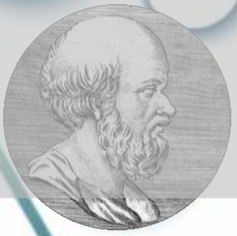
HUỲNH KIM LINH – NGUYỄN QUỐC BẢO

BÍ QUYẾT

Giải toán số học THCS

THEO CHỦ ĐỀ



- ✓ Dùng bồi dưỡng học sinh giỏi các lớp 6,7,8,9
- ✓ Giúp ôn thi vào lớp 10 chuyên toán

$2019^{2020} : 19$

$2^p - 1$

HUỲNH KIM LINH – NGUYỄN QUỐC BẢO

BÍ QUYẾT

Giải toán số học THCS

THEO CHỦ ĐỀ

- Dùng bồi dưỡng học sinh giỏi các lớp 6,7,8,9
- Giúp ôn thi vào lớp 10 chuyên toán

Lời giới thiệu

Các em học sinh và thầy giáo, cô giáo thân mến !

Cuốn sách *Bí quyết giải toán số học THCS* được các tác giả biên soạn nhằm giúp các em học sinh học tập tốt môn Toán ở THCS hiện nay và THPT sau này.

Các tác giả cố gắng lựa chọn những bài tập thuộc các dạng điển hình, sắp xếp thành một hệ thống để bồi dưỡng học sinh khá giỏi các lớp THCS. Sách được viết theo các chủ đề tương ứng với các vấn đề quan trọng thường được ra trong các đề thi học sinh giỏi toán THCS, cũng như vào lớp 10 chuyên môn toán trên cả nước. Mỗi chủ đề được viết theo cấu trúc lý thuyết cần nhớ, các dạng toán thường gặp, bài tập rèn luyện và hướng dẫn giải giúp các em học sinh nắm vững kiến thức đồng thời rèn luyện được các kiến thức đã học.

Mỗi chủ đề có ba phần:

A. ***Kiến thức cần nhớ:*** Phần này tóm tắt những kiến thức cơ bản, những kiên thức bổ sung cần thiết để làm cơ sở giải các bài tập thuộc các dạng của chuyên đề.

B. ***Một số ví dụ:*** Phần này đưa ra những ví dụ chọn lọc, tiêu biểu chứa đựng những kĩ năng và phương pháp luận mà chương trình đòi hỏi.

Mỗi ví dụ thường có: Lời giải kèm theo những nhận xét, lưu ý, bình luận và phương pháp giải, về những sai lầm thường mắc nhằm giúp học sinh tích lũy thêm kinh nghiệm giải toán, học toán.

C. ***Bài tập vận dụng***:

Phần này, các tác giả đưa ra một hệ thống các bài tập được phân loại theo các dạng toán, tăng dần độ khó cho học sinh khá giỏi. Có những bài tập được trích từ các đề thi học sinh giỏi Toán và đề vào lớp 10 chuyên Toán. Các em hãy cố gắng tự giải. Nếu gặp khó khăn có thể xem hướng dẫn hoặc lời giải ở cuối sách.

Các tác giả hi vong cuốn sách này là một tài liệu có ích giúp các em học sinh nâng cao trình độ và năng lực giải toán, góp phần đào tạo, bồi dưỡng học sinh giỏi ở cấp THCS.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng trong biên soạn song cuốn sách này vẫn khó tránh khỏi những sai sót. Chúng tôi mong nhận được những ý kiến đóng góp của bạn đọc.

Trong quá trình soạn sách xin chân thành cảm ơn Thầy Trần Thanh Trà - Trường THCS Chu Văn An, quận Ngô Quyền, tỉnh Hải Phòng; Thầy Lưu Lý Tưởng - Trường THCS Văn Lang, TP Việt Trì, Phú Thọ; Thầy Phạm Văn Vượng - Trường THCS Nhữ Bá Sỹ, tỉnh Thanh Hóa, Cô Quế Thị Lan Trường THCS Diễn Mỹ, Diễn Châu, Nghệ An đã tặng nhiều tài liệu và đề thi quý để tác giả kham khảo.

Xin chân thành cảm ơn!

CHỦ ĐỀ

1 CÁC BÀI TOÁN VỀ ƯỚC VÀ BỘI

A. Kiến thức cần nhớ

I. Ước và bội

1) Định nghĩa về ước và bội

Ước: Số tự nhiên $d \neq 0$ được gọi là ước của số tự nhiên a khi và chỉ khi a chia hết cho d. Ta nói d là ước của a.

Nhận xét: Tập hợp các ước của a là $Ư(a) = \{d \in N : d \mid a\}$

Bội: Số tự nhiên m được gọi là bội của $a \neq 0$ khi và chỉ khi m chia hết cho a hay a là một ước số m.

Nhận xét: Tập hợp các bội của $a(a \neq 0)$ là $B(a) = \{0; a; 2a; ...; ka\}, k \in Z$

2) Tính chất:

- Số 0 là bội của mọi số nguyên khác 0. Số 0 không phải là ước của bất kì số nguyên nào.

- Các số 1 và -1 là ước của mọi số nguyên.

- Nếu $Ư(a) = \{1; a\}$ thì a là số nguyên tố.

- Số lượng các ước của một số : Nếu dạng phân tích ra thừa số nguyên tố của một số tự nhiên A là $a^x.b^y.c^z$ … thì số lượng các ước của A bằng $(x+1)(y+1)(z+1)$ …

Thật vậy ước của A là số có dạng mnp …trong đó:

m có $x+1$ cách chọn (là $1, a, a^2, \ldots, a^x$)

n có $y+1$ cách chọn (là $1, b, b^2, \ldots, b^y$)

p có $z+1$ cách chọn (là $1, c, c^2, \ldots, c^z$),…

Do đó, số lượng các ước của A bằng $(x+1)(y+1)(z+1)$

II. Ước chung và bội chung

1) Định nghĩa

Ước chung (ƯC): Nếu hai tập hợp Ư(a) và Ư(b) có những phần tử chung thì những phần tử đó gọi là ước số chung của a và b. Kí hiệu ƯC(a; b)

Nhận xét: Nếu ƯC$(a;b)=\{1\}$ thì a và b nguyên tố cùng nhau.

Ước chung lớn nhất (ƯCLN): Số $d \in N$ được gọi là ước số chung lớn nhất của a và b $(a;b \in Z)$ khi d là phần tử lớn nhất trong tập hợp ƯC(a; b). Kí hiệu ước chung lớn nhất của a và b là ƯCLN(*a; b*) hoặc (*a;b*) hoặc *gcd(a;b).*

Bội chung (BC): Nếu hai tập hợp B(a) và B(b) có những phần tử chung thì những phần tử đó gọi là bội số chung của *a* và *b*. Kí hiệu BC(a; b)

Bội chung nhỏ nhất (BCNN): Số $m \neq 0$ được gọi là bội chung nhỏ nhất của a và b khi m là số nhỏ nhất khác 0 trong tập hợp BC(a; b). Kí hiệu bội chung nhỏ nhất của a và b là BCNN(*a; b*) hoặc $[a;b]$ hoặc *lcm(a;b).*

2) Cách tìm ƯCLN và BCNN

a) Muốn tìn ƯCLN của hai hay nhiều số lớn hơn 1 ,ta thực hiện các bước sau :

1. Phân tích mỗi số ra thừa số nguyên tố
2.- Chọn ra các thừa số nguyên tố chung
3.- Lập tích các thừa số đã chọn, mỗi thừa số lấy với số mũ nhỏ nhất của nó

Tích đó là ƯCLN phải tìm .

Ví dụ: $30 = 2.3.5,\quad 20 = 2^2.5 \Rightarrow$ ƯCLN(30; 20) $= 2.5 = 10.$

Chú ý :

- Nếu các số đã cho không có thừa số nguyên tố chung thì ƯCLN của chúng là 1.
- Hai hay nhiều số có ƯCLN là 1 gọi là các số nguyên tố cùng nhau.
- Trong các số đã cho, nếu số nhỏ nhất là ước các số còn lại thì ƯCLN của các số đã cho chính là số nhỏ nhất ấy.

b) Muốn tìm BCNN của hai hay nhiều số lớn hơn 1 , ta thực hiện ba bước sau :

1- Phân tích mỗi số ra thừa số nguyên tố .
2- Chọn ra các thừa số nguyên tố chung và riêng .
3- Lập tích các thừa số đã chọn , mỗi thừa số lấy với số mũ lớn nhất của chúng

Tích đó là BCNN phải tìm .

Ví dụ: $30 = 2.3.5,\quad 20 = 2^2.5 \Rightarrow$ BCNN(30; 20) $= 2^2.3.5 = 60$

Chú ý:

- Nếu các số đã cho từng đôi một nguyên tố cùng nhau thì BCNN của chúng là tích các số đó. Ví dụ : BCNN(5 ; 7 ; 8) = 5 . 7 . 8 = 280
- Trong các số đã cho, nếu số lớn nhất là bội của các số còn lại thì BCNN của các số đã cho chính là số lớn nhất đó . Ví dụ : BCNN(12 ; 16 ; 48) = 48

3) Tính chất

Một số tính chất của ước chung lớn nhất:

- Nếu $(a_1;a_2;...;a_n)=1$ thì ta nói các số $a_1;a_2;...;a_n$ nguyên tố cùng nhau.
- Nếu $(a_m;a_k)=1, \forall m \neq k, \{m,k\} \in \{1;2;....;n\}$ thì ta nói các số $a_1;a_2;...;a_n$ đôi một nguyên tố cùng nhau.
- $c \in$ ƯC *(a; b)* thì $\left(\frac{a}{c};\frac{b}{c}\right)=\frac{(a;b)}{c}$.
- $d=(a;b) \Leftrightarrow \left(\frac{a}{d};\frac{b}{d}\right)=1$.
- $(ca;cb)=c(a;b)$.
- $(a;b)=1$ và $(a;c)=1$ thì $(a;bc)=1$
- $(a;b;c)=((a;b);c)$
- Cho $a>b>0$

- Nếu $a=b.q$ thì $(a;b)=b$.

- Nếu $a=bq+r\,(r\neq 0)$ thì $(a;b)=(b;r)$.

Một số tính chất của bội chung nhỏ nhất:

- Nếu $[a;b]=M$ thì $\left(\frac{M}{a};\frac{M}{b}\right)=1$.
- $[a;b;c]=[[a;b];c]$
- $[ka,kb]=k[a,b]$;
- $[a;b].(a;b)=a.b$

4) Thuật toán Euclid trong việc tính nhanh ƯCLN và BCNN

"Thuật toán Euclid" là một trong những thuật toán cổ nhất được biết đến, từ thời Hy Lạp cổ đại, sau đó được Euclid (ơ –clit) hệ thống và phát triển nên thuật toán mang tên ông. Về số học, "Thuật toán Euclid" là một thuật toán để xác định ước số chung lớn nhất (GCD – Greatest Common Divisor) của 2 phần tử thuộc vùng Euclid (ví dụ: các số nguyên). Khi có ƯCLN ta cũng tính nhanh được BCNN. Thuật toán này không yêu cầu việc phân tích thành thừa số 2 số nguyên.


Euclid
(325–265 BC)

Thuật toán Oclit – dùng để tìm ƯCLN của 2 số nguyên bất kỳ.

Để tìm ƯCLN của hai số nguyên a và b bất kỳ ta dùng cách chia liên tiếp hay còn gọi là "vòng lặp" như sau:

- ***Bước 1***: Lấy a chia cho b:

Nếu a chia hết cho b thì ƯCLN(a, b) = b.

Nếu a không chia hết cho b (dư r) thì làm tiếp bước 2.

- ***Bước 2:*** Lấy b chia cho số dư r:

Nếu b chia hết cho r thì ƯCLN(a, b) = r

Nếu b chia r dư r_1 ($r_1 \neq 0$) thì làm tiếp bước 3.

- ***Bước 3:*** Lấy r chia cho số dư r_1:

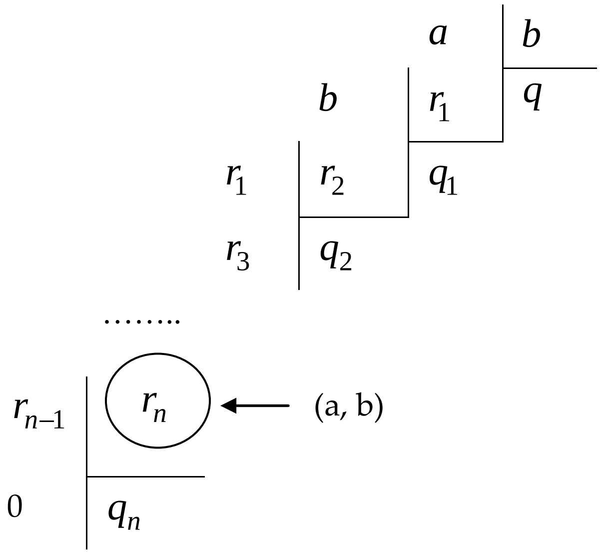
Nếu r chia cho r_1 dư 0 thì ƯCLN(a, b) = r_1

Nếu r chia r_1 dư r_2 ($r_1 \neq 0$) thì làm tiếp bước 4.

Bước 4: Lấy r_1 chia cho số dư r_2 :

Nếu r_1 chia hết cho r_2 thì ƯCLN(a, b) = r_2.

Nếu r_1 cho cho r_2 dư r_3 ($r_3 \neq 0$) thì làm tiếp như trên đến khi số dư bằng 0.



Số dư cuối cùng khác 0 trong dãy chia liên tiếp như trên là ƯCLN (a,b).

Ví dụ: Tính ước số chung lớn nhất của 91 và 287.

- Trước hết lấy 287 (số lớn hơn trong 2 số) chia cho 91:

287 = 91.3 + 14 (91 và 14 sẽ được dùng cho vòng lặp kế)

Theo thuật toán Euclid, ta có ƯCLN(91,287) = ƯCLN(91,14).

Suy ra bài toán trở thành tìm ƯCLN(91,14). Lặp lại quy trình trên cho đến khi phép chia không còn số dư như sau:

91 = **14**.6 + **7** (14 và 7 sẽ được dùng cho vòng lặp kế)

14 = **7**.2 (không còn số dư suy ra **kết thúc**, nhận **7** làm kết quả)

Thật vậy: 7 = ƯCLN(14,7) = ƯCLN(91,14) = ƯCLN(287,91)

Cuối cùng ƯCLN(287, 91) = 7

Tính BCNN nhanh nhất

Để việc giải toán về BCNN và ƯCLN được nhanh, Nếu biết áp dụng ***"Thuật toán Euclid"*** :

Biết rằng: hai số nguyên a, b có BCNN là [a,b] và ƯCLN là (a,b) thì

$$|a.b| = [a,b].(a,b) \Rightarrow [a,b] = \frac{|a.b|}{(a,b)},\ (a,b) = \frac{|a.b|}{[a,b]}$$

Nghĩa là: Tích 2 số nguyên $|a.b|$ = ƯCLN (a,b) x BCNN (a,b)

Ví dụ: có a = 12; b = 18 suy ra ƯCLN (12,18) = 6 thì:

BCNN (12,18) = (12 x 18) : 6 = **36**

Nếu làm theo cách phân tich thừa số nguyên tố thì phải tính:

$12 = 2^2 \times 3$; $18 = 2 \times 3^2$ suy ra BCNN (12,18) = $2^2 \times 3^2$ = **36**

Nhận xét: Với cặp số nguyên có nhiều chữ số thì việc phân tích ra thừa số nguyên tố mất nhiều thời gian; trong khi lấy tích số có thể bấm máy tính cầm tay khá nhanh và dễ hơn.

5) Phân số tối giản

$\frac{a}{b}$ là phân số tối giải khi và chỉ khi $(a,b)=1$.

Tính chất:

i) Mọi phân số khác 0 đều có thể đưa về phân số tối giản.

ii) Dạng tối giản của một phân số là duy nhất.

iii) Tổng (hiệu) của một số nguyên và một phân số tối giản là một phân số tối giản.

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1: Các bài toán liên quan tới số ước của một số

*** Cơ sở phương pháp:** Nếu dạng phân tích ra thừa số nguyên tố của một số tự nhiên A là $a^x.b^y.c^z$ … thì số lượng các ước của A bằng $(x+1)(y+1)(z+1)$ …

Thật vậy ước của A là số có dạng mnp …trong đó:

m có $x+1$ cách chọn (là $1,\ a,\ a^2,\ \ldots, a^x$)

n có $y+1$ cách chọn (là $1,\ b,\ b^2,\ \ldots, b^y$)

p có $z+1$ cách chọn (là $1,\ c,\ c^2,\ \ldots, c^z$),…

Do đó, số lượng các ước của A bằng $(x+1)(y+1)(z+1)$

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm số ước của số 18^{96}

Hướng dẫn giải

Ta có : $18^{96} = \left(3^2.2\right)^{96} = 3^{192}.2^{96}$.

Vậy số ước của số 18^{96} là $(96+1)(192+1) = 97.193 = 18721$.

Bài toán 2. Chứng minh rằng một số tự nhiên lớn hơn 0 là số chính phương khi và chỉ khi số ước số của nó là số lẻ.

Hướng dẫn giải

Giả sử $n = p_1^{a_1}.p_2^{a_2}....p_k^{a_k}$ với p_i nguyên tố và $a_i \in N^*$.

n là số chính phương khi và chỉ khi $a_1, a_2, ..., a_k$ là các số chẵn khi đó $(a_1+1)(a_2+1)...(a_k+1)$ là số lẻ.

Mặt khác $(a_1+1)(a_2+1)...(a_k+1)$ là số các số ước của n, do đó bài toán được chứng minh.

Bài toán 3. Một số tự nhiên *n* là tổng bình phương của 3 số tự nhiên liên tiếp. Chứng minh rằng *n* không thể có đúng 17 ước số.

Hướng dẫn giải

Tổng bình phương của 3 số tự nhiên liên tiếp có dạng :

$n = (m-1)^2 + m^2 + (m+1)^2 = 3m^2 + 2$ không thể là số chính phương.

Nếu n có đúng 17 ước số thì n là số chính phương (bài toán 1), vô lí. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

🗁 **Dạng 2: Tìm số nguyên n để thỏa mãn điều kiện chia hết**

*** Cơ sở phương pháp:** Tách số bị chia thành phần chứa ẩn số chia hết cho số chia và phần nguyên dư, sau đó để thỏa mãn chia hết thì số chia phải là ước của phần số nguyên dư, từ đó ta tìm được số nguyên n thỏa mãn điều kiện.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm số tự nhiên n để (5n + 14) chia hết cho (n + 2).

Hướng dẫn giải

Ta có 5n + 14 = 5.(n + 2) + 4.

Mà 5.(n + 2) chia hết cho (n + 2).

Do đó (5n + 14) chia hết cho (n +2) $\Leftrightarrow$ 4 chia hết cho (n + 2) $\Leftrightarrow$ (n + 2) là ước của 4.

$\Leftrightarrow$ (n +2) $\in \{1 ; 2 ; 4\}$

$\Rightarrow$ n $\in \{0 ; 2\}$.

Vậy với n $\in \{0; 2\}$ thì (5n + 14) chia hết cho (n + 2).

Bài toán 2. Tìm số tự nhiên n để $\dfrac{n+15}{n+3}$ là số tự nhiên.

Hướng dẫn giải

Để $\dfrac{n+15}{n+3}$ là số tự nhiên thì (n + 15) chia hết cho (n + 3).

$\Rightarrow$ [(n + 15) - (n + 3)] chia hết cho (n + 3).

$\Leftrightarrow$ 12 chia hết cho (n +3) .

$\Leftrightarrow$ (n + 3) là Ư(12) = {1; 2; 3; 4; 6; 12}.

$\Leftrightarrow$ n $\in$ {0; 1; 3; 9}.

Vậy với n $\in$ {0; 1; 3; 9}thì $\dfrac{n+15}{n+3}$ là số tự nhiên.

Bài toán 3. Tìm số tự nhiên n để $n^2 + 3n + 6 \vdots n + 3$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $n^2 + 3n + 6 \vdots n + 3$

Suy ra: $n(n + 3) + 6 \vdots n + 3 \Leftrightarrow 6 \vdots n + 3$

=> n + 3 $\in$ Ư(6) = {1; 2; 3; 6} => n = 0; n = 3.

Bài toán 4. Tìm số nguyên n để phân số $\dfrac{4n+5}{2n-1}$ có giá trị là một số nguyên

Hướng dẫn giải

Ta có: $\dfrac{4n+5}{2n-1} = \dfrac{4n-2+7}{2n-1} = \dfrac{n(2n-1)+7}{2n-1} = n + \dfrac{7}{2n-1}$

Vì n nguyên nên để $\dfrac{4n+5}{2n-1}$ nguyên thì $\dfrac{7}{2n-1}$ nguyên

=> 2n – 1 $\in$ Ư(7) = {–7; –1; 1; 7}

$\Leftrightarrow$ 2n $\in$ {– 6; 0; 2; 8} $\Leftrightarrow$ n $\in$ {– 3; 0; 1; 4}

Vậy với n $\in$ {– 3; 0; 1; 4} thì $\dfrac{4n+5}{2n-1}$ có giá trị là một số nguyên

Bài toán 5. Tìm số tự nhiên n để biểu thức sau là số tự nhiên:

$$B = \frac{2n+2}{n+2} + \frac{5n+17}{n+2} - \frac{3n}{n+2}$$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$B = \frac{2n+2}{n+2} + \frac{5n+17}{n+2} - \frac{3n}{n+2} = \frac{2n+2+5n+17-3n}{n+2} = \frac{4n+19}{n+2}$$

$$= \frac{4(n+2)+11}{n+2} = 4 + \frac{11}{n+2}$$

Để B là số tự nhiên thì $\dfrac{11}{n+2}$ là số tự nhiên

$\Rightarrow 11 \vdots (n+2) \Rightarrow n+2 \in$ Ư(11) = $\{\pm 1; \pm 11\}$

Do n + 2 > 1 nên n + 2 = 11 $\Rightarrow$ n = 9

Vậy n = 9 thì B $\in$ N

Bài toán 6. Tìm k nguyên dương lớn nhất để ta có số $n=\dfrac{(k+1)^2}{k+23}$ là một số nguyên dương

Hướng dẫn giải

Ta có: $n=\dfrac{(k+1)^2}{k+23}=\dfrac{k^2+2k+1}{k+23}=\dfrac{(k+23)(k-21)+484}{k+23}=k-1+\dfrac{484}{k+23}, k\in Z^+$ n là một số nguyên dương khi và chỉ khi $k+23\mid 484,\ k+23>23$

Ta có 484 = 22² = 4.121= 44.21 $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} k+23=121 \\ k+23=44 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k=98 \\ k=21 \end{array}\right.$

Với k = 98, ta có n = 81

Với k = 21, ta có n = 11

Vậy giá trị k lớn nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán là 98.

