = 2(m-1)x - 2m + 4$ .Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất

Bài 4. Cho parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng (d) đi qua I(0; -1) hệ số góc k .

a) Viết phương trình của (d)
b) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm A, B phân biệt nằm về hai phía của trục Oy
c) Gọi hoành độ của A và B lần lượt là x_1 và x_2. Chứng minh: $|x_1 - x_2| \ge 2$
d) Giả sử $x_1 < x_2$. Tìm m để $|x_1| > |x_2|$

Bài 5. Cho parabol $(P): y = x^2$ và d: $y = mx - m + 1$. Tìm m để (d) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1| + |x_2| = 4$.

Bài 6. Cho $(P): y = x^2$ và (d): $y = 2(m-1)x + 3 - 2m$. Tim m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một hình chữ nhật có độ dài đường chéo bằng $\sqrt{10}$.

Bài 7. Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = mx + m + 1$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $2x_1 - 3x_2 = 5$.

Bài 8. Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = 2(m+1)x + 3$. Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn: $2|x_1| + |x_2| = 5$.

Bài 9. Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = -4x + m^2 - 4$. Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn: $x_2 = x_1^3 + 4x_1^2$.

Bài 10. Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = (2m-1)x - m^2 + m$. Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn: $\sqrt{x_1} = \sqrt{2.x_2}$.

Bài 11. Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = (\mathrm{m}-3)\mathrm{x} - \mathrm{m} + 4$. Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một tam giác vuông cân.

Bài 12. Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = 2mx - m^2 + m + 1$. Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ thỏa mãn: $y_1 + y_2 + 2x_1 + 2x_2 = 22$.

Bài 13. Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = (2m+1)x - 2m$. Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ sao cho biểu thức : $T = y_1 + y_2 - x_1.x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 14. Cho parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng (d): $y = 2mx - m^2 + 1$. Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ thỏa mãn: $y_1 - y_2 > 4$

Bài 15. Cho parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng (d): $y = 2x + m - 1$. Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ mà $x_1y_1 + x_2y_2 - x_1.x_2 = -4$

Bài 16. Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = mx + 2$

a) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B thuộc hai phía của Oy.
b) Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên trục hoành . Tính độ dài đoạn MN theo m và tìm m để $S_{\Delta OAM} = S_{\Delta OBM}$
c) Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên trục tung. Tính độ dài đoạn HK theo m .
d) Tính độ dài đoạn thẳng AB theo m và chứng minh $AB \geq \sqrt{m^2 + 8} \quad \forall m$.
e) Tính diện tích ΔOAB theo m và tìm m để $S_{\Delta OAB} = 2m + 1$ (đvdt).
f) Chứng minh với mọi m , ΔOAB không thể vuông tại O.

Bài 17. Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = -2x + 3$.

a) Tìm tọa độ giao điểm A, B của (d) và (P) với $x_A > 0$, vẽ (d) và (P) trên cùng một hệ trục tọa độ
b) Tìm tọa độ điểm C thuộc cung AB của (P) sao cho diện tích ΔABC lớn nhất.
c) Tìm tọa độ điểm $M \in Oy$ để $S_{\Delta MAB} = 4$ (đvdt).
d) Cho điểm $E(3;0)$. Tìm tọa độ điểm $F \in (P)$ sao cho độ dài EF ngắn nhất.

CHỦ ĐỀ 5 – PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

I. PHƯƠNG TRÌNH KHÔNG CHỨA THAM SỐ

DẠNG 1: PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA NHẨM ĐƯỢC MỘT NGHIỆM

- Nếu nhẩm được một nghiệm $x=\alpha$ của phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$ thì ta tách được phương trình đó về dạng tích $(x-\alpha)(ax^2+b'x+c')=0$.
- Nếu nhẩm được một nghiệm $x=-\alpha$ của phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$ thì ta tách được phương trình đó về dạng tích $(x+\alpha)(ax^2+b'x+c')=0$.

Ví dụ. Giải phương trình $x^3-4x^2+2x+4=0$.

Lời giải

Nhận xét: phương trình này ta nhẩm được một nghiệm $x=2$ (có thể dùng máy tính) nên ta sẽ tách được nhân tử $x-2$.

Cách 1 Có $x^3-4x^2+2x+4=0 \Leftrightarrow x^3-2x^2-2x^2+4x-2x+4=0$

$\Leftrightarrow x^2(x-2)-2x(x-2)-2(x-2)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2-2x-2)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ x^2-2x+1-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ (x-1)^2=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=1\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Cách 2 Có $x^3-4x^2+2x+4=0 \Leftrightarrow (x^3-8)-4(x^2-4)+2(x-2)=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x^2+2x+4)-4(x-2)(x+2)+2(x-2)=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x^2-2x-2)=0$, từ đó giải được $x=2, x=1\pm\sqrt{3}$.

Cách 3 Đặt phép chia da thức $x^3-4x^2+2x+4=0$ cho đa thức $x-2$ ta được thương là x^2-2x-2 nên $x^3-4x^2+2x+4=(x-2)(x^2-2x-2)$ nên

phương trình $\Leftrightarrow (x-2)(x^2-2x-2)=0$, từ đó giải được $x=2, x=1\pm\sqrt{3}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\{2;1\pm\sqrt{3}\}$.

DẠNG 2: PHƯƠNG TRÌNH TRÙNG PHƯƠNG

Xét phương trình $ax^4+bx^2+c=0\,(a\neq 0)$.

Cách 1 Đặt $t=x^2$, điều kiện $t\geq 0$, ta được phương trình bậc hai $at^2+bt+c=0$. Giải t, đối chiếu điều kiện và suy ra x.

Cách 2 Giải trực tiếp bằng cách đưa về tích hoặc đưa về bình phương theo x.

Ví dụ. giải phương trình $x^4+x^2-20=0$.

Lời giải

Cách 1 (Đặt $t=x^2$)

Đặt $t=x^2$, điều kiện $t\geq 0$, phương trình đã cho trở thành

$t^2+t-20=0 \Leftrightarrow t^2+5t-4t-20=0 \Leftrightarrow (t+5)(t-4)=0$

$\Leftrightarrow t=-5$ (loại), $t=4$ (thỏa mãn) $x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\{\pm 2\}$.

Cách 2 (giải trực tiếp)

Có $x^4+x^2-20=0 \Leftrightarrow x^4+5x^2-4x^2-20=0 \Leftrightarrow x^2(x^2+5)-4(x^2+5)=0$

$\Leftrightarrow (x^2+5)(x^2-4)=0 \Leftrightarrow x^2=-5$ (loại), $x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\{\pm 2\}$.

DẠNG 3: PHƯƠNG TRÌNH DẠNG

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=k\,(a+c=b+d=\alpha)$$

Cách giải: Ghép kết hợp

$\left[(x+a)(x+c)\right]\left[(x+b)(x+d)\right]=k \Leftrightarrow \left[x^2+\alpha x+ac\right]\left[x^2+\alpha x+bd\right]=k$

Đặt ẩn phụ $t=x^2+\alpha x$ hoặc $t=x^2+\alpha x+\dfrac{ac+bd}{2}$.

Ví dụ. Giải phương trình $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=24$.

Lời giải

Cách 1 (Đặt ẩn phụ)

Phương trình $\Leftrightarrow \left[(x+1)(x+4)\right]\left[(x+2)(x+3)\right]=24$

$\Leftrightarrow (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=24$.

Đặt $t=x^2+5x+5$, ta được phương trình $(t-1)(t+1)=24 \Leftrightarrow t=\pm 5$, suy ra

$$\left[\begin{array}{l} x^2+5x+5=5 \\ x^2+5x+5=-5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x(x+5)=0 \\ x^2+5x=-10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, x=-5 \\ \left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2=-\dfrac{15}{4} \Rightarrow x\in\varnothing \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\{0;-5\}$.

Cách 2 (Đưa về tích)

Phương trình $\Leftrightarrow (x^2+3x+2)(x^2+7x+12)=24 \Leftrightarrow x^4+10x^3+35x^2+50x=0$

$\Leftrightarrow x(x^3+10x^2+35x+50)=0 \Leftrightarrow x(x^3+5x^2+5x^2+25x+10x+50)=0$

$\Leftrightarrow x(x+5)(x^2+5x+10)=0 \Leftrightarrow x=0, x=-5$.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\{0;-5\}$.

DẠNG 4: PHƯƠNG TRÌNH DẠNG $ax^4+bx^3+cx^2\pm bx+a=0$

Cách giải

Trường hợp 1: Xét $x=0$, thay vào phương trình xem thỏa mãn hay loại.

Trường hợp 2: Xét $x\neq 0$, chia hai vế phương trình cho x^2 được $a\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+b\left(x\pm\dfrac{1}{x}\right)+c=0$, rồi đặt ẩn phụ $t=x\pm\dfrac{1}{x}$ thì $t^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}\pm 2$.

Ví dụ. Giải phương trình $x^4+3x^3-2x^2-6x+4=0$.

Lời giải

Cách 1:(Đặt ẩn phụ)

Trường hợp 1: Xét $x=0$, thay vào phương trình ta được $4=0$ (loại).

Trường hợp 2: Xét $x\neq 0$, chia hai vế phương trình cho x^2 được

$x^2+3x-2-\dfrac{6}{x}+\dfrac{4}{x^2}=0 \Leftrightarrow \left(x^2+\dfrac{4}{x^2}\right)+3\left(x-\dfrac{2}{x}\right)-2=0$

Đặt $t=x-\dfrac{2}{x} \Rightarrow t^2=x^2+\dfrac{4}{x^2}-4 \Rightarrow x^2+\dfrac{4}{x^2}=t^2+4$

Phương trình trở thành $\left(t^2+4\right)+3t-2=0 \Leftrightarrow t^2+3t+2=0 \Leftrightarrow t^2+t+2t+2=0$

$\Leftrightarrow t(t+1)+2(t+1)=0 \Leftrightarrow (t+1)(t+2)=0 \Leftrightarrow t=-1, t=-2$, suy ra

$$\left[\begin{array}{l} x-\dfrac{2}{x}=-1 \\ x-\dfrac{2}{x}=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x-2=0 \\ x^2+2x-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x+2x-2=0 \\ x^2+2x+1-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-1)(x+2)=0 \\ (x+1)^2=3 \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x=1, x=-2, x=-1\pm\sqrt{3}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\left\{1;-2;-1\pm\sqrt{3}\right\}$

<u>Cách 2</u> (Đưa về tích)

Có: $x^4+3x^3-2x^2-6x+4=0 \Leftrightarrow x^4-x^3+4x^3-4x^2+2x^2-2x-4x+4=0$

$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^3+4x^2+2x-4\right)=4 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^3+2x^2+2x^2+4x-2x-4\right)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+2)\left(x^2+2x-2\right)=0 \Leftrightarrow x=1, x=-2, x=-1\pm\sqrt{3}$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\left\{1;-2;-1\pm\sqrt{3}\right\}$

DẠNG 5: PHƯƠNG TRÌNH GIẢI BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

- Biến đổi về một biểu thức.
- Đặt t bằng biểu thức đó và đưa về phương trình bậc hai đối với t.

Ví dụ: Giải phương trình $x(x-1)\left(x^2-x+1\right)=6$.

Lời giải

Có $x(x-1)\left(x^2-x+1\right)=6 \Leftrightarrow \left(x^2-x\right)\left(x^2-x+1\right)=6$.

Đặt $t=x^2-x$, ta được $t^2+t-6=0 \Leftrightarrow t=2, t=-3$.

- $t=2 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow x=-1, x=2$.
- $t=-3 \Rightarrow x^2-x+3=0$ (vô nghiệm).

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\{-1;2\}$

DẠNG 6: PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU

- Đặt điều kiện các mẫu khác 0.
- Quy đồng cùng mẫu chung rồi bỏ mẫu.
- Đặt ẩn phụ nếu được.

Ví dụ 1. Giải phương trình $\dfrac{90}{x}+\dfrac{90}{x+9}=\dfrac{9}{2}$.

Lời giải

Điều kiện: $x\neq 0, x\neq -9$.

Có $\dfrac{90}{x}+\dfrac{90}{x+9}=\dfrac{9}{2} \Leftrightarrow \dfrac{10}{x}+\dfrac{10}{x+9}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{20x+90}{x(x+9)}=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x^2-31x-180=0, \Delta=(-31)^2-4.1.(-180)=1681>0 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=41$

$\Rightarrow x = \dfrac{31 \pm 41}{2} \Leftrightarrow x = 36, x = -5$. (thỏa mãn điều kiện)

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{36; -5\}$.

II. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA THAM SỐ

DẠNG 1:PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA ĐƯA ĐƯỢC VỀ DẠNG TÍCH:$(x - \alpha)(ax^2 + bx + c) = 0$

Bước 1: Tách riêng phần chứa m được dạng f(x) + m(x - α) = 0, rồi tách x - α từ f(x) ta đưa được phương trình đã cho về dạng:

$$(x - \alpha)(ax^2 + bx + c) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha \\ ax^2 + bx + c = 0 \end{array}\right.$$

Bước 2: Ghi nhớ một số điều kiện sau:

- Phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x \neq \alpha$.
- Phương trình đã cho có đúng 2 phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có đúng một nghiệm thỏa mãn $x \neq \alpha$.
- Phương trình đã cho có đúng 1 nghiệm $\Leftrightarrow$ Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ hoặc vô nghiệm, hoặc có nghiệm kép $x \neq \alpha$.

Ví dụ: Cho phương trình: $x^3 - 3x^2 + 3mx + 3m + 4 = 0$ (1)

Tìm m để phương trình đã cho:

a) Có ba nghiệm phân biệt

b) Có đúng hai nghiệm khác nhau

c) Có đúng một nghiệm

d) Có ba nghiệm phân biệt $x_1; x_2; x_3$ thỏa mãn $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = -6$.

Lời giải

Ta có: (1) $\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 4 + 3m(x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - 4x + 4) + 3m(x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - 4x + 4 + 3m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x^2 - 4x + 4 + 3m = 0 \ (2) \end{array}\right.$$

a) (1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt $x \neq -1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4 - 4 - 3m > 0 \\ (-1)^2 - 4.(-1) + 4 + 3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m \neq -3 \end{cases}$$

Vậy $m < 0$, $m \neq -3$ là giá trị cần tìm

b) (1) có đúng hai nghiệm khác nhau $\Leftrightarrow$ (2) có đúng một nghiệm $x \neq -1$

Trường hợp 1: (2) có nghiệm kép $x \neq -1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4 - 4 - 3m = 0 \\ (-1)^2 - 4.(-1) + 4 + 3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0$$

Trường hợp 2: (2) có hai nghiệm phân biệt trong đó một có nghiệm $x = -1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4 - 4 - 3m > 0 \\ (-1)^2 - 4.(-1) + 4 + 3m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m = -3 \end{cases} \text{(loại).}$$

Vậy $m = 0$ là giá trị cần tìm

c) (1) có đúng hai nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) không có nghiệm nào thỏa mãn $x \neq -1$

Trường hợp 1: (2) có nghiệm kép $x = -1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4 - 4 - 3m = 0 \\ (-1)^2 - 4.(-1) + 4 + 3m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -3 \end{cases} \text{(loại).}$$

Trường hợp 2: (2) vô nghiệm kép ⇔ $\Delta' = 4 - 4 - 3m < 0$ ⇔ $m > 0$

Vậy $m > 0$ là giá trị cần tìm

d) Theo câu a) với $m < 0$, $m \neq -3$ thì (1) có ba nghiệm phân biệt $x_1; x_2; x_3$

Do $x_1; x_2; x_3$ vai trò như nhau và trong ba nghiệm của (1) có một nghiệm bằng -1 nên ta giả sử x_3 = -1 thì $x_1; x_2$ là hai nghiệm của (2).

Theo định lý Vi-ét, ta có $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 4; x_1x_2 = \frac{c}{a} = 3m + 4$

Thay $x_3 = -1$ vào $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = -6$ ta được:

$$x_1x_2 - (x_1 + x_2) = -6 \Leftrightarrow 3m + 4 - 4 = -6 \Leftrightarrow m = -2 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy m = -2 là giá trị cần tìm.

DẠNG 2. PHƯƠNG TRÌNH TRÙNG PHƯƠNG:

<u>Bài toán:</u> Tìm m để phương trình $ax^4 + bx^2 + c = 0$ $(a \neq 0)$ (1)

a) Có bốn nghiệm phân biệt.

b) Có đúng ba nghiệm khác nhau.

c) Có đúng hai nghiệm khác nhau.

d) Có đúng một nghiệm.

e) Vô nghiệm.

Bước 1: Đặt $t = x^2$, $t \geq 0$, phương trình trở thành $at^2 + bt + c = 0$ (2)

Bước 2: Nhận xét

- Với $t < 0$ thì không có x
- Với $t = 0$ thì có 1 giá trị $x = 0$
- Với $t > 0$ thì có hai giá trị của x là $x = \pm\sqrt{t}$

Do đó ta có các kết quả sau:

a) (1) có bốn nghiệm phân biệt khi (2) có hai nghiệm phân biệt $t_1 > 0$, $t_2 > 0$.

b) (1) có đúng ba nghiệm khác nhau khi (2)có hai nghiệm phân biệt $t_1 > 0$, $t_2 > 0$.

c) (1) có đúng hai nghiệm khác nhau xảy ra hai trường hợp:

Trường hợp 1: (2) có nghiệm kép $t_1 = t_2 > 0$.

Trường hợp 2: (2) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $t_1 < 0 < t_2$.

d) (1) có đúng một nghiệm xảy ra hai trường hợp:

Trường hợp 1: (2) có nghiệm kép $t_1 = t_2 = 0$.

Trường hợp 2: (2) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $t_1 < 0$; $t_2 = 0$.

e) (1) vô nghiệm xảy ra ba trường hợp:

Trường hợp 1: (2) vô nghiệm

Trường hợp 2: (2) có nghiệm kép thỏa mãn $t_1 = t_2 < 0$

Trường hợp 3: (2) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $t_1 < 0$; $t_2 < 0$.

<u>Ví dụ</u> : Cho phương trình $x^4 - (2m - 1)x^2 + 2m - 2 = 0$ (1)

Tìm m để phương trình đã cho :

a) Có bốn nghiệm phân biệt.

b) Có đúng ba nghiệm khác nhau.

c) Có đúng hai nghiệm khác nhau.

d) Có bốn nghiệm phân biệt thỏa mãn: $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 10$

Lời giải

<u>Cách 1</u>: (Đặt ẩn phụ $t = x^2$)

Đặt $t = x^2$, $t \ge 0$, phương trình (1) trở thành $t^2 - (2m-1)t + 2m - 2 = 0$ (2)
Nhận xét :

- Với $t < 0$ thì không có x.
- Với $t > 0$ thì có một nghiệm $x = 0$
- Với $t > 0$ thì có hai giá trị của x là $x = \pm\sqrt{t}$

a) (1) có bốn nghiệm phân biệt khi (2) có 2 nghiệm phân biệt $t_1 > 0$, $t_2 > 0$.

Có $\Delta = [-(2m)]^2 - 4.1.(2m-2) = (2m-1)^2 - 8m + 8 = (2m-3)^2$

- (2) có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 khi $\Delta > 0 \Leftrightarrow (2m-3)^2 > 0 \Leftrightarrow m \ne \frac{3}{2}$.

Theo định lý Vi-ét, ta có $t_1 + t_2 = -\frac{b}{a} = 2m - 1$, $t_1 t_2 = \frac{c}{a} = 2m - 2$

$$* \ t_1 > 0, t_2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 + t_2 > 0 \\ t_1 t_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 1 > 0 \\ 2m - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$$

Vậy với $m > 1$, $m \ne \frac{3}{2}$ là các giá trị cần tìm

b)(1) có đúng ba nghiệm khác nhau khi (2) có hai nghiệm phân biệt $t_1 > 0$, $t_2 > 0$.

* Theo trên thì (2) có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 khi $m \ne \frac{3}{2}$.

$$* \ t_1 = 0, t_2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0^0 - (2m-1).0 + 2m - 2 = 0 \\ t_1 + t_2 = 2m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm

c) (1) có đúng hai nghiệm khác nhau xảy ra hai trường hợp:

Trường hợp 1: (2) có nghiệm kép $t_1 = t_2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (2m-3)^2 = 0 \\ -\frac{b}{a} = 2m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$

Trường hợp 2: (2) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $t_1 < 0 < t_2$

$\Leftrightarrow \frac{c}{a} = 2m - 2 < 0 \Leftrightarrow m < 1$

Vậy $m < 1$; $m = \frac{3}{2}$ là giá trị cần tìm.

d)Theo câu a) thì phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt khi $m > 1$, $m \ne \frac{3}{2}$.

Do $t_1 > 0$; $t_2 > 0$ nên bốn nghiệm phân biệt của (1) là :

$$x_1 = -\sqrt{t_1}; x_2 = \sqrt{t_1}; x_3 = -\sqrt{t_2}; x_4 = \sqrt{t_2}$$

Suy ra : $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = (-\sqrt{t_1})^2 + (\sqrt{t_1})^2 + (-\sqrt{t_2})^2 + (\sqrt{t_2})^2 = 2(t_1^2 + t_2^2)$

$$= 2\left[(t_1 + t_2)^2 - 2t_1 t_2\right] = 2\left[(2m-1)^2 - 2(2m-2)\right]$$

$$= 2(4m^2 - 8m + 5)$$

Do đó $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 10 \Leftrightarrow 2\left(4m^2 - 8m + 5\right) = 10 \Leftrightarrow 4m^2 - 8m = 0$

$\Leftrightarrow 4m\left(m - 2\right) = 0 \Leftrightarrow m = 0$ (loại), $m = 2$ (thỏa mãn).

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm.

Cách 2 (Đưa về tích)

Phương trình (1) $\Leftrightarrow x^4 - 2mx^2 + x^2 + 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow x^4 + x^2 - 2 - 2mx^2 + 2m = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2-1)(x^2+2)-2m(x^2-1)=0 \Leftrightarrow (x^2-1)(x^2+2m-2)=0$$

$$\Leftrightarrow x=\pm1,\ x^2=2m-2.$$

a) Vì phương trình đã có hai nghiệm phân biệt là $x=\pm1$ nên để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt thì phương trình $x^2=2m-2$ phải có hai nghiệm phân biệt khác ±1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m-2>0 \\ 2m-2\neq(\pm1)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow m>1,\ m\neq\frac{3}{2}.$$

Vậy $m>1,\ m\neq\frac{3}{2}$ là giá trị cần tìm.

b) Vì phương trình đã có hai nghiệm trình $x=\pm1$ nên để phương trình đã cho có ba nghiệm khác nhau thì phương trình $x^2=2m-2$ phải có đúng một nghiệm $x=0 \Leftrightarrow 2m-2=0 \Leftrightarrow m=1.$
Vậy $m=1$ là giá trị cần tìm.

c) Vì phương trình đã có đủ hai nghiệm khác nhau là $x=\pm1$ nên để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm khác nhau thi phương trình $x^2=2m-2$ hoặc vô nghiệm hoặc chỉ có nghiệm là $x=\pm1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m-2<0 \\ 2m-2=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<1 \\ m=\frac{3}{2} \end{array}\right.$$

Vậy $m<1;\ m=\frac{3}{2}$ là giá trị cần tìm.

d) Theo câu a) thì phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt khi $m>1,\ m\neq\frac{3}{2}.$

Khi đó bốn nghiệm của (1) là $x=\pm1,\ x=\pm\sqrt{2m-2}$, do đó

$$x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4=10 \Leftrightarrow (-1)^4+1^4+\left(-\sqrt{2m-2}\right)^4+\left(\sqrt{2m-2}\right)^4=10$$

$$\Leftrightarrow 1+1+(2m-2)^2+(2m-2)^2=10 \Leftrightarrow (2m-2)^2=4 \Leftrightarrow 2m-2=\pm2$$

$\Leftrightarrow m=0$ (loại), $m=2$ (thỏa mãn).
Vậy $m=2$ là giá trị cần tìm.

HỆ THỐNG BÀI TẬP SỬ DỤNG TRONG CHỦ ĐỀ

I. PHƯƠNG TRÌNH KHÔNG CHỨA THAM SỐ

Bài 1. Giải phương trình $x^3-4x^2+2x+4=0.$

Bài 2. Giải phương trình $x^4+x^2-20=0.$

Bài 3. Giải phương trình $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=24.$

Bài 4. Giải phương trình $x^4+3x^3-2x^2-6x+4=0.$

Bài 5. Giải phương trình $x(x-1)(x^2-x+1)=6.$

Bài 6. Giải phương trình $\frac{90}{x}+\frac{90}{x+9}=\frac{9}{2}.$

II. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA THAM SỐ

Bài 1. Cho phương trình $x^3-3x^2+3mx+3m+4=0.$ Tìm m để phương trình đã cho:

a) Có ba nghiệm phân biệt

b) Có đúng hai nghiệm khác nhau

c) có đúng một nghiệm.

d) Có ba nghiệm x_1,x_2,x_3 thỏa mãn $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-6.$

Bài 2. Cho phương trình $x^4-(2m-1)x^2+2m-2=0$. Tìm m để phương trình đã cho:

a) Có bốn nghiệm phân biệt

b) Có đúng ba nghiệm khác nhau

c) Có đúng hai nghiệm khác nhau

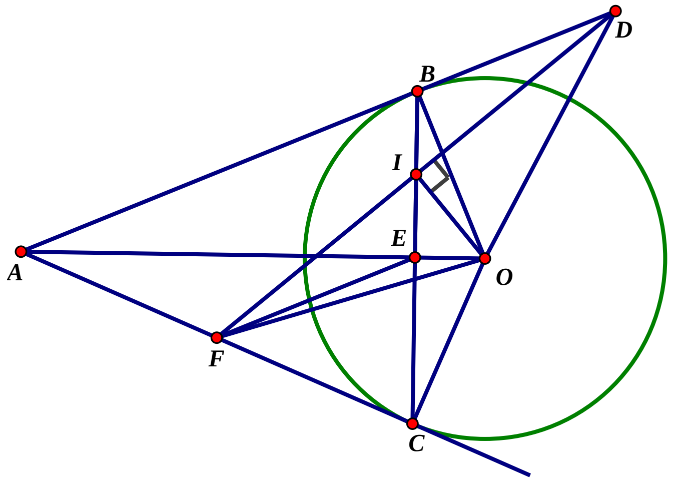
d) Có bốn nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4=10$.

Contents

DẠNG 1: KẾT NỐI CÁC GÓC BẰNG NHAU THÔNG QUA TỨ GIÁC NỘI TIẾP

Ví dụ 1. Từ điểm A ở ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến $AB,\ AC$ đến (O) (với $B,\ C$ là hai tiếp điểm). Gọi E là giao điểm của OA và BC. Gọi I là trung điểm của BE. Đường thẳng qua I và vuông góc với OI cắt các tia $AB,\ AC$ theo thứ tự tại $D,\ F$. Chứng minh ΔODF cân tại O và F là trung điểm của AC.

Hướng dẫn



* *Chứng minh* ΔODF *cân tại* O

Bước 1 Chứng minh tứ giác $OIBD$ nội tiếp, suy ra $\widehat{ODI}=\widehat{OBI}$ (cùng nhìn OI).

Bước 2 Chứng minh tứ giác $OIFC$ nội tiếp, suy ra $\widehat{OFI}=\widehat{OCI}$ (cùng nhìn OI).

Bước 3 Chứng minh ΔOBC cân tại O, suy ra $\widehat{OBI}=\widehat{OCI}$ (tính chất tam giác cân).

Từ đó, ta được $\widehat{ODI}=\widehat{OFI}$ nên ΔODF cân tại O

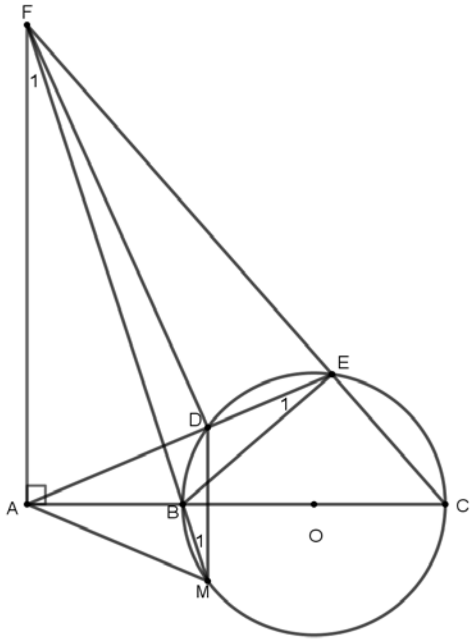
* *Chứng minh* F là *trung điểm* AC

Bước 1 Chứng minh tứ giác BDEF là hình bình hành bằng cách chỉ ra I là trung điểm cả BE và DF, suy ra $EF // BD$ hay $EF // AB$.

Bước 2 Xét ΔABC chỉ ra E là trung điểm của BC và kết hợp $EF // AB$, suy ra F là trung điểm của AC (Tính chất đường thẳng đi qua trung điểm của một cạnh và song song với cạnh thứ 2 thì đi qua trung điểm của cạnh thứ ba).

Ví dụ 2. Cho đường tròn (O). Lấy điểm A nằm ngoài đường tròn (O), đường thẳng AO cắt (O) tại hai điểm B và C với $AB < AC$. Qua A vẽ đường thẳng không đi qua O cắt (O) tại hai điểm D và E với $AD < AE$. Đường thẳng vuông góc với AB tại A cắt đường thẳng CE tại F. Gọi M là giao điểm thứ hai của đường thẳng FB với (O). Tứ giác AMDF là hình gì? Vì sao?

Hướng dẫn



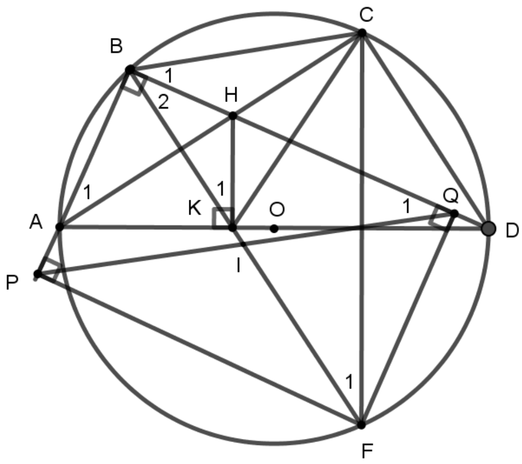
Bước 1 Xét (O) có $\widehat{M_1} = \hat{E_1}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{BD}$).

Bước 2 Chứng minh tứ giác ABEF nội tiếp, suy ra $\hat{F_1} = \hat{E_1}$ (cùng nhìn AB).

Từ đó, ta được $\widehat{M_1} = \hat{F_1}$, mà $\widehat{M_1}$ và $\hat{F_1}$ là hai góc so le trong nên $AF // DM$, do đó tứ giác AMDF là hình thang.

Ví dụ 3. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O) đường kính AD (B thuộc cung nhỏ AC). Gọi giao điểm hai đường chéo AC và BD là H. Kẻ HK vuông góc với AD tại K. Tia BK cắt (O) tại điểm thứ hai là F. Gọi P và Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của F trên các đường thẳng AB, BD. Chứng minh $CF // HK$ và PQ đi qua trung điểm của CF.

Hướng dẫn



* *Chứng minh* $CF // HK$

Bước 1 Chứng minh tứ giác ABHK nội tiếp, suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{K_1}$ (cùng nhìn BH).

Bước 2 Xét (O) có $\widehat{A_1} = \widehat{F_1}$ (cùng chắn cung BC).

Từ đó, ta được $\widehat{F_1} = \widehat{K_1}$, mà $\widehat{F_1}$, $\widehat{K_1}$ là hai góc đồng vị nên $CF // HK$.

* *Chứng minh PQ đi qua trung điểm CF*

Bước 1 Chứng minh tứ giác BPFQ là hình chữ nhật.

Suy ra $\widehat{Q_1} = \widehat{B_2}$ và PQ đi qua trung điểm của BF.

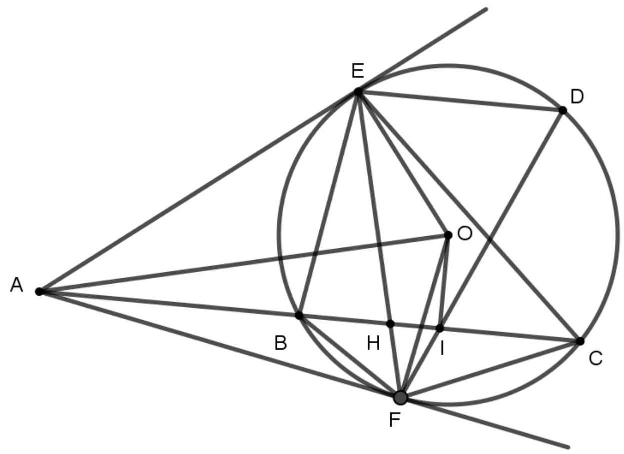
Bước 2 Chứng minh D là điểm chính giữa của cung CF, suy ra $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$.

Từ đó, ta được $\widehat{Q_1} = \widehat{B_1}$, mà $\widehat{Q_1}$, $\widehat{B_1}$ là hai góc so le trong nên $PQ // BC$.

Bước 3 Xét ΔFBC có PQ đi qua trung điểm của BF và $PQ // BC$ nên PQ đi qua trung điểm của CF (tính chất đường thẳng đi qua trung điểm của một cạnh và song song với cạnh thứ hai thì đi qua trung điểm của cạnh thứ ba).

Ví dụ 4. Cho ba điểm A, B, C cố định và thẳng hàng theo thứ tự đó. Vẽ đường tròn (O) bất kì đi qua B và C sao cho BC không phải là đường kính của (O). Từ A kẻ các tiếp tuyến AE và AF đến (O) với E và F là các tiếp điểm. Gọi I là trung điểm của BC. Gọi D là giao điểm thứ hai của đường thẳng FI và (O). Chứng minh $ED // AC$ và $AH.AI = AB.AC$.

Hướng dẫn



* *Chứng minh* $ED // AC$

Bước 1 Chứng minh tứ giác AOIF nội tiếp, suy ra $\widehat{AIF} = \widehat{AOF}$ (cùng nhìn AF).

Bước 2 Chứng minh $\widehat{AOF} = \widehat{EDF}$ (cùng bằng nửa $\overparen{EOF}$).

Từ đó, ta được $\widehat{AIF} = \widehat{EDF}$, mà $\widehat{AIF}, \widehat{EDF}$ là hai góc đồng vị nên $ED // AC$.

* *Chứng minh* $AH.AI = AB.AC$

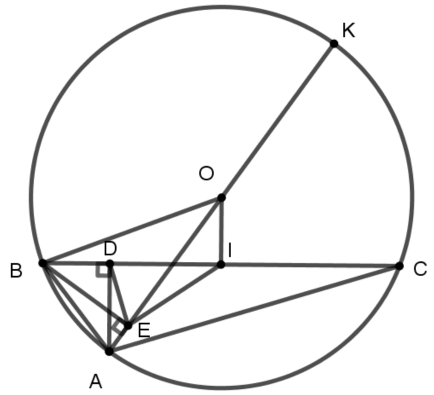
Bước 1 Chứng minh $\Delta AFB \backsim \Delta ACF$ (g.g), suy ra $AB.AC = AF^2$.

Bước 2 Chứng minh $\Delta AFH \backsim \Delta AIF$ (g.g), suy ra $AH.AI = AF^2$.

Từ đó, ta được $AH.AI = AB.AC$.

Ví dụ 5. Cho đường tròn (O) và dây cung BC cố định khác đường kính. Gọi A là điểm bất kì trên cung nhỏ BC (A khác B, C và $AB < AC$). Kẻ đường kính AK của đường tròn (O). Gọi D là chân đường vuông góc kẻ từ A đến BC và E là chân đường vuông góc kẻ từ B đến AK. Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh $DE \perp AC$ và $\Delta IDE \backsim \Delta OAB$.

Hướng dẫn



* *Chứng minh* $DE \perp AC$

Bước 1 Chứng minh tứ giác ABDE nội tiếp, suy ra $\widehat{KED} = \widehat{ABC}$ (tính chất góc ngoài bằng góc đối).

Bước 2 Xét (O) có $\widehat{ABC} = \widehat{AKC}$ (cùng chắn cung AC).

Từ đó, ta được $\widehat{KED} = \widehat{AKC}$, mà $\widehat{KED}, \widehat{AKC}$ là hai góc so le trong nên $DE // KC$.

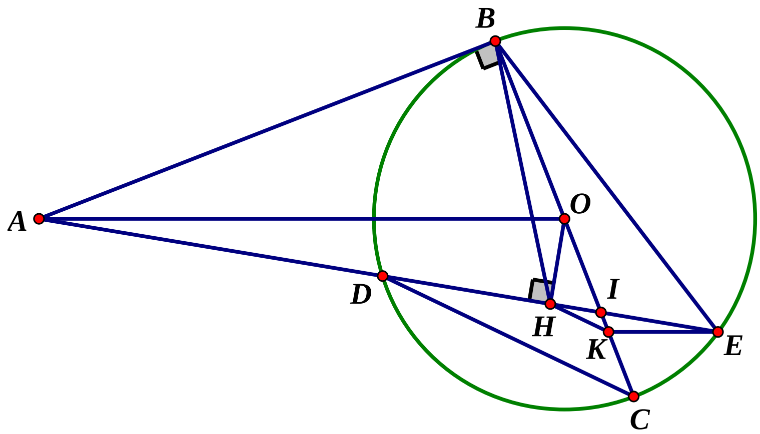
Bước 3 Chứng minh $KC \perp AC$, suy ra $DE \perp AC$ (Từ vuông góc đến song song).

* *Chứng minh* $\Delta IDE \backsim \Delta OAB$.

Bước 1 Từ tứ giác ABDE nội tiếp, suy ra $\widehat{IDE} = \widehat{OAB}$ (góc ngoài bằng góc đối).
Bước 2 Chứng minh tứ giác OBEI nội tiếp, suy ra $\widehat{DIE} = \widehat{AOB}$ (cùng nhìn BE).
Từ đó, ta được $\Delta IDE \backsim \Delta OAB$ (g.g).

Ví dụ 6. Cho đường tròn (O) và một điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Kẻ tiếp tuyến AB và đường kính BC của đường tròn (O) (với B là tiếp điểm). Trên đoạn thẳng CO lấy điểm I (I khác C, I khác O). Đường thẳng AI cắt đường tròn (O) tại hai điểm D và E (với D nằm giữa A và E). Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng DE. Đường thẳng d đi qua điểm E và song song với AO, d cắt BC tại K. Chứng minh $HK \parallel CD$.

Hướng dẫn



Bước 1 Chứng minh tứ giác $ABOH$ nội tiếp, suy ra $\widehat{OAH} = \widehat{OBH}$ (cùng nhìn OH)

Bước 2 Từ $KE \parallel AO$, suy ra $\widehat{OAH} = \widehat{HEK}$ (hai góc so le trong).

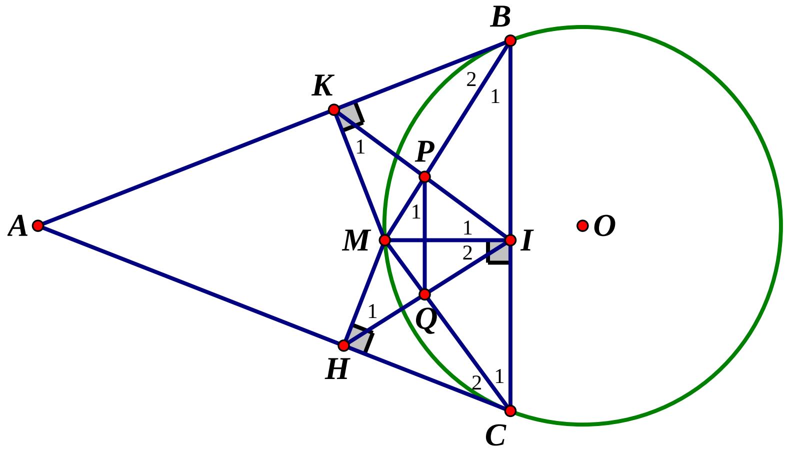
Từ đó, ta được $\widehat{OBH} = \widehat{HEK}$, do đó tứ giác $BHKE$ nội tiếp, suy ra $\widehat{EHK} = \widehat{EBK}$ (cùng nhìn EK).

Bước 3 Xét (O) có $\widehat{EBK} = \widehat{EDC}$ (cùng chắn cung EC).

Từ đó, suy ra $\widehat{EHK} = \widehat{EDC}$, mà $\widehat{EHK}$, $\widehat{EDC}$ là hai góc đồng vị nên $HK \parallel CD$.

Ví dụ 7. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn $(O;\, R)$, kẻ hai tiếp tuyến AB và AC đến đường tròn (O) (với B và C là hai tiếp điểm). Trên cung nhỏ BC của (O) lấy điểm M khác B và C. Gọi I, H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên BC, AC, AB. Gọi P là giao điểm của BM và IK, Q là giao điểm của CM và IH. Chứng minh $MI^2 = MH.MK$ và $PQ \perp MI$.

Hướng dẫn



* *Chứng minh* $MI^2 = MH.MK$

Bước 1 Chứng minh tứ giác $MIBK$ nội tiếp, suy ra $\widehat{I_1} = \widehat{B_2}$ (cùng nhìn KM).

Bước 2 Xét (O) có $\widehat{B_2} = \widehat{C_1}$ (cùng bằng nửa số đo cung BM).

Bước 3 Chứng minh tứ giác $MICH$ nội tiếp, suy ra $\widehat{C_1} = \widehat{H_1}$ (cùng nhìn MI).

Từ đó, ta được $\widehat{I_1} = \widehat{H_1}$ và tương tự $\widehat{I_2} = \widehat{K_1}$.

Do đó $\Delta IKM \backsim \Delta HIM$ (g.g) nên $\dfrac{MI}{MH} = \dfrac{MK}{MI}$ hay $MI^2 = MH.MK$.

* *Chứng minh* $PQ \perp MI$

Bước 1 Chỉ ra $\widehat{I_1} = \widehat{C_1}$, $\widehat{I_2} = \widehat{B_1}$, suy ra

$\widehat{PMQ} + \widehat{PIQ} = \widehat{PMQ} + \widehat{I_1} + \widehat{I_2} = \widehat{PMQ} + \widehat{C_1} + \widehat{B_1} = 180°$ (tổng ba góc trong ΔMBC).

Do đó tứ giác $PMQI$ nội tiếp, suy ra $\widehat{P_1} = \widehat{I_2}$ (cùng nhìn MQ).

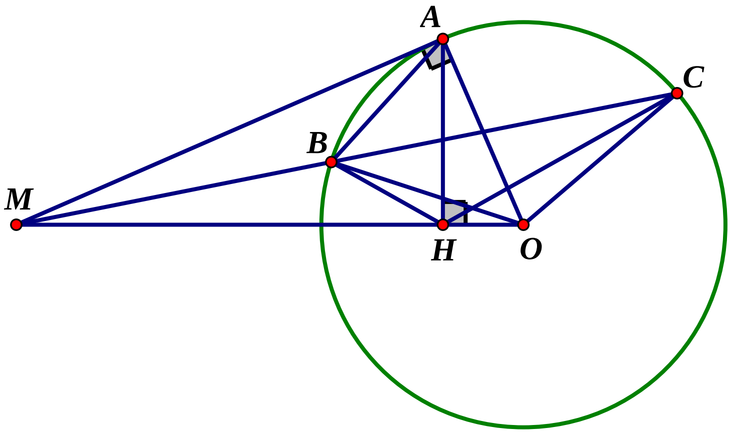
Bước 2 Kết hợp $\widehat{P_1} = \widehat{I_2}$, $\widehat{I_2} = \widehat{B_1}$ (cmt) ta được $\widehat{P_1} = \widehat{B_1}$.

Mà $\widehat{P_1}$, $\widehat{B_1}$ là hai góc đồng vị nên $PQ // BC$.

Lại có $MI \perp BC$ (gt) nên $PQ \perp MI$.

Ví dụ 8. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O), vẽ tiếp tuyến MA đến (O) (với A là tiếp điểm) và vẽ cát tuyến MBC sao cho $MB < MC$ và tia MC nằm giữa hai tia MA, MO. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A trên đường thẳng OM. Chứng minh tứ giác $BCOH$ nội tiếp và HA là tia phân giác của $\widehat{BHC}$.

Hướng dẫn



** Chứng minh tứ giác $BCOH$ nội tiếp*

<u>***Bước 1***</u> Chứng minh $MB.MC = MA^2$, $MH.MO = MA^2$ $\Rightarrow MB.MC = MH.MO$.

<u>***Bước 2***</u> Từ $MB.MC = MH.MO$, ta lập được tỉ số $\dfrac{MB}{MO} = \dfrac{MH}{MC}$.

Suy ra $\Delta MBH \backsim \Delta MOC$ (c.g.c) nên $\widehat{MHB} = \widehat{MCO}$ (hai góc tương ứng).

Do đó tứ giác $BCOH$ nội tiếp (Dấu hiệu góc ngoài bằng góc đối).

** Chứng minh HA là tia phân giác của $\widehat{BHC}$*

<u>***Bước 1***</u> Từ tứ giác $BCOH$ nội tiếp, suy ra $\widehat{OHC} = \widehat{OBC}$ (cùng nhìn OC).

<u>***Bước 2***</u> Chỉ ra ΔOBC cân tại O, suy ra $\widehat{OBC} = \widehat{OCB}$.

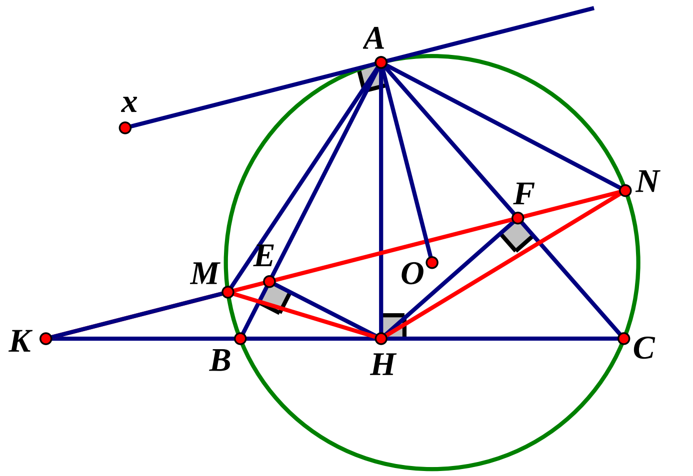
Mà $\widehat{OCB} = \widehat{MHB}$ (cmt) nên $\widehat{MHB} = \widehat{OHC}$.

<u>***Bước 3***</u> Từ $\widehat{MHB} = \widehat{OHC}$, $\widehat{AHB} = 90° - \widehat{MHB}$, $\widehat{AHC} = 90° - \widehat{OHC}$, suy ra $\widehat{AHB} = \widehat{AHC}$

Vậy *HA là tia phân giác của $\widehat{BHC}$*

Ví dụ 9. Cho ΔABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O). Kẻ $AH \perp BC$ tại H. Gọi E và F lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB và AC. Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại K và cắt (O) tại M, N. Chứng minh $KH^2 = KB.KC$. và A là điểm chính giữa của $\overset{\frown}{MN}$, từ đó chứng minh A là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔHMN.

Hướng dẫn



* *Chứng minh* $KH^2 = KB.KC$

<u>Bước 1</u> Chứng minh tứ giác $AEHF$ □ội tiếp, suy ra $\widehat{AHE} = \widehat{AFE}$, $\widehat{AEF} = \widehat{AHF}$.

<u>Bước 2</u> Từ $\widehat{AHE} = \widehat{AFE}$ (cmt), $\widehat{KHE} = 90° - \widehat{AHE}$, $\widehat{KFH} = 90° - \widehat{AFE}$, suy ra $\widehat{KHE} = \widehat{KFH}$ nên $\Delta KHE \backsim \Delta KFH$ (g.g) $\Rightarrow KE.KF = KH^2$.

<u>Bước 3</u> Từ $\widehat{AEF} = \widehat{AHF}$ (cmt), $\widehat{KEB} = \widehat{AEF}$, $\widehat{KCF} = \widehat{AHF} = 90° - \widehat{CHF}$, suy ra $\widehat{KEB} = \widehat{KCF}$ nên $\Delta KEB \backsim \Delta KCF$ (g.g) $\Rightarrow KE.KF = KB.KC$.

Vậy $KH^2 = KB.KC$

* *Chứng minh* A *là điểm chính giữa của* $\overset{\frown}{MN}$

<u>Bước 1</u> Kẻ tiếp tuyến Ax của (O) tại A thì $OA \perp Ax$ (tính chất tiếp tuyến).

<u>Bước 2</u> Chứng minh $MN \,//\, Ax$ như sau:

+) Xét (O) có $\widehat{xAB} = \widehat{ACB}$ (cùng bằng nửa số đo $\overset{\frown}{AB}$).

+) Vì $\widehat{AEF} = \widehat{ACB}$ (cmt) nên $\widehat{xAB} = \widehat{AEF}$, mà $\widehat{xAB}$, $\widehat{AEF}$ là hai góc so le trong nên $MN \,//\, Ax$, do đó $OA \perp MN$, suy ra OA đi qua điểm chính giữa của $\overset{\frown}{MN}$.

Vậy A là điểm chính giữa của $\overset{\frown}{MN}$.

* *Chứng minh* A *là tâm đường tròn ngoại tiếp* ΔHMN.

<u>Bước 1</u> Từ $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{AN}$, suy ra $AM = AN$ (liên hệ giữa cung và dây cung).

<u>Bước 2</u> Chứng minh $AN = AH$ như sau:

+) Xét (O) có $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{AN}$, $\widehat{ANF} = \frac{1}{2}$ sđ$\overset{\frown}{AM}$, $\widehat{ACN} = \frac{1}{2}$ sđ$\overset{\frown}{AN}$, suy ra $\widehat{ANF} = \widehat{ACN}$.

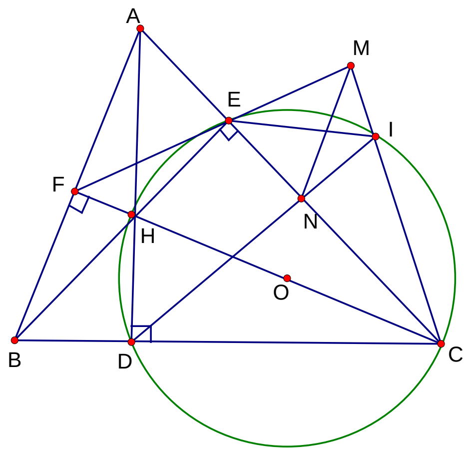
Do đó ΔANF " $\Delta ACN (g.g) \Rightarrow AF.AC = AN^2$.

+) Xét ΔAHD vuông tại H, đường cao HF nên $AF.AC = AH^2$ (hệ thức lượng).

Từ đó, ta được AM = AN = AH nên A là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔHMN.

Ví dụ 10. Cho ΔABC nhọn $(AB<AC)$ có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tứ giác CDHE. Trên cung nhỏ EC của (O), lấy điểm I sao cho IC > IE. Gọi N là giao điểm của DI với CE. Gọi M là giao điểm của EF với IC. Chứng minh $MN//AB$.

Hướng dẫn



<u>Bước 1</u> Chứng minh tứ giác MENI nội tiếp như sau:

+) Xét (O) có $\widehat{DIC}=\widehat{DHC}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{CD}$).

Mà $\widehat{DIC}=\widehat{AHF}$ (đối đỉnh) nên $\widehat{DIC}=\widehat{AHF}$.

+) Chứng minh tứ giác AEHF nội tiếp, suy ra $\widehat{AHF}=\widehat{AEF}$ (cùng nhìn AF).

Mà $\widehat{AEF}=\widehat{MEN}$ (đối đỉnh) nên $\widehat{DIC}=\widehat{MEN}$, suy ra tứ giác MENI nội tiếp.

<u>Bước 2</u> Chứng minh $\widehat{EMN}=\widehat{EFA}$ như sau:

+) Tứ giác MENI nội tiếp, suy ra $\widehat{EMN}=\widehat{EIN}$ (cùng nhìn EN)

+) Xét (O) có $\widehat{EIN}=\widehat{ECD}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{ED}$)

+) Chứng minh tứ giác BCEF nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EFA}=\widehat{ECD}$ (góc ngoài bằng góc đối).

Từ đó suy ra $\widehat{EFA}=\widehat{EMN}$, mà $\widehat{EFA}, \widehat{EMN}$ là hai góc so le trong nên $MN//AB$.

DẠNG 2: CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

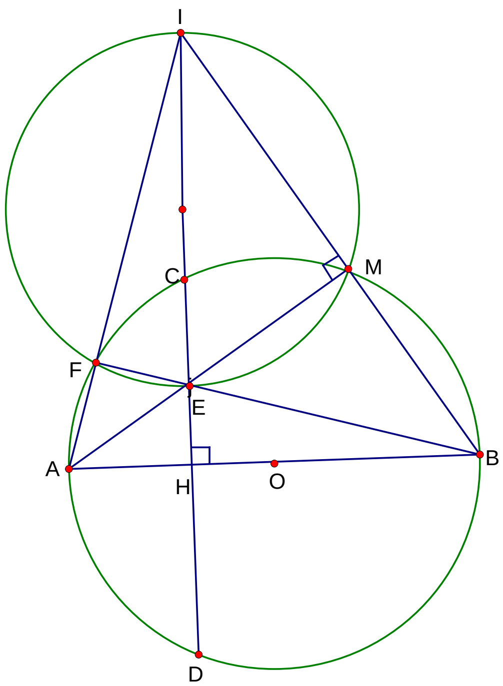
Cách 1 (Cách song song) chứng minh hai trong ba đường thẳng AB, AC, BC cùng song song với một đường thẳng thì A, B, C thẳng hàng.

Cách 2 (Cách vuông góc) Chứng minh hai trong ba đường thẳng AB, AC, BC cùng vuông góc với một đường thẳng thì A, B, C thẳng hàng.

Cách 3 (Cách góc bẹt) chứng minh $\widehat{ABC}=180^0$ thì A, B, C thẳng hàng.

Ví dụ 1. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB cố định. Dây CD di động vuông góc với AB tại H nằm giữa A và O. Lấy điểm F thuộc cung nhỏ AC. Giả sử BF cắt CD tại E, AF cắt tia DC tại I. Đường tròn ngoại tiếp ΔIEF cắt AE tại M. Chứng minh M thuộc đường tròn $(O;R)$.

Hướng dẫn



Bước 1 Chứng minh $IM \perp AM$.

+) Chỉ ra ΔIEF vuông tại F thì IE là đường kính của đường tròn ngoại tiếp ΔIEF.

+) Suy ra $\widehat{IME}=90^0 \Rightarrow IM \perp EM$ hay $IM \perp AM$.

Bước 2 Chứng minh $IB \perp AM$.

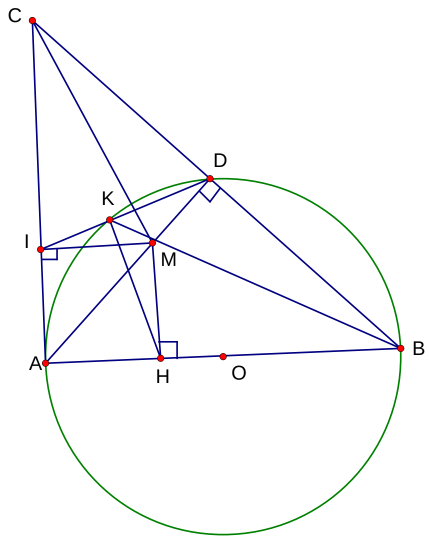
+) Chỉ ra IH, BF là hai đường cao của ΔIAB và $IH \cap BF=\{E\}$ nên E là trực tâm của ΔIAB

+) Suy ra $IB \perp AE$ hay $IB \perp AM$ nên I, M, B thẳng hàng.

Mà $IM \perp AM$ nên $BM \perp AM$ hay $\widehat{AMB}=90^0$, do đó M thuộc (O).

Ví dụ 2. Cho ΔABC vuông cân tại A. Đường tròn đường kính AB cắt BC tại D khác B. Gọi M là điểm bất kỳ trên đoạn AD. Kẻ MH, MI lần lượt vuông góc với AB, AC tại H, I. Kẻ $HK \perp ID$ tại K. Chứng minh $\widehat{MID} = \widehat{MBC}$ và tứ giác AIKM nội tiếp, từ đó chứng minh ba điểm K, M, B thẳng hàng.

Hướng dẫn



- *Chứng minh* $\widehat{MID} = \widehat{MBC}$

Bước 1 Chứng minh tứ giác MDCI nội tiếp, suy ra $\widehat{MID} = \widehat{MCD}$ (cùng nhìn MD)

Bước 2 Chỉ ra AD là trung trực của BC, $M \in AD$ nên MB = MC $\Rightarrow \widehat{MCD} = \widehat{MBC}$

Từ đó ta được $\widehat{MID} = \widehat{MBC}$

- *Chứng minh tứ giác AIKM nội tiếp*

Bước 1 Chỉ ra tứ giác AHMI có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.

Bước 2 Chỉ ra $\widehat{IAH} = 90^0, \widehat{IKH} = 90^0, \widehat{IMH} = 90^0$ suy ra năm điểm A, H, M, K, I thuộc đường tròn đường kính HI, do đó tứ giác AIKM nội tiếp.

- Chứng minh K, M, B thẳng hàng

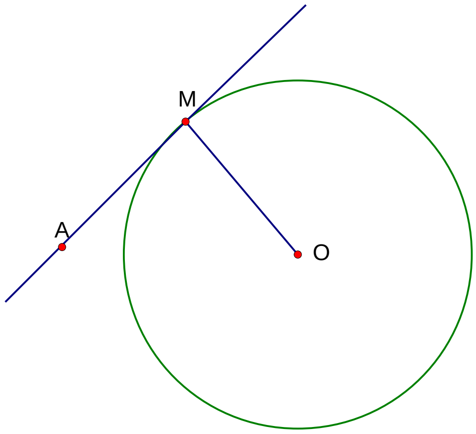
Bước 1 từ tứ giác AIKM nội tiếp ta có $\widehat{AIK} + \widehat{AMK} = 180^0$ (tổng hai góc đối)

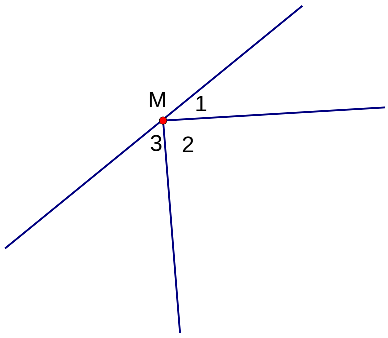
Bước 2 Chứng minh $\widehat{AIK} = \widehat{AMB}$

Có $\widehat{AIK} = \widehat{AIM} + \widehat{MID}, \widehat{AMB} = \widehat{MDB} + \widehat{MBC} = 90^0 + \widehat{MBC}.$

Mà $\widehat{MID} = \widehat{MBC}$ (cmt) nên $\widehat{AIK} = \widehat{AMB}$

Từ đó suy ra $\widehat{AMB} + \widehat{AMK} = 180^0$ hay K,M,B thẳng hàng.

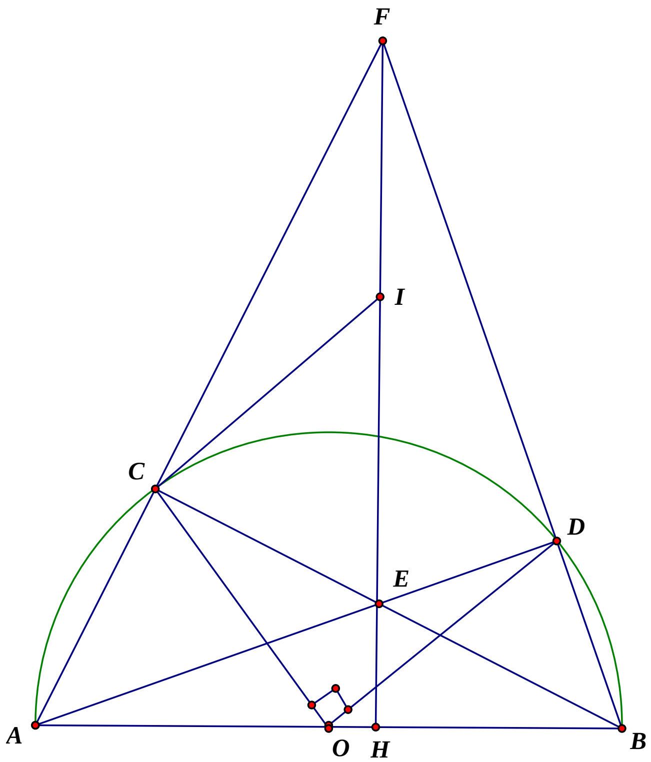




- Để chứng minh AM là tiếp tuyến của (O), ta cần chỉ ra 2 điều kiện $\begin{cases} + AM \perp OM \\ + OM \text{ là bán kính} \end{cases}$
- Để chứng minh $\widehat{M_2} = 90^0$ ta thường chứng minh $\widehat{M_1} + \widehat{M_3} = 90^0$ bằng cách chuyển $\widehat{M_1}, \widehat{M_3}$ về hai góc nhọn một tam giác vuông.

Ví dụ 1. Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Gọi C là điểm bất kỳ thuộc nửa đường tròn sao cho 0 < AC < BC. Gọi D là điểm thuộc cung nhỏ BC sao cho $\widehat{COD} = 90^0$. Gọi E là giao điểm của AD và BC, F là giao điểm của AC và BD. Gọi I là trung điểm của EF. Chứng minh IC là tiếp tuyến của (O).

Hướng dẫn



Bước 1. Chỉ ra ΔCEF vuông tại C và có CI là trung tuyến nên $CI = \dfrac{EF}{2} = FI$ (tính chất trung tuyến của tam giác vuông) $\Rightarrow \Delta IFC$ cân tại I nên $\widehat{ICF} = \widehat{IFC}$.

Bước 2. Chỉ ra ΔOAC cân tại O nên $\widehat{OCA} = \widehat{OAC}$, suy ra $\widehat{ICF} + \widehat{OCA} = \widehat{IFC} + \widehat{OAC}$

Bước 3. Kéo dài FE cắt AB tại H

+) Chỉ ra E là trực tâm ΔFAB , suy ra $FH \perp AB$

+) Xét ΔFAH vuông tại H nên $\widehat{IFC} + \widehat{OAC} = 90°$

Suy ra: $\widehat{ICF} + \widehat{OCA} = 90° \Rightarrow \widehat{ICO} = 180° - (\widehat{OCA} + \widehat{ICF}) = 90° \Rightarrow IC \perp OC$.

Mà OC là bán kính của (O) nên IC là tiếp tuyến của (O).

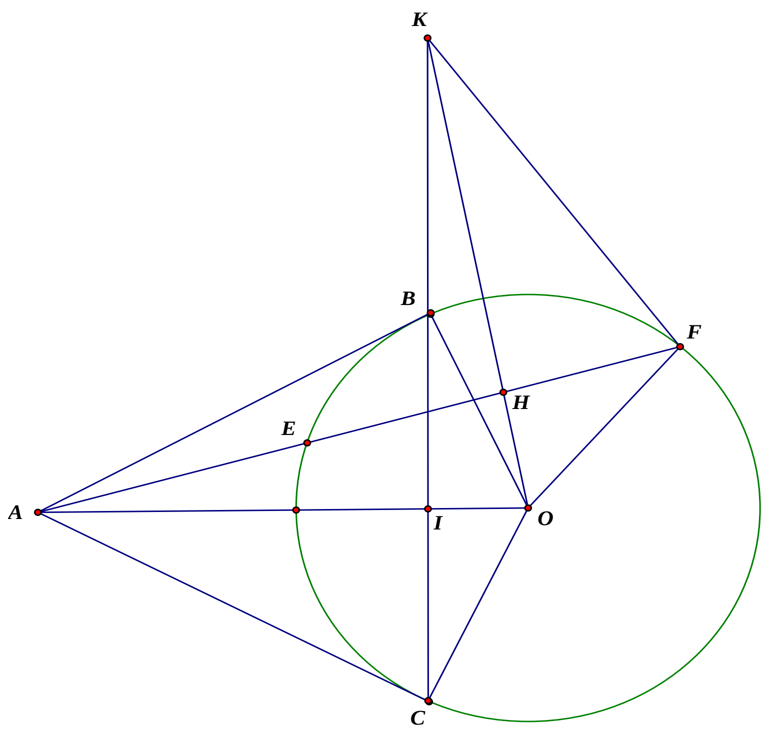
Ví dụ 2. Cho đường tròn(O;R) và đường thẳng d cắt (O;R) tại hai điểm E và F. Gọi A là điểm trên d sao cho E nằm giữa A và F. Từ A kẻ các tiếp tuyến AB và AC đến (O;R) với B, C là tiếp điểm và B, O nằm về hai phía của đường thẳng d. Gọi H là trung điểm của EF , đường thẳng BC cắt OA tại I, cắt OH tại K. Chứng minh: $OI.OA = OH.OK$ và KF là tiếp tuyến của (O;R)

Hướng dẫn

Chứng minh: $OI.OA = OH.OK$

Bước 1. Chứng minh $OA \perp BC, OH \perp EF \Rightarrow \widehat{OIK} = 90°, \widehat{OHA} = 90°$

Bước 2. Chỉ ra $\Delta OIK \backsim \Delta OHA(g.g) \Rightarrow \dfrac{OI}{OH} = \dfrac{OK}{OA} \Rightarrow OI.OA = OH.OK$



**Chứng minh KF là tiếp tuyến của (O;R)*

<u>Bước 1.</u> Chứng minh: $OI.OA = OB^2 = R^2 \Rightarrow OH.OK = R^2 \Leftrightarrow \dfrac{OH}{OF} = \dfrac{OF}{OK}$.

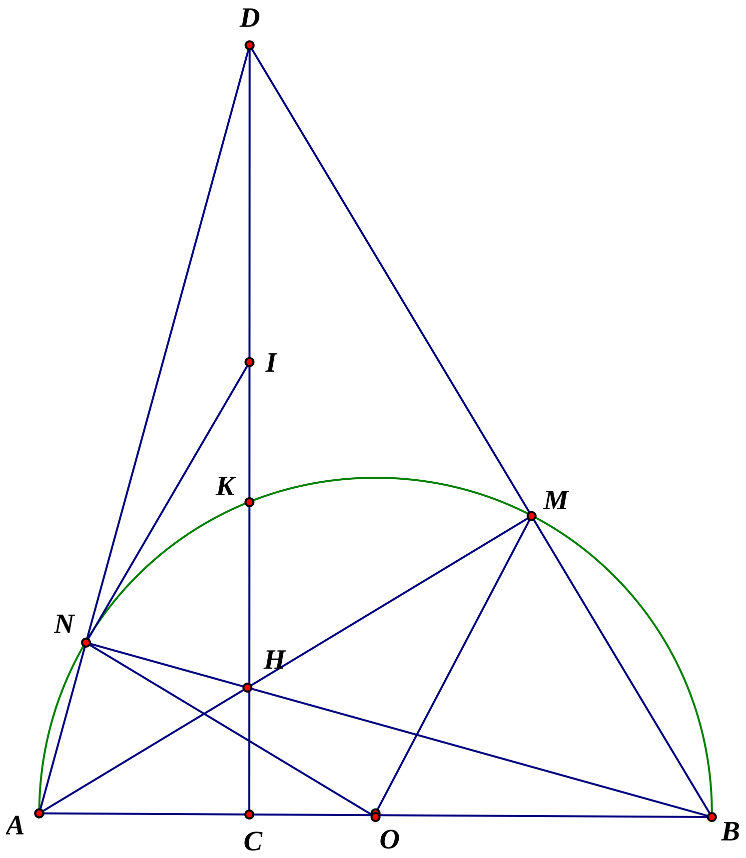
<u>Bước 2.</u> Chỉ ra: $\Delta OHF \backsim \Delta OFK(c.g.c) \Rightarrow \widehat{OHF} = \widehat{OFK} = 90° \Rightarrow KF \perp OF$

Mà OF là bán kính của (O) nên KF là tiếp tuyến của (O;R).

Ví dụ 3. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB. Lấy điểm C trên đoạn thẳng OA (C khác O và A). Đường thẳng đi qua C và vuông góc với AB cắt nửa đường tròn tại K. Gọi M là điểm bất kỳ trên cung BK (M khác B và K). Đường thẳng CK cắt các đường thẳng AM, BM lần lượt tại H, D. Đường thẳng BH cắt nửa đường tròn tại điểm thứ hai là N. Chứng minh ba điểm A, N, D thẳng hàng và tiếp tuyến tại N của nửa đường tròn đi qua trung điểm của DH.

Hướng dẫn

**Chứng minh: A, N, D thẳng hàng.*



<u>Bước 1.</u> Chứng minh $AN \perp BN$ từ giả thiết $N \in (O)$ đường kính AB.

<u>Bước 2</u>. Chứng minh $AD \perp BN$:

+) Chỉ ra AM, DC là hai đường cao của $\Delta ABD, AM \cap DC = \{H\}$ nên H là trực tâm của ΔABD.

+) Suy ra $AD \perp BH$ hay $AD \perp BN$ từ đó suy ra A, N, D thẳng hàng.

**Chứng minh tiếp tuyến tại N của nửa đường tròn (O) đi qua trung điểm của DH.*

<u>Bước 1</u>. Gọi I là trug điểm của DH. Chỉ ra ΔDNH vuông tại N và có NI là trung tuyến nên $NI=\dfrac{DH}{2}=DI$ (tính chất trung tuyến của tam giác vuông)

$\Rightarrow \Delta IDN$ cân tại I nên $\widehat{IND}=\widehat{IDN}$.

<u>Bước 2.</u> Chỉ ra ΔOAN cân tại O nên $\widehat{ONA}=\widehat{OAN}$.

Suy ra $\widehat{IND}+\widehat{ONA}=\widehat{IDN}+\widehat{OAN}$

<u>Bước 3.</u> Xét ΔACD vuông tại C nên $\widehat{OAN}+\widehat{IDN}=90°$

Suy ra: $\widehat{ONA}+\widehat{IND}=90° \Rightarrow \widehat{ONI}=180°-(\widehat{IND}+\widehat{ONA})=90° \Rightarrow IN\perp ON$.