🗁 **Dạng 3: Tìm số biết ƯCLN của chúng**

*** Cơ sở phương pháp:**

* Nếu biết ƯCLN(a, b) = K thì a = K.m và b = K.n với ƯCLN(m; n) = 1 (là điều kiện của số m, n cần tìm) , từ đó tìm được a và b.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm hai số tự nhiên a, b, biết rằng: a + b = 162 và ƯCLN(a, b) = 18

Hướng dẫn giải

Giả sử $a\le b$

Ta có: $a+b=162,\ (a,b)=18$

Đặt $\begin{cases} a=18m \\ b=18n \end{cases}$ với $(m,\text{n})=1, m\le n$

Từ $a+b=162\Rightarrow 18(m+n)=162\Rightarrow m+n=9$

Do (m, n) = 1, lập bảng:

m	1	2	3	4
n	8	7	6	5
a	18	36	loai	72
b	144	126		90

Kết luận: Các số cần tìm là: $(18;144);(36;126);(72;90)$

Bài toán 2. Tìm hai số nhỏ hơn 200, biết hiệu của chúng bằng 90 và ƯCLN là 15

Hướng dẫn giải

Gọi hai số cần tìm là a, b $(a,b \in N; a,b < 200)$

Ta có: $a - b = 90$; $(a,b) = 15$

Đặt $\begin{cases} a = 15m \\ b = 15n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m,n) = 1 \\ 15(m-n) = 90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m,n) = 1 \\ m - n = 6 \end{cases}$

Lại có: $a,b < 200 \Rightarrow \begin{cases} 15m < 200 \\ 15n < 200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \le 13 \\ n \le 13 \end{cases}$

m	n	a	b
13	7	195	105
11	5	65	75
7	1	85	15

Vậy: $(a,b) = (195;105),(65;75),(85;15)$.

Bài toán 3. Tìm hai số tự nhiên có tích bằng 432 và ƯCLN bằng 6

Hướng dẫn giải

Ta có: $ab = 432$; $(a,b) = 6$ $(a \le b)$

Đặt $a = 6m, b = 6n$ với (m, n) = 1 và m ≤ n $\Rightarrow 36mn = 432 \Rightarrow mn = 12$

Ta được:

m	n	a	b
1	12	6	72
3	4	18	24

Vậy $(a,\mathrm{b}) = (6;72),(18,24)$

Bài toán 4. Tìm hai số a, b biết 7a = 11b và ƯCLN(a; b) = 45

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết suy ra a > b

Từ ƯCLN(a; b) = 45 $\Rightarrow \begin{cases} a = 45a_1 \\ b = 45b_1 \end{cases}$ $(a_1; b_1) = 1, (a_1 \geq b_1)$

Mà: $\frac{a}{b} = \frac{11}{7} \Rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{11}{7} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 11 \\ b_1 = 7 \end{cases}$ vì $(a_1; b_1) = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 45.11 = 495 \\ b = 45.7 = 315 \end{cases}$

Vậy hai số a,b cần tìm là a = 495 và b = 315

🗁 Dạng 4: Các bài toán phối hợp giữa BCNN của các số với ƯCLN của chúng

*** Cơ sở phương pháp:**

* Nếu biết BCNN (a, b) = K thì ta gọi ƯCLN(a; b) = d thì a = m.d và b = n.d với ƯCLN(m; n) = 1 (là điều kiện của số m, n cần tìm) , từ đó tìm được a và b.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Cho $a = 1980, b = 2100.$

a) Tìm (a,b) và $[a,b]$.

b) So sánh $[a,b].(a,b)$ với ab. Chứng minh nhận xét đó đối với hai số tự nhiên a và b khác 0 tùy ý.

(Nâng cao và phát triển lớp 6 tập 1 – Vũ Hữu Bình)

Hướng dẫn giải

a) $1980 = 2^2.3^2.5.11,\quad 2100 = 2^2.3.5^2.7.$

ƯCLN(1980, 2100) $= 2^2.3.5 = 60$

$BCNN(1980, 2100) = 2^2.3^2.5^2.7.11 = 69300.$

b) $[1980, 2100].(1980, 2100) = 1980.2100$ (đều bằng 4158000). Ta sẽ chứng minh rằng $[a,b].(a,b) = a.b$

Cách 1. Trong cách giải này, các thừa số riêng cũng được coi như các thừa số chung, chẳng hạn a chứa thừa số $11, b$ không chứa thừa số 11 thì ra coi như b chứa thừa số 11 với số mũ bằng 0. Với cách viết này, trong ví dụ trên ta có:

$1980 = 2^2.3^2.5.7^0.11.$

$2100 = 2^2.3.5^2.7.11^0.$

$(1980, 2100)$ là tích các thừa số chung với số mũ nhỏ nhất $2^2.3^2.5.7^0.11^0 = 60$. $[1980, 2100]$ là tích các thừa số chung với số mũ lớn nhất $2^2.3^2.5^2.7.11 = 69300.$

Bây giờ ta chứng minh trong trường hợp tổng quát:

$[a,b].(a,b) = a.b$ (1)

Khi phân tích ra thừa số nguyên tố, các thừa số nguyên tố ở hai vế của (1) chính là các thừa số nguyên tố có trong a và b. Ta sẽ chứng tỏ rằng hai vế chứa các thừa số nguyên tố như nhau với số mũ tương ứng bằng nhau.

Gọi p là thừa số nguyên tố tùy ý trong các thừa số nguyên tố như vậy. Giả sử số mũ của p trong a là x, số mũ của p trong b là y trong đó x và y có thể bằng 0. Không mất tính tổng quát, giả sử rằng $x \ge y$. Khi đó vế phải của (1) chứa p với số mũ $x + y$. Còn ở vế trái, [a, b] chứa p với số mũ x, (a, b) chứ p với số mũ y nên vế trái cũng chứa p với số mũ $x + y$.

Cách 2. Gọi $d = (a,b)$ thì $a = da', b = db'$ (1), trong đó $(a',b') = 1$.

Đặt $\dfrac{ab}{d} = m$ (2), ta cần chứng minh rằng $[a,b] = m$.

Để chứng minh điều này, cần chứng tỏ tồn tại các số tự nhiên x, y sao cho $m = ax$, $m = by$ và (x, y) = 1.

Thật vậy từ (1) và (2) suy ra $m = a.\dfrac{b}{d} = ab'$,

$m = b.\dfrac{a}{d} = ba'$. Do đó, ta chọn $x = b', y = a'$, thế thì $(x,y) = 1$ vì $(a',b') = 1$.

Vậy $\dfrac{ab}{d} = [a,b]$, tức là $[a,b].(a,b) = ab$.

Bài toán 2. Tìm hai số tự nhiên biết rằng ƯCLN của chúng bằng 10, BCNN của chúng bằng 900.

Hướng dẫn giải

Gọi các số phải tìm là a và b, giả sử $a \le b$. Ta có $(a,b) = 10$ nên. $a = 10a'$, $b = 10b'$, $(a',b') = 1, a' \le b'$. Do đó $ab = 100a'b'$ (1). Mặt khác $ab = [a,b].(a,b) = 900.10 = 9000$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $a'b' = 90$. Ta có các trường hợp :

a'	1	2	3	4
b'	90	45	18	10

Suy ra:

a	10	20	50	90
b	900	450	180	100

Bài toán 3. Tìm hai số tự nhiên a, b sao cho tổng của ƯCLN và BCNN là 15

Hướng dẫn giải

Giả sử a < b

Gọi d = ƯCLN(a; b) $\Rightarrow \begin{cases} a = d.a_1 \\ b = d.b_1 \end{cases}$ $(a_1 < b_1), (a_1; b_1) = 1$, và d < 15

Nên BCNN(a; b) = $a_1.b_1.d$

Theo bài ra ta có: $d + a_1.b_1d = 15 \Rightarrow d(1 + a_1.b_1) = 15 \Rightarrow d \in U(15) = \{1;3;5;15\}$, Mà d < 15, Nên

TH1 : $d = 1 \Rightarrow a_1.b_1 = 14 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \Rightarrow a = 1 \\ b_1 = 14 \Rightarrow b = 14 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_1 = 2 \Rightarrow a = 2 \\ b_1 = 7 \Rightarrow b = 7 \end{cases}$

TH2 : $d = 3 \Rightarrow a_1.b_1 = 4 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \Rightarrow a = 3 \\ b_1 = 4 \Rightarrow b = 12 \end{cases}$

TH3 : $d = 5 \Rightarrow a_1.b_1 = 2 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \Rightarrow a = 5 \\ b_1 = 2 \Rightarrow b = 10 \end{cases}$

Vậy các cặp số (a ; b) cần tìm là : (1 ;14), (2 ; 7), (3 ; 12), (5 ; 10) và đảo ngược lại.

Dạng 5: Các bài toán liên quan đến hai số nguyên tố cùng nhau

* **Cơ sở phương pháp:** Để chứng minh hai số là nguyên tố cùng nhau, ta chứng minh chúng có ƯCLN = 1.

* **Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Chứng minh rằng:

a) Hai số tự nhiên liên tiếp (khác 0) là hai số nguyên tố cùng nhau.

b) Hai số lẻ liên tiếp là hai số nguyên tố cùng nhau.

c) 2n + 1 và 3n + 1 ($n \in N$) là hai số nguyên tố cùng nhau.

Hướng dẫn giải

a) Gọi d $\in$ ƯC (n , n + 1) $\Rightarrow (n+1) - n \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d = 1$. Vậy n và n + 1 là hai số nguyên tố cùng nhau.

b) Gọi d $\in$ ƯC (2n + 1, 2n + 3) $\Rightarrow (2n+3) - (2n+1) \vdots d \Rightarrow 2 \vdots d \Rightarrow d \in \{1;2\}$.

Nhưng $d \neq 2$ vì d là ước của số lẻ. Vậy d = 1.

Vậy (2n + 1) và (2n + 3) là hai số nguyên tố cùng nhau.

c) Gọi d $\in$ ƯC (2n + 1,3n + 1) $\Rightarrow 3(2n+1) - 2(3n+1) \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d = 1$.

Vậy 2n + 1 và 3n +1 là hai số nguyên tố cùng nhau

Bài toán 2. Cho a và b là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng các số sau cũng là hai số nguyên tố cùng nhau:

a) a và a + b b) a^2 và a + b c) ab và a + b.

Hướng dẫn giải

a) Gọi $d \in$ ƯC(a, a + b) $\Rightarrow (a+b)-a \vdots d \Rightarrow b \vdots d$ Ta lại có: $a \vdots d \Rightarrow d \in$ ƯC(a, b), do đó d = 1 (vì a và b là hai số nguyên tố cùng nhau). Vậy (a, a + b) = 1.

b) Giả sử a^2 và a + b cùng chia hết cho số nguyên tố d thì a chia hết cho d, do đó b cũng chia hết cho d. Như vậy a và b cùng chia hết cho số nguyên tố d, trái với giả thiết (a, b) = 1.
Vậy a^2 và a + b là hai số nguyên tố cùng nhau.

c) Giả sử ab và a + b cùng chia hết cho số nguyên tố d. Tồn tại một trong hai thừa số a và b, chẳng hạn là a, chia hết cho d, do đó b cũng chia hết cho d, trái với (a, b) = 1.
Vậy (ab, a + b) = 1.

Bài toán 3. Tìm số tự nhiên n để các số: 9n + 24 và 3n + 4 là các số nguyên tố cùng nhau?

Hướng dẫn giải

Giả sử 9n + 24 và 3n + 4 cùng chia hết cho số nguyên tố d.

Ta có $(9n+24)-3(3n+4) \vdots d \Rightarrow 12 \vdots d \Rightarrow d \in \{2;3\}$. Điều kiện để (9n + 24, 3n + 4) = 1 là $d \neq 2, d \neq 3$. Ta dễ thấy $d \neq 3$ vì 3n + 4 không chia hết cho 3. Muốn $d \neq 2$ thì ít nhất một trong hai số 9n + 24 hoặc 3n + 4 không chia hết cho 2.

Ta thấy 9n + 24 là số lẻ suy ra n lẻ, 3n + 4 lẻ suy ra n lẻ.

Vậy để (9n + 24, 3n + 4) = 1 thì n phải là số lẻ.

Bài toán 4. Tìm n để 18n + 3 và 31n + 7 là hai số nguyên tố cùng nhau

Hướng dẫn giải

Gọi ƯCLN(18n + 3 ; 21n + 7) = d, d $\in N^*$

Khi đó ta có : $\begin{cases} 18n+3 \vdots d \\ 21n+7 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7(18n+3) \vdots d \\ 6(21n+7) \vdots d \end{cases} \Rightarrow (126n+42)-(126n+21) \vdots d \Rightarrow 21 \vdots d$

$\Rightarrow d \in U(21) = \{\pm 1; \pm 3; \pm 7; \pm 21\}$

Do 21n + 7 $\vdots$ d, Mà 21n + 7 không chia hết cho 3, nên d = 1 hoặc d = 7
Để hai số 18n + 3 và 21n + 7 là hai số nguyen tố thì d khác 7 hay
$18n + 3 \not\vdots 7 \Rightarrow 18n + 3 - 21 \not\vdots 7 \Rightarrow 18n - 18 \not\vdots 7 \Rightarrow 18(n-1) \not\vdots 7 \Rightarrow n - 1 \not\vdots 7$
$\Rightarrow n - 1 \neq 7k \Rightarrow n \neq 7k + 1$
Vậy $n \neq 7k + 1$ với k là số tự nhiên thì 18n + 3 và 21n + 7 là hai số nguyên tố

Dạng 6: Các bài toán về phân số tối giản

* **Cơ sở phương pháp:** Một phân số là tối giản khi tử số và mẫu số có ước chung lớn nhất bằng 1.

* **Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Chứng minh rằng $\frac{2n+3}{3n+4}$ là phân số tối giản với mọi số tự nhiên n.

Hướng dẫn giải

Gọi d là ước chung của (2n + 3) và (3n + 4). Suy ra:

$$\begin{cases} 2n+3 \vdots d \\ 3n+4 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(2n+3) \vdots d \\ 2(3n+4) \vdots d \end{cases} \Rightarrow 3(2n+3) - 2(3n+4) \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d \in Ư(1)$$

Mà Ư(1) $= \{-1;1\} \Rightarrow d \in \{-1;1\}$

Vậy $\frac{2n+3}{3n+4}$ là phân số tối giản.

Bài toán 2. Chứng minh rằng $\frac{21n+4}{14n+3}$ là phân số tối giản với mọi số tự nhiên n.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Gọi (2n + 4, 14n + 3) = d $\Rightarrow \begin{cases} 21n+4 \vdots d & (1) \\ 14n+3 \vdots d & (2) \end{cases} \Rightarrow 7n+1 \vdots 3 \Rightarrow 14n+2 \vdots 3 \quad (3)$

Từ (1) và (3) suy ra $1 \vdots d \Rightarrow d = 1$

Vậy $\frac{21n+4}{14n+3}$ là phân số tối giản với mọi số tự nhiên n.

Cách 2: Giả sử phân số $\frac{21n+4}{14n+3}$ chưa tối giản

Suy ra 21n + 1 và 14n + 3 có một ước số chung nguyên tố d.

$\Rightarrow (21n+4) - (14n+3) = 7n + 1 \vdots d$
$\Rightarrow 14n + 2 \vdots d$

Do đó: $(14n+3)-(14n+1)=1\vdots d$,vô lý

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài toán 3. Chứng minh rằng $\frac{2n+3}{n^2+3n+2}$ là phân số tối giản với mọi số tự nhiên n.

Hướng dẫn giải

Ta viết lại: $\frac{2n+3}{n^2+3n+2}=\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}$

Do n + 1 và n + 2 là hai số tự nhiên liên tiếp nên nguyên tố cùng nhau $\Rightarrow (n+1,n+2)=1$

Suy ra tổng của chúng là (n + 1) + (n + 2) = 2n + 3 và tích của chúng là $(n+1)(n+2)=n^2+3n+2$ cũng nguyên tố cùng nhau.

Vậy phân số $\frac{2n+3}{n^2+3n+2}, n\in N$ là phân số tối giản.

Bài toán 4. Định n để $\frac{n+8}{2n-5}$ là phân số tối giản với n là số tự nhiên.

Hướng dẫn giải

Để $\frac{n+8}{2n-5}$ là phân số tối giản thì (n + 8, 2n – 5) = 1

Giả sử d là một ước nguyên tố của 2n – 5 và n + 8. Suy ra: $\begin{cases} d \mid n+8 & (1) \\ d \mid 2n-5 & (2) \end{cases}$

Từ (1) và (2) suy ra: $d \mid 2(n+8)=(2n-5)+21 \quad (3)$

Do đó $d \mid 21 \Rightarrow d=3,7$

Muốn cho phân số tối giản thì điều kiện cần và đủ là (n + 8) không chia hết cho 3 và 7.

Do đó: $n\neq 3k+1, n\neq 7m-1$ với $k,m\in N$

Vậy $n\neq 3k+1$ và $n\neq 7m-1$ là điều kiện cần tìm để phân số $\frac{n+8}{2n-5}$ tối giản.

🗁 **Dạng 7: Tìm ƯCLN của các biểu thức số**

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm ƯCLN của $2n-1$ và $9n+4$ $(n\in\mathbb{N})$.

Hướng dẫn giải

Gọi d ∈ ƯC(2n - 1,9n + 4) $\Rightarrow 2(9n+4)-9(2n-1)\vdots d \Rightarrow 17\vdots d \Rightarrow d\in\{17;1\}$

Vì $2n-1\vdots 17 \Rightarrow 2n-18\vdots 17 \Leftrightarrow 2(n-9)\vdots 17 \Leftrightarrow n-9\vdots 17 \Leftrightarrow n=17k+9$ với $k\in N$

Nếu n =17k + 9 thì 2n - 1⋮17 và 9n + 4 = 9(17k + 9)+ 4 = Bội 17 + 85⋮17

do đó (2n - 1,9n + 4) = 17.

Nếu $n\neq 17k+9$ thì 2n - 1 không chia hết cho 17 do đó (2n - 1,9n + 4) = 1

Bài toán 2. Tìm ƯCLN của $\dfrac{n(n+1)}{2}$ và $2n+1\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$.

Hướng dẫn giải

Gọi $d\in$ ƯC$\left(\dfrac{n(n+1)}{2},2n+1\right)$ thì $n(n+1)\vdots d$ và $2n+1\vdots d$

Suy ra $n(2n+1)-n(n+1)\vdots d$ tức là $n^2\vdots d$.

Từ $n(n+1)\vdots d$ và $n^2\vdots d$ suy ra $n\vdots d$. Ta lại có $2n+1\vdots d$, do đó $1\vdots d$ nên $d=1$

Vậy ƯCLN của $\dfrac{n(n+1)}{2}$ và 2n + 1 bằng 1.

Dạng 8: Liên hệ giữa phép chia có dư với phép chia hết, ƯCLN, BCNN

*** Cơ sở phương pháp:**

* Nếu số tự nhiên **a** chia cho số tự nhiên **b** được số dư là **k** $\Rightarrow$ **a – k ⋮ b**

* Nếu a ⋮ b và a ⋮ c mà ƯCLN(a, b) = 1 $\Rightarrow$ a chia hết cho tích b.c (a, b, c ∈ N)

* Nếu a ⋮ b và a ⋮ c mà a là số nhỏ nhất $\Rightarrow$ a = BCNN(a, b) (a, b, c ∈ N)

* Nếu a ⋮ b và m ⋮ b mà b lớn nhất $\Rightarrow$ b = Ư CLN(a, m) (a, b, m ∈ N)

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Bạn Nam nghĩ 1 số có 3 chữa số, nếu bớt số đó đi 8 thì được 1 số ⋮7, nếu bớt số đó đi 9 thì được 1 số ⋮8, nếu bớt số đó đi 10 thì được 1 số ⋮9, Hỏi bạn Nam nghĩ số nào?

Hướng dẫn giải

Gọi x là số bạn Nam đã nghĩ, Điều kiện: $99<x<1000$

Theo bài ra ta có: $\begin{cases}x-8\vdots 7\\x-9\vdots 8\\x-10\vdots 9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-1\vdots 7\\x-1\vdots 8\\x-1\vdots 9\end{cases}\Rightarrow x-1\vdots 7;8;9\Rightarrow x-1\in BC(7;8;9)$

$x-1\in\{0;504;1008;.....\}\Rightarrow x\in\{1;505;1009;....\}$, Mà 99 < x < 1000 nên x = 505

Vậy số có ba chữ số mà bạn Nam nghĩ là 505

Bài toán 2. Tìm số tự nhiên a nhỏ nhất sao cho chia a cho 3, cho 5, cho 7 được các số dư theo thứ tự là 2, 3, 4

Hướng dẫn giải

Theo bài ra ta có: $\begin{cases} a = 3m+2 \\ a = 5n+3 \\ a = 7p+4 \end{cases} (m,n,p \in N) \Rightarrow \begin{cases} 2a = 6m+4 \\ 2a = 10n+6 \\ 2a = 14p+8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a-1 \vdots 3 \\ 2a-1 \vdots 5 \\ 2a-1 \vdots 7 \end{cases} \Rightarrow 2a-1 \in BC(3;5;7)$

Vì a nhỏ nhất nên 2a - 1 nhỏ nhất khác 0 hay 2a - 1 = BCNN(3; 5; 7) = 105 $\Rightarrow$ 2a = 106 $\Rightarrow$ a = 53

Vậy số tự nhiên nhỏ nhất cần tìm là 53

Bài toán 3. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất khi chia cho 5, 7, 9 có số dư theo thứ tự là 3, 4, 5

Hướng dẫn giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là a. Theo bài ra ta có:

$\begin{cases} a = 5m+3 \\ a = 7n+4 \\ a = 9p+5 \end{cases} (m,n,p \in N) \Rightarrow \begin{cases} 2a = 10m+6 \\ 2a = 14n+8 \\ 2a = 18p+10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a-1 \vdots 5 \\ 2a-1 \vdots 7 \\ 2a-1 \vdots 9 \end{cases} \Rightarrow 2a-1 \in BC(9;5;7)$

Vì a nhỏ nhất nên 2a - 1 nhỏ nhất khác 0 hay 2a - 1 = BCNN(9; 5; 7) = 315 $\Rightarrow$ 2a = 316 $\Rightarrow$ a = 158

Vậy số tự nhiên nhỏ nhất cần tìm là 158

Bài toán 4. Linh và Mai cùng mua một số hộp bút chì màu, số bút đựng trong mỗi hộp bằng nhau và lớn hơn 1. Kết quả Linh có 15 bút chì màu và Mai có 18 bút chì màu hỏi mỗi hộp có bao nhiêu chiếc bút?