Mà ON là bán kính của (O) nên IN là tiếp tuyến của (O) hay tiếp tuyến tại N của (O) đi qua I là trung điểm của DH.

DẠNG 4: CHỨNG MINH ĐIỂM THUỘC ĐƯỜNG TRÒN, CHỨNG MINH ĐƯỜNG KÍNH

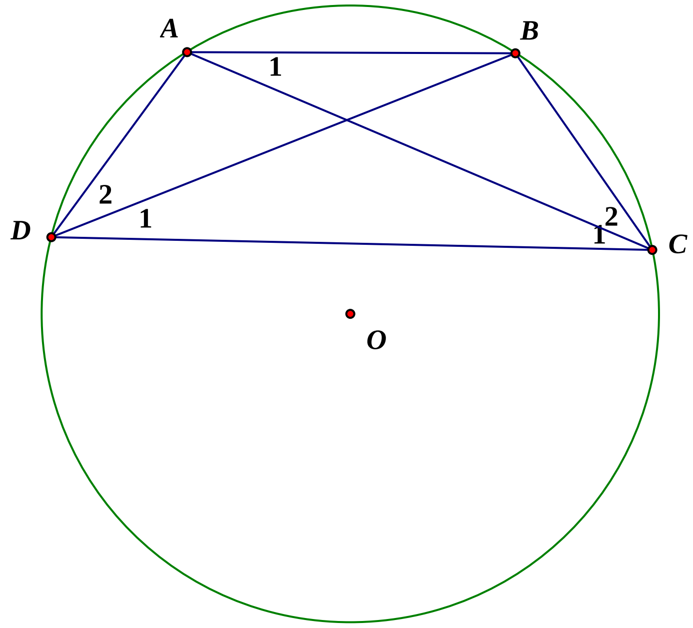
<u>Tính chất 1.</u> Nếu ΔABC vuông ở A thì A, B, C thuộc đường tròn đường kính BC.

<u>Tính chất 2.</u> Nếu tứ giác ABCD nội tiếp và $A,B,C\in(O)\Rightarrow D\in(O)$.

<u>Tính chất 3.</u> Nếu $A,M,B\in(O);\widehat{AMB}=90°$ thì AB là đường kính của (O).

<u>Tính chất 4.</u> Nếu hình thang ABCD (AB//CD) nội tiếp đường tròn (O) thì ABCD là hình thang cân.

Các tính chất 1,2,3 ta được sử dụng, tính chất 4 ta phải chứng minh lại như sau:



<u>Cách 1</u>. (Cộng cung để được hai đường chéo bằng nhau)

Có $AB//CD\Rightarrow \widehat{A_1}=\widehat{C_1}$ (hai góc so le trong)

$\Rightarrow sđ\,\overset{\frown}{BC} = sđ\,\overset{\frown}{AD} \Rightarrow sđ\,\overset{\frown}{AB} + sđ\,\overset{\frown}{BC} = sđ\,\overset{\frown}{AB} + sđ\,\overset{\frown}{AD}$

$\Rightarrow sđ\,\overset{\frown}{AC} = sđ\,\overset{\frown}{BD} \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD} \Rightarrow AC = BD$

Do đó ABCD là hình thang cân

Cách 2. (Cộng hai góc để được hai góc kề một đáy bằng nhau)

Có $AB//CD \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{C_1}$ (Hai góc so le trong)

Mà $\widehat{A_1} = \widehat{D_1} \Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{D_1}$.

Xét (O) có $\widehat{C_2} = \widehat{D_2} \Rightarrow \widehat{C_1} + \widehat{C_2} = \widehat{D_1} + \widehat{D_2} \Leftrightarrow \widehat{BCD} = \widehat{ADC}$

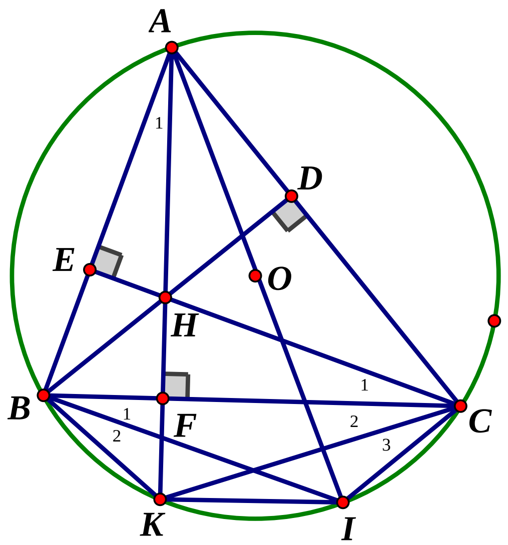
Do đó ABCD là hình thang cân

Cách 3. (Sử dụng tổng hai góc đối của tứ giác nội tiếp bằng 180^0 và tổng hai góc trong cùng phía của hai đường thẳng song song bằng 180^0).

Vì tứ giác ABCD nội tiếp nên $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180°$ (tổng hai góc đối).
Do $AB//CD$ nên $\widehat{BAD} + \widehat{ADC} = 180°$ (tổng hai góc trong cùng phía).
Suy ra $\widehat{BCD} = \widehat{ADC}$, do đó ABCD là hình thang cân.

Ví dụ 1. Cho đường tròn $(O;R)$ và dây BC cố định khác đường kính. Lấy điểm A thuộc cung lớn BC mà $AB < AC$. Các đường cao AF, BD, CE của ΔABC cắt nhau tại H. Vẽ đường kính AI của (O). Gọi K là điểm đối xứng với H qua BC. Chứng minh $K \in (O)$ và tứ giác BKIC là hình thang cân

Hướng dẫn



* *Chứng minh* $K \in (O)$

Cách 1 (Chứng minh $\widehat{BAC} + \widehat{BKC} = 180°$)

Bước 1. Chứng minh $\widehat{BKC} = \widehat{BHC}$:
Do K đối xứng H với qua BC nên là trung trực HK, do đó $BH = BK$, $CH = CK$.
Suy ra $\Delta BHC = \Delta BKC$ (c.c.c) nên $\widehat{BKC} = \widehat{BHC}$.
Bước 2. Xét tứ giác ADHE có $\widehat{EHD} + \widehat{EAD} = 180°$ (do $\widehat{AEH} = \widehat{ADH} = 90°$)

Mà $\widehat{BHC} = \widehat{EHD}$ (đối đỉnh) nên $\widehat{BKC} + \widehat{BAC} = 180°$

Do đó tứ giác $ABKC$ nội tiếp, mà $A, B, C \in (O)$ nên $K \in (O)$.

<u>Cách 2</u> (Chứng minh $\hat{A}_1 = \hat{C}_2$)

Bước 1. Chỉ ra $\hat{A}_1 = \hat{C}_1$ (cùng bằng $90° - \widehat{ABC}$)

Bước 2. Chứng minh $\Delta BHC = \Delta BKC$ (c.c.c), suy ra $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$

Từ đó suy ra $\hat{A}_1 = \hat{C}_2$ nên tứ giác $ABKC$ nội tiếp.

Mà $A, B, C \in (O)$ nên $K \in (O)$.

* *Chứng minh tứ giác* $BKIC$ *là hình thang cân*

+) Chứng minh tứ giác $BKIC$ là hình thang

Do $K \in (O)$ đường kính AI nên $\widehat{AKI} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Suy ra $KI \perp AK$, mà $BC \perp AK$ nên $BC // KI$, do đó tứ giác $BKIC$ là hình thang

+) Chứng minh tứ giác $BKIC$ là hình thang cân

<u>Cách 1</u> (Chứng minh $BI = CK$ dựa vào hình bình hành)

Bước 1. Chứng minh tứ giác $BHCI$ là hình bình hành, suy ra $BI = CH$.

Bước 2. Từ $\Delta BHC = \Delta BKC$ (cmt), suy ra $CH = CK$.

Từ đó suy ra $BI = CK$ nên tứ giác $BKIC$ là hình thang cân.

<u>Cách 2</u> (Chứng minh $BI = CK$ dựa vào cộng cung)

Bước 1. Từ $BC // KI \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{I}_1$ (hai góc so le trong) $\Rightarrow sđ\overset{\frown}{CI} = sđ\overset{\frown}{BK}$

Bước 2. Cộng hai vế với $sđ\overset{\frown}{KI}$ được $sđ\overset{\frown}{CI} + sđ\overset{\frown}{KI} = sđ\overset{\frown}{BK} + sđ\overset{\frown}{KI}$

$\Rightarrow sđ\overset{\frown}{CK} = sđ\overset{\frown}{BI} \Rightarrow \overset{\frown}{CK} = \overset{\frown}{BI} \Rightarrow CK = BI$ nên tứ giác $BKIC$ là hình thang cân.

<u>Cách 3</u> (Chứng minh $\widehat{KBC} = \widehat{ICB}$ dựa vào cộng góc)

Từ $BC // KI \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{I}_1$ (hai góc so le trong)

Mà $\hat{I}_1 = \hat{C}_2$ (cùng chắn $\overset{\frown}{BK}$) nên $\hat{B}_1 = \hat{C}_2$

Vì $\hat{B}_2 = \hat{C}_3$ (cùng chắn $\overset{\frown}{KI}$) $\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = \hat{C}_2 + \hat{C}_3$ hay $\widehat{KBC} = \widehat{ICB}$

Do đó tứ giác $BKIC$ là hình thang cân.

<u>Cách 4</u> (Chứng minh $\widehat{KBC} = \widehat{ICB}$ tổng hai góc đối của tứ giác nội tiếp bằng $180°$ và tổng hai góc trong cùng phía của hai đường thẳng song song bằng $180°$)

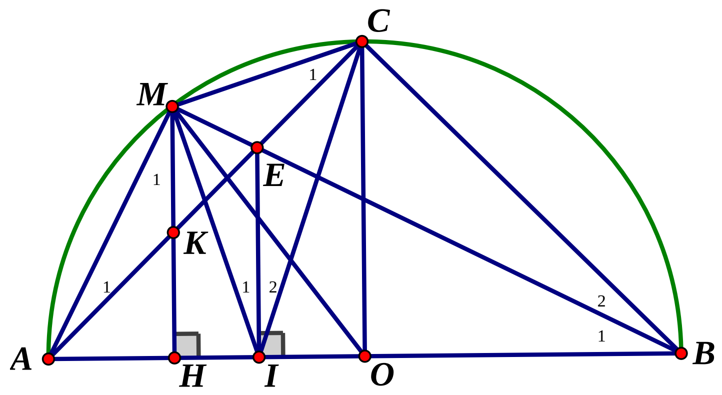
Vì tứ giác $BKIC$ nội tiếp nên $\widehat{KBC} + \widehat{KIC} = 180°$ (tổng hai góc đối)

Do $BC // KI$ nên $\widehat{ICB} + \widehat{KIC} = 180°$ (tổng hai góc trong cùng phía)

Suy ra $\widehat{KBC} = \widehat{ICB}$, do đó $BKIC$ là hình thang cân.

Ví dụ 2. Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Gọi C là điểm chính giữa của cung AB và M là điểm thuộc cung AC (M khác A và C). Kẻ $MH \perp AB$ tại H, AC cắt MH, MB lần lượt tại K, E. Kẻ $EI \perp AB$ tại I. Chứng minh $AC.AK = AM^2$ và O thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔIMC.

Hướng dẫn



* *Chứng minh* $AC.AK = AM^2$

Cách 1 (Chứng minh $AB.AH$)

Bước 1. Chỉ ra ΔABM vuông tại M, đường cao MH nên $AB.AH = AM^2$

Bước 2. Chứng minh $\Delta AHK \backsim \Delta ACB$ (g.g), suy ra

$$\frac{AH}{AC} = \frac{AK}{AB} \text{ hay } AB.AH = AC.AK$$

Từ đó suy ra $AC.AK = AM^2$ (cùng bằng $AB.AH$)

Cách 2 (Chứng minh $\Delta AMK \backsim \Delta ACM$)

Bước 1. Chứng minh $\widehat{B_1} = \widehat{M_1}$ (cùng bằng $90° - \widehat{MAH}$)

Bước 2. Xét (O) có $\widehat{B_1} = \widehat{C_1}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AM}$) nên $\widehat{M_1} = \widehat{C_1}$

Từ đó suy ra $\Delta AMK \backsim \Delta ACM$, do đó

$$\frac{AM}{AC} = \frac{AK}{AM} \text{ hay } AC.AK = AM^2.$$

* *Chứng minh* O *thuộc đường tròn ngoại tiếp* ΔIMC.

Bước 1 Chứng minh tứ giác $AMEI$ nội tiếp, suy ra $\hat{I}_1 = \widehat{A_1}$ (cùng nhìn đoạn ME).

Bước 2 Chứng minh tứ giác $BCEI$ nội tiếp, suy ra $\hat{I}_2 = \widehat{B_2}$ (cùng nhìn đoạn CE).

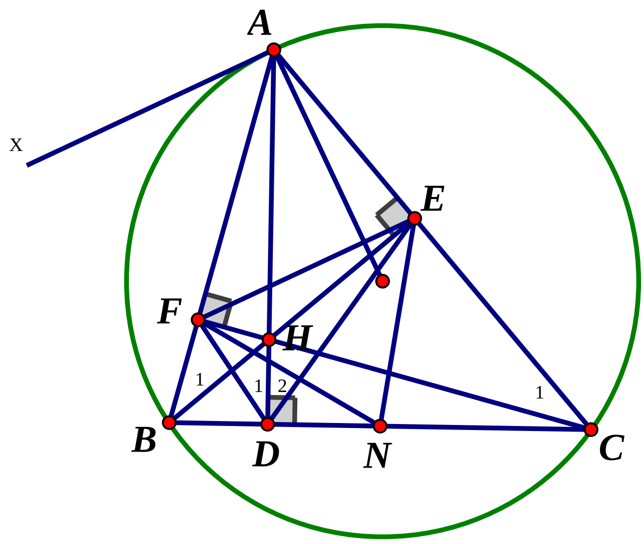
Bước 3 Xét (O) có $\widehat{A_1} = \widehat{B_2} = \frac{1}{2}\widehat{MOC}$ (quan hệ giữa góc nội tiếp và góc ở tâm).

Suy ra $\hat{I}_1 = \hat{I}_2 = \frac{1}{2}\widehat{MOC}$ nên $\widehat{MIC} = \widehat{MOC}$, do đó tứ giác $IOCM$ nội tiếp.

Mà I, C, M thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔIMC nên O thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔIMC.

Ví dụ 3. Cho đường tròn (O) và dây BC cố định khác đường kính. Gọi A là điểm di động trên cung lớn BC (A khác B, A khác C và A khác điểm chính giữa của $\overset{\frown}{BC}$). Các đường cao AD, BE, CF của ΔABC cắt nhau tại H. Chứng minh $OA \perp EF$ và đường tròn ngoại tiếp ΔDEF đi qua trung điểm của BC.

Hướng dẫn



* *Chứng minh* $OA \perp EF$

<u>Bước 1</u> Kẻ tiếp tuyến Ax của (O) tại A thì $OA \perp Ax$ (tính chất tiếp tuyến).

<u>Bước 2</u> Chứng minh $EF//Ax$ như sau

+) Xét (O) có $\widehat{xAB} = \widehat{ACB}$ (cùng bằng nửa số đo $\overset{\frown}{AB}$).

+) Chứng minh tứ giác $BCEF$ nội tiếp, suy ra $\widehat{AFE} = \widehat{ACB}$ nên $\widehat{xAB} = \widehat{AFE}$.

Mà $\widehat{xAB}, \widehat{AFE}$ là hai góc so le trong nên $EF//Ax$, do đó $OA \perp EF$.

* *Chứng minh đường tròn ngoại tiếp* ΔDEF *đi qua trung điểm của* BC

<u>Bước 1</u> Chỉ ra đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BCEF$ có tâm N là trung điểm của BC.

<u>Bước 2</u> Chứng minh các tứ giác $BDHF$ và $CDHE$ nội tiếp.

Suy ra $\widehat{D}_1 = \widehat{B}_1$ (cùng nhìn đoạn HF), $\widehat{D}_2 = \widehat{C}_1$ (cùng nhìn đoạn HE).

<u>Bước 3</u>: Xét *(N)* có $\widehat{B}_1 = \widehat{C}_1 = \frac{1}{2}\widehat{ENF}$ (quan hệ giữa góc nội tiếp và góc ở tâm).

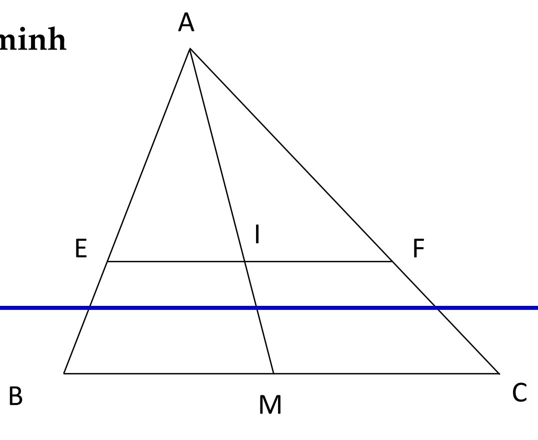
Suy ra $\widehat{D}_1 = \widehat{D}_2 = \frac{1}{2}\widehat{ENF}$ nên $\widehat{EDF} = \widehat{ENF}$, do đó tứ giác *DNEF* nội tiếp.

Mà D, E, F thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔDEF nên N thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔDEF hay đường tròn ngoại tiếp ΔDEF đi qua N là trung điểm của BC.

DẠNG 5: SỬ DỤNG ĐỊNH LÝ TA- LÉT VÀ ĐỊNH LÝ TA- LÉT ĐẢO

<u>Tính chất 1</u> (Tính chất thường gặp trong tam giác) Cho ΔABC có E và F lần lượt thuộc cạnh AB và AC sao cho $EF // BC$. Một đường thẳng d đi qua A và qua trung điểm của BC. Chứng minh d cũng đi qua trung điểm của EF.

Chứng minh



Gọi M và I lần lượt là giao điểm của d với BC và EF.

Do $EF // BC$ nên $EI // BM, FI // CM$.

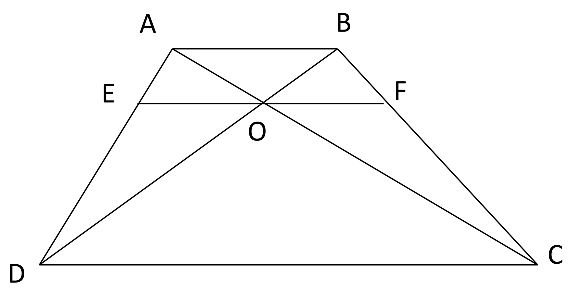
Xét ΔABM có $EI // BM$ nên $\dfrac{EI}{BM} = \dfrac{AI}{AM}$ (Định lí Talet).

Xét ΔACM có $FI // BM$ nên $\dfrac{FI}{CM} = \dfrac{AI}{AM}$ (Định lí Talet).

Suy ra $\dfrac{EI}{BM} = \dfrac{FI}{CM}$, mà $BM = CM$ nên $EI = FI$ hay d đi qua trung điểm của EF.

<u>Tính chất 2</u> (Tính chất thường gặp trong hình thang) Cho hình thang $ABCD$ ($AB // CD$) có các đường chéo cắt nhau tại O. Qua O kẻ đường thẳng song song với đáy, cắt AD và BC theo thứ tự tại E và F. Chứng minh $OE = OF$

Chứng minh



ΔABD có $OE // AB$ nên $\dfrac{OE}{AB} = \dfrac{DO}{DB}$ (Định lí Talet).

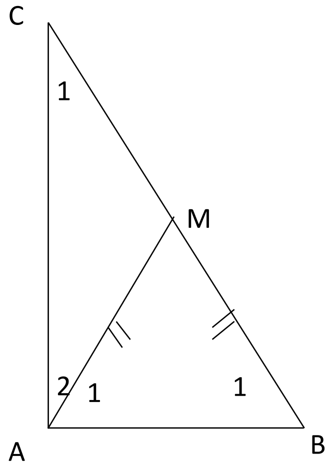
ΔABC có $OF // AB$ nên $\dfrac{OF}{AB} = \dfrac{CF}{CB}$ (Định lí Talet).

ΔBCD có $OF // CD$ nên $\dfrac{OD}{BD} = \dfrac{CF}{CB}$ (Định lí talet).

Suy ra $\dfrac{OE}{AB} = \dfrac{OF}{AB}$ nên $OE = OF$.

<u>Tính chất 3</u> (Tính chất thường gặp trong tam giác vuông) Cho ΔABC vuông tại A, lấy điểm M trên cạnh BC sao cho $MA = MB$. Chứng minh $MA = MC$.

Chứng minh



Vì $MA = MB$ nên ΔAMB cân tại M, do đó $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$

Mà $\widehat{A}_2 = 90^0 - \widehat{A}_1, \widehat{C}_1 = 90^0 - \widehat{B}_1$ nên $\widehat{A}_2 = \widehat{C}_1 \Rightarrow \Delta ACM$ cân tại $M \Rightarrow MA = MC$.

Ví dụ 1. Cho điểm M thuộc nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2a$ (M khác A và B). Kẻ các tiếp tuyến Ax, By với nửa đường tròn (O). Tiếp tuyến tại M của (O) cắt Ax, By lần lượt tại E, F. Gọi K là giao điểm của AF và BE. Chứng minh $MK \perp AB$ và khi $MB = \sqrt{3}.MA$, hãy tính diện tích ΔKAB theo a.

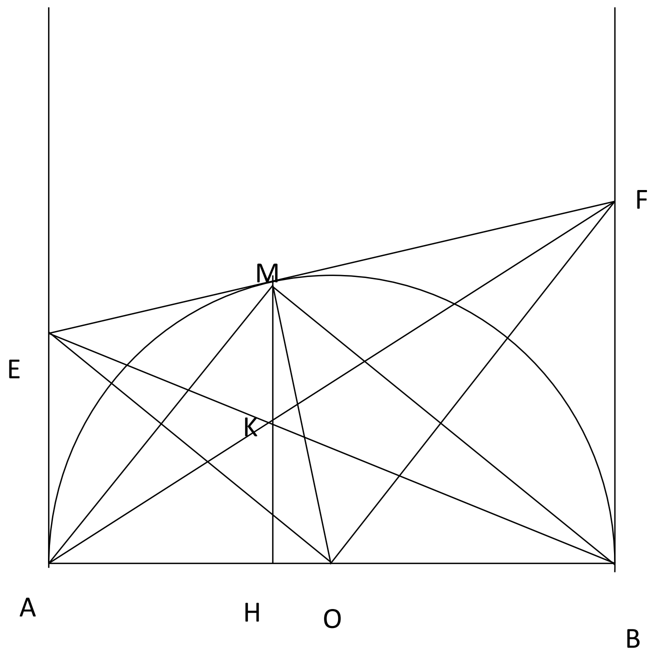
Hướng dẫn

* *Chứng minh* $MK \perp AB$

Bước 1 Chứng minh $\Delta KAE \sim \Delta KFB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{KA}{KF} = \dfrac{AE}{FB}$.

Bước 2 Chỉ ra $AE = ME, FB = MF$, suy ra $\dfrac{KA}{KF} = \dfrac{ME}{MF} \Rightarrow MK \,//\, AE$ (Talet đảo).

Mà $AE \perp AB$ (tính chất tiếp tuyến) nên $MK \perp AB$.



* *Tính diện tích ΔKAE theo a khi $MB=\sqrt{3}.MA$*

Bước 1 Kéo dài MK cắt AB tại H thì $MH\perp AB$ (do $MK\perp AB$).

Bước 2 Chứng minh K là trung điểm của MH

ΔBFE có $KM // BF$ nên $\dfrac{KM}{BF}=\dfrac{KE}{EB}$ (Định lí Talet).

ΔABF có $KH // BF$ nên $\dfrac{KH}{BF}=\dfrac{AH}{AB}$ (Định lí Talet).

ΔABE có $KH // AE$ nên $\dfrac{KE}{BE}=\dfrac{AH}{AB}$ (Định lí talet).

Suy ra $\dfrac{KM}{BF}=\dfrac{KH}{BF}\Rightarrow MK=KH$ hay K là trung điểm của MH.

Bước 3 Xét ΔKAB và ΔMAB có chung đáy AB và đường cao $KH=\dfrac{MH}{2}$.

Suy ra $S_{\Delta KAB}=\dfrac{1}{2}S_{\Delta MAB}=\dfrac{MA.MB}{4}$ (tính chất tỉ số diện tích).

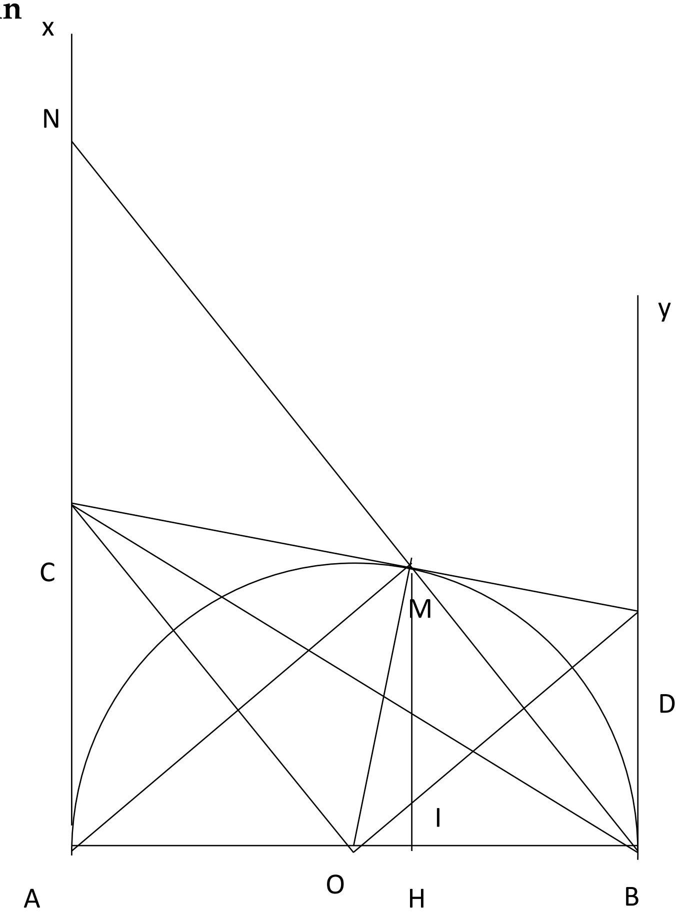
Có $MA^2+MB^2=AB^2=4R^2$ và $MB=\sqrt{3}.MA\Rightarrow MA=R, MB=R\sqrt{3}$.

Vậy $S_{\Delta KAB}=\dfrac{R.R\sqrt{3}}{4}=\dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$ (đvdt).

Ví dụ 2. Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Kẻ hai tiếp tuyến Ax, By với nửa đường tròn đó (Ax, By cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn). Gọi M là điểm bất kỳ thuộc nửa đường tròn và tiếp tuyến của nửa đường tròn tại M cắt Ax, By lần lượt tại C, D. Kẻ $MH\perp AB$

và MH cắt BC tại I. Chứng minh I là trung điểm của MH và ba điểm A, I, D thẳng hàng.

Hướng dẫn



* *Chứng minh I là trung điểm của MH*

<u>Bước 1</u> Kéo dài BM cắt Ax tại N và chứng minh $CA = CN$

+) Chỉ ra ΔAMN vuông tại M và có $CA = CM$ nên $\widehat{CAM} = \widehat{CMA}$.

+) Mà $\widehat{CNM} = 90^0 - \widehat{CAM}, \widehat{CMN} = 90^0 - \widehat{CMA}$ nên $\widehat{CNM} = \widehat{CMN}$.

Do đó ΔCNM cân tại C nên $CM = CN$, suy ra $CA = CN$.

<u>Bước 2</u>: Chứng minh $\dfrac{IH}{CA} = \dfrac{IM}{CN}$

+) ΔABC có $IH // CA$ nên $\dfrac{IH}{CA} = \dfrac{BI}{BC}$ (Định lý Ta lét).

+) ΔBCN có $IM // CN$ nên $\dfrac{IM}{CN} = \dfrac{BI}{BC}$ (Định lý Ta lét).

Suy ra $\dfrac{IH}{CA} = \dfrac{IM}{CN}$, mà $CA = CN$ nên $IH = IM$ hay I là trung điểm của MH.

* *Chứng minh* A, I, D *thẳng hàng*

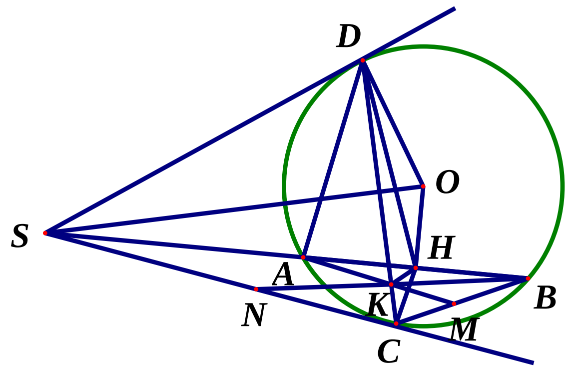
Bước 1: Kéo dài AM cắt By tại E và chứng minh $DB = DE$.

Bước 2: Gọi I' là giao điểm của AD và MH. Chứng minh I' là trung điểm MH.

Suy ra I' trùng I, mà $I' \in AD$ nên $I \in AD$ hay A, I, D thẳng hàng.

Ví dụ 3: Cho đường tròn $(O;R)$ và dây cung AB không đi qua tâm O. Từ điểm S thuộc tia đối của tia AB (S khác A) vẽ hai tiếp tuyến SC, SD đến $(O;R)$ với C, D là hai tiếp điểm và C thuộc cung nhỏ AB. Gọi H là trung điểm của AB. Đường thẳng đi qua A và song song với SC cắt SD tại K. Chứng minh tứ giác $ADHK$ nội tiếp và đường thẳng BK đi qua trung điểm của SC.

Hướng dẫn



* *Chứng minh tứ giác* $ADHK$ *nội tiếp*

Bước 1: Chứng minh năm điểm O, H, C, S, D cùng thuộc một đường tròn đường kính SO $\Rightarrow \widehat{SCD} = \widehat{SHD}$ (cùng nhìn SD).

Bước 2: Từ $AK // SC$ (gt) $\Rightarrow \widehat{AKD} = \widehat{SCD}$ (hai góc đồng vị).

Từ đó suy ra $\widehat{AKD} = \widehat{SHD}$ hay $\widehat{AKD} = \widehat{AHD}$ nên tứ giác $ADHK$ nội tiếp.

* *Chứng minh* BK *đi qua trung điểm của* SC

Bước 1: Kéo dài AK cắt BC tại M và chứng minh $KA = KM$

+) Từ tứ giác $ADHK$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AHK} = \widehat{ADK}$ (cùng nhìn AK).

+) Xét $(O;R)$ có $\widehat{ADK} = \widehat{ABC}$ (cùng chắn cung AC).

Suy ra $\widehat{AHK} = \widehat{ABC}$ nên $HK // BM$.

+) Xét ΔABM có H là trung điểm của AB và $HK // BM$ nên $KA = KM$.

Bước 2: Kéo dài BK cắt SC tại N và chứng minh $\dfrac{KA}{NS} = \dfrac{KM}{NC}$

+) ΔBNS có $KA//NS$ nên $\dfrac{KA}{NS}=\dfrac{BK}{BN}$ (Định lý Ta lét).

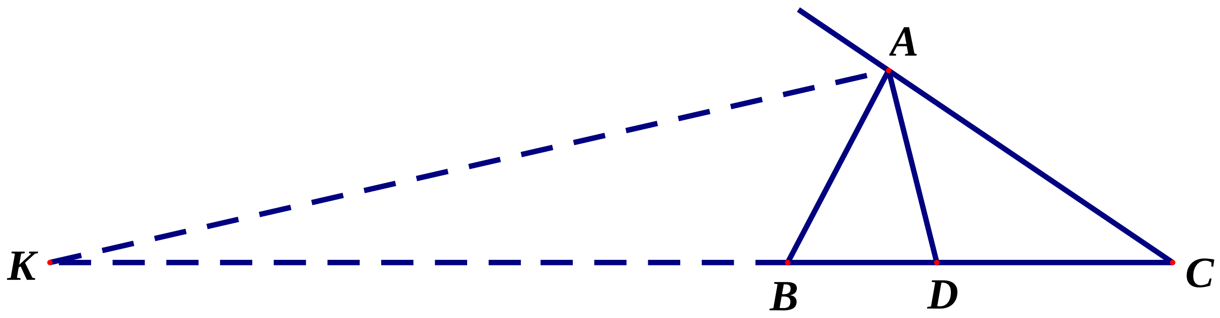
+) ΔBNC có $KM//NC$ nên $\dfrac{KM}{NC}=\dfrac{BK}{BN}$ (Định lý Ta lét).

Suy ra $\dfrac{KA}{NS}=\dfrac{KM}{NC}$, mà $KA=KM$ nên $NS=NC$ hay N là trung điểm của SC.

Vậy BK đi qua trung điểm của SC.

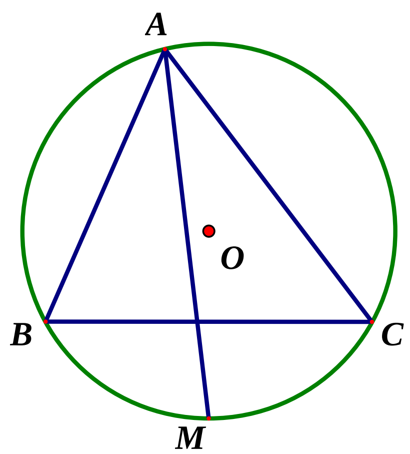
DẠNG 6: SỬ DỤNG TÍNH CHẤT PHÂN GIÁC

Tính chất 1



- Với AD là phân giác trong của ΔABC thì ta có $\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}$
- Với AK là phân giác ngoài của ΔABC thì ta có $\frac{KB}{KC}=\frac{AB}{AC}$
- Kết nối hai tỷ số trên, ta được tính chất $\frac{DB}{DC}=\frac{KB}{KC}$ hay $BD.CK=BK.CD$
- $AD\perp AK$ (phân giác trong và phân giác ngoài vuông góc với nhau)
- $\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ACD}}=\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}$

Tính chất 2

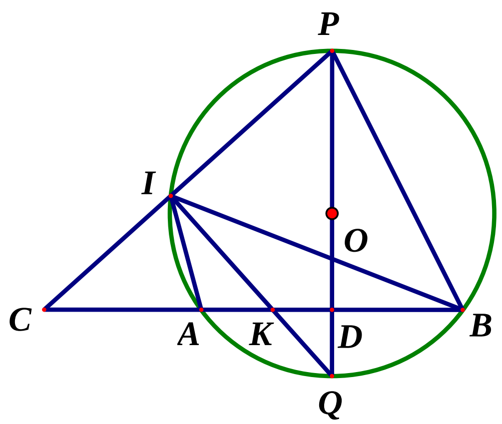


- Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O) và điểm $M\in(O)$. Nếu AM là tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$ thì M là điểm chính giữa của $\overset{\frown}{BC}$ và ngược lại.
- Nếu M là điểm chính giữa của $\overset{\frown}{BC}$ thì $\overset{\frown}{BM}=\overset{\frown}{CM}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$.
- Nếu $\overset{\frown}{BM}=\overset{\frown}{CM}$ thì $BM=CM$ và ngược lại (liên hệ giữa cung và dây cung).

Ví dụ 1: Cho đường tròn (O) và dây AB. Lấy điểm C nằm ngoài đường tròn (O) và nằm trên tia BA. Gọi P là điểm chính giữa của cung lớn AB. Kẻ đường kính PQ của (O), PQ cắt AB tại D.

Tia CP cắt (O) tại điểm thứ hai là I. Các dây AB và QI cắt nhau tại K. Chứng minh $CA.CB = CD.CK$ và $AK.BC = BK.AC$.

Hướng dẫn



Chứng minh $CA.CB = CD.CK$

Bước 1: Xét tứ giác $ABPI$ nội tiếp đường tròn $(O) \Rightarrow \widehat{CIA} = \widehat{CBP}$ (góc ngoài bằng góc đối), do đó $\Delta CIA \backsim \Delta CBP$ (g.g), suy ra $CA.CB = CI.CP$.

Bước 2: Chứng minh $\Delta CIK \backsim \Delta CDP$ (g.g), suy ra $CD.CK = CI.CP$.

Từ đó ta được $CA.CB = CD.CK$.

Chứng minh $AK.BC = BK.AC$

Bước 1: Chứng minh PO là trung trực của AB.

Mà $Q \in PO$ nên $QA = QB \Rightarrow \overset{\frown}{QA} = \overset{\frown}{QB}$ (liên hệ giữa cung và dây cung).

Bước 2: Từ $\overset{\frown}{QA} = \overset{\frown}{QB} \Rightarrow \widehat{AIQ} = \widehat{BIQ}$ nên IK là đường phân giác trong của ΔAIB.

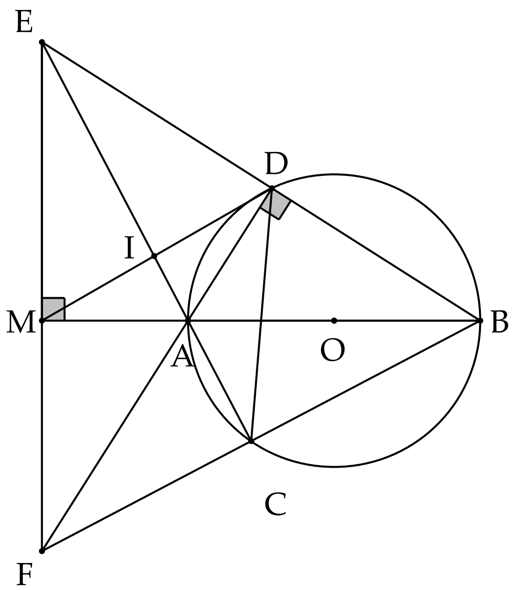
Suy ra $\dfrac{AK}{BK} = \dfrac{AI}{BI}$ (tính chất phân giác).

Bước 3: Vì $IC \perp IK$ (do $\widehat{PIQ} = 90^0$) nên IC là đường phân giác ngoài của ΔAIB.

Suy ra $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AI}{BI}$, do đó $\dfrac{AK}{BK} = \dfrac{AC}{BC}$ hay $AK.BC = BK.AC$.

Ví dụ 2: Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Trên tia đối của tia AB lấy điểm M mà $AM = R$. Kẻ đường thẳng d qua M và vuông góc AB. Trên d, lấy điểm E tùy ý. Gọi C, D lần lượt là giao điểm thứ hai của EA, EB với (O); I là giao điểm của EA với MD, F là giao điểm của BC với d. Chứng minh ba điểm F, A, D thẳng hàng và $IA.EC = AC.EI$.

Hướng dẫn



* Chứng minh ba điểm F, A, D thẳng hàng

__*Bước 1*__: Chứng minh EC, BM là hai đường cao của ΔBEF và $EC \cap BM = \{A\}$.

Suy ra A là trung trực ΔBEF nên $FA \perp BE$.

__*Bước 2*__: Sử dụng $D \in (O)$ đường kinh $AB \Rightarrow \widehat{ADB} = 90^\circ \Rightarrow AD \perp BE$.

Từ đó suy ra F, A, D thẳng hàng.

* Chứng minh $IA.EC = AC.EI$

__*Bước 1:*__ Chứng minh tứ giác $ADEM$ nội tiếp nên $\widehat{D_1} = \widehat{E_1}$ (cùng nhìn đoạn AM).

__*Bước 2*__: Chứng minh tứ giác $CDEF$ nội tiếp, suy ra $\widehat{D_2} = \widehat{E_1}$ (cùng nhìn đoạn FC).

Từ đó được $\widehat{D_1} = \widehat{D_2}$ nên DA là phân giác trong của ΔCDI.

Suy ra $\dfrac{DI}{DC} = \dfrac{AI}{AC}$ (tính chất phân giác).

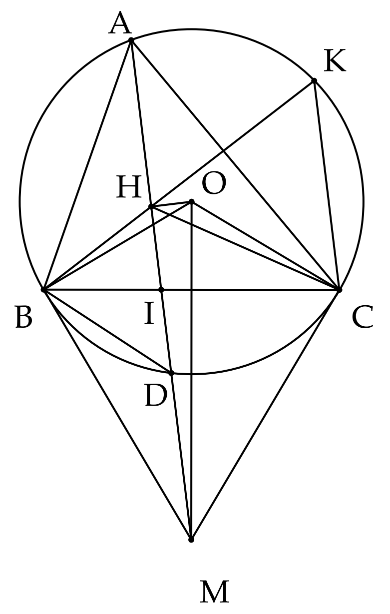
__*Bước 3*__:Sử dụng $DE \perp DA$ nên DE là phân giác ngoài của tam giác CDI.

Suy ra $\dfrac{DI}{DC} = \dfrac{EI}{EC}$ (tính chất phân giác), do đó $\dfrac{AI}{AC} = \dfrac{EI}{EC}$ hay $IA.EC = AC.EI$.

Ví dụ 3. Cho ΔABC nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Kẻ hai tiếp tuyến tại B, C của (O) và hai tiếp tuyến này cắt nhau tại M. Nối AM cắt đường tròn (O) tại D khác A và cắt

BC tại I. Gọi H là trung điểm của AD. Tia BH cắt đường tròn (O) tại K khác B. Chứng minh $CK//AM$ và $\dfrac{S_{\Delta BHI}}{S_{\Delta CHI}} = \dfrac{BH}{CH}$.

Hướng dẫn



$*$ Chứng minh $CK//AM$

Bước 1: Chứng minh năm điểm B, H, O, C, M thuộc đường tròn đường kính OM, suy ra $\widehat{BHM} = \widehat{BCM}$ (cùng nhìn BM).

Bước 2: Xét (O) có $\widehat{BKC} = \widehat{BCM}$ (cùng bằng nửa số đo $\overset{\frown}{BC}$).

Từ đó suy ra $\widehat{BHM} = \widehat{BKC}$, mà $\widehat{BHM}$, $\widehat{BKC}$ là hai góc đồng vị nên $CK//AM$.

$*$ Chứng minh $\dfrac{S_{\Delta BHI}}{S_{\Delta CHI}} = \dfrac{BH}{CH}$

Bước 1: Theo trên, ta có B, H, O, C, M thuộc một đường tròn nên

$\widehat{BHM} = \widehat{BOM}$, $\widehat{CHM} = \widehat{COM}$

Bước 2: Do MB, MC là hai tiếp tuyến của (O) kẻ từ M nên $\widehat{BOM} = \widehat{COM}$.

Từ đó suy ra $\widehat{BHM} = \widehat{CHM}$ nên HI là phân giác trong của ΔHBC.

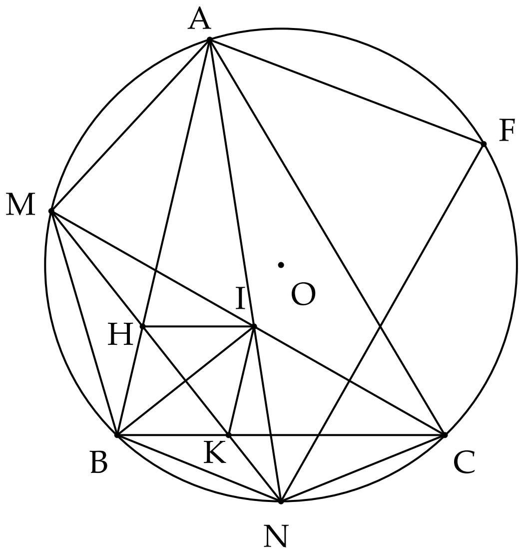
Do đó $\dfrac{BH}{CH} = \dfrac{BI}{CI}$ (tính chất phân giác).

Bước 3: Xét ΔHBI, ΔHCI có cùng đường cao kẻ từ H nên

$\dfrac{S_{\Delta BHI}}{S_{\Delta CHI}}=\dfrac{BI}{CI}$, mà $\dfrac{BH}{CH}=\dfrac{BI}{CI}$ nên $\dfrac{S_{\Delta BHI}}{S_{\Delta CHI}}=\dfrac{BH}{CH}$.

Ví dụ 4. Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác nhọn ABC. Gọi M và N lần lượt là điểm chính giữa của cung nhỏ AB và cung nhỏ BC. Hai dây AN và CM cắt nhau tại I. Dây MN cắt AB và BC lần lượt tại H và K. Chứng minh tứ giác $BHIK$ là hình thoi.

Hướng dẫn



* Chứng minh ΔBHI cân

Bước 1: Chứng minh ΔMBI cân.

Kéo dài BI cắt (O) tại F và chỉ ra F là điểm chính giữa của $\overset{\frown}{AC}$.

Có $\widehat{MBI}=\dfrac{1}{2}\left(sd\overset{\frown}{AM}+sd\overset{\frown}{AF}\right)$, $\widehat{MBI}=\dfrac{1}{2}\left(sd\overset{\frown}{BM}+sd\overset{\frown}{CF}\right)$, $\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{BM}$, $\overset{\frown}{AF}=\overset{\frown}{CF}$

Nên $\widehat{MBI}=\widehat{MIB}\Rightarrow\Delta MBI$ cân tại M.

Bước 2: Chứng minh MN là trung trực của BI

Do N là điểm chính giữa ủa cung nhỏ BC nên MN là tia phân giác của $\widehat{BMC}$

Mà ΔMBI cân tại M nên MN cũng là đường trung trực của đoạn thẳng BI.

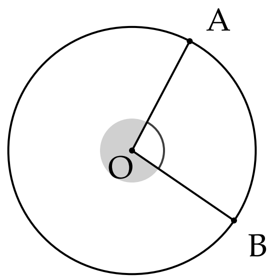
Do $H, K\in MN$ nên $HB=HI$, $KB=KI$ và $MN\perp BI$ hay $BF\perp HK$.

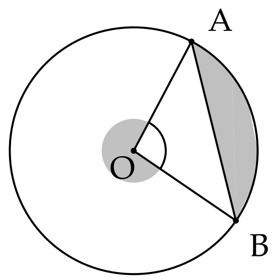
Bước 3: Chứng minh $BH=BK$.

Do F là điểm chính giữa của cung nhỏ AC nên BF là tia phân giác của $\widehat{HBK}$.

Mà $BF\perp HK$ nên ΔBHK cân tại B, do đó $BH=BK$.

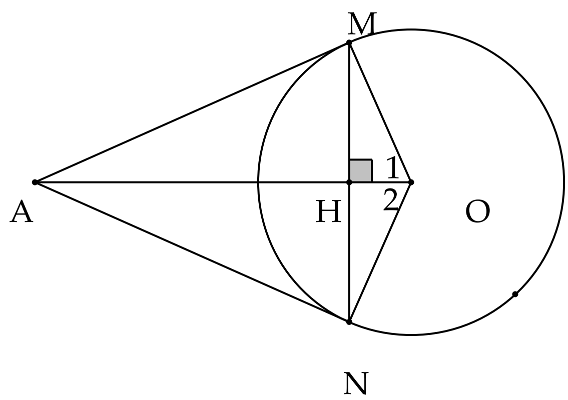
Như vậy tứ giác $BHIK$ là hình thoi.



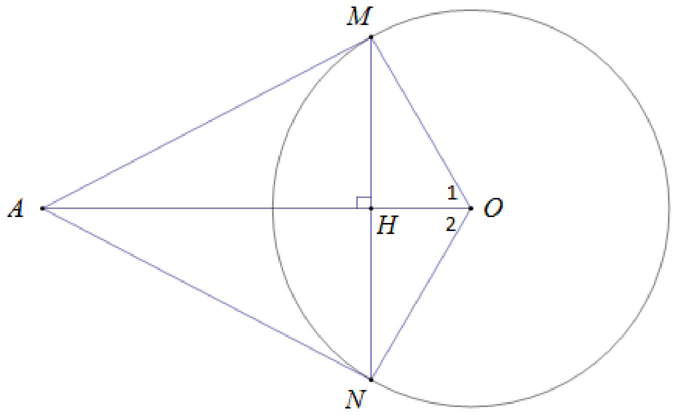


- Độ dài (chu vi) đường tròn $(O;\text{R})$ là $C = 2\pi R$.
- Nếu $sd\overset{\frown}{AB} = \alpha°$ thì độ dài $\overset{\frown}{AB}$ là $\dfrac{\pi R\alpha}{180}$.
- Diện tích hình tròn $(O;R)$ là $S = \pi R^2$.
- Nếu $sd\overset{\frown}{AB} = \alpha°$ thì diện tích hình quạt tạo bởi OA, OB và $\overset{\frown}{AB}$ là $\dfrac{\pi R^2\alpha}{360}$.
- Nếu $sd\overset{\frown}{AB} = \alpha°$ thì diện tích hình viên phân tạo bởi dây AB và $\overset{\frown}{AB}$ là $\dfrac{\pi R^2\alpha}{360} - S_{\Delta OAB}$.
- Thể tích hình trụ đường cao h, bán kính đáy R là $V = S_{day}.\text{h} = \pi \text{R}^2 h$.
- Thể tích hình nón đường cao h, bán kính đáy R là $V = \dfrac{1}{3}S_{day}.\text{h} = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h$.
- Thể tích hình cầu và diện tích mặt cầu bán kính R là $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$ và $S = 4\pi R^2$.

Ví dụ 1. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn $(O;R)$. Từ A kẻ tiếp tuyến AM đến (O) với M là tiếp điểm. Đường thẳng qua M vuông góc với OA cắt (O) tại điểm N khác M. Chứng minh AN là tiếp tuyến của (O). Khi $\widehat{MAN} = 60°$, tính độ dài $\overset{\frown}{MN}$ nhỏ và thể tích tạo thành khi cho ΔOAM quay một vòng quanh OA.



Hướng dẫn



** Chứng minh AN là tiếp tuyến của (O)*

Bước 1: Chỉ ra ΔOMN cân tại O và $OA \perp MN$ nên OA cũng là phân giác của $\widehat{MON}$, do đó $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$.

Bước 2: Chỉ ra $\Delta OAM = \Delta OAN$ (c.g.c) nên $\widehat{OMA} = \widehat{ONA} = 90^o \Rightarrow AN \perp ON$. Mà ON là bán kính của (O) nên AN là tiếp tuyến của (O).

** Tính độ dài $\overset{\frown}{MN}$ nhỏ:*

Bước 1: Sử dụng tổng các góc trong tứ giác $AMON$ bằng $180^o \Rightarrow \widehat{MON} = 120^o$.

Bước 2: Sử dụng công thức tính độ dài cung, ta tính được độ dài $\overset{\frown}{MN}$ nhỏ là:

$\dfrac{\pi.R.120}{180} = \dfrac{2\pi R}{3}$ (đvdt)

** Tính thể tích tạo thành khi cho ΔOAM quay một vòng quanh OA.*

Bước 1: Gọi H là giao điểm của OA và MN.

\+ Xét ΔOAM vuông tại M và $\widehat{OAM} = 30^o$ nên

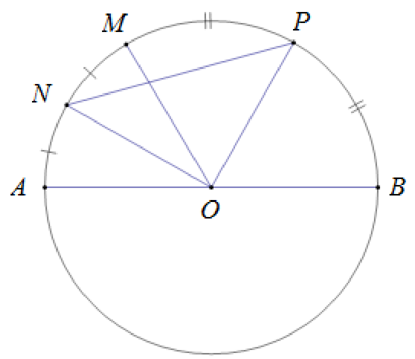
$$\sin\widehat{OAM} = \frac{OM}{OA} = \frac{R}{OA} = \frac{1}{2} \Rightarrow OA = 2R$$

\+ $OH.OA = OM^2 \Rightarrow OH = \dfrac{R}{2} \Rightarrow AH = OA - OH = \dfrac{3R}{2} \Rightarrow HM = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

Bước 2: Khi cho ΔOAM quay một vòng quanh OA ta được hai hình nón có cùng bán kính đáy là $r = HM = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$ và đường cao là $h_1 = AH = \dfrac{3R}{2}, h_2 = OH = \dfrac{R}{2}$ nên thể tích hình tạo thành là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2(h_1 + h_2) = \dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2\left(\dfrac{3R}{2} + \dfrac{R}{2}\right) = \dfrac{\pi R^3}{2}$

Ví dụ 2: Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB và điểm M tùy ý trên nửa đường tròn đó. Gọi N, P lần lượt là điểm chính giữa cung AM, MB. Tính độ dài đoạn NP và diện tích hình viên phân tạo thành bởi dây NP và $\overset{\frown}{NP}$ nhỏ.

Hướng dẫn



** Tính độ dài đoạn NP*

Bước 1: Chỉ ra $\widehat{MON} = \frac{1}{2}\widehat{MOA}, \widehat{MOP} = \frac{1}{2}\widehat{MOB}$

Suy ra $\widehat{NOP} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = 90^o \Rightarrow \Delta NOP$ vuông tại O.

Bước 2: Sử dụng định lý Pytago trong ΔNOP vuông tại O, tính được $NP = R\sqrt{2}$.

** Tính diện tích hình viên phân tạo bởi dây NP và $\overset{\frown}{NP}$ nhỏ.*

Bước 1: Tính được diện tích hình quạt tạo bởi $ON, OP, \overset{\frown}{NP}$ nhỏ là

$\frac{\pi R^2.90}{360} = \frac{\pi R^2}{4}$ (đvdt)

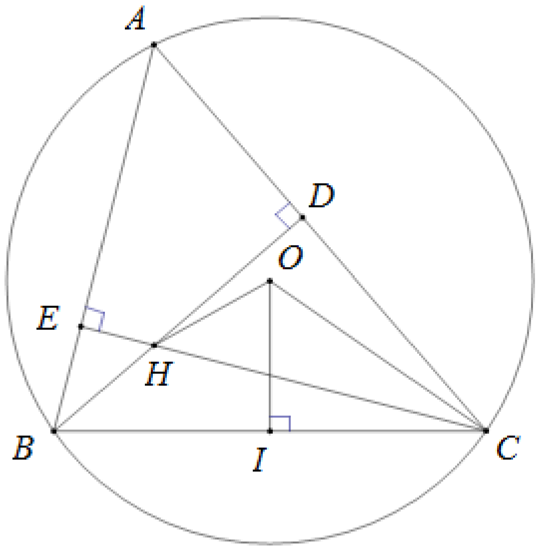
Bước 3: Tính được diện tích ΔNOP vuông tại O là $\frac{R^2}{2}$ (đvdt).

Suy ra diện tích hình viên phân tạo bởi dây NP và $\overset{\frown}{NP}$ nhỏ là:

$\frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2} = \frac{R(\pi - 2)}{4}$ (đvđd)

Ví dụ 3: Cho đường tròn $(O;R)$ và dây $BC = R\sqrt{3}$. Gọi A là điển thay đổi trên cung lớn BC sao cho ΔABC nhọn. Kẻ $BD \perp AC$ tại $D, CE \perp AB$ tại E. Gọi H là giao điểm của BD và CE. Tính độ dài $\overset{\frown}{BC}$ nhỏ và chứng minh $\widehat{OBD} = \widehat{OCE}$.

Hướng dẫn



** Tính độ dài $\overset{\frown}{BC}$ nhỏ:*

Bước 1: Kẻ $OI \perp BC$ tại I và chỉ ra I là trung điểm của BC và $\widehat{BOC} = 2\widehat{BOI}$

Bước 2: Xét ΔBOI vuông tại I nên:

$$\sin \widehat{BOI} = \frac{BI}{OB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{BOI} = 60^o \Rightarrow \widehat{BOC} = 120^o$$

Bước 3: Sử dụng công thức tính độ dài cung, ta tính được dộ dài $\overset{\frown}{BC}$ nhỏ là:

$\frac{\pi R.120}{180} = \frac{2\pi R}{3}$ (đvđd)

** Chứng minh $\widehat{OBD} = \widehat{OCE}$*

Bước 1: Tính được $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} = 60^o$

Bước 2: Sử dụng tổng các góc trong tứ giác $ADHE$ bằng $180^o \Rightarrow \widehat{DHE} = 120^o$.

Bước 3: Tính được $\widehat{BHC} = 120^o$ nên $\widehat{BHC} = \widehat{BOC}$, do đó tứ giác $BCOH$ nội tiếp.

Suy ra $\widehat{OBD} = \widehat{OCE}$ (cùng nhìn đoạn OH).

Hệ thống bài tập trong chủ đề

Bài 1: Từ điểm A ở ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến AB, AC đến (O) (với B, C là tiếp điểm). GỌi E là giao điểm của OA và BC. Gọi I là trung điểm của BE, đường thẳng qua I vuông góc với OI cắt các tia AB, AC theo thứ tự tại D, F. Chứng minh ΔODF cân tại O và F là trung điểm AC.

Bài 2: Cho đường tròn (O). Lấy điểm A nằm ngoài đường tròn (O), đường thẳng AO cắt (O) tại hai điểm B và C với $AB < AC$. Qua A vẽ đường thẳng không đi qua O cắt (O) tại hai điểm D và E với $AD < AE$. Đường thẳng vuông goác với AB tại A cắt đường thẳng CE tại F. Gọi M là giao điểm thứ hai của đường thẳng FB với (O). Tứ giác $AMDF$ là hình gì? Vì sao?

Bài 3: Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) đường kính AD (B thuộc cung nhỏ AC). Gọi giao điểm của hai đường chéo AC và BD là H. Kẻ HK vuông góc với AD tại K. Tia BK cắt (O) tại điểm thứ hai là F. Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của F lên các đường thẳng AB, BD. Chứng minhh $CF // HK$ và PQ đi qua trung điểm của CF.

Bài 4: Cho ba điểm A, B, C cố định và thẳng hàng theo thứ tự đó. Vẽ đường tròn (O) bất kì đi qua B, C sao cho BC không phải là đường kính của (O). Từ A kẻ các tiếp tuyến AE, AF đến (O) với E, F là các tiếp điểm. Gọi I là trung điểm của BC. Gọi D là giao điểm thứ hai của đường thẳng FI và (O). Chứng minh $ED // AC$ và $AH.AI = AB.AC$.

Bài 5: Cho đường tròn (O) và dây cung BC cố định khác đường kính. Gọi A là điểm bất kì trên cung nhỏ BC (A khác B, C và $AB < AC$). Kẻ đường kính AK của đường tròn (O). Gọi D là chân đường vuông góc kẻ từ A đến BC và E là chân đường vuông góc kẻ từ B đến AK. Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh $DE \perp AC$ và $\Delta IDE \backsim \Delta OAB$.

Bài 6. Cho đường tròn (O) và một điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Kẻ tiếp tuyến AB và đường kính BC của đường tròn (O) (với B là tiếp điểm). Trên đoạn thẳng CO lấy điểm I (I khác C, I khác O). Đường thẳng AI cắt đường tròn (O) tại hai điểm D và E (với D nằm giữa A và E). Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng DE. Đường thẳng d đi qua điểm E và song song với AO, d cắt BC tại K. Chứng minh $HK // CD$.

Bài 7. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn $(O;R)$, kẻ hai tiếp tuyến AB và AC đến đường tròn (O) (với B và C là hai tiếp điểm). Trên cung nhỏ BC của (O) lấy điểm M khác B và C. Gọi I, H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên BC, AC, AB. Gọi P là giao điểm của BM và IK, Q là giao điểm của CM và IH. Chứng minh $MI^2 = MH.MK$ và $PQ \perp MI$.

Bài 8. Từ điểm M ở ngoài đường tròn (O), vẽ tiếp tuyến MA đến (O) (với A là tiếp điểm) và vẽ cát tuyến MBC sao cho $MB < MC$ và tia MC nằm giữa hai tia MA, MO. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A trên đường thẳng OM. Chứng minh tứ giác $BCOH$ nội tiếp và HA là phân giác của $\widehat{BHC}$.

Bài 9. Cho ΔABC nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Kẻ $AH \perp BC$ tại H. Gọi E và F lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB và AC. Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại K và cắt (O) tại M, N. Chứng minh $KH^2 = KB.KC$ và A là điểm chính giữa của $\overset{\frown}{MN}$, từ đó chứng minh A là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔHMN.

Bài 10. Cho ΔABC nhọn $(AB < AC)$ có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CDHE$. Trên cung nhỏ EC của (O), lấy điểm I sao cho $IC > IE$. Gọi N là giao điểm của DI và CE. Gọi M là giao điểm của EF với IC. Chứng minh $MN // AB$.

Bài 11. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB cố định. Dây CD di động vuông góc với AB tại H nằm giữa A và O. Lấy điểm F thuộc cung nhỏ AC. Giả sử BF cắt CD tại E, AF cắt tia DC tại I. Đường tròn ngoại tiếp ΔIEF cắt AE tại M. Chứng minh M thuộc đường tròn $(O;R)$.

Bài 12. Cho ΔABC vuông cân tại A. Đường tròn đường kính AB cắt BC tại D và khác B. Gọi M là điểm bất kỳ trên đoạn AD. Kẻ MH, MI lần lượt vuông góc với AB, AC tại H, I. Kẻ $HK \perp ID$ tại K. Chứng minh $\widehat{MID} = \widehat{MBC}$ và tứ giác $AIKM$ nội tiếp, từ đó chứng minh ba điểm K, M, B thẳng hàng.

Bài 13. Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Gọi C là điểm bất kỳ thuộc nửa đường tròn sao cho $0 < AC < BC$. Gọi D là điểm thuộc cung nhỏ BC sao cho $\widehat{COD} = 90°$. Gọi E là giao điểm của AD và BC, F là giao điểm của AC và BD. Gọi I là trung điểm của EF. Chứng minh IC là tiếp tuyến của (O).

Bài 14. Cho đường tròn $(O;R)$ và đường thẳng d cắt $(O;R)$ tại hai điểm E và F. Gọi A là điểm trên d sao cho E nằm giữa A và F. Từ A kẻ các tiếp tuyến AB và AC đến $(O;R)$ với B, C là các tiếp điểm và B, O nằm về hai phía của đường thẳng d. Gọi H là trung điểm của EF. Đường thẳng BC cắt OA tại I, cắt OH tại K. Chứng minh $OI.OA = OH.OK$ và KF là tiếp tuyến của $(O;R)$.

Bài 15. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB. Lấy điểm C trên đoạn thẳng OA (C khác O và A). Đường thẳng đi qua C và vuông góc với AB cắt nửa đường tròn tại K. Gọi M là điểm bất kỳ trên cung BK (M khác B và K). Đường thẳng CK cắt các đường thẳng AM, BM lần lượt tại H, D. Đường thẳng BH cắt nửa đường tròn tại điểm thứ hai là N. Chứng minh ba điểm A, N, D thẳng hàng và tiếp tuyến tại N của nửa đường tròn đi qua trung điểm của DH.

Bài 16. Cho đường tròn $(O;R)$ và dây BC cố định khác đường kính. Lấy điểm A thuộc cung lớn BC mà $AB < AC$. Các đường cao AF, BD, CE của ΔABC cắt nhau tại H. Vẽ đường kính AI của (O). Gọi K là điểm đối xứng với H qua BC. Chứng minh $K \in (O)$ và tứ giác $BKIC$ là hình thang cân.

Bài 17. Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Gọi C là điểm chính giữa của cung AB và M là điểm thuộc cung AC (M khác A và C). Kẻ $MH \perp AB$ tại H, AC cắt MH, MB lần lượt tại K, E. Kẻ $EI \perp AB$ tại I. Chứng minh $AC.AK = AM^2$ và O thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔIMC.

Bài 18. Cho đường tròn $(O;R)$ và dây BC cố định khác đường kính. Gọi A là điểm di động trên cung lớn BC (A khác B, A khác C và A khác điểm chính giữa của $\overset{\frown}{BC}$). Các đường cao AD,

BE, CF của ΔABC cắt nhau tại H. Chứng minh $OA \perp EF$ và đường tròn ngoại tiếp ΔDEF đia qua trung điểm của BC.

Bài 19. Cho điểm M thuộc nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2a$ (M khác A và B). Kẻ các tia tiếp tuyến Ax, By với nửa đường tròn (O). Tiếp tuyến tại M của (O) cắt Ax, By lần lượt tại E, F. Gọi K là giao điểm của AF và BE. Chứng minh $MK \perp AB$ và khi $MB = \sqrt{3}MA$, hãy tính diện tích ΔKAB theo a.

Bài 20. Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính . Kẻ hai tiếp tuyến Ax, By với nửa đường tròn đó (Ax, By cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn). Gọi M là điểm bất kỳ thuộc nửa đường tròn và tiếp tuyến của nửa đường tròn tại M cắt Ax, By lần lượt tại C, D. Kẻ $MH \perp AB$ và MH cắt BC tại I. Chứng minh I là trung điểm của MH và ba điểm A, I, D thẳng hàng.

Bài 21. Cho đường tròn $(O;R)$ và dây cung AB không đi qua tâm O. Từ điểm S thuộc tia đối của tia AB (S khác A) vẽ hai tiếp tuyến SC, SD đến $(O;R)$ với C, D là hai tiếp điểm và C thuộc cung nhỏ AB. Gọi H là trung điểm của AB. Đường thẳng đi qua A và song song với SC cắt CD tại K. Chứng minh tứ giác $ADHK$ nội tiếp và đường thẳng BK đi qua trung điểm của SC.

Bài 22. Cho đường tròn (O) và dây AB. Lấy điểm C nằm ngoài đường tròn (O) và nằm trên tia BA. Gọi P là điểm chính giữa của cung lớn AB. Kẻ đường kính PQ của (O), PQ cắt AB tại D. Tia CP cắt (O) tại điểm thứ hai là I. Các dây AB và QI cắt nhau tại K. Chứng minh $CA.CB = CD.CK$ và $AK.BC = BK.AC$.

Bài 23. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Trên tia đối của tia AB, lấy điểm M mà $AM = R$. Kẻ đường thẳng d qua M và vuông góc với AB. Trên d, lấy điểm E tùy ý. Gọi C, D lần lượt là giao điểm thứ hai của EA, EB với (O); I là giao điểm của EA với MD, F là giao điểm của BC với d. Chứng minh ba điểm F, A, D thẳng hàng và $IA.EC = AC.EI$.

Bài 24. Cho ΔABC nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Kẻ hai tiếp tuyến tại B, C của (O) và hai tiếp tuyến này cắt nhau tại M. Nối AM cắt đường tròn (O) tại D khác A và cắt BC tại I. Gọi H là trung điểm của AD. Tia BH cắt đường tròn (O) tại K khác B. Chứng minh $CK // AM$ và $\dfrac{S_{\Delta BHI}}{S_{\Delta CHI}} = \dfrac{BH}{CH}$.

Bài 25. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn $(O;R)$. Từ A kẻ tiếp tuyến AM đến (O) với M là tiếp điểm. Đường thẳng qua M vuông góc với OA cắt (O) tại điểm N khác M. Chứng minh AN là tiếp tuyến của (O). Khi $\widehat{MAN} = 60°$, tính độ dài $\overset{\frown}{MN}$ nhỏ và thể tích hình tạo thành khi ΔOAM quay một vòng quanh OA.

Bài 26. Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB và điểm M tùy ý trên nửa đường tròn đó. Gọi N, P lần lượt là điểm chính giữa của cung AM, MB. Tính đoạn NP và diện tích hình viên phân tạo thành bởi dây NP và $\overset{\frown}{NP}$ nhỏ.

Bài 27. Cho đường tròn $(O;R)$ và dây $BC = R\sqrt{3}$. Gọi A là điểm thay đổi trên cung lớn BC sao cho ΔABC nhọn. Kẻ $BD \perp AC$ tại D, $CE \perp AB$ tại E. Gọi H là giao điểm của BD và CE. Tính độ dài $\overset{\frown}{BC}$ nhỏ và chứng minh $\widehat{OBD} = \widehat{OCE}$.

CHỦ ĐỀ 7 – BẤT ĐẲNG THỨC

I. BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI

1. Dạng hai số không âm x, y

- Dạng tổng sang tích: $x+y \geq 2\sqrt{xy}$.
- Dạng tích sang tổng: $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ hay $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$.
- Dạng lũy thừa: $x^2+y^2 \geq 2xy$ hay $xy \leq \frac{x^2+y^2}{2}$.

  Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow x=y$.
- Dạng đặc biệt: $x = x.1 \leq \frac{x^2+1}{2}$.

2. Dạng ba số không âm x, y, z

- Dạng tổng sang tích: $x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$.
- Dạng tích sang tổng: $\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}$ hay $xyz \leq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$.
- Dạng lũy thừa: $x^3+y^3+z^3 \geq 3xyz$ hay $xyz \leq \frac{x^3+y^3+z^3}{3}$.

  Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z$.
- Dạng đặc biệt: $x = x.1.1 \leq \frac{x^3+1+1}{3}$.

3. Dạng tổng quát với n **số không âm** $x_1, x_2, ..., x_n$

- Dạng tổng sang tích: $x_1+x_2+...+x_n \geq n\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}$.
- Dạng tích sang tổng: $\sqrt[n]{x_1x_2...x_n} \leq \frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$ hay $x_1x_2...x_n \leq \left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right)^n$.
- Dạng lũy thừa: $x_1^n+x_2^n+...+x_n^n \geq x_1x_2...x_n$ hay $x_1x_2...x_n \leq \frac{x_1^n+x_2^n+...+x_n^n}{n}$.

  Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow x_1=x_2=...=x_n$.
- Dạng đặc biệt: $x = x.\underbrace{1.1...1}_{n-1} \leq \frac{x^n+n-1}{n}$.

4. Bất đẳng thức trung gian

- $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}\ \forall x>0, y>0$. Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow x=y$.
- $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}\ \forall x>0, y>0, z>0$. Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z$.

DẠNG 1: DẠNG TỔNG SANG TÍCH

Ví dụ 1. Cho $x \neq 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = 8x^2 - 4x + \frac{1}{4x^2} + 15$.

Lời giải

Có $T = \left(4x^2 - 4x + 1\right) + \left(4x^2 + \frac{1}{4x^2}\right) + 14$

$= (2x-1)^2 + \left(4x^2 + \frac{1}{4x^2}\right) + 14 \geq 0 + 2\sqrt{4x^2.\frac{1}{4x^2}} + 14 = 16$

Vậy $MinT = 16$ khi $x = \frac{1}{2}$

Ví dụ 2. Cho $x > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = 4x^2 - 3x + \frac{1}{4x} + 2011$.