Hướng dẫn giải

Gọi số bút trong mỗi hộp là a. Điều kiện: $a \in N, a < 15$ và a >1

Theo bài ra ta có : 15 $\vdots$ a và 18 $\vdots$ a, Nên a là 1 ước chung của 15 và 18

Và a phải lớn hơn 1 và nhỏ hơn 15 $\Rightarrow$ kết quả được a = 3

Bài toán 5. Hai lớp 6A và 6B tham gia phong trào tết trồng cây, mỗi em tròng 1 số cây như nhau, kết quả lớp 6A trồng được 132 cây vag 6B được 135 cây. Hỏi mỗi lớp có bao nhiêu học sinh.

Hướng dẫn giải

Gọi số cây mỗi em trồng được là a, Điều kiện: $a \in N, a < 132, a > 1$

Theo bài ra ta có: 132 $\vdots$ a và 135 $\vdots$ a khi đó ta thấy $a \in UC(132;135) = \{1;3\}$

Vậy a = 3, Khi đó lớp 6A có 132 : 3 = 44 học sinh và lớp 6B có 135 : 3 = 45 học sinh.

Bài toán 6. Trong cuộc thi HSG cấp tỉnh có ba môn Toán Văn Anh ,số học sinh tham gia như sau:Văn có 96 học sinh, Toán có 120 học sinh và Anh có 72 học sinh.Trong buổi tổng kết các bạn được tham gia phân công đứng thành hàng dọc sao cho mỗi hàng có số bạn thi mỗi môn bằng nhau.Hỏi có thể phân học sinh đứng thành ít nhất bao nhiêu hàng?

Hướng dẫn giải

Gọi số học sinh đứng ở mỗi hàng là a. Điều kiện : $a \in N, a < 72$ và a > 1

Vì mỗi hàng có số học sinh mỗi môn bằng nhau nên ta có:

96 ⋮ a ;120⋮ a và 72⋮ a ,

Để có ít nhất bao nhiêu hàng thì số học sinh phải là lớn nhất hay a lớn nhất

Hay a = ƯCLN (96 ; 120 ; 72) = 24, Vậy số hàng cần tìm là : (96 + 120 + 72) : 24 = 12 hàng

🗁 Dạng 9: Tìm ƯCLN của hai số bằng thuật toán Ơ-clit

*** Cơ sở phương pháp:**

a) Trường hợp $b \mid a$ thì (a, b) = b

b) Trường hợp $b \nmid a$ giả sử a = bq + c thì (a, b) = (b, c).

Thuật toán Euclid.

Giả sử:

$a = bq + r_1, 0 < r_1 < b$

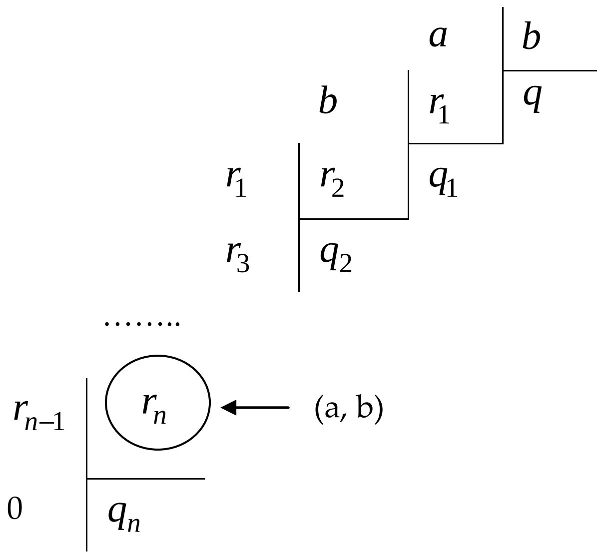
$b = r_1q_1 + r_2, 0 < r_2 < r_1$

$r_1 = r_2q_2 + r_3,\ 0 < r_3 < r_2$

....

$r_{n-2} = r_{n-1}q_{n-1} + r_n, 0 < r_n < r_{n-1}$

$r_{n-1} = r_nq_n$



Thuật toán Euclid phải kết thức với số dư $r_{n+1} \neq 0$

Theo b) ta có

$(a,b) = (b,r_1) = (r_1,r_2) = ... = (r_{n-1},r_n) = r_n$.

Vậy ƯCLN(a, b) là số dư cuối cùng khác 0 trong thuật toán Euclid.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Dùng thuật toán Euclid để chứng minh : $(n^4 + 3n^2 + 1, n^3 + 2n) = 1$.

Hướng dẫn giải

Ta có $n^4 + 3n^2 + 1 = (n^3 + 2n)n + n^2 + 1$

$n^3 + 2n = (n^2 + 1) + n$

$n^2 + 1 = n.n + 1$

$n = 1.n + 0$

Vậy $(n^4 + 3n^2 + 1, n^3 + 2n) = 1$.

Bài toán 2. Cho hai số tự nhiên a và b $(a > b)$.

a) Chứng minh rằng nếu a chia hết cho b thì $(a,b) = b$.

b) Chứng minh rằng nếu a không chia hết cho b thì ƯCLN của hai số bằng ƯCLN của số nhỏ và số dư trong phép chia số lớn cho số nhỏ.

c) Dùng các nhận xét trên để tìm ƯCLN(72, 56)

(Nâng cao và phát triển lớp 6 tập 1)

Hướng dẫn giải

a) Mọi ước chung của a và b hiển nhiên là ước của b. Đảo lại, do a chia hết cho b nên b là ước chung của a và b. Vậy $(a,b) = b$.

b) Gọi r là số dư trong phép chia a cho $b\,(a > b)$. Ta có $a = bk + r\,(k \in N)$, cần chứng minh rằng $(a,b) = (b,r)$.

Thật vậy, nếu a và b cùng chia hết cho d thì r chia hết cho d, do đó ước chung của a và b cũng là ước chung của b và r (1). Đảo lại nếu b và r cùng chia hết cho d thì a chia hết cho d, do đó ước chung của b và r cũng là ước chung của a và b (2). Từ (1) và (2) suy ra tập hợp các ước chung của a và b và tập hợp các ước chung của b và r bằng nhau. Do đó hai số lớn nhất trong hai tập hợp đó cũng bằng nhau, tức là $(a,b) = (b,r)$.

c) 72 chia 56 dư 16 nên $(72,56) = (56,16)$;

56 chia 16 dư 8 nên $(56,16) = (16,8)$;

16 chia hết cho 8 nên $(16,8) = 8$. Vậy $(72,56) = 8$.

Nhận xét : Giả sử a không chia hết cho b và a chia cho b dư r_1, b chia cho r_1 dư r_2, r_1 chia cho r_2 dư $r_3, \ldots, r_{n-2}$ chia cho r_{n-1} dư r_n, r_{n-1} chia cho r_n dư 0 (dãy số $b, r_1, r_2, \ldots r_n$ là dãy số tự nhiên giảm dần nên số phép chia là hữu hạn do đó quá trình trên kết thức với một số dư bằng 0). Theo chứng minh ở ví dụ trên ta có

$\left(a,b\right) = \left(b,r_1\right) = \left(r_1,r_2\right) = \ldots\left(r_{n-1},r_n\right) = r_n$ vì r_{n-1} chia hết cho r_n

Như vậy $UCLN(a,b)$ là số chia cuối cùng trong dãy các phép chia liên tiếp a cho b, b cho r_1, r_1 cho $r_2, \ldots$, trong đó $r_1, r_2, \ldots$ là số dư trong các phép chia theo thứ tự trên.

Trong thực hành người ta đặt tính như sau :

		72	56
	56	16	1
16	8	3	
0	2		

Việc thực hiện một dãy phép chia liên tiếp như trên được gọi là thuật toán Ơ clit.

Trường hợp tìm ƯCLN của ba số, ta tìm ƯCLN của hai số rồi tìm UCLN của kết quả với số thứ ba.

Bài toán 3. Tìm ƯCLN(a, b) biết a là số gồm 1991 chữ số 2; b là số gồm 8 chữ số 2.

Hướng dẫn giải

Ta có: 1991 chia 8 dư 7, còn 8 chia 7 dư 1

Theo thuật toán Ơ- Clít:

$$(a, b) = (\underbrace{22\ldots2}_{1991 \text{ số } 2}, \underbrace{22\ldots2}_{8 \text{ số } 2}) = (\underbrace{22\ldots2}_{8 \text{ số } 2}, \underbrace{22\ldots2}_{7 \text{ số } 2}) = (\underbrace{22\ldots2}_{7 \text{ số } 2}, 2) = 2.$$

Bài toán 4. Tìm ƯCLN của

a) $\underbrace{11\ldots1}_{2004 \text{ số } 1}$ và 11111111

b) 123456789 và 987654321.

(Chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi toánTHCS phần số học- Nguyễn Vũ Thanh)

Hướng dẫn giải

a) Gọi $a = \underbrace{11\ldots1}_{2004 \text{ số } 1}; b = \underbrace{11\ldots1}_{8 \text{ số } 1}$.Ta có $2000 \vdots 8$ nên $\underbrace{11\ldots1}_{2000 \text{ số } 1} = \underbrace{\underbrace{11\ldots1}_{8 \text{ số } 1}\underbrace{11\ldots1}_{8 \text{ số } 1}\ldots\underbrace{11\ldots1}_{8 \text{ số } 1}}_{2000 \text{ số } 1} \vdots b.$

Do đó $a = \underbrace{11\ldots1}_{2000 \text{ số } 1}0000 + 1111 = bq + 1111 \Rightarrow (a, b) = (b, 1111) = 1111\ (do\ b \vdots 1111).$

b) Gọi a = 987654321; b = 123456789. Ta có:

$a = 8b + 9 \Rightarrow (a, b) = (b, 9) = 9\ (do\ b \vdots 9).$

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Câu 1. Tìm số chia và thương của một phép chia có số bị chia bằng 145, số dư bằng 12 biết rằng thương khác 1 (số chia và thương là các số tự nhiên).

Câu 2. Hãy viết số 108 dưới dạng tổng các số tự nhiên liên tiếp lớn hơn 0.

Câu 3. Tìm số tự nhiên n để 3n + 4 chia hết cho n – 1.

Câu 4. Tìm a $\in N$ để a + 1 là bội của a – 1

Câu 5. Tìm số tự nhiên sao cho 4n - 5 chia hết cho 2n – 1

Câu 6. Tìm số nguyên n để: $5 + n^2 - 2n$ chia hết cho $n - 2$

Câu 7. Tìm số nguyên n để: $n^2 + 4$ chia hết cho $n + 2$

Câu 8. Tím tất cả các số nguyên n để phân số $\dfrac{n+1}{n-2}$ có giá trị là một số nguyên.

Câu 9. Tìm số tự nhiên có ba chữ số, biết rằng nó tăng gấp n lần nếu cộng mỗi chữ số của nó với n (n là số tự nhiên, có thể gồm một hoặc nhiều chữ số)

Câu 10. Tìm số tự nhiên a biết rằng 264 chia cho a dư 24, còn 363 chia cho a dư 43.

Câu 11. Tìm số tự nhiên a biết rằng 398 chia cho a thì dư 38 , còn 450 chia cho a thì dư 18.

Câu 12. Có 100 quyển vở và 90 bút chì được thưởng đều cho một số học sinh, còn lại 4 quyển vở và 18 bút chì không đủ chia đều. Tính số học sinh được thưởng.

Câu 13. Phần thưởng cho học sinh của một lớp học gồm 128 vở, 48 bút chì, 192 nhãn vở. Có thể chia được nhiều nhất thành bao nhiêu phần thưởng như nhau, mỗi phần thưởng gồm bao nhiêu vở, bút chì, nhãn vở?

Câu 14. Tìm số tự nhiên a nhỏ nhất sao cho a chia cho 3, cho 5, cho 7 được số dư theo thứ tự là $2, 3, 4$

Câu 15. Một cuộc thi chạy tiếp sức theo vòng tròn gồm nhiều chặng. Biết rằng chu vi đường tròn là $330m$, mỗi chặng dài $75m$, địa điểm xuất phát và kết thúc cùng một chỗ. Hỏi cuộc thi có ít nhất mấy chặng?

Câu 16. Tìm số tự nhiên có ba chữ số, sao cho chia nó cho 17, cho 25 được các số dư theo thứ tự là 8 và 16.

Câu 17. Tìm số tư nhiên n lớn nhất có ba chữ số, sao cho n chia cho 8 thì dư 7, chia cho 31 thì dư 28.

Câu 18. Nếu xếp một số sách vào từng túi 10 cuốn thì vừa hết, vào từng túi 12 cuốn thì thừa 2 cuốn, vào từng túi 18 cuốn thì thừa 8 cuốn. biết rằng số sách trong khoảng từ 715 đến 1000. Tính số sách đó?

Câu 19. Hai lớp $6A, 6B$ cùng thu nhặt một số giấy vụn bằng nhau. Trong lớp $6A$,một bạn thu được $25kg$, còn lại mỗi bạn thu $10kg$. Tính số học sinh mỗi lớp, biết rằng số giấy mỗi lớp thu được trong khoảng từ $200kg$ đến $300kg$.

Câu 20. Có hai chiếc đồng hồ(có kim giờ và kim phút). Trong một ngày, chiếc thứ nhất chạy nhanh 2 phút, chiếc thứ hai chạy chậm 3 phút. Cả hai đồng hồ được lấy lại giờ chính xác. Hỏi sau ít nhất bao lâu, cả hai đồng hồ lại chạy chính xác?

Câu 21.Tìm hai số tự nhiên biết rằng:

a) Hiệu của chúng bằng 84, ƯCLN bằng 28, các số đó trong khoảng từ 300 đến 440.

b) Hiệu của chúng bằng 48, ƯCLN bằng 12.

Câu 22. Tìm hai số tự nhiên biết rằng ƯCLN của chúng bằng 36 và tổng của chúng bằng 432

Câu 23. Tìm hai số tự nhiên biết rằng tích của chúng bằng 864 và ƯCLN của nó là 6

Câu 24. Chứng minh rằng 14n + 3 và 21n + 4 (n $\in$ N)là hai số nguyên tố cùng nhau

Câu 25. Chứng minh rằng 2n + 1 và 6n + 5 là hai số nguyên tố cùng nhau

Câu 26. BCNN của 2 số tự nhiên bằng 770, một số bằng 14. Tìm số kia.

Câu 27. Cho a và b là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng các số sau cũng là hai số nguyên tố cùng nhau:

a) b và $a-b$ $(a>b)$;

b) a^2+b^2 và ab.

Câu 28. Chứng minh rằng nếu số c nguyên tố cùng nhau với a và với b thì c nguyên tố cùng nhau với tích ab.

Câu 29. Tìm số tự nhiên n sao cho:

a) $4n-5$ chia hết cho 13;

b) $5n+1$ chia hết cho 7;

c) $25n+3$ chia hết cho 53.

Câu 30. Tìm số tự nhiên n để các số sau nguyên tố cùng nhau:

a) $4n+3$ và $2n+3$;

b) $7n+13$ và $2n+4$;

c) $9n+24$ và $3n+4$;

d) $18n+3$ và $21n+7$.

Câu 31. Chứng minh rằng có vô số số tự nhiên n để $n+15$ và $n+72$ là hai số nguyên tố cùng nhau .

Câu 32. Cho $(a,b)=1$. Tìm :

a) $(a+b,a-b)$ b) $(7a+9b,3a+8b)$

Câu 33. Tìm a, b biết:

a) $[a,b]+(a,b)=55$;

b) $[a,b]-(a,b)=5$;

c) $[a,b]+(a,b)=35$.

Câu 34. Tìm ƯCLN của các số sau bằng thuật toán Ơ-clit:

a) $(187231,165148)$;

b) $(\underbrace{11\ldots1}_{\text{100 chu so}},\underbrace{11\ldots1}_{\text{8 chu so}})$.

Câu 35. Tìm $[n;n+1;n+2]$

Câu 36. Tìm $n\in\mathbb{N}^*$ *biết* $n<30$ để các số $3n+4$ và $5n+1$ có ước chung lớn hơn 1.

Câu 37. Tìm số nguyên n để phân số $\dfrac{2n+1}{n+2}$ có giá trị là số nguyên.

Câu 38. Ba xe buýt cùng khởi hành lúc 6 giờ sáng từ một bến xe và đi theo 3 hướng khác nhau. Xe thứ nhất quay về bến sau 1 giờ 5 phút và sau 10 phút lại đi. Xe thứ hai quay về bến sau 56 phút và lại đi sau 4 phút. Xe thứ ba quay về bến sau 48 phút và sau 2 phút lại đi. Hỏi ba xe lại cùng xuất phát từ bến lần thứ hai vào lúc mấy giờ?

Câu 39. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì phân số $\frac{2n+1}{6n+5}$ luôn tối giản.

Câu 40. Cho phân số: $P = \frac{6n+5}{3n+2}\left(n \in \mathbb{N}\right)$.

a) Chứng tỏ rằng phân số P là phân số tối giản.

b) Với giá trị nào của n thì phân số P có giá trị lớn nhất?

Câu 41. Tìm hai số nguyên dương biết a + 2b = 48 và ƯCLN(a; b) + 3.BCNN(a; b) = 114

Câu 42. Cho (a, b) = 1, tìm (11a + 2b, 18a + 5b).

Câu 43. Chứng minh rằng (a, b) = (5a + 3b, 13a + 8b)

Câu 44. Cho ba số tự nhiên a, b, c nguyên tố cùng nhau đôi một.

Chứng minh rằng (ab + bc + ca, abc) = 1

Câu 45. Tìm tất các các số tự nhiên a, b nguyên tố cùng nhau biết rằng:

$$\frac{a+b}{a^2-ab+b^2} = \frac{8}{73}$$

Câu 46. Cho $m, n \in N,\ 1 \le m < n$. Chứng minh rằng: $\left(2^{2^m}+1,\ 2^{2^n}+1\right) = 1$

Câu 47. Cho $1 \le m, n \in N$. Tìm $\left(2^m - 1,\ 2^n - 1\right)$

Câu 48. Tìm hai số tự nhiên a và b, biết: ƯCLN $(a,b) = 15$ và $BCNN(a,b) = 300$;

Câu 49. Cho $a \in Z$, tìm $\left(a,\ a+2\right)$

Câu 50. Cho a, m là các số nguyên lớn hơn 1. Chứng minh rằng :

$$\left(1+a+a^2+....+a^{m-1}, a-1\right) = \left(m, a-1\right).$$

Câu 51. Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số lẻ thì $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}\right) = \left(a,b,c\right)$.

Câu 52. Tổng các số tự nhiên $a_1, a_2, ..., a_{49}$ bằng 999. Hỏi ước số chung lớn nhất của chúng có thể nhận giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu ?

Câu 53. Cho (a, b) = 1, tìm (11a + 2b, 18a + 5b)

Câu 54. Cho (m, n) = 1. Tìm $\left(m+n, m^2+n^2\right)$.

Câu 55. Chứng minh rằng các phân số sau tối giản với mọi $n \in Z$.

$a)\ \frac{21n+4}{14n+3}$; $\qquad b)\ \frac{2n+1}{2n\left(n+1\right)}$

Câu 56. Tìm số nguyên n để các phân số sau tối giản.

$a)\ \dfrac{18n+3}{21n+7};$ $\qquad b)\dfrac{2n+3}{n+7}.$

Câu 57.Tìm hai số tự nhiên a, b thỏa mãn $a+b=128$ và $(a,b)=16$.

Câu 58.Tìm ƯCLN của $\overline{ab}+\overline{ba}$ và 33 với a + b không chia hết cho 3

Câu 59. Chứng minh rằng một số tự nhiên có ba chữ số tận cùng là 136 thì ít nhất có 4 ước số dương.

Câu 60. Chứng minh rằng nếu $|kn-lm|=1$ thì $(ma+nb,ka+lb)=(a,b)$.

Câu 61. Tìm ƯCLN của tất cả các số có 9 chữ số được viết bởi các chữ số 1, 2, 3, …, 9 và trong các số đó các chữ số đều khác nhau.

Câu 62. Cho (a, b) = 1 tìm ƯCLN của 2a + b và a(a + b)

Câu 63. Chứng minh các phân số sau tối giản với n là số nguyên

$a)\ \dfrac{12n+1}{30n+2};$ $\qquad b)\dfrac{15n^2+8n+6}{30n^2+21n+13}.$

Câu 64. Tìm số nguyên n để phân số $\dfrac{13+n}{n-2}$ tối giản.

Câu 65. Chứng minh rằng nếu $5n^2+1\,\vdots\,6$ thì $\dfrac{n}{2}$ và $\dfrac{n}{3}$ tối giản.

Câu 66. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất để các phân số sau tối giản : $\dfrac{7}{n+9},\dfrac{8}{n+10},...,\dfrac{31}{n+33}$.

Câu 67. Tìm số tự nhiên a, b biết $ab=360,[a,b]=60$.

Câu 68. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất khi chia cho 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có số dư lần lượt là 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Câu 69. Tìm tất cả các cặp số $(a;b)$nguyên dương thỏa mãn hai điều kiện:

i) a,b đều khác 1 và ước số chung lớn nhất của a,blà 1.

ii) Số $N=ab(ab+1)(2ab+1)$ có đúng 16 ước số nguyên dương.

Câu 70. Xác định các số nguyên tố p,qsao cho $p^2-pq+2q^2$ và $2p^2+pq+q^2$ là các số nguyên tố cùng nhau.

Câu 71. Tìm tất cả các số tự nhiên khác 0: a và b, sao cho: $(a,b)=1$ và $\dfrac{a+b}{a^2+b^2}=\dfrac{7}{25}$.

(Thi học sinh giỏi lớp 9 TP. Hồ Chí Minh năm 1992 – 1993)

Câu 72. Cho m, n là hai số nguyên tố cùng nhau. Tìm ước chung lớn nhất của $\mathrm{m}+\mathrm{n}$ và $\mathrm{m}^2+\mathrm{n}^2$.

Câu 73. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương a, b thỏa mãn $4a+1$ và $4b-1$ nguyên tố cùng nhau, đồng thời $a+b$ là ước của $16ab+1$.

Câu 74. Tìm tất cả các cặp số $(a;b)$ nguyên dương thỏa mãn hai điều kiện:

i) a,b đều khác 1 và ước số chung lớn nhất của a,b là 1.

ii) Số $N=ab(ab+1)(2ab+1)$ có đúng 16 ước số nguyên dương.

(Trích đề học sinh giỏi toán Đăk Lăk năm học 2017-2018)

Câu 75. Cho hai số tự nhiên m và n thoả mãn $\frac{m+1}{n}+\frac{n+1}{m}$ là số nguyên.

Chứng minh ước chung lớn nhất của m và n không lớn hơn $\sqrt{m+n}$

(Trích đề học sinh giỏi lớp 9 Hải Dương năm học 2004-2005)

Câu 76. Cho ba số nguyên dương a,b,c đôi một khác nhau và đồng thời thỏa mãn các điều kiện:

i) a là ước của $b+c+bc$,

ii) b là ước của $a+c+ac$,

iii) c là ước của $a+b+ab$,

a) Hãy chỉ ra bộ ba số (a,b,c) thỏa mãn các điều kiện trên.

b) Chứng minh rằng a,b,c không thể đồng thời là các số nguyên tố.

(Trích đề vào 10 Chuyên Sư Phạm Hà Nội năm 2007-2008)

CHỦ ĐỀ 2

QUAN HỆ CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ

A. Kiến thức cần nhớ

1. Định nghĩa phép chia.

Cho hai số nguyên a và b trong đó $b \neq 0$ ta luôn tìm được hai số nguyên q và r duy nhất sao cho $a = bq + r$, với $0 \le r \le |b| - 1$. Trong đó a là số bị chia, b là số chia, q là thương, r là số dư.

Khi a chia cho b thì các số dư $r \in \{0; 1; 2; ...; |b| - 1\}$

- Nếu $r = 0$ thì $a = bq$, khi đó ta nói a chia hết cho b hay b chia hết a. Ký hiệu: $a \vdots b$ hay $b | a$.

Vậy a chia hết cho b khi và chỉ khi tồn tại số nguyên q sao cho $a = bq$.

- Nếu $r \neq 0$, khi đó ta nói a chia b có số dư là r.

2. Một số tính chất cần nhớ

- Tính chất 1. Mọi số nguyên khác 0 luôn chia hết cho chính nó.
- Tính chất 2. Nếu $a \vdots b$ và $b \vdots c$ thì $a \vdots c$.
- Tính chất 3. Nếu $a \vdots b$ và $b \vdots a$ thì $a = \pm b$.
- Tính chất 4. Nếu $a.b \vdots m$ và $(b, m) = 1$ thì $a \vdots m$.
- Tính chất 5. Nếu $a \vdots m$ và $b \vdots m$ thì $(a \pm b) \vdots m$.
- Tính chất 6. Nếu $a \vdots m$, $a \vdots n$ và $(m, n) = 1$ thì $a \vdots mn$.
- Tính chất 7. Nếu $a \vdots b$ và $c \vdots d$ thì $ac \vdots bd$.
- Tính chất 8. Trong n số nguyên liên tiếp luôn tồn tại một số nguyên chia hết cho n.
- Tính chất 9. Nếu $a - b \neq 0$ với a, b là các số tự nhiên thì $(a^n - b^n) \vdots (a - b)$ $(n \in N)$.
- Tính chất 10. Nếu $a + b \neq 0$ với a, b, n là các số tự nhiên và n là số lẻ thì $(a^n + b^n) \vdots (a + b)$.

3. Một số dấu hiệu chia hết

Đặt $A = \overline{a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0}$, với $a_n; a_{n-1}; ...; a_2; a_1; a_0$ là các chữ số. Khi đó ta có các dấu hiệu chia hết như sau:

- $A \vdots 2 \Leftrightarrow a_0 \vdots 2 \Leftrightarrow a_0 \in \{0;2;4;6;8\}$
- $A \vdots 3 \Leftrightarrow (a_0 + a_1 + ... + a_{n-1} + a_n) \vdots 3.$
- $A \vdots 4 \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \vdots 4$
- $A \vdots 5 \Leftrightarrow a_0 \vdots 5 \Leftrightarrow a_0 \in \{0;5\}.$
- $A \vdots 8 \Leftrightarrow \overline{a_2 a_1 a_0} \vdots 8$
- $A \vdots 9 \Leftrightarrow (a_0 + a_1 + ... + a_{n-1} + a_n) \vdots 9.$
- $A \vdots 11 \Leftrightarrow [(a_0 + a_2 + ...) - (a_1 + a_3 + ...)] \vdots 11.$
- $A \vdots 25 \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \vdots 25$
- $A \vdots 125 \Leftrightarrow \overline{a_2 a_1 a_0} \vdots 125$

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1: Sử dụng tính chất trong n số nguyên liên tiếp có một và chỉ một số chia hết cho n (n ≥ 1)

*** Cơ sở phương pháp:** Sử dụng các tính chất cơ bản như: tích hai số nguyên liên tiếp chia hết cho 2, tích của ba số nguyên liên tiếp chia hết cho 2 và 3 do đó chia hết cho 6. Chúng ta vận dụng linh hoạt các tính chất cơ bản này trong nhiều các bài toán về chia hết.

Bài toán 1. Chứng minh rằng:

a) Tích của 3 số nguyên liên tiếp chia hết cho 6

b) Tích của 2 số chẵn liên tiếp chia hết cho 8

c) Tích của 5 số nguyên liên tiếp chia hết cho 120

Hướng dẫn giải

a) Trong 3 số nguyên liên tiếp có một số chia hết cho 3 và một số chia hết cho 2 nên tích của 3 số nguyên liên tiếp chia hết cho 6 (do (2, 3) = 1)

b) Hai số chẵn liên tiếp có dạng 2n và (2n + 2) với $n \in Z$

Do đó tích hai số nguyên liên tiếp có dạng 4n(n + 1)

Do n và n + 1 là hai số nguyên liên tiếp nên $n(n+1) \vdots 2$

Vì thế $4n(n+1) \vdots 8$

c) Ta có 120 = 3.5.8

Do 5 số nguyên liên tiếp có 3 số liên tiếp nên theo ý a) ta có tích 5 số nguyên liên tiếp chia hết cho 6.

5 số nguyên liên tiếp có 2 số chẵn liên tiếp nên theo ý b) ta có tích 5 số nguyên liên tiếp chia hết cho 8.

Mặt khác 5 số nguyên liên tiếp luôn có một số chia hết cho 5 nên tích chúng cũng chia hết cho 5.

Vậy tích của 5 số nguyên liên tiếp luôn chia hết cho 120.

Chú ý: Tổng quát ta có tích của n số tự nhiên liên tiếp chia hết cho n!

Bài toán 2. Chứng minh rằng tích của 3 số chẵn liên tiếp chia hết cho 48

Hướng dẫn giải

Ba số chẵn liên tiếp có dạng 2n, (2n + 2) và (2n + 4) với $n \in Z$

Do đó tích hai số nguyên liên tiếp có dạng 8n(n + 1)(n + 2)

Do n, (n + 1) và (n + 2) là 3 số nguyên liên tiếp nên $n(n+1)(n+2) \vdots 6$

Vì thế $n(n+1)(n+2) = 6m \ (m \in Z)$

Do đó tích của 3 số chẵn liên tiếp là $8n(n+1)(n+2) = 48m \vdots 48$

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài toán 3. Chứng minh với mọi số nguyên n thì $n^3 - n$ chia hết cho 6

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n-1)n(n+1)$$

Biểu thức là tích của 3 số nguyên liên tiếp nên một trong 3 số chia hết cho 2, và một trong 3 số chia hết cho 3 mà (2, 3) = 1 nên $(n^3 - n) \vdots 6$

Bài toán 4. Chứng minh với mọi số nguyên lẻ n thì $n^6 - n^4 - n^2 + 1$ chia hết cho 128

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$n^6 - n^4 - n^2 + 1 = n^4(n^2 - 1) - (n^2 - 1) = (n^2 - 1)(n^4 - 1) = (n^2 - 1)^2 (n^2 + 1)$$

Vì n là số lẻ nên đặt $n = 2k + 1 \ (k \in N)$ Ta có:

$$(n^2 - 1)^2 = \left[(2k+1)^2 - 1\right]^2 = (4k^2 + 4k)^2 = \left[4k(k+1)\right]^2$$

Ta có $k(k + 1)$ chia hết cho 2 nên nên $\left[4k(k+1)\right]^2 \vdots 64$

Mặt khác: $n^2+1=(2k+1)^2+1=4k^2+4k+2=2(2k^2+2k+1)\vdots 2$

Do đó $n^6-n^4-n^2+1=(n^2-1)^2(n^2+1)\vdots 128$ (đpcm)

Chú ý: Bình phương của một số lẻ là số lẻ

🗁 **Dạng 2: Phân tích thành nhân tử**

*** Cở sở phương pháp:** Để chứng minh *A(x)* chia hết cho p ta phân thích $A(x)=D(x).p$, còn nếu không thể đưa ra phân tích như vậy ta có thể viết $p=k.q$

Nếu $(k,q)=1$ ta chứng minh *A(x)* chia hết cho k và q.

Nếu $(k,q)\neq 1$ ta viết *A(x) = B(x).C(x)* rồi chứng minh *B(x)* chia hết cho k và *C(x)* chia hết cho q.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Cho a, b, c là các số nguyên khác 0 thỏa mãn điều kiện:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

Chứng minh rằng: $a^3+b^3+c^3$ chia hết cho 3.

(Đề thi HSG lớp 9 TP Thanh Hóa 2016-2017)

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)=0\Leftrightarrow\frac{a+b+c}{abc}=0$

Vì a, b, c $\neq 0$ nên $a+b+c=0$

$\Rightarrow a+b=-c$
$\Rightarrow (a+b)^3=(-c)^3$
$\Rightarrow a^3+b^3+3ab(a+b)=-c^3$
$\Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$

Vậy $a^3+b^3+c^3\vdots 3$ với a, b, c $\in Z$

Bài toán 2. Cho $A=1.2.3......29$, $B=30.31.32.....58$.

Chứng minh rằng A + B chia hết cho 59.

Hướng dẫn giải

CHUYÊN ĐỀ SỐ HỌC

Ta có:

$B=(59-29)(59-28)(59-27)...(59-1)=59k-1.2.3....29=59k-A\ \ (k\in Z)\Rightarrow A+B=59k\,\vdots\,59$

Vậy A + B chia hết cho 59.

Bài toán 3. Cho 3 số nguyên dương x, y, z. Chứng minh rằng:

$$(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5 \text{ chia hết cho } 5(x-y)(y-z)(z-x)$$

Hướng dẫn giải

Đặt $a=x-y, b=y-z\Rightarrow z-x=-(a+b)$

Do đó ta cần chứng minh: $a^5+b^5-(a+b)^5$ chia hết cho $-5ab(a+b)$

Ta có: $a^5+b^5-(a+b)^5=-\left(5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4\right)$

$$=-5ab\left(a^3+b^3+2a^2b+2ab^2\right)$$

$$=-5ab\left[(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)+2ab(a+b)\right]$$

$$=-5ab(a+b)\left(a^2+ab+b^2\right)$$

Do đó bài toán được chứng minh.

Bài toán 4. Chứng minh rằng với ba số tự nhiên a,b,c trong đó có đúng một số lẻ và hai số chẵn ta luôn có $(a+b+c)^3-(a+b-c)^3-(b+c-a)^3-(a-b+c)^3$ Chia hết cho 96

(Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Phú Thọ 2015)

Hướng dẫn giải

Đặt $a+b-c=z; b+c-a=x; a+c-b=y$ thì $x+y+z=a+b+c.$

Ta có $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=3(x+y)(y+z)(x+z)=3.2c.2a.2b=24abc$

Do 3 số a, b, c có 2 số chẵn nên abc chia hết cho 4 do đó 24abc chia hết cho 24.4 = 96

Vậy bài toán được chứng minh.

🗁 **Dạng 3: Sử dụng phương pháp tách tổng**

*** Cở sở phương pháp:** Để chứng minh *A(x)* chia hết cho p ta biết đổi *A(x)* thành tổng các số hạng rồi chứng minh mỗi số hạng chia hết cho p.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Chứng minh m, n là số nguyên ta có:

a) $n\left(n^2+11\right)\vdots 6$ b) $mn\left(m^2-n^2\right)\vdots 6$ c) $n(n+1)(2n+1)\vdots 6$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $n\left(n^2+11\right)=n^3+11n=n^3-n+12n=\left(n-1\right)n\left(n+1\right)+12n$

Dễ chứng minh: $\left(n-1\right)n\left(n+1\right)\vdots 6,\ 12n\vdots 6\left(n\in Z\right)$

Do đó: $n\left(n^2+11\right)\vdots 6$

b) Ta có: $mn\left(m^2-n^2\right)=mn\left[\left(m^2-1\right)-\left(n^2-1\right)\right]=mn\left(m^2-1\right)-mn\left(n^2-1\right)$

Do: $mn\left(m^2-1\right)=n\left(m-1\right)m\left(m+1\right)\vdots 6,\ \ mn\left(n^2-1\right)=m\left(n-1\right)n\left(n+1\right)\vdots 6$

Do đó: $mn\left(m^2-n^2\right)\vdots 6$

c) Ta có: $n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)=n\left(n+1\right)\left(n+2+n-1\right)=n\left(n+1\right)\left(n+2\right)+\left(n-1\right)n\left(n+1\right)$

Do: $n\left(n+1\right)\left(n+2\right)\vdots 6,\qquad \left(n-1\right)n\left(n+1\right)\vdots 6$

Do đó: $n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)\vdots 6$

Chú ý: Tách tổng là phương pháp chứng minh chia hết mà lời giải dễ hiểu, ngắn gọn và đẹp mắt nên thường được trình bày khi bài toán có thể giải bằng nhiều phương pháp, tuy nhiên để áp dụng các em cần linh hoạt trong việc tách.

Ví dụ: như câu a) thì ta thấy 12n chia hết cho 6 nên ta tách riêng ra phần còn lại chúng ta phân có thể đưa về dạng tích, dựa vào tính chất chia hết của tích các số tự nhiên dễ dàng chứng được cũng chia 6.

Câu b) chúng ta nghĩ việc thêm bớt 1 để tạo ra tổng của hai tích của 3 số tự nhiên liên tiếp.

Tương tự câu c) dễ dàng tách 2n + 1 = (n – 1) + (n + 2) để đưa về tổng của hai tích 3 số tự nhiên tiếp .

Bài toán 2. Chứng minh rằng: n và n^5 có chữ số tận cùng giống nhau với n là số tự nhiên.

Hướng dẫn giải

Để chứng minh n và n^5 có chữ số tận cùng giống nhau ta chứng minh $\left(n^5-n\right)\vdots 10$

Thật vậy: $n^5-n=n\left(n^4-1\right)=n\left(n^2-1\right)\left(n^2+1\right)=n\left(n^2-1\right)\left[\left(n^2-4\right)+5\right]$

$n\left(n^2-1\right)\left(n^2-4\right)+5n\left(n^2-1\right)=\left(n-2\right)\left(n-1\right)n\left(n+1\right)\left(n+2\right)+5\left(n-1\right)n\left(n+1\right)$

Nhận xét: $\left(n-2\right)\left(n-1\right)n\left(n+1\right)\left(n+2\right)$ là tích của năm số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 2 và 5 do đó chia hết cho 10.

Mặt khác $\left(n-1\right)n\left(n+1\right)$ là tích của 3 số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 2 nên $5\left(n-1\right)n\left(n+1\right)$ chia hết cho 10.

Do đó $\left(n^5-n\right)\vdots 10$ vậy bài toán được chứng minh.

Bài toán 3. a) Chứng minh rằng $\frac{n^5}{5}+\frac{n^3}{3}+\frac{7n}{15}$ là số nguyên với mọi $n \in Z$

b) Chứng minh rằng $\frac{n}{12}+\frac{n^2}{8}+\frac{n^3}{24}$ là số nguyên với mọi n là số nguyên chẵn

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\frac{7n}{15}=n-\frac{8n}{15}=n-\frac{n}{5}-\frac{n}{3}$

Do đó: $\frac{n^5}{5}+\frac{n^3}{3}+\frac{7n}{15}=\frac{n^5}{5}+\frac{n^3}{3}+n-\frac{n}{5}-\frac{n}{3}=\frac{n^5-n}{5}+\frac{n^3-n}{3}+n$

Từ các thí dụ trên ta dễ dàng chứng minh được: $\left(n^5-n\right)\vdots 5, \left(n^3-n\right)\vdots 3$ do đó bài toán được chứng minh.

b) Do n là số nguyên chẵn nên n = 2m (với $m \in Z$)

Do đó: $\frac{n}{12}+\frac{n^2}{8}+\frac{n^3}{24}=\frac{m}{6}+\frac{m^2}{2}+\frac{m^3}{3}=\frac{2m^3+3m^2+m}{6}=\frac{m\left(m+1\right)\left(2m+1\right)}{6}$

Theo ý c) thí dụ 6 ta có $n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)\vdots 6$ do đó bài toán được chứng minh.

Bài toán 4. Chứng minh rằng $ax^2+bx+c \in Z, \forall x \in Z$ khi và chỉ khi $2a, a+b, c \in Z$

Hướng dẫn giải

Ta có: $ax^2+bx+c=ax^2-ax+\left(a+b\right)x+c=2a.\frac{x\left(x-1\right)}{2}+\left(a+b\right)x+c.$

Dễ thấy: $\frac{x\left(x-1\right)}{2} \in Z$ vì x và $(x-1)$ là hai số nguyên liên tiếp.

Do đó: $ax^2+bx+c \in Z, \forall x \in Z$ khi và chỉ khi $2a, a+b, c \in Z$.

Bài toán 5. Cho các số nguyên $a_1; a_2; ...; a_n$. Đặt $A=a_1+a_2+...+a_n$ và $B=a_1^3+a_2^3+...+a_n^3$. Chứng minh rằng A chia hết cho 6 khi và chỉ khi B chia hết cho 6.

Hướng dẫn giải

Trước hết ta chứng minh bổ đề: Với mọi số nguyên a ta luôn có $a^3-a \vdots 6$.

Thật vậy, ta có $a^3-a=\left(a-1\right)a\left(a+1\right)$.

Ta thấy trong ba số tự nhiên liên tiếp có một số chia hết cho 2 và có một số chia hết cho 3, lại có 2 và 3 nguyên tố cùng nhau nên ta suy ra được $a^3-a=\left(a-1\right)a\left(a+1\right)\vdots 6$.

Xét hiệu sau

$$B-A=\left(a_1^3+a_2^3+...+a_n^3\right)-\left(a_1+a_2+...+a_n\right)=\left(a_1^3-a_1\right)+\left(a_2^3-a_2\right)+...+\left(a_n^3-a_n\right)$$

Áp dụng bổ để trên ta được $\left(a_1^3-a_1\right)\vdots 6;\ \left(a_2^3-a_2\right)\vdots 6;\ ...;\ \left(a_n^3-a_n\right)\vdots 6$

Do đó ta được $B-A\vdots 6$. Suy ra A chia hết cho 6 khi và chỉ khi B chia hết cho 6.

🗁 Dạng 4: Sử dụng hằng đẳng thức

Cở sở phương pháp: Nếu *a, b* là các số nguyên thì:

a^n-b^n chia hết cho $a-b$ với n là số tự nhiên và $a\neq b$.

a^n-b^n chia hết cho $a+b$ với n là số tự nhiên chẵn và $a\neq -b$.

a^n+b^n chia hết cho $a+b$ với n là số tự nhiên lẻ và $a\neq -b$.

$\left(a+b\right)^n=ka+b^n$ với *k* là số nguyên, *n* là số tự nhiên.

$\left(a+1\right)^n=ac+1$ $\quad\left(a-1\right)^n=ac+\left(-1\right)^n$, *n* là số tự nhiên.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Với n là số tự nhiên chẵn. Chứng minh rằng:

a) $22^{22}+55^{55}$ b) $20^n+16^n-3^n-1\vdots 323$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $P=22^{22}+55^{55}=\left(21+1\right)^{22}+\left(56-1\right)^{55}=\left(BS\,7+1\right)^{22}+\left(BS\,7-1\right)^{55}$

= BS 7 + 1 + BS 7 – 1 = BS 7 nên $22^{22}+55^{55}$ chia 7 dư 0

b) Ta có: $323=17.19$. Ta biến đổi $20^n+16^n-3^n-1=\left(20^n-1\right)+\left(16^n-3^n\right)$

Ta có: $\left(20^n-1\right):\left(20-1\right)\Rightarrow\left(20^n-1\right)\vdots 19$

Mặt khác n là số chẵn nên $\left(16^n-3^n\right)\vdots\left(16+3\right)\Rightarrow\left(16^n-3^n\right)\vdots 19$

Do đó $\left(20^n-1\right)+\left(16^n-3^n\right)\vdots 19\Rightarrow\left(20^n+16^n-3^n-1\right)\vdots 19\quad(1)$

Ta biến đổi $20^n+16^n-3^n-1=\left(20^n-3^n\right)+\left(16^n-1^n\right)$

Ta có: $\left(20^n-3^n\right):\left(20-3\right)\Rightarrow\left(20^n-1\right)\vdots 17$

Mặt khác n là số chẵn nên $\left(16^n-1^n\right)\vdots\left(16+1\right)\Rightarrow\left(16^n-3^n\right)\vdots 17\ (2)$

Do (17, 19) =1 nên từ (1) và (2) suy ra: $20^n+16^n-3^n-1\vdots 323$.

Bài toán 2. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên *n* ta có:

a) $11^{n+2}+12^{2n+1} \vdots 133$ b) $5^{n+2}+26.5^{n}+8^{2n+1} \vdots 59$ c) $7.5^{2n}+12.6^{n} \vdots 19$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $11^{n+2}+12^{2n+1}=11^{2}.11^{n}+12.12^{2n}=121.11^{n}+12.144^{n}$

$$=\left(133-12\right).11^{n}+12.144^{n}=133.11^{n}+12\left(144^{n}-11^{n}\right)$$

Do đó $133.11^{n} \vdots 133$ và $12\left(144^{n}-11^{n}\right) \vdots \left(144-11\right)$ hay $12\left(144^{n}-11^{n}\right) \vdots 133$

Nên $133.11^{n}+12\left(144^{n}-11^{n}\right) \Rightarrow 11^{n+2}+12^{2n+1} \vdots 133$ (đpcm)

b) Ta có:

$5^{n+2}+26.5^{n}+8^{2n+1}=25.5^{n}+26.5^{n}+8.8^{2n}=51.5^{n}+8.64^{n}$
$=\left(59-8\right).5^{n}+8.64^{n}=59.5^{n}+8\left(64^{n}-5^{n}\right)$

Vì $\left(64^{n}-5^{n}\right) \vdots \left(64-5\right) \Rightarrow \left(64^{n}-5^{n}\right) \vdots 59$

Nên $59.5^{n}+8\left(64^{n}-5^{n}\right) \vdots 59 \Rightarrow 5^{n+2}+26.5^{n}+8^{2n+1} \vdots 59$ (đpcm)

c) Ta có: $7.5^{2n}+12.6^{n}=7.25^{n}+\left(19-7\right).6^{n}=19.6^{n}+7\left(25^{n}-6^{n}\right)$

Vì $\left(25^{n}-6^{n}\right) \vdots \left(25-6\right) \Rightarrow 7\left(25^{n}-6^{n}\right) \vdots 19$

Nên $19.6^{n}+7\left(25^{n}-6^{n}\right) \vdots 19 \Rightarrow 57.5^{2n}+12.6^{n} \vdots 19$ (đpcm)

Bài toán 3. Chứng minh rằng $A=1993^{1997}+1997^{1993} \vdots 30$

Hướng dẫn giải

Sử dụng tính chất $\left(a+b\right)^{n}=ka+b^{n}$ với *k* là số nguyên, *n* là số tự nhiên.