Lời giải

Có $M = 4x^2 - 4x + 1 + x + \frac{1}{4x} + 2010$

$= (2x-1)^2 + \left(x + \frac{1}{4x}\right) + 2010 \geq 0 + 2\sqrt{x.\frac{1}{4x}} + 2010 = 2011$.

Vậy $MinM = 2011$ khi $x = \frac{1}{2}$

Ví dụ 2. Cho $x > y > 0$ và $xy = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $H = \frac{x^2 + y^2}{x - y}$.

Lời giải

Có $H = \frac{x^2 + y^2 - 2xy + 2xy}{x - y} = \frac{(x-y)^2 + 4}{x - y}$

$= (x - y) + \frac{4}{x - y} \geq 2\sqrt{(x-y).\frac{4}{x-y}} = 4$.

Vậy $Min\,H = 4$ khi $\begin{cases} x - y = \frac{4}{x-y} \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ x^2 - 2x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} + 1 \\ y = \sqrt{3} - 1 \end{cases}$.

DẠNG 2: DẠNG TÍCH SANG TỔNG, NHÂN BẰNG SỐ THÍCH HỢP.

Ví dụ 1: Cho a ≥ 1, b ≥ 1. Chứng minh : $a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \leq ab$

Lời giải

Có $\sqrt{b-1} = \sqrt{1.(b-1)} \leq \frac{1 + (b-1)}{2} = \frac{b}{2} \Rightarrow a\sqrt{b-1} \leq \frac{ab}{2}$;

Và tương tự: $b\sqrt{a-1} \leq \frac{ab}{2} \Rightarrow a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \leq \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} = ab \Rightarrow$ đpcm

Dấu '=" xảy ra khi a = b = 2

Ví dụ 2: Cho a ≥ 9, b≥ 4, c≥ 1. Chứng minh: $ab\sqrt{c-1} + bc\sqrt{a-9} + ca\sqrt{b-4} \leq \frac{11abc}{12}$

Lời giải:

Có:

$$ab\sqrt{c-1}+bc\sqrt{a-9}+ca\sqrt{b-4}=ab\sqrt{(c-1).1}+\frac{bc}{3}.\sqrt{(a-9).9}+\frac{ca}{2}.\sqrt{(b-4).4}$$

$$\le ab.\frac{(c-1)+1}{2}+\frac{bc}{3}.\frac{(a-9)+9}{2}+\frac{ca}{2}.\frac{(b-4)+4}{2}=\frac{11abc}{12}$$

Dấu "=" xảy ra khi a = 18, b = 8, c = 2

Ví dụ 3: Cho a ≥ 0, b ≥ 0, $a^2 + b^2 \le 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: M = $a\sqrt{b(a+2b)}+b\sqrt{a(b+2a)}$

Lời giải

Xét:

$$M.\sqrt{3}=a.\sqrt{3b(a+2b)}+b\sqrt{3a(b+2a)}\le a.\frac{3b+(a+2b)}{2}+b.\frac{3a+(b+2a)}{2}=\frac{a^2+b^2}{2}+5ab$$

$$\le\frac{a^2+b^2}{2}+5.\frac{a^2+b^2}{2}\le 6\Rightarrow M\le 2\sqrt{3}$$

Vậy MaxM = $2\sqrt{3}$ khi a = b = 1

Ví dụ 4. Cho $x\ge 0$, $y\ge 0$ và $x^2+y^2\le 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{x(14x+10y)}+\sqrt{y(14y+10x)}$$

Lời giải

Xét: $P.\sqrt{24}=\sqrt{24x(14x+10y)}+\sqrt{24y(14y+10x)}$

$$\le\frac{24x+(14x+10y)}{2}+\frac{24y+(14y+10x)}{2}=24(x.1+y.1)$$

$$\le 24\left(\frac{x^2+1}{2}+\frac{y^2+1}{2}\right)=24\left(\frac{x^2+y^2+1}{2}\right)\le 48\Rightarrow P\le\frac{48}{\sqrt{24}}\Rightarrow P\le 4\sqrt{6}.$$

Vậy Max$P=4\sqrt{6}$ khi $x=y=1$.

Ví dụ 5. Cho $x>0$, $y>0$ và $\sqrt{xy}(x-y)=x+y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=x+y$.

Lời giải

Từ $\sqrt{xy}(x-y)=x+y\Rightarrow x>y$

và $x+y=\sqrt{xy(x-y)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4xy(x-y)^2}\le\frac{1}{2}\frac{(4xy)+(x-y)^2}{2}=\frac{(x+y)^2}{4}$

$\Rightarrow(x+y)^2-4(x+y)\ge 0\Rightarrow x+y\ge 4$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}(x-y)^2=4xy\\x+y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)^2=8xy\\x+y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy=2\\x+y=4\end{cases}$

$\Rightarrow x$, y là hai nghiệm phương trình $t^2-4t+2=0\Leftrightarrow t=2\pm\sqrt{2}$.

Do $x>y\Rightarrow x=2+\sqrt{2}$, $y=2-\sqrt{2}$.

Vậy $MinP=4$ khi $x=2+\sqrt{2}$, $y=2-\sqrt{2}$.

DẠNG 3: QUA MỘT BƯỚC BIẾN ĐỔI RỒI SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI

Ví dụ 1. Cho a, b, $c>0$ và $ab+bc+ac=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+1}}.$$

Lời giải

Thay $1=ab+bc+ac$, ta được:

$$P=\frac{a}{\sqrt{a^2+ab+bc+ac}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+ab+bc+ac}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+ab+bc+ac}}$$

$$=\frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{b}{\sqrt{(b+a)(b+c)}}+\frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}$$

$$=\sqrt{\frac{a}{a+b}.\frac{a}{a+c}}+\sqrt{\frac{b}{b+a}.\frac{b}{b+c}}+\sqrt{\frac{c}{c+a}.\frac{c}{c+b}}$$

$$\le\frac{\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}}{2}+\frac{\frac{b}{b+a}+\frac{b}{b+c}}{2}+\frac{\frac{c}{c+a}+\frac{c}{c+b}}{2}$$

$$=\frac{\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}\right)+\left(\frac{a}{a+c}+\frac{c}{a+c}\right)+\left(\frac{b}{b+c}+\frac{c}{b+c}\right)}{2}=\frac{3}{2}$$

Vậy $MaxP=\frac{3}{2}$ khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ví dụ 2. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh:

$$\sqrt{\frac{ab}{c+ab}}+\sqrt{\frac{bc}{a+bc}}+\sqrt{\frac{ca}{b+ca}}\le\frac{3}{2}$$

Lời giải

Ta có $\sqrt{\frac{ab}{c+ab}}+\sqrt{\frac{bc}{a+bc}}+\sqrt{\frac{ca}{b+ca}}=\sqrt{\frac{ab}{c.1+ab}}+\sqrt{\frac{bc}{a.1+bc}}+\sqrt{\frac{ca}{b.1+ca}}$

$$=\sqrt{\frac{ab}{c(a+b+c)+ab}}+\sqrt{\frac{bc}{a(a+b+c)+bc}}+\sqrt{\frac{ca}{b(a+b+c)+ca}}$$

$$=\sqrt{\frac{ab}{(a+c)(b+c)}}+\sqrt{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}}+\sqrt{\frac{ac}{(b+c)(b+a)}}$$

$$=\sqrt{\frac{a}{a+c}.\frac{b}{c+b}}+\sqrt{\frac{b}{a+b}.\frac{c}{a+c}}+\sqrt{\frac{c}{b+c}.\frac{a}{b+a}}$$

$$\le\frac{1}{2}\left[\left(\frac{a}{c+a}+\frac{b}{c+b}\right)+\left(\frac{b}{a+b}+\frac{c}{a+c}\right)+\left(\frac{c}{b+c}+\frac{a}{a+b}\right)\right]=\frac{3}{2}\text{ (đpcm).}$$

Ví dụ 3. Cho $a>0$, $b>0$, $c>0$ và $ab+bc+ac=3abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P=\frac{a^2}{c(c^2+a^2)}+\frac{b^2}{a(a^2+b^2)}+\frac{c^2}{b(b^2+c^2)}.$$

Lời giải

Có $P=\frac{a^2}{c(c^2+a^2)}+\frac{b^2}{a(a^2+b^2)}+\frac{c^2}{b(b^2+c^2)}$

$$=\frac{a^2+c^2-c^2}{c(c^2+a^2)}+\frac{b^2+a^2-a^2}{a(a^2+b^2)}+\frac{c^2+b^2-b^2}{b(b^2+c^2)}$$

$$=\left(\frac{1}{c}-\frac{c}{c^2+a^2}\right)+\left(\frac{1}{a}-\frac{a}{a^2+b^2}\right)+\left(\frac{1}{b}-\frac{b}{b^2+c^2}\right)$$

$$\ge\left(\frac{1}{c}-\frac{c}{2\sqrt{c^2a^2}}\right)+\left(\frac{1}{a}-\frac{a}{2\sqrt{a^2b^2}}\right)+\left(\frac{1}{b}-\frac{b}{2\sqrt{b^2c^2}}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{2a}\right)+\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{2b}\right)+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{2c}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{ab+bc+ac}{2abc}=\frac{3}{2}.$$

Vậy $MinP=\frac{3}{2}$ khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 4. Cho $a>0$, $b>0$, $c>0$ và $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T=\frac{a}{1+9b^2}+\frac{b}{1+9c^2}+\frac{c}{1+9a^2}.$$

Lời giải

Có $T=\dfrac{a\left(1+9b^2\right)-9ab^2}{1+9b^2}+\dfrac{b\left(1+9c^2\right)-9bc^2}{1+9c^2}+\dfrac{c\left(1+9a^2\right)-9ca^2}{1+9a^2}$

$$=\left(a-\frac{9ab^2}{1+9b^2}\right)+\left(b-\frac{9bc^2}{1+9c^2}\right)+\left(c-\frac{9ca^2}{1+9a^2}\right)$$

$$\geq\left(a-\frac{9ab^2}{2\sqrt{1.9b^2}}\right)+\left(b-\frac{9bc^2}{2\sqrt{1.9c^2}}\right)+\left(c-\frac{9ca^2}{2\sqrt{1.9a^2}}\right)$$

$$=a+b+c-\frac{3}{2}(ab+bc+ac)\geq a+b+c-\frac{1}{2}(a+b+c)^2=\frac{1}{2}\quad(\text{do } a+b+c=1).$$

Vậy $MinT=\frac{1}{2}$ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Ví dụ 5. Cho a, b, $c>0$ và $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=2$. Chứng minh: $abc\leq\frac{1}{8}$.

Lời giải

Có $\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}+\dfrac{1}{1+c}=2$

$$\Rightarrow\frac{1}{1+a}=\left(1-\frac{1}{1+b}\right)+\left(1-\frac{1}{1+c}\right)=\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}\overset{\cos i}{\geq}2\sqrt{\frac{b}{1+b}\cdot\frac{c}{1+c}}=2\sqrt{\frac{bc}{(1+b)(1+c)}}.$$

Tương tự: $\dfrac{1}{1+b}\geq2\sqrt{\dfrac{ac}{(1+a)(1+c)}}$; $\dfrac{1}{1+c}\geq2\sqrt{\dfrac{ab}{(1+a)(1+b)}}$.

Nhân các bất đẳng thức dương, cùng chiều ta được:

$$\frac{1}{(1+a)(1+b)(1+c)}\geq\frac{8abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}\text{ hay } abc\leq\frac{1}{8}\ \text{(đpcm)}.$$

DẠNG 4: GHÉP CẶP ĐÔI

Tách $x+y+z=\frac{1}{2}(x+y)+\frac{1}{2}(y+z)+\frac{1}{2}(z+x)$.

$xyz=\sqrt{xy}.\sqrt{yz}.\sqrt{zx}\quad \forall x,y,z\ge 0$.

Ví dụ 1. Cho $a>0$, $b>0$, $c>0$ và $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh:

a) $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\ge a+b+c$;

b) $\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\ge\sqrt{3}$.

Lời giải

a) Có $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}=\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\right)$

$$\ge\frac{1}{2}.2\sqrt{\frac{bc}{a}.\frac{ca}{b}}+\frac{1}{2}.\sqrt{\frac{ca}{b}.\frac{ab}{c}}+\frac{1}{2}.\sqrt{\frac{ab}{c}.\frac{bc}{a}}=a+b+c \text{ (đpcm).}$$

b) Xét $\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right)^2=\frac{b^2c^2}{a^2}+\frac{c^2a^2}{b^2}+\frac{a^2b^2}{c^2}+2\left(a^2+b^2+c^2\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{b^2c^2}{a^2}+\frac{c^2a^2}{b^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{c^2a^2}{b^2}+\frac{a^2b^2}{c^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{b^2c^2}{a^2}\right)+2$$

$$\ge\frac{1}{2}.2\sqrt{\frac{b^2c^2}{a^2}.\frac{c^2a^2}{b^2}}+\frac{1}{2}.2\sqrt{\frac{c^2a^2}{b^2}.\frac{a^2b^2}{c^2}}+\frac{1}{2}.2\sqrt{\frac{a^2b^2}{c^2}.\frac{b^2c^2}{a^2}}$$

$=a^2+b^2+c^2+2=3$, do đó $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{2}\ge\sqrt{3}$ (đpcm).

Ví dụ 2. Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của ΔABC. Chứng minh $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\le abc$.

Lời giải

Vì a,b,c là độ dài ba cạnh của ΔABC nên

$$a+b-c>0, b+c-a>0, c+a-b>0.$$

Có $0<\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)}\le\frac{(a+b-c)+(b+c-a)}{2}=b$;

$0<\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)}\le\frac{(b+c-a)+(c+a-b)}{2}=c$;

$0<\sqrt{(c+a-b)(a+b-c)}\le\frac{(c+a-b)+(a+b-c)}{2}=a$;

Nhân ba đẳng thức dương cùng chiều ta được

$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\le abc$ (điều phải chứng minh).

DẠNG 5: DỰ ĐOÁN KẾT QUẢ RỒI TÁCH THÍCH HỢP

Bước 1: *Kẻ bảng dự đoán giái trị lớn nhất,nhỏ nhất và đạt tại giá trị nào của biến.*

Bước 2: *Kẻ bảng xác định số nào sẽ đi với nhau.*

Bước 3: *Tách ghép thích hợp số hạng và sử dụng bất đẳng thức Cô-si.*

Ví dụ 1. Cho $a\ge 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2a+\frac{5}{a}$.

Lời giải

Phân tích bài toán

a	2	3	4	…
P	$\frac{13}{2}\approx 6,5$	$\frac{23}{3}\approx 7,7$	$\frac{37}{4}\approx 9,25$	…

Từ bảng thứ nhất dự đoán $\min P = \frac{13}{2} \Leftrightarrow a = 2$.

	a	$\frac{1}{a}$
$a=2$	2	$\frac{1}{2}$

Từ bảng thứ hai, ta suy ra $\frac{1}{a}$ sẽ đi với $\frac{a}{4}$ nên $\frac{5}{a}$ sẽ đi với $\frac{5a}{4}$.

<u>Trình bày lời giải</u>

Có $P = \left(\frac{5}{a} + \frac{5a}{4}\right) + \frac{3a}{4} \ge 2\sqrt{\frac{5}{a}\cdot\frac{5a}{4}} + \frac{3a}{4} = 5 + \frac{3a}{4} \ge 5 + \frac{3.2}{4} = \frac{13}{2}$(do $a \ge 2$).

Vậy $\min P = \frac{13}{2}$ khi $\begin{cases} \frac{5}{a} = \frac{5a}{4} \\ a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow a = 2$ (thỏa mãn).

Ví dụ 2. Cho $x > 0,\ y > 0$ và $x + y \le 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = x + y + \frac{6}{x} + \frac{24}{y}$.

Lời giải

<u>Phân tích bài toán</u>

$(x\ ;\ y)$	$(1\ ;\ 5)$	$(2\ ;\ 4)$	$(3\ ;\ 3)$	$(4\ ;\ 2)$	$(5\ ;\ 1)$
F	$\frac{84}{5} = 16,8$	15	16	$\frac{39}{2} = 19,5$	$\frac{156}{5} = 31,2$

Từ bảng thứ nhất, ta dự đoán $\min F = 15$ khi $x = 2, y = 4$.

	x	$\frac{1}{x}$	y	$\frac{1}{y}$
$x=2, y=4$	2	$\frac{1}{2}$	4	$\frac{1}{4}$

Từ bảng thứ hai, ta suy ra $\frac{1}{x}$ sẽ đi với $\frac{x}{4}$ nên $\frac{6}{x}$ sẽ đi với $\frac{6x}{4} = \frac{3x}{2}$; $\frac{1}{y}$ sẽ đi với $\frac{y}{16}$ nên $\frac{24}{y}$ sẽ đi với $\frac{24y}{16} = \frac{3y}{4}$.

<u>Trình bày lời giải</u>

Có

$$F = \left(\frac{6}{x} + \frac{3x}{2}\right) + \left(\frac{24}{y} + \frac{3y}{2}\right) - \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right)$$

$$\ge 2\sqrt{\frac{6}{x}\cdot\frac{3x}{2}} + 2\sqrt{\frac{24}{y}\cdot\frac{3y}{2}} - \frac{1}{2}(x+y) = 18 - \frac{1}{2}(x+y)$$

$$\ge 18 - \frac{1}{2}\cdot 6 = 15 \text{ (do } x + y \le 6).$$

Vậy $\min F = 15$ khi $\frac{6}{x} = \frac{3x}{2}; \frac{24}{y} = \frac{3y}{2}; x + y = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$ (thỏa mãn).

Ví dụ 3. Cho $x > 0,\ y > 0$ và $x + y \ge 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2x^2 + y^2 + \frac{28}{x} + \frac{1}{y}$.

Lời giải

<u>Phân tích bài toán</u>

$(x;y)$	$(1;2)$	$(2;1)$
P	$\frac{69}{2}=34,5$	24

Từ bảng thứ nhất, ta dự đoán $\min P=24$ khi $x=2, y=1$.

	x	$\frac{1}{x}$	y	$\frac{1}{y}$
$x=2, y=1$	2	$\frac{1}{2}$	1	1

Từ bảng thứ hai, ta suy ra $\frac{1}{x}$ sẽ đi với $\frac{x}{4}$ nên $\frac{28}{x}$ sẽ đi với $\frac{28x}{4}=7x$; $\frac{1}{y}$ se đi với y.

<u>Trình bày lời giải</u>

Có

$$P=\left(\frac{28}{x}+7x\right)+\left(\frac{1}{y}+y\right)+2x^2+y^2-7x-y$$

$$=\left(\frac{28}{x}+7x\right)+\left(\frac{1}{y}+y\right)+2(x-2)^2+(y-1)^2+(x+y)-9$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{28}{x}\cdot 7x}+2\sqrt{\frac{1}{y}\cdot y}+0+0+3-9=24.$$

Vậy $\min P=24$ khi $\frac{28}{x}=7x; \frac{1}{y}=y; x-2=0; y-1=0; x+y=3 \Leftrightarrow x=2, y=1$.

Ví dụ 4. Cho $2\leq x\leq 3, 4\leq y\leq 6, 4\leq z\leq 6$ và $x+y+z=12$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=xyz$.

Lời giải

<u>Nhận xét:</u> Do y và z vai trò như nhau nên sử dụng bất đẳng thức Cô-si đối với tích yz, ta được $P=x(yz)\leq x\left(\frac{y+z}{2}\right)^2=\frac{1}{4}x(12-x)(12-x)$.

Đến đây ta kẻ bảng để dự đoán giá trị lớn nhất của P

x	2	3
P	50	$\frac{243}{4}=60,75$

Từ bảng thứ nhất dự đoán $\max P=\frac{243}{4}$ khi $x=3$.

	x	$12-x$
$x=3$	3	9

Từ bảng thứ hai, ta suy ra $3x$ sẽ đi với $12-x$ nên ta biến đổi

$$P\leq\frac{1}{12}[(3x)(12-x)(12-x)]\leq\frac{1}{12}\left(\frac{x+24}{3}\right)^3\leq\frac{1}{12}\left(\frac{3+24}{3}\right)^3\leq\frac{243}{4}.$$

Vậy $\max P=\frac{243}{4}$ khi $x=3, y=z=\frac{9}{2}$.

DẠNG 6: KẾT HỢP ĐẶT ẨN PHỤ VÀ DỰ ĐOÁN KẾT QUẢ

- Khi đặt ẩn phụ ta cần tìm điều kiện của ẩn phụ.
- Một số bất đẳng thức trung gian thường dùng:
  - Với mọi a,b thì $2\left(a^2+b^2\right)\geq(a+b)^2\geq 4ab$. Dấu bằng xảy ra khi $a=b$.

- Với mọi a,b,c thì $3\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)$. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$.
- Với mọi a,b thì $\frac{a^2+b^2}{2}\geq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\ \forall a,b;\frac{a^3+b^3}{2}\geq\left(\frac{a+b}{2}\right)^3\ \forall a+b\geq 0$. Dấu bằng xảy ra khi $a=b$.
- $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}\forall a>0,b>0$. Dấu bằng xảy ra khi $a=b$.
- $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{9}{a+b+c}\forall a>0,b>0,c>0$. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$.

Ví dụ 1. Cho $x>0,\ y>0$ và $\frac{x}{2}+\frac{8}{y}\leq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $K=\frac{x}{y}+\frac{2y}{x}$.

Lời giải

Đặt $a=\frac{x}{y}$, do $2\geq\frac{x}{2}+\frac{8}{y}\geq 2\sqrt{\frac{x}{2}.\frac{8}{y}}=4\sqrt{\frac{x}{y}}\Rightarrow\frac{x}{y}\leq\frac{1}{4}\Rightarrow 0<a\leq\frac{1}{4}$

Có
$$K=a+\frac{2}{a}=\left(\frac{2}{a}+32a\right)-31a\geq 2\sqrt{\frac{2}{a}.32a}-31a$$
$$=16-31a\geq 16-31.\frac{1}{4}=\frac{33}{4}\left(do\,0<a\leq\frac{1}{4}\right)$$

Vậy $MinK=\frac{33}{4}khi\,a=\frac{1}{4}hay\,x=2,y=8.$

Ví dụ 2. Cho $x>0,y>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\frac{(x+y+1)^2}{xy+x+y}+\frac{xy+x+y}{(x+y+1)^2}$

Đặt $a=\frac{(x+y+1)^2}{xy+x+y}\Rightarrow\frac{xy+x+y}{(x+y+1)^2}=\frac{1}{a}$

Do $(m+n+p)^2\geq 3(mn+np+pm)\Rightarrow(x+y+1)^2\geq 3(xy+x+y)\Rightarrow a\geq 3$

Vậy $MinA=\frac{10}{3}khi\,a=3\Rightarrow x=y=1.$

Ví dụ 3. Cho $x>0,y>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=\frac{x^2+y^2}{xy}+\frac{\sqrt{xy}}{x+y}$

Lời giải

Có $A=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}+\frac{\sqrt{xy}}{x+y}=\frac{(x+y)^2}{xy}+\frac{\sqrt{xy}}{x+y}-2=\left(\frac{x+y}{\sqrt{xy}}\right)^2+\frac{\sqrt{xy}}{x+y}-2$

Đặt $t=\frac{x+y}{\sqrt{xy}},do\,x+y\geq 2\sqrt{xy}\Rightarrow\frac{x+y}{\sqrt{xy}}\geq 2\Rightarrow t\geq 2$

Ta được $A=t^2+\frac{1}{t}-2=\left(\frac{t^2}{8}+\frac{1}{t}\right)+\frac{7}{8}t^2-2\overset{Cosi}{\geq}2\sqrt{\frac{t^2}{8}.\frac{1}{t}}+\frac{7}{8}t^2-2$

$=\sqrt{\frac{t}{2}}+\frac{7}{8}t^2-2\geq\sqrt{\frac{2}{2}}+\frac{7}{8}.2^2-2=\frac{5}{2}$ (do $t\geq 2$).

Vậy $MinA=\frac{5}{2}$ khi $t=2\Rightarrow x=y$.

Ví dụ 4. Cho $a>0,b>0,c>0$ thỏa mãn $b^2+c^2\le a^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{a^2}\left(b^2+c^2\right)+a^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$

Lời giải

Có $P=\frac{1}{a^2}\left(b^2+c^2\right)+a^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\ge\frac{2bc}{a^2}+\frac{2a^2}{bc}=2\left(\frac{bc}{a^2}+\frac{a^2}{bc}\right)$

Đặt $t=\frac{a^2}{bc}\ge\frac{b^2+c^2}{bc}\ge\frac{2bc}{bc}=2$ ta được

$P=2\left(t+\frac{1}{t}\right)=2\left[\left(\frac{t}{4}+\frac{1}{t}\right)+\frac{3t}{4}\right]\ge2\left[2\sqrt{\frac{t}{4}.\frac{1}{t}}+\frac{3t}{4}\right]=2\left(1+\frac{3t}{4}\right)\ge2\left(1+\frac{3.2}{4}\right)=5$ (do $t\ge2$).

Vậy $MinP=5$ khi $\begin{cases}b=c\\ b^2+c^2=a^2\end{cases}\Leftrightarrow b=c=\frac{a}{\sqrt{2}}$

Ví dụ 5. Cho $x>0,y>0$ và $x+y\le1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right).\sqrt{1+x^2y^2}$

Lời giải

Có $P\ge\left(2\sqrt{\frac{1}{x}.\frac{1}{y}}\right).\sqrt{1+x^2y^2}=2\sqrt{\frac{1}{x.y}+xy}$

Đặt $a=xy$, do $xy\le\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\le\frac{1}{4}\Rightarrow0<a\le\frac{1}{4}$, ta được

$P\ge2\sqrt{\frac{1}{a}+a}=2\sqrt{\left(\frac{1}{a}+16a\right)-15a}\ge2\sqrt{2\sqrt{\frac{1}{a}.16a}-15a}=2\sqrt{8-15a}\ge2.\sqrt{8-15.\frac{1}{4}}=\sqrt{17}\left(do\,0<a\le\frac{1}{4}\right)$

$\Rightarrow MinP=\sqrt{17}\,khi\,a=\frac{1}{4}hay\,x=y=\frac{1}{2}$

Ví dụ 6: Cho $x>0,y>0$ và $x+y\le1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{xy}+4xy$.

Lời giải

Có $P=\left(\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{2xy}\right)+\left(\frac{1}{2xy}+4xy\right)$. Sử dụng $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}\forall a,b>0$, ta được

$\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{2xy}\ge\frac{4}{x^2+y^2+2xy}=\frac{4}{(x+y)^2}\ge\frac{4}{1^2}=4(do\,0<x+y\le1)$. Suy ra $P\ge4+\left(\frac{1}{2xy}+4xy\right)$.

Đặt a = xy, $do\,xy\le\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\le\frac{1}{4}\Rightarrow0<a\le\frac{1}{4}$ ta được

$P\ge4+\left(\frac{1}{2a}+4a\right)=4+\left(\frac{1}{2a}+8a\right)-4a\ge4+2\sqrt{\frac{1}{2a}.8a}-4a=8-4a\ge8-4.\frac{1}{4}=7(do\,0<a\le\frac{1}{4})$

$MinP=7\,khi\,x=y=\frac{1}{2}$

Ví dụ 7: Cho x,y >0 và $x+y\le1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $K=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2$

Lời giải

Cách 1: Sử dụng $\dfrac{a^2+b^2}{2}\ge\left(\dfrac{a+b}{c}\right)^2\ \forall a,b$ và $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\ge\dfrac{4}{a+b}\ \forall a,b>0.$

ta được $K=2.\dfrac{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{y}\right)^2}{2}\ge 2.\left(\dfrac{x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y}}{2}\right)^2\ge\dfrac{1}{2}\left(x+y+\dfrac{4}{x+y}\right)^2$

Đặt $a=x+y$, điều kiện $0<a\le 1$, ta được:

$$K\ge\frac{1}{2}\left(a+\frac{4}{a}\right)^2=\frac{1}{2}\left[\left(a+\frac{1}{a}\right)+\frac{3}{a}\right]^2\ge\frac{1}{2}\left[2\sqrt{a.\frac{1}{a}}+\frac{3}{a}\right]^2$$

$=\dfrac{1}{2}\left(2+\dfrac{3}{a}\right)^2\ge\dfrac{1}{2}.\left(2+\dfrac{3}{1}\right)^2=\dfrac{25}{2}$ (do $0<a\le 1$). Vậy, $MinK=\dfrac{25}{2}$ khi $x=y=\dfrac{1}{2}.$

Cách 2: $K=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{y}\right)^2=\left(x^2+y^2\right)+\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\right)+4\ge 2.\left(xy+\dfrac{1}{xy}\right)+4.$

Đặt $a=xy$, do $xy\le\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2\le\dfrac{1}{4}\Rightarrow 0<a\le\dfrac{1}{4}$. Ta được:

$K\ge 2.\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{15}{4a}\right)+4\ge 2.\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{15}{4.\dfrac{1}{4}}\right)+4=\dfrac{25}{2}\ \left(do\ 0<a\le\dfrac{1}{4}\right)$. Vậy, $MinK=\dfrac{25}{2}$ khi $x=y=\dfrac{1}{2}.$

Ví dụ 8: Cho $x>0,y>0$ và $x+y\le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S=\left(1+x+\frac{1}{x}\right)^3+\left(1+y+\frac{1}{y}\right)^3$$

Lời giải

Sử dụng $\dfrac{a^3+b^3}{2}\ge\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3\ \forall a+b\ge 0$ và $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\ge\dfrac{4}{a+b}\ \forall a+b>0$, ta được

$$S=2.\frac{\left(1+x+\dfrac{1}{x}\right)^3+\left(1+y+\dfrac{1}{y}\right)^3}{2}\ge 2\left(\frac{1+x+\dfrac{1}{x}+1+y+\dfrac{1}{y}}{2}\right)^3$$

Đặt $a=x+y$, điều kiện $0<a\le 1$, ta được

$$S\ge\frac{1}{4}\left(2+a+\frac{4}{a}\right)^3=\frac{1}{4}\left[2+\left(a+\frac{1}{a}\right)+\frac{3}{a}\right]^3\ge\frac{1}{4}\left[2+2\sqrt{a.\frac{1}{a}}+\frac{3}{a}\right]^3=\frac{1}{4}\left(4+\frac{3}{a}\right)^3\ge\frac{1}{4}\left(4+\frac{3}{1}\right)^3=\frac{343}{4}$$

Vậy $\text{MinS}=\dfrac{343}{4}$ khi $x=y=\dfrac{1}{2}$

DẠNG 7: TÌM LẠI ĐIỀU KIỆN CỦA ẨN

Ví dụ 1. Cho $x, y > 0$ và $2x^2 + 2xy + y^2 - 2x \le 8$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{2}{x} + \frac{4}{y} - 2x - 3y$.

Lời giải

Có $2x^2 + 2xy + y^2 - 2x \le 8 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2x + 1 \le 9$

$\Leftrightarrow (x+y)^2 + (x-1)^2 \le 9$, mà $(x+y)^2 \le (x+y)^2 + (x-1)^2 \Rightarrow (x+y)^2 \le 9 \Rightarrow 0 < x + y \le 3$

Có $P = \left(\frac{2}{x} + 2x\right) + \left(\frac{4}{y} + y\right) - 4x - 4y \ge 2\sqrt{\frac{2}{x}.2x} + 2\sqrt{\frac{4}{y}.y} - 4(x+y)$

$= 8 - 4(x+y) \ge 8 - 4.3 = -4$ (do $0 < x + y \le 3$). Vậy $\text{MinP} = -4$ khi $x = 1, y = 2$.

Ví dụ 2: Cho $a > 0, b > 0, c > 0$ thỏa mãn $2\left(b^2 + bc + c^2\right) = 3\left(3 - a^2\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = a + b + c + \frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c}$

Lời giải

Có $2\left(b^2 + bc + c^2\right) = 3\left(3 - a^2\right) \Leftrightarrow 3a^2 + 2b^2 + 2bc + 2c^2 = 9$

$\Leftrightarrow 3a^2 + 2b^2 + 2bc + +2ab + 2ac + 2c^2 - 2ab - 2ac = 9$

$\Leftrightarrow \left(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca\right) + \left(a^2 + b^2 - 2ab\right) + \left(a^2 + c^2 - 2ac\right) = 9$

$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 + (a-b)^2 + (a-c)^2 = 9 \Rightarrow (a+b+c)^2 \le 9 \Rightarrow 0 < a + b + c \le 3$

Sử dụng $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \ge \frac{9}{a+b+c}$ ta được $T \ge a + b + c + \frac{18}{a+b+c}$

Đặt $x = a + b + c, 0 < x \le 3$, ta được

$T \ge x + \frac{18}{x} = \left(\frac{18}{x} + 2x\right) - x \ge 2\sqrt{\frac{18}{x}.2x} - x = 12 - x \ge 12 - 3 = 9$ (do $0 < x \le 3$)

Vậy $MinT = 9$ khi $x = 3$ hay $a = b = c = 1$

Ví dụ 3: Cho $a > 0, b > 0$ và $a^3 + b^3 + 6ab \le 8$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
$P = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{3}{ab} + ab$

Lời giải

Có $a^3 + b^3 + 6ab \le 8 \Leftrightarrow a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 - 3a^2b - 3ab^2 + 6ab \le 8$

$\Leftrightarrow (a+b)^3 - 3ab(a+b-2) \le 8 \Leftrightarrow (a+b)^3 - 2^3 - 3ab(a+b-2) \le 0$

$\Leftrightarrow (a+b-2)\left[(a+b)^2 + 2(a+b) + 4\right] - 3ab(a+b-2) \le 0$

$\Leftrightarrow (a+b-2)\left(a^2 + b^2 - ab + 2a + 2b + 4\right) \le 0$

$\Leftrightarrow (a+b-2)\left(2a^2 + 2b^2 - 2ab + 4a + 4b + 8\right) \le 0$

$\Leftrightarrow (a+b-2)\left[(a-b)^2 + (a+2)^2 + (b+2)^2\right] \le 0$

$\Leftrightarrow 0 < a + b \le 2$

Có $P=\left(\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{2ab}\right)+\left(\frac{5}{2ab}+ab\right)$

Sử dụng $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}\ \forall x,y>0$, ta được:

$\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{2ab}\ge\frac{1}{a^2+2ab+b^2}=\frac{4}{(a+b)^2}\ge\frac{4}{2^2}=1$ (do $0<a+b\le 2$)

Suy ra $P\ge 1+\left(\frac{5}{2ab}+ab\right)$

Đặt $x=ab$, do $ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\le\frac{2^2}{2}=1\Rightarrow 0<x\le 1$, ta được:

$P\ge 1+\left(\frac{5}{2x}+x\right)=1+\left(\frac{5}{2x}+\frac{5x}{2}\right)-\frac{3x}{2}$

$\ge 1+2\sqrt{\frac{5}{2x}.\frac{5x}{2}}-\frac{3x}{2}=6-\frac{3x}{2}=6-\frac{3.1}{2}=\frac{9}{2}$ (do $0<x\le 1$)

Vậy $MinP=\frac{9}{2}$ khi $a=b=1$

Ví dụ 4: Cho $a>0,b>0$ và $a^2+b^2=a+b$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=a^4+b^4+\frac{2020}{(a+b)^2}$$

Lời giải

Sử dụng $\frac{x^2+y^2}{2}\ge\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$, ta được

$*\quad a+b=a^2+b^2=2.\frac{a^2+b^2}{2}\ge 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(a+b)^2}{2}\Rightarrow 1\ge\frac{a+b}{2}\Rightarrow 0<a+b\le 2$

$*\quad P=2.\frac{(a^2)^2+(b^2)^2}{2}+\frac{2020}{(a+b)^2}\ge 2\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2+\frac{2020}{(a+b)^2}=\frac{(a+b)^2}{2}+\frac{2020}{(a+b)^2}$

Đặt $x=(a+b)^2$,),$0<x\le 4$, ta được:

$P=\frac{x}{2}+\frac{2020}{x}=\left(\frac{x}{2}+\frac{8}{x}\right)+\frac{2012}{x}\ge 2\sqrt{\frac{x}{2}.\frac{8}{x}}+\frac{2012}{x}$

$=4+\frac{2012}{x}\ge 4+\frac{2012}{4}=50$ (do $0<x\le 4$)

Vậy $MinP=507$ khi $x=4$ hay $a=b=1$

Ví dụ 5: Cho $x>0,y>0$ và $\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{y}+1\right)\ge 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}$

Lời giải

Có $\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{y}+1\right)\ge 4\Leftrightarrow\sqrt{xy}+\sqrt{x}+\sqrt{y}\ge 3\Leftrightarrow 3\le\sqrt{xy}+\sqrt{x.1}+\sqrt{y.1}$

Mà $\sqrt{xy}+\sqrt{x.1}+\sqrt{y.1}\le\frac{x+y}{2}+\frac{x+1}{2}+\frac{y+1}{2}=x+y+1$, suy ra $x+y\ge 2$

Có $P=\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=\left(\frac{x^2}{y}+y\right)+\left(\frac{y^2}{x}+x\right)-(x+y)$

$$\geq 2\sqrt{\frac{x^2}{y}.y}+2\sqrt{\frac{y^2}{x}.x}-(x+y)=x+y\geq 2$$

Vậy $MinP=2$ khi $x=y=1$

II. BẤT ĐẲNG THỨC BUNHIA

1. *Dạng bộ hai số $(a;b)$ và $(x;y)$ bất kỳ*

- $(ax+by)^2\leq(a^2+b^2)(x^2+y^2)$

  Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x}{a}=\frac{y}{b}$

- Đặc biệt $(x+y)^2=(1.x+1.y)^2\leq(1^2+1^2)(x^2+y^2)$

2. *Dạng bộ ba số $(a;b;c)$ và $(x;y;z)$ bất kì*

- $(ax+by+cz)^2\leq(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$

  Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$

- Đặc biệt $(x+y+z)^2=(1.x+1.y+1.z)^2\leq(1^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+z^2)$

3. *Dạng tổng quát bộ n số $(a_1;a_2;\ldots;a_n)$ và $(x_1;x_2;\ldots;x_n)$*

- $(a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n)^2\leq(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)$

  Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x_1}{a_1}=\frac{x_2}{a_2}=\ldots=\frac{x_n}{a_n}$

  Quy ước trong dấu "=" xảy ra, nếu mẫu nào bằng 0 thì tử tương ứng bằng 0.