Ta có:

$$A=1993^{1997}+1997^{1993}=\left(1980+13\right)^{1997}+\left(2010-13\right)^{1993}$$
$$=1980c+13^{1997}+2010d-13^{1993}$$
$$=1980c+2010d+13^{1993}\left(13^{4}\right)$$
$$=30\left(66c+67d+952.13^{1993}\right) \vdots 30.$$

Bài toán 4. Chứng minh rằng $C=5^{n}\left(5^{n}+1\right)-6^{n}\left(3^{n}+2^{n}\right) \vdots 91 \left(n \in N\right)$.

(Chuyên sư phạm Hà Nội 1997 – 1998)

Hướng dẫn giải

Sử dụng tính chất $(a+b)^n = ka + b^n$, $(a+1)^n = ac+1$, $(a-1)^n = ac + (-1)^n$ với k là số nguyên, n là số tự nhiên

Ta có:

$$\begin{aligned} C &= 25^n + 5^n - 18^n - 12^n \\ &= (21+4)^n + 5^n - (14+4)^n - (7+5)^n \\ &= 21c + 4^n + 5^n - 14d - 4^n - 7e - 5^n \\ &= 7(3c - 2d - e) \vdots 7. \end{aligned}$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned} C &= (26-1)^n + 5^n - (13+5)^n - (13-1)^n \\ &= 26f + (-1)^n + 5^n - 13g - 5^n - 13h - (-1)^n \\ &= 13(2f - g - h) \vdots 13. \end{aligned}$$

Vì (13, 7) = 1 nên $C \vdots 7.13 = 91$.

Bài toán 5. Chứng minh rằng: $A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 100^3$ chia hết cho $B = 1 + 2 + 3 + \ldots + 100$

Hướng dẫn giải

Ta có B = (1 + 100) + (2 + 99) + …+ (50 + 51) = 101.50

Để chứng minh A chia hết cho B ta chứng minh A chia hết cho 50 và 101

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= (1^3 + 100^3) + (2^3 + 99^3) + \ldots + (50^3 + 51^3) \\ &= (1+100)(1^2 + 100 + 100^2) + (2+99)(2^2 + 2.99 + 99^2) + \ldots + (50+51)(50^2 + 50.51 + 51^3) \\ &= 101(1^2 + 100 + 100^2 + 2^2 + 2.99 + 99^2 + \ldots + 50^2 + 50.51 + 51^2) \vdots 101 \ (1) \end{aligned}$$

Ta lại có: $A = (1^3 + 99^3) + (2^3 + 98^3) + \ldots + (50^3 + 100^3)$

Mỗi số hạng đều chia hết cho 50 nên A chia hết cho 50 (2)

Từ (1) và (2) suy ra A chia hết cho 101 và 50 nên A chia hết cho B.

Bài toán 6. Chứng minh rằng với mọi số nguyên n ta có: $A = 1^5 + 2^5 + 3^5 + \ldots. + n^5$ chia hết cho $B = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$.

(Chuyên sư phạm Hà Nội 2001)

Hướng dẫn giải

Ta có công thức quen thuộc $B = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Lại có: $2A=\left(n^5+1\right)+\left[\left(n-1\right)^5+2^5\right]+\left[\left(n-2\right)^5+3^5\right]+...+\left(1+n^5\right)$

Nhận thấy mỗi số hạng đều chia hết cho (n +1) nên $2A \vdots \left(n+1\right)$ $\quad(1)$

Lại có $2A-2n^5=\left[\left(n-1\right)^5+1^5\right]+\left[\left(n-2\right)^5+2^5\right]+...$ chia hết cho n

Do $2n^5 \vdots n$ nên $2A \vdots n$ $\quad(2)$

Do $2n^5 \vdots n$ nên $2A \vdots n$ $\quad(2)$

Từ (1) và (2) suy ra 2A chia hết cho $n(n+1)$ do đó $2A \vdots 2B \Rightarrow A \vdots B$ (đpcm)

Chú ý: Ta có công thức tổng quát: với n là số nguyên dương và k là số tự nhiên lẻ thì:

$a) 1^k+2^k+...+n^k \vdots \left(1+2+...+n\right)$

$b) 1^k+2^k+...+\left(2k\right)^k \vdots n\left(2n+1\right)$

Đây cũng là một bài tập, bạn đọc có thể tự chứng minh để củng cố kiến thức.

Dạng 5: Sử dụng phương pháp xét số dư

*** Cơ sở phương pháp:** Để chứng minh $A(n)$ chia hết cho p ta xét số n có dạng $n = kp + r$ với $r \in \left\{0;1;2;...;p-1\right\}$.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Chứng minh rằng $n\left(2n^2+7\right)$ chia hết cho 3 với mọi số nguyên dương n.

Hướng dẫn giải

Xét 3 trường hợp:

- Trường hợp 1: $n = 3k$ thì $n\left(2n^2+7\right)=3k\left[2\left(3k\right)^2+7\right]=3k\left(18k^2+7\right) \vdots 3$

- Trường hợp 2: $n = 3k + 1$ thì

$$\begin{aligned} n\left(2n^2+7\right)&=\left(3k+1\right)\left[2\left(3k+1\right)^2+7\right] \\ &=\left(3k+1\right)\left[18k^2+12k+2+7\right]=3\left(3k+1\right)\left(6k^2+4k+3\right) \vdots 3 \end{aligned}$$

- Trường hợp 3: $n = 3k + 2$ thì

$$\begin{aligned} n\left(2n^2+7\right)&=\left(3k+2\right)\left[2\left(3k+2\right)^2+7\right] \\ &=\left(3k+2\right)\left[18k^2+24k+8+7\right]=3\left(3k+2\right)\left(6k^2+8k+5\right) \vdots 3 \end{aligned}$$

Từ 3 trường hợp trên suy ra $n\left(2n^2+7\right)$ chia hết cho 3.

Bài toán 2. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta có: $n\left(2n+7\right)\left(7n+1\right)$ chia hết cho 6

Hướng dẫn giải

Trong 2 số n và (7n + 1) phải có một số chẵn nên $n(2n+1)(7n+1) \vdots 2$

Mà (3, 2) = 1 nên ta chỉ cần chứng minh $n(2n+1)(7n+1) \vdots 3$

Xét 3 trường hợp:

- Trường hợp 1: $n = 3k$ thì $n(2n+1)(7n+1) = 3k(6k+1)(21k+1) \vdots 3$

- Trường hợp 2: $n = 3k + 1$ thì $2n+7 = (6k+9) \vdots 3 \Rightarrow n(2n+7)(7n+1) \vdots 3$

- Trường hợp 3: $n = 3k + 2$ thì $7n+1 = (21k+15) \vdots 3 \Rightarrow n(2n+7)(7n+1) \vdots 3$

Từ 3 trường hợp trên suy ra n(2n + 7)(7n + 1) chia hết cho 6.

Bài toán 3. Cho a, b, c là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu $\left(a^3+b^3+c^3\right) \vdots 9$ thì một trong ba số a, b, c chia hết cho 3.

Hướng dẫn giải

Với a, b, c là các số nguyên khi đó ta có $a = 3q_1 + r_1; b = 3q_2 + r_2; c = 3q_3 + r_3$ với $q_1; q_2; q_3$ là các số nguyên và các số dư $r_1; r_2; r_3 \in \{-1; 0; 1\}$.

Dễ thấy $r_1^3 = r_1; r_2^3 = r_1; r_3^3 = r_1$. Từ đó ta được

$$a^3 = \left(3q_1 + r_1\right)^3 = 9k_1 + r_1; b^3 = \left(3q_2 + r_2\right)^3 = 9k_2 + r_1; c^3 = \left(3q_3 + r_3\right)^3 = 9k_3 + r_3$$

Khi đó ta được $a^3 + b^3 + c^3 = 9\left(k_1 + k_2 + k_3\right) + \left(r_1 + r_2 + r_3\right)$.

Mà theo giả thiết ta có $\left(a^3+b^3+c^3\right) \vdots 9$. Do đó nên ta suy ra $\left(r_1 + r_2 + r_3\right) \vdots 9$.

Dễ thấy $\left|r_1 + r_2 + r_3\right| \le 3$, do đó suy ra $r_1 + r_2 + r_3 = 0$.

Do $r_1; r_2; r_3 \in \{-1; 0; 1\}$ nên từ $r_1 + r_2 + r_3 = 0$ suy ra trong $r_1; r_2; r_3$ có một số bằng 0. Điều này có nghĩa là trong ba số a, b, c có một số chia hết cho 3.

Bài toán 4. Cho x, y, z là các số nguyên thỏa mãn $(x-y)(y-z)(z-x) = x+y+z \quad (*)$

Chứng minh rằng $(x+y+z)$ chia hết cho 27

Hướng dẫn giải

Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu 3 số x, y, z chia cho 3 có số dư khác nhau thì (x – y), (y – z), (z – x) sẽ đều không chia hết cho 3 do đó (x – y)(y – z)(z – x) sẽ không chia hết cho 3. Nhưng khi đó tổng của 3 số (x + y + z) sẽ chia hết cho 3 điều này trái với điều kiện (*) của bài toán, vì thế trường hợp này không thể xảy ra.

- Nếu 3 số x, y, z có 2 số khi chia cho 3 có cùng số dư thì (x – y), (y – z), (z – x) sẽ có một hiệu chia hết cho 3 do đó (x – y)(y – z)(z – x) sẽ chia hết cho 3. Nhưng khi đó tổng của 3 số (x + y + z) sẽ không chia hết cho 3 điều này trái với điều kiện (*) của bày toán, vì thế trường hợp này không thể xảy ra.

Vậy 3 số x, y, z chia cho 3 phải cùng số dư, khi đó (x – y), (y – z), (z – x) sẽ đều chia hết cho 3 nên tích (x – y)(y – z)(z – x) sẽ chia hết cho 27. Mặt khác theo giả thiết (*) ta có (x – y)(y – z)(z – x) = x + y + z nên (x + y + z) chia hết cho 27.

Vậy bài toán được chứng minh.

🗁 **Dạng 6: Sử dụng phương pháp phản chứng**

*** Cơ sở phương pháp:** Để chứng minh *A(x)* không chia hết cho *n* ta giả sử *A(x)* chia hết cho *n* sau đó dùng lập luận để chỉ ra mâu thuẩn để chỉ ra điều giả sử là sai.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Chứng minh rằng n^2+n-16 không chia hết cho 25 với mọi số tự nhiên *n*.

Hướng dẫn giải

Giả sử n^2+n-16 chia hết cho 25.

Do n^2+n-16 chia hết cho 25 nên cũng chia hết cho 5.

Ta có: $n^2+n-16=\left(n+3\right)\left(n-2\right)-10$

Do n^2+n-16 và 10 chia hết cho 5 nên (n + 3)(n – 2) chia hết cho 5 (1)

Mặt khác (n + 3) và (n – 2) có hiệu bằng 5 nên chúng cùng chia hết cho 5 hoặc cùng không chia hết cho 5, lại do (1) nên (n + 3) và (n – 2) cùng chia hết cho 5 suy ra ta có (n + 3)(n – 2) chia hết hết cho 25.

Tức là n^2+n-16 chia cho 25 dư 15 mâu thuẫn với giả sử, vậy bài toán được chứng minh.

Bài toán 2. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, n^3 chia hết cho 3 thì *n* cũng chia hết cho 3

Hướng dẫn giải

Giả sử n không chia hết cho 3. Khi đó n có dạng n = 3k +1 hoặc n = 3k + 2 (với k là số tự nhiên)

Nếu n = 3k + 1 thì $n^3 = (3k+1)^3 = 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1$ không chia hết cho 3

Nếu n = 3k + 2 thì $n^3 = (3k+2)^3 = 27k^3 + 54k^2 + 36k + 4$ không chia hết cho 3

Cả hai trường hợp đều mâu thuẫn suy ra n phải choa hết cho 3 vậy bài toán được chứng minh.

Bài toán 3. Chứng minh 2 số dương có tổng bình phương chia hết cho 3 thì mỗi số đều phải chia hết cho 3

Hướng dẫn giải

Giả sử 2 số nguyên dương a, b có ít nhất một số không chia hết cho 3, chẳng hạn số đó là a. Khi đó a = 3k + 1 hoặc a = 3k + 2 với k là số tự nhiên, ta có $a^2 = 3l + 1$ nếu số b chia hết cho 3 hoặc không chia hết cho 3 thì $a^2 + b^2$ luôn có dạng 3m + 1 hoặc 3m + 2, nghĩa là không chia hết cho 3, mâu thuẫn.

Vậy bài toán được chứng minh.

🗁 **Dạng 7: Sử dụng phương pháp quy nạp**

* **Cơ sở phương pháp:** Để kiểm tra mệnh đề đúng với mọi số tự nhiên $n \geq p$ ta làm như sau:

1) Kiểm tra mệnh đề đúng với $n = p$.
2) Giả sử mệnh đề đúng mới $n = k$ **(Giải thiết quy nạp)**
3) Chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$.

Nhận xét: Trong việc chứng minh bằng phương pháp quy nạp các bạn cần khai thác triệt để **giả thiết quy nạp** (là mệnh đề chia hết khi n = k), tức là trong quá trình giải bài toán ở bước chứng minh n = k + 1 các bạn phải biến đổi làm sao xuất hiện **giả thiết quy nạp**.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Chứng minh rằng $n(2n^2+7)$ chia hết cho 3 với mọi số nguyên dương n.

Hướng dẫn giải

Với n = 1 thì ta có: $n(2n^2+7) = 1.(2+7) = 9 \vdots 3$, do đó bài toán đúng với $n = 1$

Giải sử bài toán đúng đến $n = k$ với $k \geq 1, k \in N$ tức là:

$$k(2k^2+7) \vdots 3 \text{ hay } k(2k^2+7) = 3x\left(x \in N^*\right),$$

Ta sẽ cần chứng minh bài toán đúng với $n = k + 1$. Thật vậy:

$$\begin{aligned}(k+1)\left[2(k+1)^2+7\right] &= (n+1)\left(2n^2+4n+9\right)\\ &= 2n^3+4n^2+9n+2n^2+4n+9\\ &= \left(2n^3+7n\right)+\left(6n^2+6n+9\right)\\ &= 3x+3\left(2n^2+2n+3\right)=3y\vdots 3\end{aligned}$$

Do đó $n\left(2n^2+7\right)$ chia hết cho 3 với $n=k+1$

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài toán 2. Chứng minh rằng $4^n+15n-1$ chia hết cho 9 với mọi $n\in N^*$

Hướng dẫn giải

Với $n=1$ thì ta có: $A=18$ chia hết cho 9, do đó bài toán đúng với $n=1$

Giải sử bài toán đúng đến $n=k$ với $k\ge 1, k\in N$ tức là:

$4k^2+15k-1\vdots 9$ hay $4k^2+15k-1=9x\ \left(x\in N^*\right)\Leftrightarrow 4k^2=9x-15k+1$,

ta sẽ cần chứng minh bài toán đúng với *n* = *k* + *1*. Thật vậy:

$$\begin{aligned}4^{k+1}+15(k+1)-1 &= 4.4^k+15k+14\\ &= 4\left(9x-15k+1\right)+15k+14\\ &= 36x-45k+18\vdots 9\end{aligned}$$

Do đó $A=4n^2+15n-1$ chia hết cho 9 với $n=k+1$

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài toán 3. Chứng minh rằng $5^{2n}+7$ chia hết cho 8 với mọi số nguyên dương n.

Hướng dẫn giải

- Với $n=1$, khi đó ta có $5^2+7=32\vdots 8$ (đúng)
- Giả sử mệnh đề đúng với , tức là ta có $5^{2n}+7\vdots 8$.
- Ta cần chứng minh mệnh đề đúng với $n+1$. Thật vậy, ta có

$$5^{2(n+1)}+7=25.5^{2n}+7=24.5^{2n}+\left(5^{2n}+7\right)$$

Để ý là $5^{2n}+7\vdots 8$ và $24.5^{2n}\vdots 8$. Do đó ta được $5^{2(n+1)}+7\vdots 8$.

Vậy theo nguyên lý quy nạp ta được $5^{2n}+7$ chia hết cho 8 với mọi số nguyên dương n.

Bài toán 4. Cho n là một số nguyên dương, Chứng minh rằng: $C=7.2^{2n-2}+3^{2n-1}\vdots 5$ (1)

Hướng dẫn giải

Xét với n = 1 ta có: $C = 10 \vdots 5$. Vậy (1) đúng với n = 1

Giả sử (1) đúng với n = k ($k \geq 1, k \in N$), tức là: $C_k = 7.2^{2k-2} + 3^{2k-1} \vdots 5 \qquad (2)$

Ta sẽ chứng minh (1) đúng với n = k + 1, tức là phải chứng minh:

$$C_{k+1} = 7.2^{2(k+1)-2} + 3^{2(k+1)-1} \vdots 5$$

Ta có: $C_{k+1} = 7.2^{2(k+1)-2} + 3^{2(k+1)-1} = 7.2^{2k+2-2} + 3^2.3^{2k-1} = 4.7.2^{2k-2} + 9.3^{2k-1}$

$= 4\left(7.2^{2k-2} + 3^{2k-1}\right) + 5.3^{2k-1} = 4.C_k + 5.3^{2k-1} \vdots 5$

Vậy theo nguyên lý quy nạp ta được $C = 7.2^{2n-2} + 3^{2n-1}$ chia hết cho 5 với mọi số nguyên dương n.

Bài toán 5. Chứng minh rằng số được tạo 3^n bởi chữ số giống nhau thì chia hết cho 3^n với $n \in N^*$

(Đề thi học sinh giỏi lớp 9 toàn quốc năm 1978)

Hướng dẫn giải

Với n = 1, ta có: $\overline{aaa} = 111.a \vdots 3$, Vậy bài toán đúng với n = 1.

Giả sử bài toán đúng đến n = k ($k \geq 1, k \in N$), tức là: $\underbrace{\overline{aa...a}}_{3^k} \vdots 3^k$

Ta sẽ chứng minh mệnh đề đúng đến n = k + 1.

Thật vậy: $\underbrace{\overline{aa...a}}_{3^{k+1}} = \overline{\underbrace{aa...a}_{3^k}\underbrace{aa...a}_{3^k}\underbrace{aa...a}_{3^k}} = \underbrace{\overline{aa..a}}_{3^k} \times 1\underbrace{00...0}_{3^k-1}1\underbrace{00..0}_{3^k-1}1 \vdots 3^{n+1} \quad \left(do\ 1\underbrace{00...0}_{3^k-1}1\underbrace{00..0}_{3^k-1}1 \vdots 3\right)$

Vậy bài toán được chứng minh.

🗁 **Dạng 8: Sử dụng nguyên lý Dirichlet**

*** Cơ sở phương pháp:** Đầu tiên ta phải nắm được nguyên lý Dirichlet: "Nhốt *m = kn + 1* con thỏ vào *k (k < n)* chuồng thì tồn tại một chuồng có ít nhất *n + 1* con thỏ"

Áp dụng nguyên lý Dirichlet vào bài toán chia hết như sau: "Trong *m = kn + 1* số có ít nhất *n + 1* số chia hết cho *k* có cùng số dư"

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Chứng minh trong 5 số nguyên bất kì có thể tìm được ba số có tổng chia hết cho 3

Hướng dẫn giải

Một số khi chia cho 3 thì tồn tại 3 loại số dư là: 1, 2 hoặc 3.

Trường hợp 1: Nếu tồn tại cả 3 loại số dư khi chia cho 3 thì:

$$\begin{cases} a_1 = 3k_1 + 0 \\ a_2 = 3k_2 + 1 \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 = 3(k_1 + k_2 + k_3) + 3 \vdots 3 \\ a_3 = 3k_3 + 2 \end{cases}$$

Trường hợp 2: Chỉ tồn tại hai loại số dư, theo nguyên lý **Dirichlet** trong 5 số nguyên bất kì luôn tồn tại ít nhất 3 số cùng dư khi chia cho 3 suy ra tổng 3 số ấy chia hết cho 3.

Trường hợp 3: Chỉ tồn tài du nhất một loại số dư khi chia hết cho 3 suy ra 3 số tùy ít trong 5 số đó chia hết cho 3.

Bài toán 2. Cho 4 số nguyên phân biệt a, b, c, d. Chứng minh rằng:

$$A = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d) \vdots 12$$

Hướng dẫn giải

Theo nguyên lý **Dirichlet** trong 3 số nguyên tùy ý luôn tồn tại hai số nguyên tùy ý có cùng số dư khi chia hết cho 3 suy ra $A \vdots 3$

Trường hợp 1: cả 4 số đều là số chẵn nên tồn tại 6 hiệu chia hết cho 2 suy ra $A \vdots 4$

Trường hợp 2: cả 4 số đều là số lẻ nên tồn tại 6 hiệu chia hết cho 2 suy ra $A \vdots 4$

Trường hợp 3: 2 số chẵn và hai số lẻ nên tồn tại 4 hiệu chia hết cho 2 suy ra $A \vdots 4$

Trường hợp 4: 3 số chẵn và một số lẻ , từ 3 số chẵn đó cho ta 3 hiệu chia hết cho 2 suy ra $A \vdots 4$

Trường hợp 5: 3 số lẻ và một số lẻ, từ 3 số lẻ đó cho ta 3 hiệu chia hết cho 2 suy ra $A \vdots 4$

Do đó A cũng chia hết cho 4 mà (3, 4) = 1 nên A chia hết cho 12.

Bài toán 3. Chứng minh trong 101 số nguyên bất kì có thể tìm được hai số có 2 chữ số tận cùng giống nhau.

Hướng dẫn giải

Lấy 101 số nguyên bất kì chia cho 100 thì theo nguyên lý Dirichle có có ít nhất 2 số có cùng số dư khi chia cho 100. Suy ra trong 101 số đã cho tồn tại ít nhất 2 số có 2 chữ số tận cùng giống nhau.

Bài toán 4. Cho 2014 số tự nhiên bất kì $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_{2014}$. Chứng minh rằng tồn tại một số chia hết cho 2014 hoặc tổng một số số chia hết cho 2014.

Hướng dẫn giải

Xét 2014 số: $S_1 = x_1; S_2 = x_1 + x_2; \ldots; S_{2014} = x_1 + x_2 + \ldots + x_{2014}$

Nếu tồn tại S_i với *i = 1, 2, 3, …., 2014* chia hết cho 2014 thì bài toán được chứng minh.

Nếu không tồn tại S_i với *i = 1, 2, 3, …., 2014* chia hết cho 2014. Đem 2014 số này chia cho 2014 nhận được 2014 số dư. Giá trị của các số dư nhận được thuộc vào tập hợp $\{1,2,3,....,2013\}$. Vì 2014 số dư mà chỉ có 2013 giá trị nên theo nguyên lý Dirichlet có 2 số dư bằng nhau.

Kí hiệu hai số đó là S_m, S_n có cùng số dư khi chia cho 2014 $\{m,n \in N, 1 \le n < m \le 2014\}$

Thì hiệu: $S_m - S_n = x_{n+1} + x_{n+2} + ... + x_m$ chia hết cho 2014.

Nhận xét: *Ta có thể tổng quát hóa bài toán như sau: Cho n số tự nhiên* $x_1; x_2; ...; x_n$. *Chứng minh rằng trong n số trên có một số chia hết cho n hoặc một số số có tổng chia hết cho n.*

Bài toán 5. Chứng minh rằng trong 8 số tự nhiên có 3 chữ số bao giờ cũng chọn được hai số mà khi viết liền nhau ta được một số có 6 chữ số và chia hết cho 7.

Hướng dẫn giải

Lấy 8 số đã cho chia 7 được 8 số dư nhận một trong 7 giá trị 0, 1, 2, 3, …, 6. Theo nguyên tắc Dirichlet có hai số cùng số dư, giả sử là $\overline{abc}$ và $\overline{def}$ khi chia cho 7 có cùng số dư là . Giả sử $\overline{abc} = 7k + r$ và $\overline{def} = 7k + r$. Ta có:

$$\overline{abcdef} = 100\overline{abc} + \overline{def} = 1000(7k+r) + 7l + r = 7(1000k + l) + 1001r \vdots 7$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài toán 6. Có hay không một số nguyên dương *k* để 29^k là một số có các chữ số tận cùng là 0001.

Hướng dẫn giải

Ta cần chứng minh tồn tại số nguyên k sao cho $29^k - 1 \vdots 10^4$. Thật vậy, lấy $10^4 + 1$ số: $29, 29^2, ..., 29^{10^4-1}$ chia cho 10^4, khi đó có hai số có hiệu chia hết cho 10^4, giả sử đó là 29^n và 29^m $(n > m)$. Ta có $29^m - 29^n \vdots 10^4$ hay $29^m\left(29^{n-m} - 1\right) \vdots 10^4$.

Vì $\left(29^m, 10^4\right) = 1$ nên $29^{n-m} - 1 \vdots 10^4$ (đpcm).

🗁 Dạng 9: Xét đồng dư

Tóm tắt lý thuyết về đồng dư:

Định nghĩa: Cho *a, b* là số nguyên (*n* là số nguyên dương). Ta nói *a* đồng dư với *b* theo *modun n* và kí hiệu $a \equiv b \pmod{n}$ nếu *a* và *b* có cùng số dư khi chia cho *n*.

Như vậy: $a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow (a-b) \vdots n$. Ví dụ: $2019 \equiv 9 \pmod{5}$

Một số tính chất cơ bản:

1) Với mọi số nguyên a ta có: $a \equiv a \pmod{n}$

2) $a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow b \equiv a \pmod{n}$

3) $a \equiv b \pmod{n}$ và $b \equiv c \pmod{n} \Rightarrow a \equiv c \pmod{n}$

4) $a \equiv b \pmod{n}$ và $c \equiv d \pmod{n} \Rightarrow (a \pm c) \equiv (b \pm d) \pmod{n}$

Hệ quả của tính chất 4)

$$a_1 \equiv b_1 \pmod{n}, a_2 \equiv b_2 \pmod{n}, \ldots\ldots, a_n \equiv b_n \pmod{n}$$
$$\Rightarrow (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \equiv b_1 + b_2 + \ldots. + b_n \pmod{n}$$

5) $a \equiv b \pmod{n}$ **và** $c \equiv d \pmod{n} \Rightarrow a.c \equiv b.d \pmod{n}$

Hệ quả của tính chất 5)

$$a_1 \equiv b_1 \pmod{n}, a_2 \equiv b_2 \pmod{n}, \ldots\ldots, a_n \equiv b_n \pmod{n}$$
$$\Rightarrow (a_1.a_2\ldots.a_n) \equiv b_1.b_2\ldots\ldots b_n \pmod{n}$$

6) $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m}\ \forall n \in N$

7) Nếu $a \equiv b \pmod{m}$ và *d* là ước chung của *a* và *b* sao cho *(d, m) = 1*

thì $\frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d} \pmod{m}$

8) Nếu $a \equiv b \pmod{m}$ và *d* là ước chung của *a, b, m* thì $\frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d} \left(\bmod \frac{m}{d}\right)$

9) Nếu $a \equiv r \pmod{m}$ và $0 \le r < m$, thì *r* chính là số dư của phép chia *a* cho *m*.

*** Cơ sở phương pháp:** Sử dụng định nghĩa và các tính chất của đồng dư thức để giải bài toán chia hết.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Chứng minh rằng: $A = 7.5^{2n} + 12.6^n$ chia hết cho 19

Hướng dẫn giải

Ta có: $A = 7.5^{2n} + 12.6^n = 7.25^n + 12.6^n$

$Do\ 25 \equiv 6 \pmod{19} \Rightarrow 25^n \equiv 6^n \pmod{19} \Rightarrow 7.25^n \equiv 7.6^n \pmod{19}$

$\Rightarrow 7.25^n + 12.6^n \equiv 7.6^n + 12.6^n \pmod{19}$

Mà $7.6^n + 12.6^n = 19.6^n \vdots 19 \Rightarrow 7.25^n + 12.6^n \vdots 19 \Rightarrow A = 7.5^{2n} + 12.6^n \vdots 19$

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài toán 2. Chứng hai số: $A = 6^{1000} - 1$ và $B = 6^{1001} + 1$

Chứng minh rằng A và B đều là bội số của 7

Hướng dẫn giải

Ta có: $6 \equiv -1 \pmod 7 \Rightarrow 6^{1000} \equiv (-1)^{1000} \pmod 7 \Rightarrow 6^{1000} \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow 6^{1000} - 1 \vdots 7$

Vậy A là bội của 7.

Từ $6^{1000} \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow 6^{1001} \equiv 6 \pmod 7$

Mà $6 \equiv -1 \pmod 7 \Rightarrow 6^{1001} \equiv -1 \pmod 7 \Rightarrow 6^{1001} + 1 \vdots 7$

Vậy B là bội của 7.

Bài toán 3. a) A = $2222^{5555} + 5555^{2222}$ chia hết cho 7.

b) $B = 1961^{1962} + 1963^{1964} + 1965^{1966} + 2$ chia hết cho 7.

Hướng dẫn giải

a) Xét số dư của 2222^{5555} khi chia cho 7.

Ta có: $2222 \equiv 3 \pmod 7$ (1)

$\Rightarrow 2222^4 \equiv 3^4 \pmod 7$

$\Rightarrow 2222^4 \equiv 81 \pmod 7$

Mà $81 \equiv 4 \pmod 7$

$\Rightarrow 2222^4 \equiv 4 \pmod 7$ (2)

Nhân vế với vế (1) và (2) ta được $2222^5 \equiv 3.4 \pmod 7$

$\Rightarrow 2222^5 \equiv 5 \pmod 7$

$\Rightarrow 2222^{5555} \equiv 5^{1111} \pmod 7$ (3)

+ Tương tự: $5555^{2222} \equiv 2^{1111} \pmod 7$ (4)

Cộng vế với vế (3) và (4) ta có: $A \equiv 2^{1111} + 5^{1111}$ (mod 7) (5)

Mặt khác: $2^{1111} + 5^{1111} \equiv (2 + 5)$ (mod 7)

$\equiv 0$ (mod 7) (6)

Từ (5) và (6) ta được: $A \equiv 0$ (mod 7)

Vậy: $A = 2222^{5555} + 5555^{2222}$ chia hết cho 7

b) Ta có:

Ta có: $1961 \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow 1961^{1962} \equiv 1 \pmod 7$

Tương tự: $1963^{1964} \equiv 3^{1964} \pmod 7 \equiv 9.\left(3^3\right)^{654} \pmod 7 \equiv 9.27^{654} \pmod 7 \equiv 2 \pmod 7$

$$1965^{1966} \equiv (-2)^{1966} \pmod 7 \equiv 2.\left(2^3\right)^{655} \pmod 7 \equiv 2.8^{655} \pmod 7 \equiv 2 \pmod 7$$

$$\Rightarrow B \equiv 1 + 2 + 2 + 2 \pmod 7 \equiv 0 \pmod 7$$

Vậy: $B = 1961^{1962} + 1963^{1964} + 1965^{1966} + 2 \vdots 7$

Bài toán 4. Tìm số dư của phép chia: $1532^5 - 1$ cho 9.

Hướng dẫn giải

Ta có: $1532 \equiv 2 \pmod 9 \Rightarrow 1532^5 \equiv 2^5 \pmod 9$

Mà $2^5 \equiv 5 \pmod 9 \Rightarrow 1532^5 \equiv 5 \pmod 9 \Rightarrow 1532^5 - 1 \equiv 4 \pmod 9$

Vậy số dư của phép chia $1532^5 - 1$ cho 9 là 4.

🗁 Dạng 10: Tìm điều kiện biến để chia hết

Bài toán 1.

a) Tìm n nguyên để $A = n^3 + 2n^2 - 3n + 2$ chia hết cho $B = n^2 - n$

b) Tìm a nguyên để $a^3 - 2a^2 + 7a - 7$ chia hết cho $a^2 + 3$

Hướng dẫn giải

a) Chia A cho B ta có: $n^3 + 2n^2 - 3n + 2 = (n+3)(n^2 - n) + 2$

Để A chia hết cho B thì 2 phải chia hết cho $n^2 - n = n(n-1)$ do đó 2 chia hết cho n, ta có:

n	1	-1	2	-2
n - 1	0	-2	1	-3
n(n – 1)	0	2	2	6
	loại			loại

Vậy để giá trị biểu thức $A = n^3 + 2n^2 - 3n + 2$ chia hết cho giá trị biểu thức $B = n^2 - n$ thì n = -1 hoặc n = 2.

b) Thực hiện phép chia $a^3 - 2a^2 + 7a - 7$ cho $a^2 + 3$ được kết quả:

$a^3 - 2a^2 + 7a - 7 = (a^2 + 3)(a - 2) + (4a - 1)$

Để phép chia hết thì $4a - 1$ phải chia hết cho $a^2 + 3$

$(4a - 1) \vdots (a^2 + 3)$

$\Rightarrow (4a - 1)(4a + 1) \vdots (a^2 + 3) (a \in \mathbb{Z} \Rightarrow 4a + 1 \in \mathbb{Z})$

$\Rightarrow (16a^2 - 1) \vdots (a^2 + 3)$

$\Rightarrow 49 \vdots (a^2 + 3)$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a^2 + 3 = 7 \\ a^2 + 3 = 49 \ (\text{loai}) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2 \\ a = -2 \end{array}\right.$

Thử lại ta được a = 2 và a = - 2 đều thỏa mãn.

Bài toán 2. Tìm số tự nhiên n để $n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^3$ chia hết cho 10.

Hướng dẫn giải

Ta có: $A = n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^3 = 2(2n^2 + 6n + 7)$

$A \vdots 10 \Leftrightarrow 2n^2 + 6n + 7 \vdots 5 \Leftrightarrow 2n^2 + 6n + 2 \vdots 5 \Leftrightarrow 2(n^2 + 3n + 1) \vdots 5$

$\Leftrightarrow n^2 + 3n + 1 \vdots 5$

Do đó n(n + 3) có tận cùng là 4 hoặc 0 hay n có tận cùng là 1 hoặc 6

Vậy n có tận cùng bằng 1 hoặc 6 thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài toán 3. Tìm số nguyên dương n để (n + 3)(n + 4) chia hết cho 3n.

Hướng dẫn giải

Ta có: $(n+3)(n+4) \vdots 3n \Leftrightarrow n^2 + 7n + 12 \vdots 3n \Leftrightarrow n^2 + n + 12 \vdots 3n$

$$\Rightarrow \begin{cases} n^2 + n + 12 \vdots n & (1) \\ n^2 + n + 12 \vdots 3 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) suy ra: $12 \vdots n \Rightarrow n \in \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \quad (3)$

Từ (2) suy ra: $n(n+1) \vdots 3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n = 3k \\ n = 3k + 2 \end{array}\right. (k \in N)$

Loại các số có dạng n = 3k + 1 ở (1) ta được:

n	2	3	6	12
3n	6	9	18	36
$n^2 + n + 12$	18	24	54	168

Chỉ có n = 2 và n = 6 thì $n^2 + n + 12$ chia hết cho 3n do đó: $(n+3)(n+4) \vdots 3n$

Vậy n = 2 và n = 6.

Bài toán 3. Tìm các số nguyên dương x và y lớn hơn 1 sao cho x + 3 chia hết cho y và y + 3 chia hết cho x.

Hướng dẫn giải

Giải sử $2 \le x \le y$.

a) Xét y = 2 thì x = 2, không thỏa mãn x + 3 chia hết cho y.

b) Xét $y \ge 3$. Đặt x + 3 = ky $(k \in N)$ (1) thì $ky = x + 3 \le y + 3 \le y + y = 2y$ nên $k \le 2$.

Với k = 1, từ (1) có x + 3 = y. Thay vào: $y+3 \vdots x$ được $x+6 \vdots x$ nên lại có x > 1 nên $x \in \{2;3;6\}$.

x	2	3	6
y	5	6	9

Với k = 2, từ (1) có x + 3 = 2y. Thay vào: $y+3 \vdots x$ được $2y+6 \vdots x \Rightarrow x+9 \vdots x \Rightarrow 9 \vdots x$

do x > 1 nên $x \in \{3;9\}$.

Khi x = 3 thì y = 3, thử lại đúng.

Khi x = 9 thì y = 6, loại vì trái với $x \le y$.

Các cặp số (x, y) phải tìm là (2; 5), (5; 2), (3; 6), (6; 3), (6; 9), (9; 6), (3; 3).

Dạng 11: Các bài toán cấu tạo số liên quan đến tính chia hết của số tự nhiên

*** Cơ sở phương pháp:** Số tự nhiên $A = \overline{a_n a_{n-1} ... a_0}$ được biểu diễn dưới dạng tổng các lũy thừa như sau: $A = \overline{a_n a_{n-1} ... a_0} = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + ... + a_0$

Trong đó $a_n; a_{n-1}; ...; a_0$ là các chữ số và a_n khác 0.

Khi đó ta có các dấu hiệu chia hết như sau:

• $A \vdots 2 \Leftrightarrow a_0 \vdots 2 \Leftrightarrow a_0 \in \{0;2;4;6;8\}$

• $A \vdots 3 \Leftrightarrow (a_0 + a_1 + ... + a_{n-1} + a_n) \vdots 3.$

• $A \vdots 4 \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \vdots 4$

- $A\vdots 5 \Leftrightarrow a_0 \vdots 5 \Leftrightarrow a_0 \in \{0;5\}$.
- $A\vdots 8 \Leftrightarrow \overline{a_2a_1a_0} \vdots 8$
- $A\vdots 9 \Leftrightarrow (a_0 + a_1 + ... + a_{n-1} + a_n)\vdots 9$.
- $A\vdots 11 \Leftrightarrow [(a_0 + a_2 + ...) - (a_1 + a_3 + ...)]\vdots 11$.
- $A\vdots 25 \Leftrightarrow \overline{a_1a_0} \vdots 25$
- $A\vdots 125 \Leftrightarrow \overline{a_2a_1a_0} \vdots 125$

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm số tự nhiên có ba chữ số, chia hết cho 5 và 9, biết rằng chữ số hàng chục bằng trung bình cộng của hai chữ số kia.

Hướng dẫn giải

Gọi số phải tìm là $\overline{abc}$. Do $a+b+c$ chia hết cho 9 và $2b = a+c$ nên $3b$ chia hết cho 9, suy ra b chia hết cho 3. Như vậy $b \in \{0;3;6;9\}$. Do $\overline{abc}\vdots 5$ nên $c \in \{0;5\}$

Xét các số $\overline{ab0}$ với $a = 2b$, ta được số 630.

Xét các số $\overline{ab5}$ với $a = 2b-5$, ta được số 135 và 675.

Bài toán 2. Tìm các chữ số a, b sao cho:

a) $a - b = 4$ và $\overline{7a5b1}$ chia hết cho 3

b) $a - b = 6$ và $\overline{4a7} + \overline{1b5}$ chia hết cho 9

Hướng dẫn giải

a) Số $7a5b1\vdots 3 \Rightarrow 7+a+5+b+1\vdots 3 \Rightarrow 13 + a + b\vdots 3 \Rightarrow a+3$ chia cho 3 dư $2(1)$.

Ta có $a - \text{b} = 4$ nên:

$$4 \le a \le 9$$
$$0 \le b \le 5$$

Suy ra $4 \le a+b \le 14 \; (2)$.

Mặt khác $a-b$ là số chẵn nên $a+b$ là số chẵn (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra: $a + \text{b} \in \{8;14\}$.

Với $a+b=8$; $a-b=4$ ta được $a=6$; $b=2$.

Với $a+b=14$; $a-b=4$ ta được $a=9$; $b=5$.

b) $\overline{4a7}+\overline{1b5}\,\vdots\,9 \Rightarrow 512+10(a+b)\,\vdots\,9$

$\Rightarrow 504+8+9(a+b)+a+b\,\vdots\,9$ $\Rightarrow a+b$ chia cho 9 dư 1

Do $a+b \geq a-b=6$ nên $a+b=10$. Từ đó tìm được: $a=8;\ b=2$.

Bài toán 3. Chứng minh rằng nếu $\overline{ab}=2.\overline{cd}$ thì $\overline{abcd}$ chia hết cho 67

Hướng dẫn giải

Ta có $\overline{abcd}=100\cdot\overline{ab}+\overline{cd}=201\cdot\overline{cd}$ chia hết cho 67.

Bài toán 4. Cho số $\overline{abc}$ chia hết cho 27. Chứng minh rằng $\overline{bca}$ chia hết cho 27

Hướng dẫn giải

Ta có: $\overline{abc}\,\vdots\,27$

$\Rightarrow \overline{abc0}\,\vdots\,27$

$\Rightarrow 1000a+\overline{bc0}\,\vdots\,27$

$\Rightarrow 999a+a+\overline{bc0}\,\vdots\,27$

$\Rightarrow 27.37a+\overline{bca}\,\vdots\,27$

Do $27.37a\,\vdots\,27$ nên $\overline{bca}\,\vdots\,27$.

Bài toán 5. Chứng minh rằng nếu $\overline{ab}+\overline{cd}+\overline{eg}$ chia hết cho 11 thì $\overline{abc\deg}$ chia hết cho 11.

Hướng dẫn giải

$\overline{abc\deg}=10000.\overline{ab}+100\times\overline{cd}+\overline{eg}=9999\times\overline{ab}+99\times\overline{cd}+\left(\overline{ab}+\overline{cd}+\overline{eg}\right)$ chia hết cho 11.

Bài toán 6. Tìm các chữ số a, b sao cho $\overline{62ab427}$ chia hết cho 99.

Hướng dẫn giải

Cách 1. Ta có $99=9.11$ và $(9,11)=1$ nên ta có $\overline{62ab427}$ chia hết cho 99 khi và chỉ khi $\overline{62ab427}$ chia hết cho 9 và chia hết cho 11.

- Ta có $\overline{62ab427}$ chia hết cho 9 khi và chỉ khi $(6+2+a+b+4+2+7)\,\vdots\,9$ hay $(a+b+3)\,\vdots\,9$

Từ đó ta được $(a+b+3)\in\{9;18\}$ nên suy ra $(a+b+3)\in\{6;15\}$

- Ta có $\overline{62ab427}$ chia hết cho 11 khi và chỉ khi $(6+a+4+7)-(2+b+2)\vdots 11$ hay

$(a-b+2)\vdots 11$

Từ đó ta được $(a-b+2)\in\{0;11\}$ nên suy ra $(a-b)\in\{-2;9\}$.

Từ đó ta xét các trường hợp sau

+ Trường hợp 1: $\begin{cases} a-b=9 \\ a+b=6 \end{cases}$, trường hợp này không tồn tại các chữ số a, b thỏa mãn.

+ Trường hợp 2: $\begin{cases} a-b=9 \\ a+b=15 \end{cases}$, trường hợp này không tồn tại các chữ số a, b thỏa mãn.

+ Trường hợp 3: $\begin{cases} a-b=-2 \\ a+b=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=4 \end{cases}$

+ Trường hợp 4: $\begin{cases} a-b=-2 \\ a+b=15 \end{cases}$, trường hợp này không tồn tại các chữ số a, b thỏa mãn.

Vậy các chữ số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $a=2; b=4$.

Cách 2. Ta có $\overline{62ab427}=62.100000+\overline{ab}.1000+427=62630.99+\overline{ab}.990+10.\overline{ab}+57$

Suy ra $\overline{62ab427}$ chia hết cho 99 khi và chỉ khi $10.\overline{ab}+57$ chia hết cho 99.

Từ đó ta được $10.\overline{ab}+57=99.k$ với k là một số tự nhiên.

Dễ thấy $10.\overline{ab}+57$ có chữ số tận cùng là 7, do đó $99.k$ phải có chữ số tận cùng là 7 nên ta được $k=3$

Từ đó suy ra $10.\overline{ab}+57=99.3 \Rightarrow \overline{ab}=24$

Vậy các chữ số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $a=2; b=4$.