Ví dụ 1. Cho 4x + 9y = 13. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 4x^2 + 9y^2$

Lời giải

Có $13^2 = (4x + 9y)^2 = (2.2x + 3.3y)^2 \overset{\text{Bunhia}}{\leq} (2^2 + 3^2)(4x^2 + 9y^2) = 13A \Rightarrow A \geq 13$

Ví dụ 2. Cho 4x + 3y = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 4x^2 + 3y^2$

Lời giải

Có $1^2 = (4x + 3y)^2 = (2.2x + \sqrt{3}\,.\,\sqrt{3}y)^2 \overset{\text{Bunhia}}{\leq} (4 + 3)(4x^2 + 3y^2) = 7A \Rightarrow A \geq \frac{1}{7}$

Vậy MinA = $\frac{1}{7}$ khi $\begin{cases}\frac{2x}{3y}=\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{3}}\\ 4x+3y=1\end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{7}$

Ví dụ 3. Cho $x \geq 0$; $y \geq 0$; $z \geq 0$ và x + y + z = 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2 + y^2 + z^2$

Lời giải

Có $2^2 = (1.x + 1.y + 1.z)^2 \overset{\text{Bunhia}}{\leq} (1^2 + 1^2 + 1^2)(x^2 + y^2 + z^2) = 3A \Rightarrow A \geq \frac{4}{3}$

Vậy MinA = $\frac{4}{3}$ khi $\begin{cases} \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \\ x + y + z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{2}{3}$

Ví dụ 4. Cho $3x^2 + 2y^2 = \frac{6}{35}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 2x + 3y$

Lời giải

Có $S^2 = (2x + 3y)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} . \sqrt{3}x + \frac{3}{\sqrt{2}} . \sqrt{2}y\right)^2$

$\overset{\text{Bunhia}}{\leq} \left(\frac{4}{3}+\frac{9}{2}\right)\left(3x^2+2y^2\right)=\frac{35}{6}\left(3x^2+2y^2\right)\leq\frac{35}{6}.\frac{6}{35}=1 \Rightarrow S\leq 1$

Vậy MaxS = 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\frac{\sqrt{3}x}{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}y}{3}}{\sqrt{2}} \\ 2x + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x}{2} = \frac{2y}{3} \\ 2x + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4y}{9} \\ \frac{8y}{9} + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{35} \\ y = \frac{9}{35} \end{cases}$

Ví dụ 5. Cho $4a^2 + 25b^2 \leq \frac{1}{10}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $H = 6a – 5b$

Lời giải

Có $H^2 = (6a – 5b)^2 = (3.2a + (–1) .5b)^2$

$\overset{\text{Bunhia}}{\leq} (9 + 1)(4a^2 + 25b^2) = 10(4a^2 + 25b^2) \leq 10.\frac{1}{10} = 1 \Rightarrow H \leq 1$

Vậy MaxH = 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2a}{3} = \frac{5b}{-1} \\ 6a - 5b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 15b = 0 \\ 18a - 15b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{20} \\ b = -\frac{1}{50} \end{cases}$

Ví dụ 6. Cho $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{3}{4}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x + y + z$

Lời giải

Có $P^2 = (1.x + 1.y + 1.z)^2 \overset{\text{Bunhia}}{\leq} (1^{2+} + 1^2 + 1^2)(x^2 + y^2 + z^2) = 3.\frac{3}{4} = \frac{19}{4} \Rightarrow P \leq \frac{3}{2}$

Vậy MaxP = $\frac{3}{2}$ khi $\begin{cases} \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \\ x + y + z = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{2}$

Ví dụ 7. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{x - 1} + \sqrt{3 - x}$ khi $1 \leq x \leq 3$

Lời giải

Có $P^2 = \left(1.\sqrt{x - 1} + 1.\sqrt{3 - x}\right)^2 \overset{\text{Bunhia}}{\leq} \left(1^2 + 1^2\right)\left(\sqrt{x - 1}^2 + \sqrt{3 - x}^2\right) = 4 \Rightarrow P \leq 2$

Vậy MaxP = 2 khi $\frac{\sqrt{x-1}}{1}=\frac{\sqrt{3-x}}{1} \Leftrightarrow x = 2$ (thỏa mãn)

Ví dụ 8. Cho a ≥ 0, b ≥ 0, c ≥ 0 và a + b + c = 3. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $K = \sqrt{4a+5} + \sqrt{4b+5} + \sqrt{4c+5}$

Lời giải

Có $K^2 = \left(1.\sqrt{4a+5} + 1.\sqrt{4b+5} + 1.\sqrt{4c+5}\right)^2$

$$\overset{\text{Bunhia}}{\leq} (1^2 + 1^2 + 1^2)(4a + 5 + 4b + 5 + 4c + 5)$$

$$= 3[4(a + b + c) + 15] = 3(4.3 + 15) = 81 \Rightarrow K \leq 9$$

Vậy MaxK = 9 khi $\begin{cases}\frac{\sqrt{4a+5}}{1}=\frac{\sqrt{4b+5}}{1}=\frac{\sqrt{4c+5}}{1}\\ a+b+c=3\end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1$

Ví dụ 9. Cho a ≥ 0, b ≥ 0, c ≥ 0 và a + b + c = 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} + \sqrt{a+b}$$

Lời giải

Có $P^2 = \left(1.\sqrt{b+c} + 1.\sqrt{c+a} + 1.\sqrt{a+b}\right)^2$

$$\overset{\text{Bunhia}}{\leq} (1^2 + 1^2 + 1^2)\left(\sqrt{b+c}^2 + \sqrt{c+a}^2 + \sqrt{a+b}^2\right)$$

$$= 6(a + b + c) = 6 \Rightarrow P \leq \sqrt{6}$$

Vậy MaxP = $\sqrt{6}$ khi $\begin{cases}\frac{\sqrt{a+b}}{1}=\frac{\sqrt{b+c}}{1}=\frac{\sqrt{c+a}}{1}\\ a+b+c=1\end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$

Ví dụ 10. Cho a, b, c ≥ 0 và $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = \sqrt{\frac{a+b}{2}} + \sqrt{\frac{b+c}{2}} + \sqrt{\frac{c+a}{2}}$$

Lời giải

Ta có $\begin{cases}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=\left(1.\sqrt{a}+1.\sqrt{b}\right)^2 \overset{\text{Bunhia}}{\leq} \left(1^2+1^2\right)(a+b)=2(a+b)\\ \left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2=\left(1.\sqrt{b}+1.\sqrt{c}\right)^2 \overset{\text{Bunhia}}{\leq} \left(1^2+1^2\right)(b+c)=2(b+c)\\ \left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)^2=\left(1.\sqrt{c}+1.\sqrt{a}\right)^2 \overset{\text{Bunhia}}{\leq} \left(1^2+1^2\right)(c+a)=2(c+a)\end{cases}$

Suy ra $\sqrt{a}+\sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)}, \sqrt{b}+\sqrt{c} \leq \sqrt{2(b+c)}, \sqrt{c}+\sqrt{a} \leq \sqrt{2(c+a)}$

$$\Rightarrow 2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right) \leq \sqrt{2}\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \leq \sqrt{\frac{a+b}{2}}+\sqrt{\frac{b+c}{2}}+\sqrt{\frac{c+a}{2}} \text{ hay } M \geq 3$$

Vậy MinM = 3 khi a = b = c = 1

III. PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

DẠNG 1: ĐƯA VỀ BÌNH PHƯƠNG

- $A^2 \pm m \geq 0 \pm m$; $-A^2 \pm m \leq 0 \pm m$
  Dấu "=" xảy ra khi A = 0.
- $A^2 + B^2 \pm m \geq 0 + 0 \pm m$; $-A^2 - B^2 \pm m \leq 0 + 0 \pm m$
  Dấu "=" xảy ra khi A = 0, B = 0.

Ví dụ 1. Cho $x \geq -2$; $y \geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = x + y - 2\sqrt{x+2} - 4\sqrt{y-1} + 24.$$

Lời giải

Có $A = \left(x + 2 - 2\sqrt{x+2} + 1\right) + \left(y - 1 - 4\sqrt{y-1} + 4\right) + 18$

$= \left(\sqrt{x+2} - 1\right)^2 + \left(\sqrt{y-1} - 2\right)^2 + 18 \geq 0 + 0 + 18 = 18$

Vậy MinA = 18 khi $\begin{cases}\sqrt{x+2} = 1\\ \sqrt{y-1} = 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = -1\\ y = 5\end{cases}$ (thỏa mãn)

Ví dụ 2. Cho $x \geq -\frac{1}{3}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $E = 5x - 6\sqrt{2x+7} - 4\sqrt{3x+1} + 2$.

Lời giải

Có $E = \left(2x + 7 - 6\sqrt{2x+7} + 9\right) + \left(3x + 1 - 4\sqrt{3x+1} + 4\right) - 19$

$= \left(\sqrt{2x+7} - 3\right)^2 + \left(\sqrt{3x+1} - 2\right)^2 - 19 \geq 0 + 0 - 19 = -19$

Vậy MinA = - 19 khi $\begin{cases}\sqrt{2x+7} = 3\\ \sqrt{3x+1} = 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x + 7 = 9\\ 3x + 1 = 4\end{cases} \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn)

Ví dụ 3. Cho $x \geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = x - \sqrt{x-1} - 3\sqrt{x+7} + 28.$$

Lời giải

Xét $2T = 2x - 2\sqrt{x-1} - 6\sqrt{x+7} + 56$

$= \left(x - 1 - 2\sqrt{x-1} + 1\right) + \left(x + 7 - 6\sqrt{x+7} + 9\right) + 40$

$= \left(\sqrt{x-1} - 1\right)^2 + \left(\sqrt{x+7} - 3\right)^2 + 40 \geq 0 + 0 + 40 = 40 \Rightarrow T \geq 20$

Vậy Min $T = 20$ khi $\begin{cases}\sqrt{x-1} = 1\\ \sqrt{x+7} = 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x - 1 = 1\\ x - 7 = 9\end{cases} \Leftrightarrow x = 2$ (thỏa mãn)

Ví dụ 4. Cho $x \geq \sqrt{15}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$F = x^2 + x - \sqrt{\left(x^2 - 15\right)\left(x - 3\right)} - \sqrt{x^2 - 15} - \sqrt{x - 3} - 38.$$

Lời giải

Xét $2F = 2x^2 + 2x - 2\sqrt{\left(x^2 - 15\right)\left(x - 3\right)} - 2\sqrt{x^2 - 15} - \sqrt{x - 3} - 76$

$=\left(x^2-15+x-3-2\sqrt{\left(x^2-15\right)\left(x-3\right)}\right)+\left(x^2-15-2\sqrt{x^2-15}+1\right)+\left(x-3-2\sqrt{x-3}+1\right)$

$=\left(\sqrt{x^2-15}-\sqrt{x-3}\right)^2+\left(\sqrt{x^2-15}-1\right)^2+\left(\sqrt{x-3}-1\right)^2-42\geq 0+0-42=-42$

$\Rightarrow F\geq -21$

Vậy Min $F=-21$ khi $\sqrt{x^2-15}=\sqrt{x-3}=1\Leftrightarrow x=4$ (thỏa mãn)

Ví dụ 5. Cho $a>0,b>0,c>0$ và $a+b+c=6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$\mathrm{T}=\sqrt{a^2+4ab+b^2}+\sqrt{b^2+4ab+c^2}+\sqrt{c^2+4ca+a^2}.$$

Lời giải

Chú ý: Với $x>0,y>0,$ ta có

$$x^2+4xy+y^2=\frac{6\left(x+y\right)^2-2\left(x-y\right)^2}{4}\leq\frac{6\left(x+y\right)^2}{4}$$

$$\Rightarrow\sqrt{x^2+4xy+y^2}\leq\frac{\left(x+y\right)\sqrt{6}}{2}.$$

Vận dụng vào bài toán, ta có

$$\mathrm{T}\leq\frac{\left(a+b\right)\sqrt{6}}{2}+\frac{\left(b+c\right)\sqrt{6}}{2}+\frac{\left(c+a\right)\sqrt{6}}{2}=\left(a+b+c\right)\sqrt{6}=6\sqrt{6}$$

Vậy $\mathrm{MaxT}=6\sqrt{6}$ khi a = b = c =2.

Ví dụ 6. Cho $a>0,b>0,c>0$, $x+y+z=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$\mathrm{S}=\sqrt{x^2-xy+y^2}+\sqrt{y^2-yz+z^2}+\sqrt{z^2-zx+z^2}.$$

Lời giải

Chú ý: Với $x>0,y>0,$ ta có

$$a^2-ab+b^2=\frac{\left(a+b\right)^2+3\left(a+b\right)^2}{4}\geq\frac{\left(a+b\right)^2}{4}$$

$$\Rightarrow\sqrt{a^2-ab+b^2}\geq\frac{a+b}{2}$$

Vận dụng vào bài toán, ta có $\quad S\geq\frac{x+y}{2}+\frac{y+z}{2}+\frac{z+x}{2}=x+y+z=1.$

Vậy $\mathrm{MinS}=1$ khi $x=y=z=\frac{1}{3}.$

DẠNG 2: TẠO RA BẬC HAI BẰNG CÁCH NHÂN HAI BẬC MỘT

- $m\leq x\leq n\Rightarrow\left(x-m\right)\left(x-n\right)\leq 0.$
- $m\leq\sqrt{x}\leq n\Rightarrow\left(\sqrt{x}-m\right)\left(\sqrt{x}-n\right)\leq 0.$

Ví dụ 1. Cho $-2\leq a,b,c\leq 3$ và $a^2+b^2+c^2=22.$
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=a+b+c.$

Lời giải

Vì $-2\leq a\leq 3$ nên $a+2\geq 0,a-3\leq 0.$

Suy ra $\left(a+2\right)\left(a-3\right)\leq 0\Leftrightarrow a^2-a-6\leq 0\Leftrightarrow a\geq a^2-6.$

Tương tự, ta cũng tìm được $b\geq b^2-6,c\geq c^2-6$

Do đó $M=a+b+c\geq a^2+b^2+c^2-18=22-18=4.$

Vậy MinM =4 khi $\begin{cases} a=-2, a=3 \\ b=-2, b=3 \\ c=-2, c=3 \\ a+b+c=4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=3, c=-2 \\ a=c=3, b=-2 \\ b=c=3, a=-2 \end{array}\right.$

Ví dụ 2. Cho $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ thỏa mãn $x+y+z=6$.
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=x^2+y^2+z^2$.

Lời giải

❖ **Tìm MinA**

Cách 1 (Sử dụng bất đẳng thức Bunhia)

Có $6^2=(1.x+1.y+1.z)^2 \overset{Bunhia}{\leq} (1^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+z^2)=3A \Rightarrow A \geq 12.$

Vậy MinA = 12 khi $\begin{cases} \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1} \\ x+y+z=6 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=2.$

Cách 2 (Sử dụng bất đẳng thức Côsi – dự đoán min đạt tại x=y=z=2)

Có $A=x^2+y^2+z^2=(x^2+4)+(y^2+4)+(z^2+4)-12$

$\geq 2\sqrt{x^2.4}+2\sqrt{y^2.4}+2\sqrt{z^2.4}-12=4(x+y+z)-12=4.6-12=12.$

Vậy MinA $=12$ Khi $x=y=z=2.$

❖ **Tìm MaxA**

Có $x, y, z \geq 0$ và $x+y+z=6$ nên $0 \leq x, y, z \leq 6.$

$\Rightarrow x(x-6)+y(y-6)+z(z-6) \leq 0$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2 \leq 6(x+y+z)=6.6=36 \Rightarrow A \leq 36.$

Vậy $\text{MaxA}=36$ khi $\begin{cases} x=0, x=6 \\ y=0, y=6 \\ z=0, z=6 \\ x+y+z=6 \end{cases}$ hay $(x;y;z)$ là hoán vị của $(0;0;6).$

Ví dụ 3. Cho $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ thỏa mãn $a+b+c=3.$
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $K=\sqrt{3a+1}+\sqrt{3b+1}+\sqrt{3c+1}.$

Lời giải

❖ **Tìm MaxK**

Cách 1 (Sử dụng bất đẳng thức Bunhia)

Xét $K^2=\left(1.\sqrt{3a+1}+1.\sqrt{3b+1}+1.\sqrt{3c+1}\right)^2$

$\overset{Bunhia}{\leq} (1^2+1^2+1^2)(3a+1+3b+1+3c+1)=9(a+b+c+1)=36 \Rightarrow K \leq 6.$

Vậy $\text{MaxK}=6$ khi $a=b=c=1.$

Cách 2 (Sử dụng bất đẳng thức Côsi – dự đoán min đạt tại a=b=c=1)

$K=\sqrt{3a+1}+\sqrt{3b+1}+\sqrt{3c+1}=\dfrac{1}{2}\left[\sqrt{(3a+1).4}+\sqrt{(3b+1).4}+\sqrt{(3c+1).4}\right]$

$$\le \frac{1}{2}\left[\frac{(3a+1)+4}{2}+\frac{(3b+1)+4}{2}+\frac{(3c+1)+4}{2}\right]=\frac{3(a+b+c)+15}{4}=\frac{3.3+15}{4}=6.$$

Vậy Max $K=6$ khi $a=b=c=1$.

❖ **Tìm MinA**

Có $a+b+c=3 \Leftrightarrow 3a+3b+3c=9 \Leftrightarrow (3a+1)+(3b+1)+(3c+1)=12.$

Đặt $x=3a+1, y=3b+1, z=3c+1 \Rightarrow x,y,z \ge 1$ và $x+y+z=12.$

Từ $x,y,z\ge 1$ và $x+y+z=12 \Rightarrow 1\le x,y,z \le 10$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{10}\right)\le 0 \Rightarrow x-\left(\sqrt{10}+1\right)\sqrt{x}+\sqrt{10}\le 0 \Rightarrow \sqrt{x}\ge \frac{x+\sqrt{10}}{\sqrt{10}+1}.$$

Tương tự $\sqrt{y}\ge \frac{y+\sqrt{10}}{\sqrt{10}+1}, \sqrt{z}\ge \frac{z+\sqrt{10}}{\sqrt{10}+1}$, suy ra

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\ge \frac{x+y+z+3\sqrt{10}}{\sqrt{10}+1} \Rightarrow K\ge \frac{12+3\sqrt{10}}{\sqrt{10}+1}=\sqrt{10}+2.$$

Vậy MinK$=\sqrt{10}+2$ khi (x,y,z) là hoán vị của $(1;1;10)$ nên $(a;b;c)$ hoán vị của $(0;0;3)$.

DẠNG 3: TẠO RA ab+bc+ca

- $0\le a,b,c\le m \Rightarrow (m-a)(m-b)(m-c)\ge 0$
- $0\le a,b,c\le m \Rightarrow (m-a)(m-b)+(m-a)(m-c)+(m-b)(m-c)\ge 0$

Ví dụ 1. Cho $0\le a,b,c\le 2$ và $a+b+c=3.$ Chứng minh $ab+bc+ca\ge 2.$

Lời giải

Do $0\le a,b,c\le 2$ nên $(2-a)(2-b)(2-c)\ge 0$

$\Rightarrow 8-4(a+b+c)+2(ab+bc+ca)-abc\ge 0$

$\Rightarrow 8-4.3+2(ab+bc+ca)-abc\ge 0$ (do $a+b+c=3$)

$\Rightarrow ab+bc+ca\ge 2+\frac{abc}{2}$, mà $2+\frac{abc}{2}\ge 2$ nên $ab+bc+ca\ge 2$ (đpcm).

Ví dụ 2: Cho a$\ge$1, b $\ge$1, c $\ge$ 1 và ab+bc+ca =9.
Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: P =$a^2+b^2+c^2$

Lời giải:

* Tìm Min P

Có $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \ge 0 \Rightarrow a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca \Rightarrow P \ge 9$.

Vậy MinP =9 khi a = b= c = $\sqrt{3}$

* Tìm MãP

Do a $\ge$1, b$\ge$1, c $\ge$1 => (a-1)(b-1) +(b-1)(c-1) +(c-1)(a-1) $\ge$0

<=> (ab+ bc +ca) -2(a+b+c) +3 $\ge$ 0 <=> a+ b+ c $\le$ 6

<=> $a^2+b^2+c^2$ +2(ab+bc+ca) $\le$ 36 <=> P $\le$ 18

Vậy MaxP=18 khi (a,b,c) là hoán vị của (1;1;4)

DẠNG 4: SỬ DỤNG TÍNH CHẤT TRONG BA SỐ BẤT KÌ LUÔN TỒN TẠI HAI SỐ CÓ TÍCH KHÔNG ÂM

Tính chất 1: Nếu -1 $\le$ a $\le$1 thì $a^n \le |a| \quad \forall n \in N^*$

Dấu "=" xảy ra khi a=0 hoặc a=1 nếu n lẻ, khi a=0 hoặc a= $\pm$ 1 nếu n chẵn

Tính chất 2: Nếu hai số a và b có tích ab $\ge$ 0 thì $|a|+|b|=|a+b|$

Tính chất 3: Với ba số x, y, z bất kỳ, luôn tồn tại hai số có tích không âm.

Bài toán cơ bản: Cho -1 $\le$ x, y, z $\le$ 1, x+ y+ z =0

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T=|x|+|y|+|z|$

Lời giải:

Với ba số x, y, z bất kỳ, luôn tồn tại hai số có tích không âm.

Giả sử xy $\ge$ 0 => $|x|+|y|=|x+y|=|-z|=|z|$

Nên $T=2|z|\le 2$ (do -1 $\le$z $\le$ 1).

Vậy MaxT =2 khi (x;y;z) là hoán vị (-1;0;1).

Ví dụ 1. Cho -2 $\le$ x, y, z $\le$ 2, x+ y+ z =0. Chứng minh rằng $a^4+b^4+c^4 \le 32$

Lời giải:

Có -2 $\le$ x, y, z $\le$ 2 => $-1\le \frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \le 1$

Đặt $x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}, z=\frac{c}{2}$ => $-1\le x, y, z\le 1$ và x+y+z=0.

Khi đó $a^4+b^4+c^4=16(x^4+y^4+z^4) \le 16\left(|x|+|y|+|z|\right)$.

Với ba số x, y, z bất kỳ, luôn tồn tại hai số có tích không âm.

Giả sử: xy $\ge$ 0 => $|x|+|y|=|x+y|=|-z|=|z|$ nên

$|x|+|y|+|z|=2|z|\le 2 \Rightarrow a^4+b^4+c^4\le 32$ (đpcm)

Ví dụ 2. Cho 0 $\le$ x, y, z $\le$ 1 và x+ y+ z =$\frac{3}{2}$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=x^2+y^2+z^2$

Lời giải:

Tìm Min P

<u>Cách 1</u>(Sử dụng bất đẳng thúc Bunhia)

Có $\left(\frac{3}{2}\right)^2-(1.x+1.y+1.z)^2 \overset{\text{Bunhia}}{\le} (1^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+z^2)=3P \Rightarrow P\ge \frac{3}{4}$

Vậy MinP $=\frac{3}{4}$ Khi $\begin{cases} \frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1} \\ x+y+z=\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow x=y=z=\frac{1}{2}$

<u>Cách 2</u>(Sử dụng bất đẳng thức Côsi – dự đoán min đạt tại x=y=z=$\frac{1}{2}$)

Có $P=x^2+y^2+z^2=\left(x^2+\frac{1}{4}\right)+\left(y^2+\frac{1}{4}\right)+\left(z^2+\frac{1}{4}\right)\ge 2\sqrt{x^2.\frac{1}{4}}+2\sqrt{y^2.\frac{1}{4}}+2\sqrt{z^2.\frac{1}{4}}-\frac{3}{4}=x+y+z-\frac{3}{4}.$

Vậy MinP $=\frac{3}{4}$ Khi $x=y=z=\frac{1}{2}$

Tìm MaxP

Có x + y + z = $\frac{3}{2}$ ⇔ (2x – 1) + (2y – 1) + (2z – 1) = 0

Đặt a = 2x – 1, b = 2y – 1, c = 2z – 1.

Do (2x – 1) + (2y – 1) + (2z – 1) = 0 nên a + b + c = 0

Vì 0 ≤ x, y, z ≤ 1 ⇒ - 1 ≤ 2x – 1, 2y – 1, 2z – 1 ≤ 1 nên – 1 ≤ a, b, c ≤ 1.

Có P = $\left(\frac{a+1}{2}\right)^2+\left(\frac{b+1}{2}\right)^2+\left(\frac{c+1}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2+c^2+2(a+b+c)+3}{4}$

$=\frac{a^2+b^2+c^2+3}{4}\le\frac{|a|+|b|+|c|+3}{4}\ (do\ -1\le a,b,c\le 1)$

Với ba số a, b, c bất kì, luôn tồn tại hai số có tích không âm.

Giả sử a.b ≥ 0 thì $|a|+|b|=|a+b|=|-c|=|c|$ nên

$P\le\frac{2|c|+3}{4}\le\frac{2+3}{4}=\frac{5}{4}\,(do\ |c|\le 1)$.

Vậy MaxP = $\frac{5}{4}$ khi (a; b; c) là hoán vị của (- 1; 0; 1) hay (x; y; z) là hoán vị của $\left(0;\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Ví dụ 3: Cho 0 ≤ x, y, z ≤ 2 và x + y + z = 3. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

M = $x^4 + y^4 + z^4$ + 12(1 – x)(1 – y)(1 – z).

Lời giải

Có x + y + z = 3 ⇔ (x – 1) + (y – 1) + (z – 1) = 0

Đặt a = x – 1, b = y – 1, c = z – 1 ⇒ - 1 ≤ a, b, c ≤ 1 và a + b + c = 0

Với a + b + c = 0 thì $a^3 + b^3 + c^3$ = 3abc

Có M = $(a + 1)^4 + (b + 1)^4 + (c + 1)^4$ – 12abc

= $(a^4 + b^4 + c^4) + 4(a^3 + b^3 + c^3) + 6(a^2 + b^2 + c^2)$ + 4(a + b + c) – 12abc

= $(a^4 + b^4 + c^4) + 6(a^2 + b^2 + c^2)$.

* Có M = $(a^4 + b^4 + c^4) + 6(a^2 + b^2 + c^2) \ge 0$

Vậy Min M = 0 khi a = b = c = 0 ⇔ x = y = z = 1

* Có M = $(a^4 + b^4 + c^4) + 6(a^2 + b^2 + c^2) \le (|a|+|b|+|c|)+6(|a|+|b|+|c|)=7(|a|+|b|+|c|)$.

Với ba số a, b, c bất kì, luôn tồn tại hai số có tích không âm.

Giả sử ab ≥ 0 ⇒ $|a|+|b|=|a+b|=|-c|=|c|$

$\Rightarrow |a|+|b|+|c|=2|c|\le 2\Rightarrow M\le 14$.

Vậy MaxM = 14 khi (a; b; c) là hoán vị của (- 1; 0; 1) hay (x, y, z) là hoán vị của (0; 1; 2).

Ví dụ 4: Cho 0 ≤ a, b, c ≤ 4 và a + b + c = 6.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P = $a^2 + b^2 + c^2$ + ab + bc + ca.

Lời giải

Có P $\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+\frac{(a+b+c)^2}{2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+18.$

Do a + b + c = 6 ⇒ (a – 2) + (b – 2) + (c – 2) = 0 ⇒ $\frac{a-2}{2}+\frac{b-2}{2}+\frac{c-2}{2}=0$

Đặt $x=\frac{a-2}{2}, y=\frac{b-2}{2}, z=\frac{c-2}{2}$ ⇒ x + y + z = 0.

Vì 0 ≤ a, b, c ≤ 4 ⇒ - 2 ≤ a – 2, b – 2, c – 2 ≤ 2 ⇒ - 1 ≤ $\frac{a-2}{2},\frac{b-2}{2},\frac{c-2}{2}\le 1$.

⇒ - 1 ≤ x, y, z ≤ 1.

Có P $=\frac{(2x+2)^2+(2y+2)^2+(2z+2)^2}{2}+18$ = 2($x^2 + y^2 + z^2$) + 4(x + y + z) + 24

= 2($x^2 + y^2 + z^2$) + 24 ≤ $2\left(|x|+|y|+|z|\right)+24$

Với ba số x, y, z bất kì, luôn tồn tại hai số có tích không âm.

Giả sử xy ≥ 0 ⇒ $|x|+|y|=|x+y|=|-z|=|z|$ nên $P=4|z|+24\le 4+24=28$ ($do\ -1\le z\le 1$).

Vậy MaxP = 28 khi (x, y, z) là hoán vị của (- 1; 0; 1) nên (a, b, c) là hoán vị của (0; 2; 4).

DẠNG 5: SỬ DỤNG TÍNH CHẤT CỦA MỘT SỐ BỊ CHẶN TỪ 0 ĐẾN 1

* Nếu $0\le x\le 1$ thì $\sqrt{x}\ge x$. Dấu "=" xảy ra khi $x = 0$ hoặc $x = 1$

* Nếu $0\le x\le 1$ thì $x^n\le x\,\forall n\in \mathbb{N}^*$. Dấu "=" xảy ra khi $x = 0$ hoặc $x = 1$.

Ví dụ 1: Cho $a\ge 0; b\ge 0; c\ge 0$ và $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}+\sqrt{a+b}$.

Lời giải

**** Tìm** MaxP*

<u>Cách 1:</u> (Sử dụng bất đẳng thức Bunhia)

Xét $P^2=(1.\sqrt{b+c}+1.\sqrt{c+a}+1.\sqrt{a+b})^2$

$$\overset{Bunhia}{\le}\left(1^2+1^2+1^2\right)\left(\sqrt{b+c}^2+\sqrt{c+a}^2+\sqrt{a+b}^2\right)$$

$$=6(a+b+c)=6(\,do\,a+b+c=1)\Rightarrow P\le\sqrt{6}$$

Vậy $Max\,P=\sqrt{6}$ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$

<u>Cách 2:</u> (Sử dụng bất đẳng thức Cosi - dự đoán max đạt tại $a=b=c=\frac{1}{3}$)

Xét $P.\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}(b+c)}+\sqrt{\frac{2}{3}(c+a)}+\sqrt{\frac{2}{3}(a+b)}$

$$\le\frac{\frac{2}{3}+(b+c)}{2}+\frac{\frac{2}{3}+(c+a)}{2}+\frac{\frac{2}{3}+(a+b)}{2}$$

$$=1+a+b+c=2\,(\,do\,a+b+c=1)\Rightarrow P\le 2:\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{6}$$

Vậy $Max\,P=\sqrt{6}$ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$

*** Tìm** *MinP*

Sử dụng tính chất: $0 \le x \le 1$ thì $\sqrt{x} \ge x$

Do $a,b,c \ge 0$ và $a+b+c=1$ nên $0 \le a+b, b+c, c+a \le 1$

Có $P = \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} + \sqrt{a+b} \ge (b+c)+(c+a)+(a+b) \le 1$

$= 2(a+b+c) = 2\,(do\, a+b+c=1).$

Vậy $MinP = 2$ khi $(a;b;c)$ là hoán vị $(1;0;0)$.

Ví dụ 2: Cho $a \ge 0; b \ge 0; c \ge 0$ và $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $T = \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} + \sqrt{a+b}$.

Lời giải

*** Tìm** *MaxP*

Cách 1: (Sử dụng bất đẳng thức Bunhia)

Xét $T^2 = (1.\sqrt{b+c} + 1.\sqrt{c+a} + 1.\sqrt{a+b})^2$

$$\le^{Bunhia} \left(1^2+1^2+1^2\right)\left(\sqrt{b+c}^2 + \sqrt{c+a}^2 + \sqrt{a+b}^2\right)$$

$$= 6(a+b+c) = 18\,(do\, a+b+c=3) \Rightarrow P \le 3\sqrt{2}$$

Vậy $MaxT = 3\sqrt{2}$ khi $a=b=c=1$

Cách 2: (Sử dụng bất đẳng thức Cosi - dự đoán max đạt tại $a=b=c=1$)

Xét $\mathrm{T}.\sqrt{2} = \sqrt{2(b+c)} + \sqrt{2(c+a)} + \sqrt{2(\mathrm{a}+\mathrm{b})}$

$$\le \frac{2+(b+c)}{2} + \frac{2+(c+a)}{2} + \frac{2+(\mathrm{a}+b)}{2}$$

$$= 3+a+b+c = 6\,(do\, a+b+c=3) \Rightarrow P \le 6:\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

Vậy $MaxT = 3\sqrt{2}$ khi $a=b=c=1$

*** Tìm** *MinP*

Sử dụng tính chất: $0 \le x \le 1$ thì $\sqrt{x} \ge x$

Do $a,b,c \ge 0$ và $a+b+c=3 \Rightarrow \dfrac{a+b+c}{3} = 1$ nên $0 \le \dfrac{a+b}{3}; \dfrac{b+c}{3}; \dfrac{c+a}{3} \le 1$

Có $T = \sqrt{3}\left(\sqrt{\dfrac{b+c}{3}} + \sqrt{\dfrac{c+a}{3}} + \sqrt{\dfrac{a+b}{3}}\right) \ge \sqrt{3}\left(\dfrac{b+c}{3} + \dfrac{c+a}{3} + \dfrac{a+b}{3}\right)$

$= \sqrt{3}\dfrac{2(a+b+c)}{3} = 2\sqrt{3}\,(do\, a+b+c=3).$

Vậy $MinT = 2\sqrt{3}$ khi $(a;b;c)$ là hoán vị $(3;0;0)$.

Ví dụ 3: Cho $a \ge 0; b \ge 0; c \ge 0$ và $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = \sqrt{3a+1} + \sqrt{3b+1} + \sqrt{3c+1}$.

Lời giải:

Cách 1: Có $a \ge 0;\ b \ge 0;\ c \ge 0;\ a+b+c=1$

$\Rightarrow 0 \le a,b,c \le 1 \Rightarrow a \ge a^2, b \ge b^2, c \ge c^2.$

Do đó :

$F=\sqrt{3a+1}+\sqrt{3b+1}+\sqrt{3c+1}=\sqrt{a+2a+1}+\sqrt{b+2b+1}+\sqrt{c+2c+1}$

$\geq\sqrt{a^2+2a+1}+\sqrt{b^2+2b+1}+\sqrt{c^2+2c+1}=a+b+c+3=4$.

Vậy $MinF=4$ khi $(a;b;c)$ là hoán vị $(0;0;1)$

Cách 2: Có $a+b+c=1\Leftrightarrow 3a+3b+3c=3\Leftrightarrow(3a+1)+(3b+1)+(3c+1)=6$

Đặt $x=3a+1; y=3b=1; z=3c+1$.

$\Rightarrow x,y,z\geq 1$ và $x+y+z=6$ và $F=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$

Từ $x,y,z\geq 1$ và $x+y+z=6\Rightarrow 1\leq x,y,z\leq 4$

$\Rightarrow\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{4}\right)\leq 0\Rightarrow x-3\sqrt{x}+2\leq 0\Rightarrow\sqrt{x}\geq\dfrac{x+2}{3}$

Tương tự: $\sqrt{y}\geq\dfrac{y+2}{3};\sqrt{z}\geq\dfrac{z+2}{3}$, suy ra $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\geq\dfrac{x+y+z+6}{3}\Rightarrow F\geq 4$

Vậy $MinF=4$ khi $(x;y;z)$ là hoán vị $(1;1;4)$ nên (a,b,c) là hoán vị $(0;0;1)$.

Ví dụ 4: Cho $a\geq 0;b\geq 0;c\geq 0$ và $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M=\sqrt{2a^2+3a+4}+\sqrt{2b^2+3b+4}+\sqrt{2c^2+3c+4}$.

Lời giải:

Có $a\geq 0;\ b\geq 0;\ c\geq 0;\ a+b+c=1$

$\Rightarrow 0\leq a,b,c\leq 1\Rightarrow a^2\leq a, b^2\leq b, c^2\leq c$.

Do đó :

$M=\sqrt{a^2+\left(a^2+3a+4\right)}+\sqrt{b^2+\left(b^2+3b+4\right)}+\sqrt{c^2+\left(c^2+3c+4\right)}$

$\leq\sqrt{a^2+(a+3a+4)}+\sqrt{b^2+(b+3b+4)}+\sqrt{c^2+(c+3c+4)}$.

$=\sqrt{(a+2)^2}+\sqrt{(b+2)^2}+\sqrt{(c+2)^2}=a+b+c+6=7$

Vậy $MinM=7$ khi $(a;b;c)$ là hoán vị $(0;0;1)$.

DẠNG 6 : DỰ ĐOÁN KẾT QUẢ RỒI XÉT HIỆU

Ví dụ 1: Cho $x;y\geq 0$ thỏa mãn $x+y=\sqrt{10}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left(x^4+1\right)\left(y^4+1\right)$.

Lời giải

Có $P=\left(x^4+1\right)\left(y^4+1\right)=x^4y^4+\left(x^4+y^4\right)+1=x^4y^4+\left(x^2+y^2\right)^2-2x^2y^2+1$

$=x^4y^4+(10-2xy)^2-2x^2y^2+1=x^4y^4+2x^2y^2-40xy+101.$

Đặt $t=xy>0$ thì $xy\leq\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2=\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)^2=\dfrac{5}{2}\Rightarrow 0\leq t\leq\dfrac{5}{2}$

Ta được $P=t^4+2t^2-40t+101;\ 0\leq t\leq\dfrac{5}{2}$

Đến đây ta kẻ bảng dự đoán $MinP$

t	0	1	2	2,5

P	101	64	45	52,5625

Từ bảng trên ta dự đoán $MinP = 45$ khi $t = 2$ nên ta xét hiệu :

$P - 45 = t^4 + 2t^2 - 40t + 56 = \left(t^4 - 8t^2 + 16\right) + \left(10t^2 - 40t + 40\right)$

$= \left(t^2 - 4\right)^2 + 4\left(t - 2\right)^2 \geq 0 \Rightarrow P \geq 45$

Vậy $MinP = 45$ khi $t = 2 \Rightarrow \begin{cases} x + y = \sqrt{10} \\ xy = 2 \end{cases} \Rightarrow x, y$ là hai nghiệm của phương trình :

$t^2 - \sqrt{10}.t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{\sqrt{10} \pm \sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\sqrt{10} \pm \sqrt{2}}{2}; y = \dfrac{\sqrt{10} \mp \sqrt{2}}{2}$.

Ví dụ 2: Cho $a + b + 4ab = 4a^2 + 4b^2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức
$A = 20\left(a^3 + b^3\right) - 6\left(a^2 + b^2\right) + 2013$.

Lời giải

Có : $a + b + 4ab = 4a^2 + 4b^2 \Leftrightarrow a + b + 4ab = 4\left[\left(a + b\right)^2 - 2ab\right]$

$\Leftrightarrow 12ab = 4\left(a + b\right)^2 - \left(a + b\right)$, mà $4ab \leq \left(a + b\right)^2$ hay $12ab \leq 3\left(a + b\right)^2$.

Nên $4\left(a + b\right)^2 - \left(a + b\right) \leq 3\left(a + b\right)^2 \Leftrightarrow \left(a + b\right)^2 - \left(a + b\right) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq a + b \leq 1$.

Đặt $x = a + b$ thì $0 \leq x \leq 1$ và $12ab = 4x^2 - x$

Ta có $A = 20\left[\left(a + b\right)^3 - 3ab\left(a + b\right)\right] - 6\left[\left(a + b\right)^2 - 2ab\right] + 2013$

$= 20\left(a + b\right)^3 - 60ab\left(a + b\right) - 6\left(a + b\right)^2 + 12ab + 2013$

$= 20x^3 - 5\left(4x^2 - x\right)x - 6x^2 + 4x^2 - x + 2013 = 3x^2 - x + 2013$

Đến đây ta kẻ bảng dự đoán $MaxA$

t	0	1
A	2013	2015

Từ bảng trên ta dự đoán $MaxA = 2015$ khi $x = 1$ nên ta xét hiệu

$A - 2015 = 3x^2 - x - 2 = \left(x - 1\right)\left(3x + 2\right)$. Do $0 \leq x \leq 1$ nên $\left(x - 1\right)\left(3x + 2\right) \leq 0$, suy ra $A \leq 2015$

Vậy $MaxA = 2015$ khi $x = 1$ hay $a = b = \dfrac{1}{2}$.

HỆ THỐNG BÀI TẬP SỬ DỤNG TRONG CHỦ ĐỀ

I. BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI

Bài 1. Cho $x \neq 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = 8x^2 - 4x + \dfrac{1}{4x^2} + 15$.

Bài 2. Cho $x > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = 4x^2 - 3x + \dfrac{1}{4x} + 2011$.

Bài 3. Cho $x > y > 0$ và $xy = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $H = \dfrac{x^2 + y^2}{x - y}$.

Bài 4. Cho $a \geq 1;\ b \geq 1$. Chứng minh $a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \leq ab$.

Bài 5. Cho $a \geq 9;\ b \geq 4;\ c \geq 1$. Chứng minh $ab\sqrt{c-1} + bc\sqrt{a-9} + ca\sqrt{b-4} \leq \dfrac{11abc}{12}$.

Bài 6. Cho $a \geq 0;\ b \geq 0;\ a^2 + b^2 \leq 2$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = a\sqrt{b(a+2b)} + b\sqrt{a(b+2a)}$.

Bài 7. Cho $x \geq 0;\ y \geq 0;\ x^2 + y^2 \leq 2$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{x(14x+10y)} + \sqrt{y(14y+10x)}$.

Bài 8. Cho $x > 0;\ y > 0$ và $\sqrt{xy}(x-y) = x + y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y$.

Bài 9. Cho $a, b, c > 0$ và $ab + bc + ca = 1$.

Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}} + \dfrac{b}{\sqrt{b^2+1}} + \dfrac{c}{\sqrt{c^2+1}}$.

Bài 10. Cho các số dương $a,\ b,\ c$ thỏa mãn $a + b + c = 1$

chứng minh $\sqrt{\dfrac{ab}{c+ab}} + \sqrt{\dfrac{bc}{a+bc}} + \sqrt{\dfrac{ca}{b+ca}} \leq \dfrac{3}{2}$

Bài 11. Cho $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$ và $ab + bc + ca = 3abc$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \dfrac{a^2}{c(c^2+a^2)} + \dfrac{b^2}{a(a^2+b^2)} + \dfrac{c^2}{b(b^2+c^2)}$

Bài 12. Cho $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$ và $a + b + c = 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \dfrac{a}{1+9b^2} + \dfrac{b}{1+9c^2} + \dfrac{c}{1+9a^2}$

Bài 13. Cho $a, b, c > 0$ và $\dfrac{1}{1+a} + \dfrac{1}{1+b} + \dfrac{1}{1+c} = 2$. Chứng minh rằng $abc \leq \dfrac{1}{8}$.

Bài 14. Cho $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh :

a) $\dfrac{ab}{c} + \dfrac{bc}{a} + \dfrac{ca}{b} \geq a + b + c$ b) $\dfrac{bc}{a} + \dfrac{ca}{b} + \dfrac{ab}{c} \geq \sqrt{3}$

Bài 15. Cho $a,\ b,\ c$ là độ dài ba cạnh của ΔABC.

Chứng minh $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc$

Bài 16. Cho $a \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2a + \dfrac{5}{a}$.

Bài 17. Cho $x > 0,\ y > 0$ và $x + y \leq 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = x + y + \dfrac{6}{x} + \dfrac{24}{y}$.

Bài 18. Cho $x>0,\ y>0$ và $x+y\ge 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2x^2+y^2+\dfrac{28}{x}+\dfrac{1}{y}$.

Bài 19. Cho $2\le x\le 3,\ 4\le y\le 6,\ 4\le z\le 6$ và $x+y+z=12$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=xyz$.

Bài 20. Cho $x>0,\ y>0$ và $\dfrac{x}{2}+\dfrac{8}{y}\le 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $K=\dfrac{x}{y}+\dfrac{2y}{x}$.

Bài 21. Cho $x>0,\ y>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\dfrac{(x+y+1)^2}{xy+x+y}+\dfrac{xy+x+y}{(x+y+1)^2}$.

Bài 22. Cho $x>0,\ y>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\dfrac{x^2+y^2}{xy}+\dfrac{\sqrt{xy}}{x+y}$.

Bài 23. Cho $a>0,\ b>0,\ c>0$ thỏa mãn $b^2+c^2\le a^2$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{a^2}\left(b^2+c^2\right)+a^2\left(\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\right)$.

Bài 24. Cho $x>0,\ y>0$ và $x+y\le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\sqrt{1+x^2y^2}$.

Bài 25. Cho $x>0,\ y>0$ và $x+y\le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{x^2+y^2}+\dfrac{1}{xy}+4xy$.

Bài 26. Cho $x>0,\ y>0$ và $x+y\le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $K=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{y}\right)^2$.

Bài 27. Cho $x>0,\ y>0$ và $x+y\le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$S=\left(1+x+\dfrac{1}{x}\right)^3+\left(1+y+\dfrac{1}{y}\right)^3$.

Bài 28. Cho $x>0,\ y>0$ và $2x^2+2xy+y^2-2x\le 8$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{y}-2x-3y$.

Bài 29. Cho $a>0,\ b>0,\ c>0$ thỏa mãn $2\left(b^2+bc+c^2\right)=3\left(3-a^2\right)$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=a+b+c+\dfrac{2}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{2}{c}$.

Bài 30. Cho $a>0,\ b>0$ và $a^3+b^3+6ab\le 8$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{a^2+b^2}+\dfrac{3}{ab}+ab$.

Bài 31. Cho $a>0,\ b>0$ và $a^2+b^2=a+b$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^4+b^4+\dfrac{2020}{(a+b)^2}$.

Bài 32. Cho $x>0,\ y>0$ và $\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{y}+1\right)\ge 4$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}$.

II. BẤT ĐẲNG THỨC BUNHIA

Bài 1. Cho $4x+9y=13$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=4x^2+9y^2$.

Bài 2. Cho $4x+3y=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=4x^2+3y^2$.

Bài 3. Cho $x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$ và $x+y+z=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=x^2+y^2+z^2$.

Bài 4. Cho $3x^2+2y^2\le\frac{6}{35}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S=2x+3y$.

Bài 5. Cho $4a^2+25b^2\le\frac{1}{10}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $H=6a-5b$.

Bài 6. Cho $x^2+y^2+z^2=\frac{3}{4}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x+y+z$.

Bài 7. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}$ khi $1\le x\le 3$.

Bài 8. Cho $a\ge 0,\ b\ge 0,\ c\ge 0$ và $a+b+c=3$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $K=\sqrt{4a+5}+\sqrt{4b+5}+\sqrt{4c+5}$.

Bài 9. Cho $a\ge 0,\ b\ge 0,\ c\ge 0$ và $a+b+c=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}+\sqrt{a+b}$.

Bài 10. Cho $a,b,c\ge 0$ và $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\sqrt{\frac{a+b}{2}}+\sqrt{\frac{b+c}{2}}+\sqrt{\frac{c+a}{2}}$.

III. PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

Bài 1. Cho $x\ge -2$, $y\ge 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=x+y-2\sqrt{x+2}-4\sqrt{y-1}+24$.

Bài 2. Cho $x\ge -\frac{1}{3}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $E=5x-6\sqrt{2x+7}-4\sqrt{3x-1}+2$

Bài 3. Cho $x\ge 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T=x-\sqrt{x-1}-3\sqrt{x+7}+28$.

Bài 4. Cho $x\ge\sqrt{15}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$F=x^2+x-\sqrt{(x^2-15)(x-3)}-\sqrt{x^2-15}-\sqrt{x-3}-38$.

Bài 5. Cho $a>0,b>0,c>0$ và $a+b+c=6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$T=\sqrt{a^2+4ab+b^2}+\sqrt{b^2+4bc+c^2}+\sqrt{c^2+4ca+a^2}.$$

Bài 6. Cho $x>0,y>0,z>0,x+y+z=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S=\sqrt{x^2-xy+y^2}+\sqrt{y^2-yz+z^2}+\sqrt{z^2-zx+x^2}.$$

Bài 7. Cho $-2\le a,b,c\le 3$ và $a^2+b^2+c^2=22$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M=a+b+c$.

Bài 8. Cho $x\ge 0,y\ge 0,z\ge 0$ thỏa mãn $x+y+z=6$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $A=x^2+y^2+z^2$.

Bài 9. Cho $a,b,c\ge 0$ và $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $K=\sqrt{3a+1}+\sqrt{3b+1}+\sqrt{3c+1}$.

Bài 10. Cho $0\le a,b,c\le 2$ và $a+b+c=3$. Chứng minh: $ab+bc+ca\ge 2$.

Bài 11. Cho $a\ge 1,b\ge 1,c\ge 1$ và $ab+bc+ca=9$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $P=a^2+b^2+c^2$.

Bài 12. Cho $-1\le x,y,z\le 1$, $x+y+z=0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $T=|x|+|y|+|z|$.

Bài 13. Cho $-2\le a,b,c\le 2$ và $a+b+c=0$. Chứng minh: $a^4+b^4+c^4\le 32$.

Bài 14. Cho $0\le x,y,z\le 1$ và $x+y+z=\frac{3}{2}$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $P=x^2+y^2+z^2$.

Bài 15. Cho $0\le x,y,z\le 2$ và $x+y+z=3$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $M=x^4+y^4+z^4+12(1-x)(1-y)(1-z)$.

Bài 16. Cho $0\le a,b,c\le 4$ và $a+b+c=6$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca$.

Bài 17. Cho $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ và $a + b + c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:

$P = \sqrt{b + c} + \sqrt{c + a} + \sqrt{a + b}$.

Bài 18. Cho $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ và $a + b + c = 3$.Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:

$P = \sqrt{b + c} + \sqrt{c + a} + \sqrt{a + b}$.

Bài 19. Cho $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ và $a + b + c = 1$.Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:

$F = \sqrt{3a + 1} + \sqrt{3b + 1} + \sqrt{3c + 1}$.

Bài 20. Cho $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ và $a + b + c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$\sqrt{2a^2 + 3a + 4} + \sqrt{2b^2 + 3b + 4} + \sqrt{2c^2 + 3c + 4}$.

Bài 21. Cho $x, y \geq 0$ thỏa mãn: $x + y = \sqrt{10}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \left(x^4 + 1\right)\left(y^4 + 1\right)$.

Bài 22. Cho $a + b + 4ab = 4a^2 + 4b^2$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = 20\left(a^3 + b^3\right) - 6\left(a^2 + b^2\right) + 2013$.

CHỦ ĐỀ 8 – PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

I. PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

DẠNG 1: GHÉP THÍCH HỢP ĐƯA VỀ TÍCH

Ví dụ 1. Giải phương trình: $\sqrt{x+9}+2012\sqrt{x+6}=2012+\sqrt{(x+9)(x+6)}$

Lời giải

Điều kiện: $x\ge -6$.

Phương trình $\Leftrightarrow 2012\sqrt{x+6}-2012+\sqrt{x+9}-\sqrt{(x+9)(x+6)}=0$

$\Leftrightarrow 2012\left(\sqrt{x+6}-1\right)-\sqrt{x+9}\left(\sqrt{x+6}-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+6}-1\right)\left(\sqrt{x+9}-2012\right)=0$

$\Leftrightarrow x=-5, x=4048135$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là: $S=\{-5;4048135\}$.

Ví dụ 2. Giải phương trình: $\sqrt{2x+1}+3\sqrt{4x^2-2x+1}=3+\sqrt{8x^3+1}$.

Lời giải

Điều kiện: $x\ge -\frac{1}{2}$.

Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{2x+1}-3+3\sqrt{4x^2-2x+1}-\sqrt{(2x+1)(4x^2-2x+1)}=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x+1}-3\right)-\sqrt{4x^2-2x+1}\left(\sqrt{2x+1}-3\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x+1}-3\right)\left(\sqrt{4x^2-2x+1}-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2x+1}=3\\ \sqrt{4x^2-2x+1}=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x+1=9\\ 4x^2-2x+1=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4\\ x=0, x=\frac{1}{2}\end{array}\right.$ (Thỏa mãn điều kiện).

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là: $S=\left\{0;4;\frac{1}{2}\right\}$.

Ví dụ 3. Giải phương trình: $x^3+\left(4+x^2\right)\sqrt{4-x^2}=8-2x\sqrt{4-x^2}$.

Lời giải

Điều kiện: $x^2\le 4\Leftrightarrow -2\le x\le 2$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành

$$x^3-8+\left(4+x^2\right)\sqrt{4-x^2}+2x\sqrt{4-x^2}=0$$
$$\Leftrightarrow (x-2)\left(x^2+2x+4\right)+\left(x^2+2x+4\right)\sqrt{4-x^2}=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2+2x+4\right)\left(x-2+\sqrt{4-x^2}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[(x+1)^2+3\right]\left(x-2+\sqrt{4-x^2}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{4-x^2}=2-x$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x\ge 0 \\ 4-x^2=4-4x+x^2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$$

So với điều kiện, ta có tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\{0;2\}$.

Ví dụ 4. Giải phương trình $x+2\sqrt{7-x}+\sqrt{7x-x^2}-2\sqrt{x}-7=0$.

Lời giải.

Điều kiện: $0\le x\le 7$.

Khi đó, ta có

$$x+2\sqrt{7-x}+\sqrt{7x-x^2}-2\sqrt{x}-7=0$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{7-x}-2\sqrt{x}+\sqrt{x(7-x)}-(7-x)=0$$
$$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{7-x}-\sqrt{x}\right)-\sqrt{7-x}\left(\sqrt{7-x}-\sqrt{x}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{7-x}-\sqrt{x}\right)\left(2-\sqrt{7-x}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{7-x}-\sqrt{x}=0 \\ 2-\sqrt{7-x}=0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7-x=x \\ 7-x=4 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=\dfrac{7}{2} \end{array}\right.$$

So với điều kiện, ta có tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{3;\dfrac{7}{2}\right\}$.

DẠNG 2: NHÂN LIÊN HỢP ĐƯA VỀ TÍCH

- $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ khi biểu thức xác định.
- $\sqrt{a}-b=\dfrac{a-b^2}{\sqrt{a}+b}$ khi biểu thức xác định.

Ví dụ 1. Giải phương trình $x^2+1+\sqrt{x^2+x+2}=2x+\sqrt{3x+1}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x\ge -\dfrac{1}{3}$.

Khi đó

$$x^2+1+\sqrt{x^2+x+2}=2x+\sqrt{3x+1}$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x+1+\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{3x+1}=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2+\frac{(x^2+x+2)-(3x+1)}{\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{3x+1}}=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2+\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{3x+1}}=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{3x+1}}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow x=1$$

So với điều kiện, ta có tập nghiệm của phương trình là $S=\{1\}$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $x^2+2018\sqrt{2x^2+1}=x+1+2018\sqrt{x^2+x+2}$.

Lời giải.

Ta có $x^2+x+2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0,\forall x$. Khi đó

$$x^2+2018\sqrt{2x^2+1}=x+1+2018\sqrt{x^2+x+2}\Leftrightarrow (x^2-x-1)+2018\left(\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2+x+2}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow (x^2-x-1)+2018.\frac{(2x^2+1)-(x^2+x+2)}{\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{x^2+x+2}}=0\Leftrightarrow (x^2-x-1)+2018.\frac{x^2-x-1}{\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{x^2+x+2}}=0$$
$$\Leftrightarrow (x^2-x-1)\left(1+\frac{2018}{\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{x^2+x+2}}\right)=0\Leftrightarrow x^2-x-1=0$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Ví dụ 3. Giải phương trình $\sqrt{4x^2+5x+1}+3=2\sqrt{x^2-x+1}+9x$.

Lời giải.

Ta có $x^2-x+2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0,\forall x$ nên điều kiện là $4x^2+5x+1\geq 0$.

Khi đó

$$\sqrt{4x^2+5x+1}+3=2\sqrt{x^2-x+1}+9x$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{4x^2+5x+1}-\sqrt{4x^2-4x+4}-9x+3=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{(4x^2+5x+1)-(4x^2-4x+4)}{\sqrt{4x^2+5x+1}+\sqrt{4x^2-4x+4}}-(9x-3)=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{9x-3}{\sqrt{4x^2+5x+1}+\sqrt{4x^2-4x+4}}-(9x-3)=0$$
$$\Leftrightarrow (9x-3)\left(\frac{1}{\sqrt{4x^2+5x+1}+\sqrt{4x^2-4x+4}}-1\right)=0$$

Trường hợp 1. $9x-3=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$ (thỏa).

Trường hợp 2.

$$\frac{1}{\sqrt{4x^2+5x+1}+\sqrt{4x^2-4x+4}}-1=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{4x^2+5x+1}+\sqrt{4x^2-4x+4}}=1$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{4x^2+5x+1}+\sqrt{4x^2-4x+4}=1$$

Vì $\sqrt{4x^2-4x+4}=\sqrt{(2x-1)^2+3}\geq\sqrt{3}$ nên trường hợp 2 vô nghiệm.

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S=\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

Ví dụ 4. Giải phương trình $\sqrt{5x+4}+\sqrt{3x+2}=\sqrt{4x+5}+\sqrt{2x+3}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x\geq-\frac{2}{3}$.

Với điều kiện trên phương trình trở thành

$$\sqrt{5x+4}+\sqrt{3x+2}=\sqrt{4x+5}+\sqrt{2x+3}$$
$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{5x+4}-\sqrt{4x+5}\right)+\left(\sqrt{3x+2}-\sqrt{2x+3}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow\frac{(5x+4)-(4x+5)}{\sqrt{5x+4}+\sqrt{4x+5}}+\frac{(3x+2)-(2x+3)}{\sqrt{3x+2}+\sqrt{2x+3}}=0$$
$$\Leftrightarrow\frac{x-1}{\sqrt{5x+4}+\sqrt{4x+5}}+\frac{x-1}{\sqrt{3x+2}+\sqrt{2x+3}}=0$$
$$\Leftrightarrow(x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{5x+4}+\sqrt{4x+5}}+\frac{1}{\sqrt{3x+2}+\sqrt{2x+3}}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow x=1$$

So với điều kiện ta có tập nghiệm của phương trình là $S=\{1\}$.

Ví dụ 5. Giải phương trình $\sqrt{3x^2-7x+3}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3x^2-5x-1}-\sqrt{x^2-3x+4}$.

Lời giải.

Ta có $x^2-3x+4=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0,\forall x$ nên điều kiện là $\begin{cases}3x^2-7x+3\geq0\\ x^2-2\geq0\\ 3x^2-5x-1\geq0\end{cases}$

Với điều kiện trên, phương trình trở thành

$$\sqrt{3x^2-7x+3}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3x^2-5x-1}-\sqrt{x^2-3x+4}$$
$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{3x^2-7x+3}-\sqrt{3x^2-5x-1}\right)+\left(\sqrt{x^2-3x+4}-\sqrt{x^2-2}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow\frac{\left(3x^2-7x+3\right)-\left(3x^2-5x-1\right)}{\sqrt{3x^2-7x+3}+\sqrt{3x^2-5x-1}}+\frac{\left(x^2-3x+4\right)-\left(x^2-2\right)}{\sqrt{x^2-3x+4}+\sqrt{x^2-2}}=0$$
$$\Leftrightarrow\frac{4-2x}{\sqrt{3x^2-7x+3}+\sqrt{3x^2-5x-1}}+\frac{6-3x}{\sqrt{x^2-3x+4}+\sqrt{x^2-2}}=0$$
$$\Leftrightarrow(2-x)\left(\frac{2}{\sqrt{3x^2-7x+3}+\sqrt{3x^2-5x-1}}+\frac{3}{\sqrt{x^2-3x+4}+\sqrt{x^2-2}}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow 2-x=0$$
$$\Leftrightarrow x=2$$

So với điều kiện ta được tập nghiệm của phương trình là $S=\{2\}$.

Ví dụ 6. Giải phương trình $6\sqrt{1-x^2}-4x=3\left(\sqrt{1+x}-1\right)$.

Lời giải.

Điều kiện: $-1\le x\le 1$.

Khi đó, phương trình trở thành

$$6\sqrt{1-x^2}-4x=3\left(\sqrt{1+x}-1\right)$$
$$\Leftrightarrow 6\sqrt{1-x^2}-3\sqrt{1+x}-4x+3=0$$
$$\Leftrightarrow 3\sqrt{1+x}\left(2\sqrt{1-x}-1\right)-4x+3=0$$
$$\Leftrightarrow 3\sqrt{1+x}.\frac{4(1-x)-1^2}{2\sqrt{1-x}+1}-4x+3=0$$
$$\Leftrightarrow 3\sqrt{1+x}.\frac{3-4x}{2\sqrt{1-x}+1}-4x+3=0$$
$$\Leftrightarrow (3-4x).\left(\frac{3\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x}+1}+1\right)=0\Leftrightarrow x=\frac{3}{4}\text{(thỏa mãn)}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\left\{\frac{3}{4}\right\}$

DẠNG 3: DỰ ĐOÁN NGHIỆM ĐỂ TỪ ĐÓ TÁCH THÍCH HỢP ĐƯA VỀ TÍCH

- Nếu nhẩm được một nghiệm x = α của phương trình thì ta tách được phương trình đó về dạng tích (x – α).f(x) = 0.

- Nếu nhẩm được một nghiệm x = –α của phương trình thì ta tách được phương trình đó về dạng tích (x +α).f(x) = 0.

- Trong trường hợp f(x) = 0 mà phức tạp thì ta thường chứng minh f(x) = 0 vô nghiệm hoặc chứng minh f(x) = 0 có nghiệm duy nhất.

Bước 1: Nhẩm các số nguyên thỏa mãn điều kiện xem số nào thỏa mãn phương trình, ta thường nhẩm các số mà thay vào các căn đều khai căn được.

Bước 2: Lập bảng để chọn số cần chèn vào phần căn.

Bước 3: Kết hợp công thức $\sqrt{a}-b=\dfrac{a-b^2}{\sqrt{a}+b}$ để đưa về tích.

Ví dụ 1: Giải phương trình $\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0$.

Phân tích bài toán: Phương trình này ta nhẩm được một nghiệm x = 5 nên ta sẽ tách được nhân tử x – 5

	$\sqrt{3x+1}$	$\sqrt{6-x}$
x = 5	4	1

Từ bảng này, ta suy ra $\sqrt{3x+1}$ sẽ đi với số 4, còn $\sqrt{6-x}$ sẽ đi với số 1.

Trình bày lời giải:

Điều kiện : $-\dfrac{1}{3}\le x\le 6$

Phương trình $\Leftrightarrow\left(\sqrt{3x+1}-4\right)-\left(\sqrt{6-x}-1\right)+3x^2-14x-5=0$

$$\Leftrightarrow\frac{(3x+1)-4^2}{\sqrt{3x+1}+1}+\frac{(6-x)-1^2}{\sqrt{6-x}+2}+3x^2-15x+x-5=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{3x-15}{\sqrt{3x+1}+1}+\frac{5-x}{\sqrt{6-x}+2}+3x(x-5)+(x-5)=0$$

$$\Leftrightarrow(x-5)\left(\frac{1}{\sqrt{3x+1}+1}+\frac{1}{\sqrt{6-x}+2}+3x+1\right)=0$$

Trường hợp 1: Xét x – 5 = 0 $\Leftrightarrow$ x = 5 (thỏa mãn điều kiện)

Trường hợp 2: Xét $\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{6-x}+2}+3x+1=0$ loại vì

$$\frac{1}{\sqrt{3x+1}+1}+\frac{1}{\sqrt{6-x}+2}+3x+1>0\ \forall -\frac{1}{3}\le x\le 6$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\{5\}$

Ví dụ 2: Giải phương trình $\sqrt{x-1}+\sqrt{6-x}=3x^2-4x-1$

Phân tích bài toán: Phương trình này ta nhẩm được một nghiệm x = 2 nên ta sẽ tách được nhân tử x – 2

	$\sqrt{x-1}$	$\sqrt{6-x}$
x = 2	1	2

Từ bảng này, ta suy ra $\sqrt{x-1}$ sẽ đi với số 1, còn $\sqrt{6-x}$ sẽ đi với số 2.

Trình bày lời giải:

Điều kiện : $1\le x\le 6$

Phương trình $\Leftrightarrow\left(\sqrt{x-1}-1\right)+\left(\sqrt{6-x}-2\right)=3x^2-4x-4$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)-1^2}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{(6-x)-2^2}{\sqrt{6-x}+2}=3x^2-6x+2x-4$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{2-x}{\sqrt{6-x}+2}=3x(x-2)+2(x-2)$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}-\frac{1}{\sqrt{6-x}+2}-3x-2\right)=0$$

Trường hợp 1: Xét $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$ (thỏa mãn điều kiện)

Trường hợp 2: Xét $\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}-\frac{1}{\sqrt{6-x}+2}-3x-2=0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x-1}+1}=\frac{1}{\sqrt{6-x}+2}-3x-2 \qquad (*)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x-1}+1}=\frac{1}{\sqrt{6-x}+2}+3x+2$$

Do $\sqrt{x-1}+1\geq 1$ nên $\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}\leq 1$

Với $1\leq x\leq 6$ thì $3x+2\geq 3.1+2=5$ nên $\frac{1}{\sqrt{6-x}+2}+3x+2>5$

Do đó phương trình (*) vô nghiệm

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\{2\}$

Ví dụ 3: Giải phương trình $5.\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+3}\right)=4x^2-24x+35$

<u>Phân tích bài toán:</u> Phương trình này ta nhẩm được một nghiệm x = 1 nên ta sẽ tách được nhân tử $x-1$

	$\sqrt{3x-2}$	$\sqrt{x+3}$
x = 1	1	2

Từ bảng này, ta suy ra $\sqrt{x-1}$ sẽ đi với số 1, còn $\sqrt{6-x}$ sẽ đi với số 2.

<u>Trình bày lời giải:</u>

Điều kiện : $x\geq \frac{2}{3}$

Phương trình $5.\left[\left(\sqrt{3x-2}-1\right)+\left(\sqrt{x+3}-2\right)\right]=4x^2-24x+20$

$$\Leftrightarrow 5.\left[\frac{(3x-2)-1^2}{\sqrt{3x-2}+1}+\frac{(x+3)-2^2}{\sqrt{x+3}+2}\right]=4x^2-24x+20$$

$$\Leftrightarrow 5.\left(\frac{(3x-2)-1^2}{\sqrt{3x-2}+1}+\frac{(x+3)-2^2}{\sqrt{x+3}+2}\right)=4x^2-4x-20x+20$$

$$\Leftrightarrow 5.\left(\frac{3x-3}{\sqrt{3x-2}+1}+\frac{x-1}{\sqrt{x+3}+2}\right)=4x(x-1)-20(x-1)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{15}{\sqrt{3x-2}+1}+\frac{5}{\sqrt{x+3}+2}-4x+20\right)=0$$

Trường hợp 1: Xét x – 1 = 0 $\Leftrightarrow$ x = 1 (thỏa mãn điều kiện)

Trường hợp 2: Xét $\frac{15}{\sqrt{3x-2}+1}+\frac{5}{\sqrt{x+3}+2}-4x+20=0$

$$\Leftrightarrow \frac{15}{\sqrt{3x-2}+1}+\frac{5}{\sqrt{x+3}+2}-4x+20=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{15}{\sqrt{3x-2}+1}+\frac{5}{\sqrt{x+3}+2}=4x-20 \qquad (*)$$

Nếu x < 6 thì $\frac{15}{\sqrt{3x-2}+1}+\frac{5}{\sqrt{x+3}+2}>\frac{15}{\sqrt{3.6-2}+1}+\frac{5}{\sqrt{6+3}+2}$=4 (*)

Mà 4.x – 20 < 4.6 – 20 = 4 nên phương trình (*) vô nghiệm.