Bài toán 7. Tìm chữ số a biết rằng $\overline{20a20a20a}$ chia hết cho 7

Hướng dẫn giải

$$n=\overline{20a20a20a}=\overline{20a20a}.1000+\overline{20a}=(\overline{20a}.1000+\overline{20a}).1000+\overline{20a}$$
$$=1001.\overline{20a}.1000+\overline{20a}.$$

Theo đề bài n chia hết cho 7, mà 1001 chia hết cho 7 nên $\overline{20a}$ chia hết cho 7.

Ta có $\overline{20a}=196+(4+a)$, chia hết cho 7 nên $4+a$ chia hết cho 7. Vậy $a=3$.

🗁 Dạng 12: Các bài chia hết sử dụng định lý Fermat

*** Cơ sở phương pháp:**

Với p là số nguyên tố ta có: $a^p \equiv a \pmod p$.

Đặc biệt, nếu $(a, p)=1$ thì $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

Chứng minh

Xét các số a, $2a$, …, $(p-1)a$. Dễ thấy, không có số nào trong $p-1$ số trên chia hết cho p và không có hai số nào có cùng số dư khi chia cho p. Vậy khi chia $p-1$ số nói trên cho p, ta nhận được các số dư là 1, 2, …, $p-1$. Suy ra $a.(2a).(3a)...((p-1)a) \equiv 1.2.3.(p-1)$ $(\bmod\ p)$ hay $(1.2.3...(p-1)).a^{p-1} \equiv 1.2.3...(p-1) \pmod p$

Vì $(1.2.3...(p-1), p)=1$ nên $a^{p-1} = 1 \pmod p$.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Cho $a \in Z; m, n \in N^*$. Chứng minh rằng $a^{6n} + a^{6m} \vdots 7$ khi và chỉ khi $a \vdots 7$.

Hướng dẫn giải

Giả sử $a^{6n} + a^{6m} \vdots 7$ và $a \not\vdots\, 7$ ta có $(a, 7) = 1$.

Theo định lý Fermat: $a^6 \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow a^{6n} \equiv 1 \pmod 7$ và $a^{6m} \equiv 1 \pmod 7$

$\Rightarrow a^{6n} + a^{6m} \equiv 2 \pmod 7$. Vô lí! Vậy $a \vdots 7$

Ngược lại, nếu $a \vdots 7$ thì $a^{6n} + a^{6m} \vdots 7$

Bài toán 2. Chứng minh rằng $3^{2^{4n+1}} + 2^{3^{4n+1}} + 5 \vdots 11$, với mọi $n \in N$.

Hướng dẫn giải

Theo định lí Fermat, ta có $3^{10} \equiv 1 \pmod{11}$ và $2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$.

Ta tìm số dư trong phép chia 2^{4n+1} và 3^{4n+1} cho 10, tức là tìm chữ số tận cùng của chúng.

Ta có $2^{4n+1} = 2.16^n \equiv 2 \pmod{10} \Rightarrow 2^{4n+1} = 10k + 2$

$3^{4n+1} = 3.81^n \equiv 3 \pmod{10} \Rightarrow 3^{4n+1} = 10l + 3 \ (k, l \in N)$

Mà $3^{10k} \equiv 1 \pmod{11}$ và $2^{10l} \equiv 1 \pmod{11}$ nên

$$3^{2^{4n+1}} + 2^{3^{4n+1}} + 5 = 3^{10k+3} + 2^{10l+3} + 5 \equiv 3^2 + 2^3 + 5 \equiv 0 \pmod{11}$$

Vậy $3^{2^{4n+1}} + 2^{3^{4n+1}} + 5 \vdots 11\ \forall n \in N$.

Bài toán 2. Một số có 6n chữ số và chia hết cho 7. Chứng minh rằng nếu chuyển chữ số tận cùng lên đầu của số đó thì được một số cũng chia hết cho 7.

Hướng dẫn giải

Gọi số ban đầu là N = 10A + a, với a là chữ số tận cùng của N và A có 6n – 1 chữ số. Sau khi chuyển a lên đầu ta được số $M = a.10^{6n-1} + A$.

Ta chứng minh $N - 3M \vdots 7$.

Thật vậy, ta có $N - 3M = 7A - a\left(3.10^{6n-1} - 1\right)$

Áp dụng định lý Fermat ta có:

$10^6 \equiv 1\left(\bmod 7\right) \Rightarrow 10^{6n} \equiv 1\left(\bmod 7\right) \Rightarrow 3.10^{6n} \equiv 3 \equiv 10\left(\bmod 7\right)$

$$\Rightarrow 3.10^{6n-1} \equiv 1\left(\bmod\ \right)$$

Vậy $N - 3M \vdots 7$, từ đó suy ra điều phải chứng minh.

🗁 **Dạng 13: Các bài toán chia hết liên quan đến đa thức**

*** Cơ sở phương pháp:**

Định lý Bơdu:

Phần dư của phép chia đa thức f(x) cho nhị thức x - a bằng giá trị của đa thức tại x = a

Tức là: f(x) = (x - a).g(x) + f(a)

Chứng minh : Gọi g(x) là đa thức thương và R là số dư thì:

f(x) =(x - a).g(x) + R

f(a) = (a - a).g(a) + R = R (đpcm)

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Cho đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$. Biết $P(x)$ chia cho x + 1 dư 3, $P(x)$ chia cho x dư 1 và $P(x)$ chia cho x – 1 dư 5. Tìm các hệ số a, b, c.

(Trích đề vào 10 Chuyên Nam Định năm 2015-2016)

Hướng dẫn giải

Vì P(x) chia cho x + 1 dư 3 nên P(x) – 3 chia hết cho x + 1.

⇒ P(x) – 3 = f(x).(x + 1)

Thay x = –1 vào đẳng thức trên ta có:

P(–1) – 3 = f(–1).(–1 + 1) = 0.

⇒ P(–1) = 3 (1)

Tương tự, P(x) chia cho x dư 1 nên P(0) = 1 (2)

P(x) chia cho x – 1 dư 5 nên P(1) = 5 (3)

Từ (1), (2), (3) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a.(-1)^2 + b.(-1) + c = 3 \\ a.0^2 + b.0 + c = 1 \\ a.1^2 + b.1 + c = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = 3 \\ c = 1 \\ a + b + c = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

⇒ P(x) = $3x^2$ + x + 1. Thử lại ta thấy P(x) thỏa mãn đề bài.

Vậy P(x) = $3x^2$ + x + 1.

Bài toán 2. Tìm các số thực a, b, sao cho đa thức $4x^4 - 11x^3 - 2ax^2 + 5bx - 6$ chia hết cho đa thức $x^2 - 2x - 3$.

(Thi học sinh giỏi lớp 9, TP Hà Nội, năm học 2012 – 2013)

Hướng dẫn giải

Ta có $x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x + 1 - 4 = \left(x - 1\right)^2 - 4$

$= \left(x - 1 - 2\right)\left(x - 1 + 2\right) = \left(x - 3\right)\left(x + 1\right)$

Đặt thương là q(x) ta có: $4x^2 - 11x^3 - 2ax^2 + 5bx - 6 = \left(x - 3\right)\left(x + 1\right)q\left(x\right)$

Chọn $x = 3$ ta có: $4.3^4 - 11a^3 - 2a.3^2 + 5.b.3 - 6 = 0$

$\Rightarrow 15b - 18a = -21 \Rightarrow 5b - 6a = -7$ (1)

Chọn $x = -1$, ta có: $4.(-1)^4 - 11.(-1)^3 - 2a\left(-1\right)^2 + 5b\left(-1\right) - 6 = 0$

$\Rightarrow 5b + 2a = 9$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $8a + 16 \Rightarrow a = 2$

Thay vào (2) suy ra: $5b + 4 = 9 \Rightarrow b = 1.$.

Bài toán 3. Tìm đa thức f(x) biết: f(x) chia cho x + 3 dư 1; f(x) chia cho x – 4 dư 8; f(x) chia cho (x + 3)(x – 4) thì được 3x và còn dư.

Hướng dẫn giải

Theo định lý Bézout ta có $f(3) = 1; f(4) = 8$

Đặt dư f(x) chia cho $\left(x + 3\right)\left(x - 4\right)$ là ax + b

Suy ra $f\left(x\right) = \left(x + 3\right)\left(x - 4\right)3x + ax + b$.

- Với x =- 3 ta có: $1 = (-3+3)(-3-4)3(-3) + a(-3) + b \Rightarrow b - 3a = 1$ (1)
- Với x = 4 ta có: $8 = (4+3)(4-4)(3.4) + a.4 + b \Rightarrow b + 4a = 8$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: 7a = 7 $\Rightarrow a = 1$ thay vào (2) ta được b = 4.

Từ đó ta được: $f(x) = (x+3)(x-4)3x + x + 4$.

Hay $f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 35x + 4$.

Bài toán 4. Chứng minh rằng đa thức $f(x) = (x-3)^{200} + (x-2)^{100} - 1$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 - 5x + 6$

Hướng dẫn giải

Ta có $f(2) = (2-3)^{200} + (2-2)^{100} - 1 = 0$ nên $f(x) \vdots (x-2)$

$f(3) = (3-3)^{200} + (3-1)^{100} - 1 = 0$ nên f(x) ⋮ (x - 3)

Nên f(x) chia hết cho (x – 2)(x – 3) = $x^2 - 5x + 6$

Bài toán 5. Cho đa thức $P(x) = x^3 - x$ và $Q(x) = x^{81} + x^{49} + x^{25} + x^9 + x + 1$.

a) Tìm số dư trong phép chia Q(x) cho P(x)

b) Tìm x để $Q(x) \vdots P(x)$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $P(x) = x(x^2-1)$; $Q(x) = x(x^{80}-1) + x(x^{48}-1) + x(x^{24}-1) + x(x^8-1) + 5x + 1$

Vì các đa thức $x^{80}-1; x^{48}-1; x^8-1$ đều chia hết cho x^2-1 nên phép chia Q(x) cho P(x) dư 5x + 1.

b) Để $Q(x) \vdots P(x)$ thì $5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{5}$

TỔNG KẾT CÁC PHƯƠNG PHÁP THƯỜNG ÁP DỤNG

Để làm giải tốt các bài toán về chia hết, chúng ta cần sử dụng linh hoạt các phương pháp đã nêu trên, ở nhiều bài toán chia hết chúng ta có thể giải bằng nhiều phương pháp, nhưng có khi cũng một bài toán nhìn có vẻ tương tự như vậy nhưng chỉ có một phương pháp có thể giải quyết. Để mô phỏng về điều này tôi sẽ trích một bài viết của tác giả Nguyễn Đức Tấn trên tạp chí Toán học và tuổi trẻ:

Bài toán: Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì $n^2 + n + 1$ không chia hết cho 9.

Cách 1: *(Sử dụng phương pháp xét số dư)*

Ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: $n = 3k\left(k \in Z\right)$ thì $n^2 + n + 1 = 3k\left(k+1\right) + 1$

- Trường hợp 2: $n = 3k + 1\ \left(k \in Z\right)$ thì $n^2 + n + 1 = 9k\left(k+1\right) + 3$

- Trường hợp 3: $n = 3k + 2\ \left(k \in Z\right)$ thì $n^2 + n + 1 = 3\left(3k^2 + 5k + 2\right) + 1$

Từ 3 trường hợp trên suy ra $n^2 + n + 1$ không chia hết cho 9 với mọi số nguyên *n*.

Cách 2: *(Sử dụng phương pháp tách tổng)*

Ta có: $n^2 + n + 1 = \left(n-1\right)\left(n+2\right) + 3$

Do $(n + 2) - (n - 1) = 3$ nên $(n + 2)$ và $(n - 1)$ đồng thời hoặc không đồng thời chia hết cho 3

Nếu $\left(n+2\right) ⋮ 3; \left(n-1\right) ⋮ 3 \Rightarrow \left(n-1\right)\left(n+2\right) ⋮ 9$ nên $\left(n-1\right)\left(n+2\right) + 3$ sẽ không chia hết cho 9.

Nếu $(n + 2)$ và $(n - 1)$ đề không chia hết cho 3 thì $\left(n-1\right)\left(n+2\right) + 3$ sẽ không chia hết cho 9.

Vậy $n^2 + n + 1$ không chia hết cho 9 với mọi số nguyên *n*.

Cách 3: *(Sử dụng phương pháp phản chứng)*

Giả sử $\left(n^2 + n + 1\right) ⋮ 9$. Đặt $n^2 + n + 1 = 9m\ \left(m \in Z\right) \Rightarrow n^2 + n + 1 - 9m = 0\ \left(*\right)$

Phương trình (*) có $\Delta = 36m - 3 = 3\left(12m - 1\right)$

Ta thấy Δ không thể là số chính phương do chỉ chia hết cho 3 mà không chia hết cho 9 nên (*) không có nghiệm . Vô lý!

Vậy $n^2 + n + 1$ không chia hết cho 9 với mọi số nguyên *n*.

Cách 4: Ta có: $4\left(n^2 + n + 1\right) = \left(2n+1\right)^2 + 3$

Nếu $\left(2n+1\right) ⋮ 3 \Rightarrow \left(2n+1\right)^2 ⋮ 9$ nên $\left(2n+1\right)^2 + 3$ sẽ không chia hết cho 9.

Nếu $(2n + 1)$ không chia hết cho 3 thì $\left(2n+1\right)^2$ không chia hết cho 9 nên $\left(2n+1\right)^2 + 3$ sẽ không chia hết cho 3 vì thế cũng sẽ không chia hết cho 9 .

Vậy $4\left(n^2 + n + 1\right)$ không chia hết cho 9 nên $n^2 + n + 1$ sẽ không chia hết cho 9 với mọi số nguyên *n*.

Các bạn rèn luyện khả năng sử dụng các phương pháp trong chứng minh các bài toán về chia hết thông qua các bài toán tương tự sau:

1) Chứng minh: $n^2 + 11n + 39$ không chia hết cho 49.

2) Chứng minh: $n^2 + 3n + 5$ không chia hết cho 49.

3) Chứng minh: $n^2 + 5n + 16$ không chia hết cho 169.

Tuy nhiên với bài toán:

Chứng minh: $9n^3+9n^2+3n-16$ không chia hết cho 343 với mọi số nguyên *n*.

Ta dễ thấy với các cách 1, 2, 3 có lẽ chúng ta phải bó tay, khai thác các giải 4 chú ý $343=7^3$ *ta có lời giải thật "dễ thương" sau:*

$9n^3+9n^2+3n-16=(3n+1)^3-49.$

Nếu $(3n+1)\vdots 7 \Rightarrow (3n+1)^3 \vdots 7^3=343$ nên $(3n+1)^3-49$ sẽ không chia hết cho 343.

Nếu *(3n + 1)* không chia hết cho 7 thì $(3n+1)^3-49$ không chia hết cho 7 nên $(3n+1)^3-49$ không chia hết cho $343=7^3$.

Vậy $9n^3+9n^2+3n-16$ sẽ không chia hết cho 343 với mọi số nguyên *n*.

Do đó để giải toán chúng ta cần linh hoạt và nắm vững các phương pháp giải để có thể vận dụng tốt ở các bài toán khác nhau!

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Câu 1. Chứng minh rằng $a^5-a\vdots 30 \quad (a\in\mathbb{Z})$

Câu 2. a) Đặt $A=n^3+3n^2+5n+3$. Chứng minh rằng A chia hết cho 3 với mọi giá trị nguyên dương của n

b) Nếu a chia 13 dư 2 và b chia 13 dư 3 thì a^2+b^2 chia hết cho 13

Câu 3. Chứng minh rằng: $A=\left[n^3\left(n^2-7\right)^2-36n\right]\vdots 7$ với $\forall n\in\mathbb{Z}$.

Câu 4. Chứng minh rằng n^3-28n chia hết cho 48 với mọi n là số nguyên chẵn

Câu 5. Cho n là số tự nhiên lẻ. Chứng minh n^3-n chia hết cho 24

Câu 6. Chứng minh n^3+17n chia hết cho 6 với mọi $n\in\mathbb{Z}$

Câu 7. Chứng minh rằng: $Q=n^3+(n+1)^3+(n+2)^3\vdots 9$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$

Câu 8. Chứng minh rằng : $2021^{2019}+2019^{2021}$ chia hết cho 2020.

Câu 9. Chứng minh rằng

a) 8^5+2^{11} chia hết cho 17

b) $19^{19}+69^{19}$ chia hết cho 44

Câu 10. Chứng minh rằng $A=n^2+n+2$ không chia hết cho 15 với mọi số nguyên n.

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Thủy Nguyên 2018-2019)

Câu 11. Chứng minh rằng với mọi $n\in N$ thì: $n^4+6n^3+11n^2+30n-24$ chia hết cho 24.

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Thanh Hà 2016-2017)

Câu 12. Cho a, b là số nguyên thỏa mãn: $2a^2+3ab+2b^2$ chia hết cho 7. Chứng minh rằng a^2-b^2 chia hết cho 7.

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Kinh Môn 2013-2013)

Câu 13. Cho n là số tự nhiên không chia hết cho 3. Chứng minh rằng $P = 3^{2n} + 3^n + 1$ chia hết cho 13.

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Vũ Quang 2018-2019)

Câu 14. Cho biểu thức $P = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{2019}$ với $a_1; a_2; a_3; ...; a_{2019}$ là các số nguyên dương và P chia hết cho 30. Chứng minh rằng $Q = a_1^5 + a_2^5 + a_3^5 + ... + a_{2019}^5$ chia hết cho 30.

(Đề thi HSG Thành Phố Hải Phòng 2018-2019)

Câu 15. Cho x là số tự nhiên chẵn. Chứng tỏ rằng biểu thức $M = \frac{x^3}{24} + \frac{x^2}{8} + \frac{x}{12}$ có giá trị là số nguyên.

(Đề thi Chọn HSG lớp 9 THCS Hiệp An 2018-2019)

Câu 16. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta có: $A = 7.5^{2n} + 12.6^n$ chia hết cho 19.

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Phù Ninh 2013-2014)

Câu 17. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì : $A = 5^{n+2} + 26.5^n + 8^{2n+1} \vdots 59$

Câu 18. Cho $a_1, a_2, ..., a_{2016}$ là các số tự nhiên có tổng chia hết cho 3

Chứng minh rằng: $A = a_1^3 + a_2^3 + ... + a_{2016}^3$ chia hết cho 3.

Câu 19. a) Chứng minh rằng nếu tổng của hai số nguyên chia hết cho 3 thì tổng các lập phương của chúng chia hết cho 9

b) Tìm các số nguyên n để $n^5 + 1$ chia hết cho $n^3 + 1$

Câu 20. Cho các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 = c^2$. Chứng minh ab chia hết cho $a + b + c$.

(Đề thi vào 10 Chuyên Lam Sơn năm 2019-2020)

Câu 21. Tìm số nguyên dương n bé nhất để $F = n^3 + 4n^2 - 20n - 48$ chia hết cho 125.

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Hoằng Hóa 2015-2016)

Câu 22. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương a,b sao cho: $a + b^2$ chia hết cho $a^2b - 1$.

(đề thi học sinh giỏi lớp 9 huyện Thanh Oai 2012-2013)

Câu 23. Cho các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 = z^2$

Chứng minh A = xy chia hết cho 12

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Vĩnh Lộc 2016-2018)

Câu 24. Chứng minh rằng số tự nhiên $A = 1.2.3....2017.2018.\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2017} + \frac{1}{2018}\right)$ chia hết cho 2019.

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Hoài Nhon 2018-2019)

Câu 25. Tìm số dư trong phép chia của đa thức $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8) + 2010$ cho đa thức $x^2 + 10x + 21$

Câu 26. Tìm a, b sao cho $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 + x - 2$

Câu 27. Cho đa thức $f(x)=x^3-3x^2+3x-4$. Với giá trị nguyên nào của x thì giá trị của đa thức $f(x)$ chia hết cho giá trị của đa thức x^2+2

Câu 28. Giả sử f(x) là đa thức bậc 4 với hệ số nguyên. Chứng minh rằng: Nếu $f(x) \vdots 7$ với $\forall x \in Z$ thì từng hệ số của f(x) cũng $\vdots 7$

(Đề thi học sinh giỏi lớp 9 trường Trần Mai Ninh năm 2012-2013)

Câu 29. Tìm số dư trong phép chia $(x+3)(x+5)(x+7)(x+9)+2033$ cho $x^2+12x+30$

Câu 30. Tìm đa thức $f(x)$ biết rằng : $f(x)$ chia cho $x+2$ dư 10, $f(x)$ chia cho $x-2$ dư 26, $f(x)$ chia cho x^2-4 được thương là $-5x$ và còn dư

Câu 31. Cho đa thức $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với a, b, c, d là các hệ số nguyên. Chứng minh rằng nếu P(x) chia hết cho 5 với mọi giá trị nguyên của x thì các hệ số a, b, c, d đều chia hết cho 5.

(đề thi học sinh giỏi lớp 9 huyện Thạch Hà 2016-2017)

Câu 32. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh $p^{20}-1$ chia hết cho 100

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Lục Nam 2018-2019)

Câu 33. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $n^2+3n+11$ không chia hết cho 49.

(Đề thi HSG lớp 9 TP Hà Nội 2019-2020)

Câu 34. Cho $N = k^4 + 2k^3 - 16k^2 - 2k + 15$, k là số nguyên. Tìm điều kiện của k để số N chia hết cho 16.

(Đề thi HSG huyện Lê Ninh 2018-2019)

Câu 35. Cho hai số nguyên, số thứ nhất chia cho 5 dư 1, số thứ hai chia cho 5 dư 2. Hỏi tổng bình phương của chúng có chia hết cho 5 không ?

Câu 36. Chứng minh rằng với mọi số n nguyên dương thì: $5^n(5^n+1)-6^n(3^n+2^n) \vdots 91$

Câu 37. Chứng minh rằng $A = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{11}$ chia hết cho 40.

Câu 38. Tìm đa thức $f(x)$ biết: $f(x)$ chia cho $x-2$ dư 5; $f(x)$ chia cho $x-3$ dư 7; $f(x)$ chia cho $(x-2)(x-3)$ được thương là x^2-1 và đa thức dư bậc nhất với x

Câu 39. Cho số tự nhiên $n>3$. Chứng minh nếu $2^n=10a+b\,(a,b\in\mathbb{N}, 0<b<10)$ thì tích ab chia hết cho 6

Câu 40. Cho a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $p=a^2+b^2$ là số nguyên tố và $p-5$ chia hết cho 8. Giả sử các số nguyên x, y thỏa mãn ax^2-by^2 chia hết cho p. Chứng minh rằng cả hai số x, y đều chia hết cho p.

(Đề thi HSG lớp 9 TP Hải Phòng 2017-2018)

Câu 41. Cho ba số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $a^3+b^3+c^3$ chia hết cho 14. Chứng minh rằng abc cũng chia hết cho 14.