Nếu x >6 thì $\frac{15}{\sqrt{3x-2}+1}+\frac{5}{\sqrt{x+3}+2}<\frac{15}{\sqrt{3.6-2}+1}+\frac{5}{\sqrt{6+3}+2}$=4 (*)

Mà 4.x – 20 > 4.6 – 20 = 4 nên phương trình (*) vô nghiệm.

Nếu x = 6 thỏa mãn (*) và thỏa mãn điều kiện

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\{1;6\}$

Ví dụ 4: Giải phương trình $x^3-2\sqrt{x+2}-4=0$

<u>Phân tích bài toán:</u> Phương trình này ta nhẩm được một nghiệm x = 2 nên ta sẽ tách được nhân tử x – 2

	$\sqrt{x+2}$
x = 2	2

Từ bảng này, ta suy ra $\sqrt{x+2}$ sẽ đi với số 2.

<u>Trình bày lời giải:</u>

Điều kiện : $x\geq 2$

Phương trình $(x^3-8)-2(\sqrt{x+2}-2)=0$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2+2x+4)-2\frac{(x+2)-2^2}{\sqrt{x+2}+2}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2+2x+4)-2\frac{x-2}{\sqrt{x+2}+2}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(x^2+2x+4-\frac{2}{\sqrt{x+2}+2}\right)=0$$

Trường hợp 1: Xét x – 2 = 0 $\Leftrightarrow$ x = 2 (thỏa mãn điều kiện)

Trường hợp 2: Xét $x^2+2x+4-\dfrac{2}{\sqrt{x+2}+2} \Leftrightarrow x^2+2x+4=\dfrac{2}{\sqrt{x+2}+2}$(*)

Do $\sqrt{x+2}+2\geq 2$ nên $\dfrac{2}{\sqrt{x+2}+2}\leq 1$

Mà $x^2+2x+4=\left(x+1\right)^2+3\geq 3$ nên phương trình (*) vô nghiệm.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\left\{2\right\}$

Ví dụ 5: Giải phương trình $x^3+x-7=\sqrt{x^2+5}$.

Phân tích bài toán: Phương trình này ta nhẩm được một nghiệm $x=2$ nên ta sẽ tách được nhân tử $x-2$

	$\sqrt{x^2+5}$
$x=2$	3

Từ bảng này ta suy ra $\sqrt{x^2+5}$ sẽ đi với số 3 .

Trình bày lời giải:

Phương trình $\Leftrightarrow x^3+x-10=\sqrt{x^2+5}-3$

$\Leftrightarrow\left(x^3-8\right)+\left(x-2\right)=\dfrac{\left(x^2+5\right)-3}{\sqrt{x^2+5}+3}$

$\Leftrightarrow\left(x-2\right)\left(x^2+2x+4\right)+\left(x-2\right)-\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x^2+5}+3}=0$

$\Leftrightarrow\left(x-2\right)\left(x^2+2x+5-\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}\right)=0$

Trường hợp 1: Xét $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$ (thỏa mãn điều kiện).

Trường hợp 2:

Xét $x^2+2x+5-\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}=0 \Leftrightarrow x^2+2x+5=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}$

Do $\begin{cases}\sqrt{x^2+5}>\sqrt{x^2}=\left|x\right|\geq x\\ 3>2\end{cases}$ nên $\sqrt{x^2+5}+3>x+2$ hay $\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}<1$

Mà $x^2+2x+5=\left(x+1\right)^2+4\geq 4$ nên phương trình $\left(*\right)$ vô nghiệm.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\left\{2\right\}$.

Ví dụ 6: Giải phương trình $\sqrt{x+\dfrac{3}{x}}=\dfrac{x^2+7}{2\left(x+1\right)}$.

Phân tích bài toán: Phương trình này ta nhẩm được một nghiệm $x=1$ nên ta sẽ tách được nhân tử $x-1$.

	$\sqrt{x+\dfrac{3}{x}}$

$x=1$	2

Từ bảng này , ta suy ra $\sqrt{x+\frac{3}{x}}$ sẽ đi với số 2 .

Do $x+\frac{3}{x}=\frac{x^2+3}{x}$ nên điều kiện là : $x>0$.

Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{x+\frac{3}{x}}-2=\frac{x^2+7}{2(x+1)}-2 \Leftrightarrow \frac{x+\frac{3}{x}-4}{\sqrt{x+\frac{3}{x}}+2}=\frac{x^2-4x+3}{2(x+1)}$

$\Leftrightarrow \frac{x^2-4x+3}{\sqrt{x^3+3x}+2x}=\frac{x^2-4x+3}{2(x+1)} \Leftrightarrow \left(x^2-4x+3\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^3+3x}+2x}-\frac{1}{2x+2}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4x+3=0 \\ \sqrt{x^3+3x}+2x=2x+2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4x+3=0 \\ x^3+3x-4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\{1;3\}$.

II. PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

DẠNG 1 : BIẾN ĐỔI VỀ MỘT BIỂU THỨC VÀ ĐẶT MỘT ẨN PHỤ

Ví dụ 1: Giải phương trình $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}=2x-12+2\sqrt{x^2-16}$.

Lời giải

Điều kiện : $x\ge 4$.

Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}=2x-12+2\sqrt{(x-4)(x+4)}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}=\left(x-4+x+4+2\sqrt{(x-4)(x+4)}\right)-12$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}=\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}\right)^2-12$

Đặt $t=\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}\ge 0$, ta được $t=t^2-12\Leftrightarrow t^2-t-12=0$

$\Leftrightarrow (t+3)(t-4)=0$ $\Leftrightarrow t=-3$ (loại), $t=4$ (thỏa mãn).

$\Leftrightarrow t^2-t-12=0\Rightarrow \sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}=4\Leftrightarrow 2x+2\sqrt{x^2-16}=16$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-16}=8-x\Leftrightarrow \begin{cases}8-x\ge 0\\ x^2-16=x^2-16x+64\end{cases}$ $\Leftrightarrow x=5$ (thỏa mãn)

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $S=\{5\}$.

Ví dụ 2: Giải phương trình $\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}+\sqrt{(x+1)(4-x)}=5$.

Điều kiện : $-1\le x\le 4$.

Phương trình $\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}\right)+2\sqrt{(x+1)(4-x)}=10$

$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}\right)+\left(x+1+4-x+2\sqrt{(x+1)(4-x)}\right)=15$

$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}\right)+\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}\right)^2=15$

Đặt $t=\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}\ge 0$, ta được $2t+t^2=15\Leftrightarrow t^2+2t+1=16$ $\Leftrightarrow (t+1)^2=16$ $\Leftrightarrow t+1=\pm 4$

$\Leftrightarrow t=3$ (thỏa mãn), $t=-5$ (loại).

$\Rightarrow \sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}=3\Leftrightarrow 5+2\sqrt{(x+1)(4-x)}=9$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(4-x)}=2\Leftrightarrow 4x-x^2+4-x=4$ $\Leftrightarrow x^2-3x=0$ $\Leftrightarrow x=0, x=3$ (thỏa mãn).

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\{0;3\}$.

Ví dụ 3: Giải phương trình $5\sqrt{x}+\dfrac{5}{2\sqrt{x}}=2x+\dfrac{1}{2x}+4$.

Điều kiện : $x>0$.

Phương trình $\Leftrightarrow 5\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)=2\left(x+\dfrac{1}{4x}\right)+4$

$\Leftrightarrow 5\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)=2\left[\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2-1\right]+4$

Đặt $t=\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\ge 2\sqrt{\sqrt{x}.\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\sqrt{2}$ ta được $5t=2\left(t^2-1\right)+4$

$\Leftrightarrow 2t^2-5t+2=0 \Leftrightarrow 2t^2-4t-t+2=0 \Leftrightarrow 2t\left(t-2\right)-\left(t-2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(t-2\right)\left(2t-1\right)=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$ (loại), $t=2$ (thỏa mãn).

$\Rightarrow \sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}=2 \Leftrightarrow 2x-4\sqrt{x}+1=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{2}$ (thỏa mãn).

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\left\{\frac{3}{2}\pm\sqrt{2}\right\}$.

Ví dụ 4: Giải phương trình $\left(x-1\right)^2=2-x\sqrt{x-\frac{1}{x}}$.

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} x-\frac{1}{x}\ge 0 \\ x\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2-1}{x}\ge 0 \\ x\ne 0 \end{cases}$

Phương trình $\Leftrightarrow x^2-2x+1=2-x\sqrt{x-\frac{1}{x}} \Leftrightarrow x^2-1-2x+x\sqrt{x-\frac{1}{x}}=0$

$\Leftrightarrow x-\frac{1}{x}-2+\sqrt{x-\frac{1}{x}}=0 \Leftrightarrow x-\frac{1}{x}+\sqrt{x-\frac{1}{x}}-2=0$.

Đặt $t=\sqrt{x-\frac{1}{x}}\ge 0$, ta được $t^2+t-2=0 \Leftrightarrow \left(t-1\right)\left(t-2\right)=0$

$\Leftrightarrow t=2$ (loại), $t=1$ (thỏa mãn)$\Rightarrow \sqrt{x-\frac{1}{x}}=1$

$\Leftrightarrow x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\left\{\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Ví dụ 5: Giải phương trình $x^2-3x+1+\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^4+x^2+1}=0$.

Lời giải

$*$ Nếu $x\le 0$ thì phương trình đã cho vô nghiệm.

$*$Xét $x>0$, chia hai vế cho x ta được

$x+\frac{1}{x}-3+\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+1}=0 \Leftrightarrow x+\frac{1}{x}-3+\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1}=0$.

Đặt $t=x+\frac{1}{x}\ge 2\sqrt{x.\frac{1}{x}}=2$

ta được $t-3+\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{t^2-1}=0 \Leftrightarrow \sqrt{t^2-1}=\sqrt{3}\left(3-t\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-t\ge 0 \\ t^2-1=3\left(9-6t+t^2\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\le 3 \\ 2t^2-18t+28=0 \end{cases} \Leftrightarrow t=2 \Rightarrow x=1 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\{1\}$

DẠNG 2. BIẾN ĐỔI VỀ HAI BIỂU THỨC VÀ ĐẶT HAI ẨN PHỤ RỒI ĐƯA VỀ TÍCH

Ví dụ 1. Giải phương trình $5\sqrt{x^3+8}=2\left(x^2-x+6\right)$

Lời giải

Điều kiện: $x^3\ge -8 \Leftrightarrow x\ge -2$

Phương trình $\Leftrightarrow 5\sqrt{(x+2)\left(x^2-2x+4\right)}=2\left(x^2-x+6\right)$

$\Leftrightarrow 5\sqrt{(x+2)\left(x^2-2x+4\right)}=2\left[\left(x^2-2x+4\right)+(x+2)\right]$

Đặt $a=\sqrt{x^2-2x+4}>0, b=\sqrt{x+2}\ge 0$, ta được

$2a^2-5ab+2b^2=0 \Leftrightarrow (a-2b)(2a-b)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2b \\ 2a=b \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x+4=4x+8 \\ 4\left(x^2-2x+4\right)=x+2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-6x-4=0 \\ 4x^2-9x+14=0 \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x=3\pm\sqrt{13}$ (thỏa mãn)

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\left\{3\pm\sqrt{13}\right\}$

Ví dụ 2. Giải phương trình $x^2+2x+7=3\sqrt{x^3+3x^2+x+3}$

Lời giải

Điều kiện: $x\ge -3$

Phương trình $\Leftrightarrow x^2+2x+7=3\sqrt{\left(x^2+1\right)(x+3)}$

$\Leftrightarrow \left(x^2+1\right)+2(x+3)=3\sqrt{\left(x^2+1\right)(x+3)}$

Đặt $a=\sqrt{x^2+1}>0, b=\sqrt{x+3}\ge 0$, ta được

$a^2+2b^2=3ab \Leftrightarrow a^2-3ab+2b^2=0 \Leftrightarrow (a-b)(a-2b)=0$

$$\left[\begin{array}{l} a=b \\ a=2b \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+1}=\sqrt{x+3} \\ \sqrt{x^2+1}=2\sqrt{x+3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x-2=0 \\ x^2-4x-11=0 \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x=-1, x=2, x=2\pm\sqrt{15}$ (thỏa mãn)

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\left\{-1;2;2\pm\sqrt{15}\right\}$

Ví dụ 3. Giải phương trình $\dfrac{4}{x}+\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=x+\sqrt{2x-\dfrac{5}{x}}$

Lời giải

Điều kiện: $x\ne 0, x-\dfrac{1}{x}\ge 0, 2x-\dfrac{5}{x}\ge 0$

Phương trình $\Leftrightarrow x-\dfrac{4}{x}+\sqrt{2x-\dfrac{5}{x}}-\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=0 \Leftrightarrow \left(2x-\dfrac{5}{x}\right)-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+\sqrt{2x-\dfrac{5}{x}}-\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=0$

Đặt $a=\sqrt{2x-\frac{5}{x}}\ge 0, b=\sqrt{x-\frac{1}{x}}\ge 0$ ta được $a^2-b^2+a-b=0$

$\Leftrightarrow (a-b)(a+b+1)=0 \Leftrightarrow a=b \Rightarrow 2x-\frac{5}{x}=x-\frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=-2$ (loại), $x=2$ (thỏa mãn)

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\{2\}$

Ví dụ 4. Giải phương trình $\left(4x^2+1\right)x=(3-x)\sqrt{5-2x}$

Lời giải

Điều kiện: $x\le \frac{5}{2}$

Phương trình $\Leftrightarrow \left(4x^2+1\right)(2x)=(6-2x)\sqrt{5-2x}$

$\Leftrightarrow \left(4x^2+1\right)(2x)=\left[(5-2x)+1\right]\sqrt{5-2x}$

Đặt $a=2x, b=\sqrt{5-2x}\ge 0$, ta được $\left(a^2+1\right)a=\left(b^2+1\right)b \Leftrightarrow a^3+a=b^3+b$

$\Leftrightarrow (a-b)\left(a^2+ab+b^2+1\right)=0 \Leftrightarrow (a-b)\left[\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}+1\right]=0$

$\Leftrightarrow a=b \Rightarrow 2x=\sqrt{5-2x} \Leftrightarrow \begin{cases}2x\ge 0\\ 4x^2=5-2x\end{cases}$

$\Leftrightarrow x=\frac{-1+\sqrt{21}}{4}$ (thỏa mãn)

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\left\{\frac{-1+\sqrt{21}}{4}\right\}$

Ví dụ 5. Giải phương trình $x^3+3x^2+9x+7+(x-10)\sqrt{4-x}=0$

Lời giải

Điều kiện: $4-x\ge 0 \Leftrightarrow x\le 4$

Phương trình $\Leftrightarrow x^3+3x^2+3x+1+6x+6=(10-x)\sqrt{4-x}$

$\Leftrightarrow (x+1)^3+6(x+1)=\left[6+(4-x)\right]\sqrt{4-x}$

$\Leftrightarrow (x+1)^3+6(x+1)=\left(\sqrt{4-x}\right)^3+6\sqrt{4-x}$

Đặt $a=x+1, b=\sqrt{4-x}, b\ge 0$ ta được

$\Leftrightarrow a^3+6a=b^3+6b \Leftrightarrow \left(a^3-b^3\right)+(6a-6b)=0$

$\Leftrightarrow (a-b)\left(a^2+ab+b^2+6\right)=0$

$\Leftrightarrow (a-b)\left[\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}+6\right]=0 \Leftrightarrow a=b$

$\Rightarrow \sqrt{4-x}=x+1 \Leftrightarrow \begin{cases}x+1\ge 0\\ 4-x=x^2+2x+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -1\\ x^2+3x-3=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow x=\frac{-3+\sqrt{21}}{2}$ (thỏa mãn)

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\left\{\frac{-3+\sqrt{21}}{2}\right\}$

Ví dụ 6. Giải phương trình $\sqrt{5x^2+6x+5}=\frac{64x^3+4x}{5x^2+6x+6}$

Lời giải

Vì $5x^2+6x+5>0\ \forall x$ nên phương trình xác định $\forall x$

Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{5x^2+6x+5}=\frac{64x^3+4x}{\left(5x^2+6x+5\right)+1}$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{5x^2+6x+5}\right)^3+\sqrt{5x^2+6x+5}=\left(4x\right)^3+4x$

Đặt $a=\sqrt{5x^2+6x+5}>0, b=4x$ ta được

$a^3+a=b^3+b \Leftrightarrow (a-b)\left(a^2+ab+b^2+1\right)=0$

$\Leftrightarrow (a-b)\left[\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}+1\right]=0 \Leftrightarrow a=b \Rightarrow \sqrt{5x^2+6x+5}=4x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 5x^2+6x+5=16x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 11x^2-6x-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\{1\}$

DẠNG 3: ĐẶT ẨN PHỤ KẾT HỢP VỚI ẨN BAN ĐẦU ĐƯA VỀ TÍCH

Ví dụ 1. Giải phương trình $6x^2+2x+1=3x\sqrt{6x+3}$

Lời giải

Điều kiện: $x\ge -\frac{1}{2}$

Phương trình $\Leftrightarrow 18x^2+(6x+3)=9x\sqrt{6x+3}$

Đặt $y=\sqrt{6x+3}\ge 0$ ta được $18x^2+y^2=9xy$

$\Leftrightarrow 18x^2-9xy+y^2=0 \Leftrightarrow (6x-y)(3x-y)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=3x \\ y=6x \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{6x+3}=3x \\ \sqrt{6x+3}=6x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 9x^2-6x-3=0, x\ge 0 \\ 36x^2-6x-3=0, x\ge 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x=1, x=\frac{1+\sqrt{13}}{12}$ (thỏa mãn)

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\left\{1;\frac{1+\sqrt{13}}{12}\right\}$

Ví dụ 2: Giải phương trình $4\sqrt{x+1}=x^2-5x+14$

Lời giải

Điều kiện $x\ge 1$.

$$x^2-5x+14-4\sqrt{x+1}=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-6x+9+x+1-4\sqrt{x+1}=0$$

Phương trình tương đương với $\Leftrightarrow (x-3)^2+\left(\sqrt{x+1}-2\right)^2=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ \sqrt{x+1}=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=3$.

Ví dụ 3: Giải phương trình $x+4\sqrt{x+3}+2\sqrt{3-2x}=11$

Lời giải

Điều kiện $-3\le x\le \frac{3}{2}$.

Phương trình $\Leftrightarrow 11-x-4\sqrt{x+3}-2\sqrt{3-2x}=0$

$\Leftrightarrow x+3-4\sqrt{x+3}+4+3-2x-2\sqrt{3-2x}+1=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+3}-2\right)^2+\left(\sqrt{3-2x}-1\right)^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3}=2 \\ \sqrt{3-2x}=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$

Vậy nghiệm phương trình đã cho là $x=1$.

Ví dụ 4: Giải phương trình $x-\sqrt{x-8}-3\sqrt{x}+1=0$

Lời giải

Điều kiện $x\ge 8$.

Phương trình $\Leftrightarrow 2x-2\sqrt{x-8}-6\sqrt{x}+2=0$

$\Leftrightarrow x-8-2\sqrt{x-8}+1+1x-6\sqrt{x}+9=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-8}-1\right)^2+\left(\sqrt{x}-3\right)^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-8}=1 \\ \sqrt{x}=3 \end{cases} \Leftrightarrow x=9$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=9$.

Ví dụ 5: Giải phương trình $x^2+x-9=\sqrt{\left(x^2-8\right)\left(x-2\right)}+\sqrt{x^2-8}+\sqrt{x-2}$

Lời giải

Điều kiện $x\ge \sqrt{8}$

Phương trình $\Leftrightarrow 2x^2+2x-18=2\sqrt{\left(x^2-8\right)\left(x-2\right)}+2\sqrt{x^2-8}+2\sqrt{x-2}$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2-8}-\sqrt{x-2}\right)^2+\left(\sqrt{x^2-8}-1\right)^2+\left(\sqrt{x-2}-1\right)^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-8}=\sqrt{x-2} \\ \sqrt{x^2-8}=1 \\ \sqrt{x-2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=3$.

Ví dụ 6: Giải phương trình $\sqrt{1-2x}+\sqrt{1+2x}=2-x^2$

Lời giải

Điều kiện $-\dfrac{1}{2}\le x\le\dfrac{1}{2}\Rightarrow 2-x^2>0$.

Phương trình $\Leftrightarrow 2+2\sqrt{1-4x^2}=x^4-4x^2+4$

$x^4-4x^2-2\sqrt{1-4x^2}+2=0$

$\Leftrightarrow x^4+(1-4x)^2-2\sqrt{1-4x^2}+1=0$

$\Leftrightarrow x^4+\left(\sqrt{1-4x^2}-1\right)^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^4=0 \\ \sqrt{1-4x^2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=0$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x=0$.

DẠNG 2: ĐÁNH GIÁ VẾ NÀY ≥ MỘT SỐ, VẾ KIA ≤ SỐ ĐÓ BẰNG BĐT CỐI, BUNHIA

Ví dụ 1: Giải phương trình $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11$

Lời giải

Điều kiện $2\le x\le 4$.

Có $x^2-6x+11=(x-3)^2+2\ge 2$

Ta sẽ đánh giá $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}\le 2$

Cách 1: (Sử dụng BĐT Côsi)

Xét $\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}\right)^2=2+2\sqrt{(x-2)(4-x)}\le 2+2\dfrac{x-2+(4-x)}{2}=4$

$\Rightarrow \sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}\le 2$

Cách 2 (Sử dụng bất đẳng thức Bunhia)

Xét $\left(1.\sqrt{x-2}+1.\sqrt{4-x}\right)^2\le\left(1^2+1^2\right)\left(\sqrt{x-2}^2+\sqrt{4-x}^2\right)=4\Rightarrow\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}\le 2$

Như vậy $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}\le 2$, $x^2-6x+11\ge 2$ nên phương trình xảy ra dấu bằng

$\begin{cases} x-3=0 \\ x-2=4-x \end{cases}\Leftrightarrow x=3$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x=3$

Ví dụ 2: Giải phương trình $\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}=x^4-4x^3+7x^2-12x+14$

Lời giải

Điều kiện $1\le x\le 3$

Ta có $x^4-4x^3+7x^2-12x+14=\left(x^4-4x^3+4x^2\right)+\left(3x^2-12x+12\right)+2$

$=\left(x^2-2x\right)^2+3(x-2)^2+2\ge 2$

Ta sẽ đánh giá $\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}\le 2$

Cách 1: (Sử dụng BĐT Côsi)

Xét $\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}\right)^2=2+2\sqrt{(x-1)(3-x)}\le 2+2\dfrac{x-1+(3-x)}{2}=4$

$\Rightarrow \sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}\le 2$

Cách 2 (Sử dụng bất đẳng thức Bunhia)

Xét $\left(1.\sqrt{x-1}+1.\sqrt{3-x}\right)^2\le\left(1^2+1^2\right)\left(\sqrt{x-1}^2+\sqrt{3-x}^2\right)=4\Rightarrow\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}\le 2$

Như vậy $\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}\le 2$, $x^4-4x^3+7x^2-12x+14\ge 2$ nên phương trình xảy ra dấu bằng

$\begin{cases} x^2-2x=0 \\ x-2=0 \\ x-1=3-x \end{cases}\Leftrightarrow x=2.$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=2$.

Ví dụ 3: Giải phương trình $\sqrt{2x-5}+\sqrt{7-2x}=x^4-4x^3-2x^2+12x+11$

Lời giải

Điều kiện $\dfrac{5}{2}\le x\le\dfrac{7}{2}$

Ta có $x^4-4x^3-2x^2+12x+11=\left(x^4-4x^3+4x^2\right)-6x^2+12x+11$

$=\left(x^2-2x\right)^2-6\left(x^2-2x\right)^2+11$

$=\left(x^2-2x\right)^2-6\left(x^2-2x\right)+9+2$

$=\left(x^2-2x-3\right)^2+2\ge 2$

Ta sẽ đánh giá $\sqrt{2x-5}+\sqrt{7-2x}\le 2$

Cách 1: (Sử dụng BĐT Côsi)

Xét $\left(\sqrt{2x-5}+\sqrt{7-2x}\right)^2=2+2\sqrt{(2x-5)(7-2x)}\le 2+2\dfrac{5x-2+(7-2x)}{2}=4$

$\Rightarrow\sqrt{2x-5}+\sqrt{7-2x}\le 2$

Cách 2 (Sử dụng bất đẳng thức Bunhia)

Xét $\left(1.\sqrt{2x-5}+1.\sqrt{7-2x}\right)^2\overset{Bunhia}{\le}\left(1^2+1^2\right)\left(\sqrt{2x-5}^2+\sqrt{7-2x}^2\right)=4$

$\Rightarrow\sqrt{2x-5}+\sqrt{7-2x}\le 2.$

Như vậy $\sqrt{2x-5}+\sqrt{7-2x}\le 2$, $x^4-4x^3-2x^2+12x+11\ge 2$ nên phương trình chỉ xảy ra khi

$\begin{cases} x^2-2x-3=0 \\ 2x-5=7-2x \end{cases}\Leftrightarrow x=3$ (thỏa mãn)

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\{3\}$.

Ví dụ 4. Giải phương trình $x\sqrt{3-2x}=3x^2-6x+4$

Lời giải

Điều kiện: $3-2x\ge 0\Leftrightarrow x\le\dfrac{3}{2}$.

Cách 1 (Đánh giá 2 vế)

Có $3x^2-6x+4=3x^2-6x+3+1=3(x-1)^2+1\ge 1$.

Suy ra $x\sqrt{3-2x}\ge 1\Rightarrow x>0$.

Do đó $x\sqrt{3-2x}=\sqrt{x^2(3-2x)}=\sqrt{x.x(3-2x)}\le\sqrt{\left(\dfrac{x+x+3-2x}{3}\right)^3}=1$

Nên $x\sqrt{3-2x}\le 1$.

Như vậy nên phương trình xảy ra khi

$$\begin{cases}x-1=0\\x=3-2x\end{cases}\Leftrightarrow x=1\text{ (thỏa mãn).}$$

Cách 2 (Đưa về bình phương)

Có $x\sqrt{3-2x}=3x^2-6x+4\Leftrightarrow 2x\sqrt{3-2x}=6x^2-12x+8$

$$\Leftrightarrow x^2-2x\sqrt{3-2x}+(3-2x)+5x^2-10x+5=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-\sqrt{3-2x}\right)^2+5(x-1)^2=0$$

Do $\left(x-\sqrt{3-2x}\right)^2\ge 0;\ 5(x-1)^2\ge 0$ nên phương trình chỉ xảy ra khi

$$\begin{cases}x=\sqrt{3-2x}\\x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1\text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\{1\}$.

Ví dụ 5. Giải phương trình $\sqrt{2x-\dfrac{3}{x}}+\sqrt{\dfrac{6}{x}-2x}=1+\dfrac{3}{2x}$.

Lời giải

Điều kiện $x\ne 0;\ 2x-\dfrac{3}{x}\ge 0;\ \dfrac{6}{x}-2x\ge 0$.

__Cách 1__ (Sử dụng bất đẳng thức Côsi)

Có $\sqrt{2x-\dfrac{3}{x}}+\sqrt{\dfrac{6}{x}-2x}=\sqrt{1.\left(2x-\dfrac{3}{x}\right)}+\sqrt{1.\left(\dfrac{6}{x}-2x\right)}$

$$\le\frac{1+\left(2x-\dfrac{3}{x}\right)}{2}+\frac{1+\left(\dfrac{6}{x}-2x\right)}{2}=1+\frac{3}{2x}$$

Do đó phương trình xảy ra khi $2x-\dfrac{3}{x}=\dfrac{6}{x}-2x=1\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$ (thỏa mãn).

__Cách 2__ (Sử dụng bất đẳng thức Bunhia)

Có $\left(\sqrt{2x-\dfrac{3}{x}}+\sqrt{\dfrac{6}{x}-2x}\right)^2=\left(1.\sqrt{2x-\dfrac{3}{x}}+1.\sqrt{\dfrac{6}{x}-2x}\right)^2$

$$\le\left(1^2+1^2\right)\left(2x-\frac{3}{x}+\frac{6}{x}-2x\right)=\frac{6}{x}$$

Nên $\sqrt{2x-\dfrac{3}{x}}+\sqrt{\dfrac{6}{x}-2x}\le\sqrt{\dfrac{6}{x}}$

Mà $1+\dfrac{3}{2x}\ge 2\sqrt{1\dfrac{3}{2x}}=\sqrt{\dfrac{6}{x}}$ nên dấu "=" xảy ra khi $x=\dfrac{3}{2}$ (thỏa mãn).

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

Ví dụ 6. Giải phương trình $\sqrt{12-\frac{3}{x^2}}+\sqrt{4x^2-\frac{3}{x^2}}=4x^2$.

Lời giải

Điều kiện $x\neq 0;\ 12-\frac{3}{x^2}\geq 0;\ 4x^2-\frac{3}{x^2}\geq 0$.

Cách 1 Có $\sqrt{12-\frac{3}{x^2}}+\sqrt{4x^2-\frac{3}{x^2}}=\frac{1}{3}\sqrt{9\left(12-\frac{3}{x^2}\right)}+\sqrt{1\left(4x^2-\frac{3}{x^2}\right)}$

$$\leq\frac{1}{6}\left(9+12-\frac{3}{x^2}\right)+\frac{1}{2}\left(1+4x^2-\frac{3}{x^2}\right)=2x^2-\frac{1}{2x^2}+4$$

$$=4x^2-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}-2\right)=4x^2-2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\leq 4x^2.$$

Do đó phương trình xảy ra khi

$12-\frac{3}{x^2}=9;\ 4x^2-\frac{3}{x^2}=1;\ x-\frac{1}{x}=0\Leftrightarrow x=\pm 1$ (thỏa mãn).

Cách 2 Đặt $a=4x^2>0;\ b=\frac{3}{x^2}>0\Rightarrow ab=12,$

Ta được $\sqrt{ab-b}+\sqrt{a-b}=a$.

Có $\sqrt{ab-b}+\sqrt{a-b}=\sqrt{b(a-1)}+\sqrt{1(a-b)}\leq\frac{b+(a-1)}{2}+\frac{1+(a-b)}{2}=a$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}4x^2-1=\frac{3}{x^2}\\ 1=4x^2-\frac{3}{x^2}\end{cases}\Leftrightarrow 4x^4-x^2-3=0\Leftrightarrow x=\pm 1$ (thỏa mãn).

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\{\pm 1\}$.

HỆ THỐNG BÀI TẬP SỬ DỤNG TRONG CHỦ ĐỀ

I. PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

Giải các phương trình sau

Bài 1. $\sqrt{x+9}+2012\sqrt{x+6}=2012+\sqrt{(x+9)(x+6)}$.

Bài 2. $\sqrt{2x+1}+3\sqrt{4x^2-2x+1}=3+\sqrt{8x^3+1}$.

Bài 3. $x^3+\left(4+x^2\right)\sqrt{4-x^2}=8-2x\sqrt{4-x^2}$.-

Bài 4. $x+2\sqrt{7-x}+\sqrt{7x-x^2}-2\sqrt{x}-7=0$.

Bài 5. $x^2+1+\sqrt{x^2+x+2}=2x+\sqrt{3x+1}$.

Bài 6. $x^2+2018\sqrt{2x^2+1}=x+1+2018\sqrt{x^2+x+2}$.

Bài 7. $\sqrt{4x^2+5x+1}+3=2\sqrt{x^2-x+1}+9x$.

Bài 8. $\sqrt{5x+4}+\sqrt{3x+2}=\sqrt{4x+5}+\sqrt{2x+3}=0$.

Bài 9. $\sqrt{3x^2-7x+3}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3x^2-5x-1}-\sqrt{x^2-3x+4}$.

Bài 10. $6\sqrt{1-x^2}-4x=3\left(\sqrt{1+x}-1\right)$.

Bài 12. $\sqrt{x-1}+\sqrt{6-x}=3x^2-4x-1.$

Bài 13. $5\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+3}\right)=4x^2-24x+35$

Bài 14. $x^3-2\sqrt{x+2}-4=0.$

Bài 15. $x^3+x-7=\sqrt{x^2+5}.$

Bài 16. $\sqrt{x+\frac{3}{x}}=\frac{x^2+7}{2(x+1)}.$

II. PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ.

Giải các phương trình sau.

Bài 1. $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}=2x-12+2\sqrt{x^2-16}.$

Bài 2. $\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}+\sqrt{(x+1)(4-x)}=5.$

Bài 3. $5\sqrt{x}+\frac{5}{2\sqrt{x}}=2x+\frac{1}{2x}+4.$

Bài 4. $(x-1)^2=2-x\sqrt{x-\frac{1}{x}}.$

Bài 5. $x^2-3x+1+\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^4+x^2+1}=0.$

Bài 6. $5\sqrt{x^3+8}=2\left(x^2-x+6\right)$.

Bài 7. $x^2+2x+7=3\sqrt{x^3+3x^2+x+3}.$

Bài 8. $\frac{4}{x}+\sqrt{x-\frac{1}{x}}=x+\sqrt{2x-\frac{5}{x}}.$

Bài 9. $\left(4x^2+1\right)x=(3-x)\sqrt{5-2x}.$

Bài 10. $x^3+3x^2+9x+7+(x-10)\sqrt{4-x}=0.$

Bài 11. $\sqrt{5x^2+6x+5}=\dfrac{64x^3+4x}{5x^2+6x+6}$.

Bài 12. $2(1-x)\sqrt{x^2+2x-1}=x^2-2x+1$.

Bài 13. $(4x-1)\sqrt{x^2+1}=2x^2+2x+1$.

Bài 14. $x^2+\sqrt{x+5}=5$.

Bài 15. $x^2+1=2\sqrt[3]{2x-1}$.

Bài 16. $7x^2+7x=\sqrt{\dfrac{4x+9}{28}}$ với $x>0$.

Bài 17. $x^2-x-2\sqrt{1+16x}=2$.

Bài 18. $\sqrt[3]{x+1}=x^3-15x^2+75x-131$.

III. PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ

Giải các phương trình sau:

Bài 1. $x^2+7x+12=2\sqrt{3x+7}$.

Bài 2. $4\sqrt{x+1}=x^2-5x+14$.

Bài 3. $x+4\sqrt{x+3}+2\sqrt{3-2x}=11$.

Bài 4. $x-\sqrt{x-8}-3\sqrt{x}+1=0$.

Bài 5. $x^2+x-9=\sqrt{(x^2-8)(x-2)}+\sqrt{x^2-8}+\sqrt{x-2}$.

Bài 6. $\sqrt{1-2x}+\sqrt{1+2x}=2-x^2$.

Bài 7. $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11$.

Bài 8. $\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}=x^4-4x^3+7x^2-12x+14$.

Bài 9. $\sqrt{2x-5}+\sqrt{7-2x}=x^4-4x^3-2x^2+12x+11$.

Bài 10. $x\sqrt{3-2x}=3x^2-6x+4$.

Bài 11. $\sqrt{2x-\dfrac{3}{x}}+\sqrt{\dfrac{6}{x}-2x}=1+\dfrac{3}{2x}$.

Bài 12. $\sqrt{12-\dfrac{3}{x^2}}+\sqrt{4x^2-\dfrac{3}{x^2}}=4x^2$.