(Trích đề Chuyên toán Sư Phạm Hà Nội 2019-2020)

Câu 42.

a) Tìm tất cả những số tự nhiên n sao cho 2^n+1 chia hết cho 9.

b) Cho n là số tự nhiên $n>3$. Chứng minh rằng 2^n+1 không chia hết cho 2^m-1 với mọi số tự nhiên m sao cho $2<m\le n$.

(Trích đề Phổ Thông năng khiếu Hồ Chí Minh 2019-2020)

Câu 43. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, số $M=9.3^{4n}-8.2^{4n}+2019$ chia hết cho 20.

(Trích đề Chuyên Quảng Nam 2019-2020)

Câu 44. Có bao nhiêu số tự nhiên n không vượt quá 2019 thỏa mãn n^3+2019 chia hết cho 6.

(Trích đề Chuyên Nam Định 2018-2019)

Câu 45. Cho x, y là các số nguyên sao cho $x^2-2xy-y^2; xy-2y^2-x$ đều chia hết cho 5. Chứng minh $2x^2+y^2+2x+y$ cũng chia hết cho 5

(Trích đề Chuyên KHTN Hà Nội 2018-2019)

Câu 46. Tìm tất cả các số nguyên không âm a,b,c thỏa mãn

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=6abc$ và $a^3+b^3+c^3+1$ chia hết cho $a+b+c+1$.

(Trích đề Chuyên Nam Định 2016-2017)

Câu 47. Cho n là sô tự nhiên chẵn, chứng minh rằng số $20^n-3^n+16^n-1$ chia hết cho số 323

(Trích đề Chuyên Bình Định 2018-2019)

Câu 48. Cho a^2+b^2 là bội số của 5 với a và b là các số nguyên. Chứng minh rằng hai số $A=2a+b$ và $B=2b-a$ hoặc hai số $A'=2a-b$ và $B'=2b+a$ chia hết cho 5.

Câu 49. Cho phương trình $x^3+2y^3+4z^3=9!(1)$ với $x;y;z$ là ẩn và 9! Là tích các số nguyên dương liên tiếp từ 1 đến 9

a) Chứng minh rằng nếu có các số nguyên $x;y;z$ thỏa mãn (1) thì x,y,z đều chia hết cho 4

b) Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên x,y,z thỏa mãn (1).

(Trích đề Chuyên Vĩnh Phúc 2018-2019)

Câu 50. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng p^2-1 chia hết cho 24

(Trích đề Chuyên Bến Tre 2018-2019)

Câu 51. Cho số tự nhiên $n\ge 2$ và số nguyên tố p thỏa mãn $p-1$ chia hết cho n đồng thời n^3-1 chia hết cho p. Chứng minh rằng $n+p$ là một số chính phương.

(Trích đề Chuyên Phan Bội Châu 2018-2019)

Câu 52. Với n là số tự nhiên chẵn, chứng minh rằng: $\left(20^n+16^n-3^n-1\right)\vdots 323$

(Trích đề Chuyên Lâm Đồng 2018-2019)

Câu 53. Đặt $N = a_1 + a_2 + ... + a_{2018}$, $M = a_1^5 + a_2^5 + ... + a_{2018}^5$ $\left(a_1; a_2; ....a_{2018} \in \mathbb{Z}^+\right)$. Chứng mỉnh rằng nếu N chia hết cho 30 thì M cũng chia hết cho 30

(Trích đề Chuyên Hải Dương 2018-2019)

Câu 54. Cho a, b,c là các số nguyên. Chứng minh nếu $a^{2016} + b^{2017} + c^{2018}$ chia hết cho 6 thì $a^{2018} + b^{2019} + c^{2020}$ cũng chia hết cho 6.

(Trích đề Chuyên Tuyên Quang 2018-2019)

Câu 55. Tìm dạng tổng quát của số nguyên dương n biết: $M = n.4^n + 3^n$ chia hết cho 7.

(Trích đề Chuyên Hải Dương 2016-2017)

Câu 56. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $n^3 - 9n + 27$ không chia hết cho 81.

(Trích đề Chuyên Quảng Ngãi 2018-2019)

Câu 57. Cho m, n là các số nguyên thỏa mãn $4\left(m+n\right)^2 - mn$ chia hết cho 225. Chứng minh rằng: mn cũng chia hết cho 225.

(Trích đề Chuyên Lào Cai 2018-2019)

Câu 58. Cho n là số nguyên dương tùy ý, với mỗi số nguyên dương k đặt $S_k = 1^k + 2^k + ... + n^k$. Chứng minh $S_{2019} \vdots S_1$.

(Chuyên toán Thanh Hóa 2018-2019)

Câu 59. Chứng minh rằng nếu p và (p + 2) là hai số nguyên tố lớn hơn 3 thì tổng của chúng chia hết cho 12.

(Trích đề Chuyên Hòa Bình 2015-2016)

Câu 60. Chứng minh rằng nếu số nguyên n lớn hơn 1 thoả mãn $n^2 + 4$ và $n^2 + 16$ là các số nguyên tố thì n chia hết cho 5.

(Trích đề Chuyên Phú Thọ 2015-2016)

Câu 61. Chứng minh biểu thức $S = n^3\left(n+2\right)^2 + \left(n+1\right)\left(n^3 - 5n + 1\right) - 2n - 1$ chia hết cho 120, với n là số nguyên.

(Trích đề Chuyên Bình Phước 2017-2018)

Câu 62. Cho $A = 2\left(1^{2015} + 2^{2015} + ... + n^{2015}\right)$ với n là số nguyên dương. Chứng minh rằng A chia hết cho n(n + 1).

(Trích đề Chuyên Quảng Nam 2015-2016)

Câu 63. Cho biểu thức $Q = a^4 + 2a^3 - 16a^2 - 2a + 15$. Tìm tất cả các giá trị nguyên của a để Q chia hết cho 16.

(Trích đề Chuyên Quảng Nam 2016-2017)

Câu 64. Chứng minh rằng trong ba số chính phương tùy ý luôn tồn tại hai số mà hiệu của chúng chia hết cho 4.

Câu 65. Cho a, b, c là ba số nguyên khác 0 thỏa $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Chứng minh rằng: abc chia hết cho 4.

(Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Đồng Nai 2019)

Câu 66. Chứng minh rằng $A=2^{2^n}+4^n+16$ chia hết cho 3 với mọi số nguyên dương *n*.

(Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Nghệ An Bảng A 2019)

Câu 67. Chứng minh rằng $A=4^n+17$ chia hết cho 3 với mọi số nguyên dương *n*.

(Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Nghệ An Bảng B 2019)

Câu 68. Cho $n\in N^*$. Chứng minh rằng nếu $2n+1$ và $3n+1$ là các số chính phương thì n chia hết cho 40.

(Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Thanh Hóa 2019)

Câu 69. Chứng minh rằng với mọi số nguyên n chẵn thì: $n^3+20n+96$ chia hết cho 48.

(Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Bình Phước 2019)

Câu 70. Cho p là một số nguyên tố thỏa mãn $p=a^3-b^3$ với a,b là hai số nguyên dương phân biệt. Chứng minh rằng nếu lấy $4p$ chia cho 3 và loại bỏ phần dư thì nhận được một số là bình phương của một số nguyên lẻ.

(Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Khánh Hòa 2018)

Câu 71. Cho đa thức $f(x)=x^2-2(a+1)x+b-1$. Xác định a, b để $f(x)$ chia hết cho $(x-1)$ và và đa thức $(x+2)$.

Câu 72. 1. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh $p^{2016}-1$ chia hết cho 60.

2. Cho x, y, z là các số dương khác nhau đôi một và $x^3+y^3+z^3$ chia hết cho $x^2y^2z^2$. Tìm thương của phép chia $x^3+y^3+z^3 : x^2y^2z^2$

(Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Thanh Hóa 2017)

Câu 73. Cho hai số nguyên a và b thỏa $24a^2+1=b^2$. Chứng minh rằng chỉ có một số a hoặc b chia hết cho 5.

(Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Quảng Nam 2017)

Câu 74. Cho p và q là các số nguyên tố lớn hơn 3 và thỏa mãn $p=q+2$. Tìm số dư khi chia $p+q$ cho 12.

(Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Vĩnh Long 2016)

Câu 75. Cho các nguyên a, b, c, d thỏa mãn điều kiện $a^3+b^3=2(c^2-8d^3)$.

Chứng minh rằng $a+b+c+d$ chia hết cho 3.

(Trích đề thi HSG lớp 9 Thành Phố Hà Nội 2016)

Câu 76. Chứng minh rằng với mọi số nguyên n, số $A=3n^3+15n$ chia hết cho 18.

(Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Gia Lai 2019)

Câu 77. Biết $a;b$ là các số nguyên dương thỏa mãn a^2-ab+b^2 chia hết cho 9, chứng minh rằng cả a và b đều chia hết cho 3.

(Trích đề thi HSG lớp 9 Thành Phố Hà Nội 2019)

Câu 78. Chứng minh rằng $a_1^3+a_2^3+a_3^3+...+a_n^3$ chia hết cho 3, biết $a_1,a_2,a_3,...,a_n$ là các chữ số của 2019^{2018}.

(Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Hải Dương 2019)

Câu 79. Cho n là số tự nhiên lẻ. Chứng minh: $46^n+296.13^n$ chia hết cho 1947

(Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu 2019)

Câu 80. Chứng minh rằng $2n^3+3n^2+n$ chia hết cho 6 với mọi số nguyên n.

(Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Lâm Đồng 2019)

Câu 81. Cho $a,\ b,\ c$ là các số nguyên thỏa mãn $a+b=c^3-2018c$. Chứng minh rằng $A=a^3+b^3+c^3$ chia hết cho 6.

(Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Quảng Ngãi 2019)

Câu 82. Chứng minh trong các số có dạng 20142014 ... 2014 có số chia hết cho 2013.

(Trích đề vào 10 Chuyên Lạng Sơn năm 2013-2014)

Câu 83. Cho a,b là hai số nguyên dương thỏa mãn $a+20$ và $b+13$ cùng chia hết cho 21. Tìm số dư của phép chia $A=4^a+9^b+a+b$ cho 21.

(Trích đề vào 10 Chuyên Hải Phòng năm 2013-2014)

Câu 84. Cho biểu thức: $A=\left(a^{2020}+b^{2020}+c^{2020}\right)-\left(a^{2016}+b^{2016}+c^{2016}\right)$ với a,b,c là các số nguyên dương. Chứng minh rằng A chia hết cho 30.

(Trích đề vào 10 Chuyên Tin Lam Sơn năm 2019-2020)

Câu 85. Cho hai số nguyên dương x,y với $x>1$ và thỏa mãn điều kiện: $2x^2-1=y^{15}$. Chứng minh rằng x chia hết cho 15.

(Trích đề vào 10 Chuyên Toán Lam Sơn năm 2019-2020)

Câu 86. Cho các số 1; 2; 3; ...; 100. Viết một cách tùy ý 100 số đó nối tiếp nhau theo hàng ngang ta được một số tự nhiên. Hỏi số tự nhiên đó có chia hết cho 2016 hay không?

(Trích đề vào 10 Chuyên Toán Lam Sơn năm 2015-2016)

Câu 87. Tìm k để tồn tại số tự nhiên n sao cho $\left(n^2-k\right)\vdots 4$ với $k\in\{0;1;2;3\}$.

Câu 88. Cho n là số dương. Chứng minh rằng: $(n+1)(n+2)...(2n)$ chia hết cho 2^n.

Câu 89. Tìm a,b để $P(x)=3x^3+ax^2+bx+9$ chia hết cho $Q(x)=x^2-9$.

(Đề thi học sinh giỏi huyện Chương Mỹ - Hà Nội năm 2019-2020)

Câu 90. Chứng minh rằng: $\left(2019^{2019}+2021^{2020}\right)\vdots 2020$.

(Đề thi học sinh giỏi huyện Chương Mỹ (vòng 2) - Hà Nội năm 2019-2020)

CHUYÊN ĐỀ SỐ HỌC

Câu 91. Tìm tất cả các số nguyên dương m, n sao cho $m+n^2$ chia hết cho m^2-n và $n+m^2$ chia hết cho n^2-m.

(Đề thi học sinh giỏi tỉnh Bắc Ninh năm 2017-2018)

Câu 92. Chứng minh $n^6-2n^4+n^2$ chia hết cho 36 với mọi n nguyên dương.

(Trích đề thi học sinh giỏi tỉnh Bình Định năm 2017-2018)

Câu 93. Tìm các số tự nhiên có dạng $\overline{ab}$. Biết rằng $\overline{ab}^2-\overline{ba}^2$ là số chia hết cho 3267.

(Trích đề thi học sinh giỏi tỉnh Hải Dương năm 2017-2018)

Câu 94. Với a, b là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu $4a^2+3ab-11b^2$ chia hết cho 5 thì a^4-b^4 chia hết cho 5.

(Trích đề thi học sinh giỏi tỉnh Hải Dương năm 2011-2012)

Câu 95. Tìm các cặp số nguyên dương $(x;y)$ sao cho x^2y+x+y chia hết cho xy^2+y+1.

(Trích đề thi Chuyên Phan Bội Châu năm 2019-2020)

Câu 96. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x;y)$ sao cho $(x^2-2) \vdots (xy+2)$.

(Trích đề thi Chuyên Phan Bội Châu năm 2016-2017)

Câu 97. Cho a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $a^2+b^2 \vdots ab$.

Tính giá trị của biểu thức $A=\dfrac{a^2+b^2}{2ab}$.

(Trích đề thi Chuyên Phan Bội Châu năm 2015-2016)

Câu 98. Giả sử *a*, *b*, *c* là các số nguyên sao cho $a^2+b^2+c^2$ chia hết cho 4. Chứng minh rằng *a*, *b*, *c* đồng thời chia hết cho 2.

(Trích đề thi Chuyên Vinh – Nghệ An năm 2012-2013)

Câu 99. Chứng minh rằng $\left(5^{3n+2}+2^{2n+3}\right) \vdots 11$, với mọi số tự nhiên n.

(Trích đề thi Chuyên Vinh – Nghệ An năm 2007-2008)

Câu 100. Cho các số nguyên dương x, y thỏa mãn x^2+x+2 chia hết cho $xy-1$. Tính giá trị của biểu thức $A=\dfrac{x^2+x+2}{xy-1}$.

Câu 101. Cho S là tập các số nguyên dương n có dạng $n=x^2+3y^2$, trong đó x, y là các số nguyên. Chứng minh rằng:

a) Nếu $a,b \in S$ thì $ab \in S$.

b) Nếu $N \in S$ và N là số chẵn thì N chia hết cho 4 và $\dfrac{N}{4} \in S$.

(Trích đề thi Chuyên Sư phạm Hà Nội năm 2016-2017)

Câu 102. Tìm tất cả các số nguyên tố *p* có dạng $p = a^2 + b^2 + c^2$ với *a, b, c* là các số nguyên dương thỏa mãn $a^4 + b^4 + c^4$ chia hết cho p.

(Trích đề thi Chuyên Sư phạm Hà Nội năm 2011-2012)

Câu 103. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta luôn có

$$\left[(27n+5)^7+10\right]^7+\left[(10n+27)^7+5\right]^7+\left[(5n+10)^7+27\right]^7$$

chia hết cho 42.

(Trích đề thi Chuyên KHTN Hà Nội năm 2019-2020)

Câu 104. Với x, y là những số nguyên thỏa mãn đẳng thức $\dfrac{x^2-1}{2}=\dfrac{y^2-1}{3}$. Chứng minh $x^2-y^2 \vdots 40$.

(Trích đề thi Chuyên KHTN Hà Nội năm 2016-2017)

Câu 105. Tìm các số nguyên $(x; y)$ không nhỏ hơn 2 sao cho $xy-1$ chia hết cho $(x-1)(y-1)$.

(Trích đề thi Chuyên KHTN Hà Nội năm 2015-2016)

Câu 106. Có bao nhiêu số nguyên dương có 5 chữ số $\overline{abcde}$ sao cho $\overline{abc}-(10d+e)$ chia hết cho 101?

(Trích đề thi Chuyên KHTN Hà Nội năm 2014-2015)

Câu 107. Tìm hai chữ số cuối cùng của số : $A = 41^{106} + 57^{2012}$.

(Trích đề thi Chuyên KHTN Hà Nội năm 2012-2013)

Câu 108. Tìm chữ số tận cùng của số $13^{13}+6^6+2009^{2009}$

(Trích đề thi Chuyên KHTN Hà Nội năm 2009-2010)

Câu 109. Cho m, n là hai số nguyên. Chứng minh rằng: nếu $7(m+n)^2+2mn$ chia hết cho 225 thì mn cũng chia hết cho 225.

(Trích đề thi Chuyên TP. Hồ Chí Minh năm 2019-2020)

Câu 110. Cho m, n là các số thực dương thỏa mãn $5m+n \vdots m+5n$. Chứng minh rằng $m \vdots n$.

(Trích đề thi Chuyên TP. Hồ Chí Minh năm 2016-2017)

Câu 111. Cho x, y là hai số nguyên dương thỏa mãn x^2+y^2+10 chia hết cho xy.

a) Chứng minh rằng x và y là hai số lẻ và nguyên tố cùng nhau.

b) Chứng minh rằng $k=\dfrac{x^2+y^2+10}{xy}$ chia hết cho 4 và $k \geq 12$.

(Trích đề thi Chuyên toán TP. Hồ Chí Minh năm 2016-2017)

Câu 112. Cho x, y là các số nguyên không đồng thời bằng 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$F=\left|5x^2+11xy-5y^2\right|.$$

(Trích đề thi HSG lớp 9 Hà Tĩnh năm 2017-2018)

Câu 113. Cho a,b là các số nguyên, chứng minh rằng: $P = a^7b^3 - a^3b^7$ chia hết cho 30.

Câu 114. Cho đa thức $P = a^5 - 5a^4 + 5a^3 + 5a^2 - 6a + 240$. Chứng minh rằng khi a là số nguyên thì P chia hết cho 120.

Câu 115. Cho a,b là các số nguyên dương sao $a+1, b+2007$ cùng chia hết cho 6. Chứng minh rằng: $P = 4^a + a + b$ chia hết cho 6.

(Vòng 1, THPT Chuyên – Đại học Quốc gia Hà Nội, năm học 2007-2008).

Câu 116. Cho $P = (a+b)(b+c)(c+a) - abc$, với a,b,c là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu $a+b+c$ chia hết cho 4 thì P chia hết cho 4.

(Vòng 2, THPT Chuyên – TP. Hà Nội, năm học 2005-2006)

Câu 117. a) Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên x, y, z sao cho:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 560\,647.$$

b) Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên a,b,c,d thoản mãn:

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = a + b + c + d + 660\,064.$$

Câu 118. Chứng minh rằng với mọi số nguyên a thì:

a) $P = a^2 + 3a + 53$ không chia hết cho 49.

b) $Q = a^2 + 5a + 185$ không chia hết cho 169.

Câu 119. Tìm số tự nhiên n sao $P = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$ không chia hết cho 5.

Câu 120. Tìm số nguyên a sao cho:

a) $P = a^2 - a + 124$ chia hết cho 121.

b) $Q = a^3 - 7a^2 + 4a - 14$ chia hết cho $a^2 + 3$.

Bài 121.

a) Tìm m để đa thức $A(x) = x^4 - 9x^3 + 21x^2 + x + m - 7$ chia hết cho đa thức $B(x) = x^2 - x - 2$.

b) Tìm a và b để đa thức $f(x) = 2x^3 - 3bx^2 + 2x + a - 5$ chia hết cho $x-1$ và $x+2$.

Bài 122. Tìm đa thức $A(x)$, biết $A(x)$ chia cho $x-5$ dư 7, $A(x)$ chia cho $x+3$ dư -1 và $A(x)$ chia cho $x^2 - 2x - 15$ được thương là $2x^3 + 1$ và còn dư.

Bài 123. Cho các đa thức

$P(n) = n^{1880} + n^{1840} + n^{1800}, Q(n) = n^{20} + n^{10} + 1.$

Chứng minh rằng với $n \in Z$ thì $P(n)$ chia cho $Q(n)$.

Bài 124: Cho a là số nguyên dương. Chứng minh rằng:

a) $P = (a+4)(a+5)(a+6) + ... + (2a+5)(2a+6)$ chia hết cho 2^{a+3}.

b) $Q = (a+1)(a+2)(a+3)...(3a-1)3a$ chia hết cho 3^a.

Bài 125: Tổng của hai số tự nhiên bất kỳ chia hết cho 6 khi và chỉ khi tổng các lập phương của chúng chia hết cho 6.

(Thi học sinh giỏi TP. Hồ Chí Minh 1979 – 1980 vòng 1)

Bài 126. Chứng minh rằng m^3+20m chia hết cho 48 với mọi số chẵn m.

(Thi học sinh giỏi TP. Hồ Chí Minh 1979 – 1980 vòng 2)

Bài 127. Tìm tất cả các số tự nhiên mà khi gạch bỏ đi một chữ số thì số đó giảm đi 71 lần.

(Thi học sinh giỏi TP. Hồ Chí Minh 1982 – 1983 vòng 2)

Bài 128. Tìm một số có hai chữ số; biết rằng số đó chia hết cho 3 và nếu thêm số 0 vào giữa các chữ số rồi cộng vào số mới tạo thành một số bằng hai lần chữ số hàng trăm của nó thì được một số lớn gấp 9 lần số phải tìm.

(Thi học sinh giỏi TP. Hồ Chí Minh năm học 1983 – 1984 Vòng 2)

Bài 129. Chứng minh rằng $\left(x^2+y^2\right)\vdots 3$ khi và chỉ khi x và y chia hết cho 3.

(Thi học sinh giỏi 9 TP Hồ Chí Minh 1984 – 1985 vòng 2)

Bài 130. Một số gồm 4 chữ số giống nhau chia cho một số gồm 3 chữ số giống nhau thì được thương là 16 và số dư là một số r nào đó. Nếu số bị chia và số chia đều bớt đi một chữ số thì thương không đổi và số dư giảm bớt đi 200. Tìm các số đó.

(Thi học sinh giỏi 9 TP Hồ Chí Minh 1986 – 1987 vòng 2)

Bài 131.

a) Tìm số có ba chữ số sao cho tỷ số giữa số đó và tổng các chữ số của nó có giá trị lớn nhất.

b) Chứng minh rằng:

$A=\left(4+a-3b\right)^4.\left(3a-5b-1\right)^4$ chia hết cho 16 với mọi số nguyên a và b.

$B=4^{n+1}+60n-4$ chia hết cho 36 với mọi số tự nhiên n.

(Thi học sinh giỏi 9 TP Hồ Chí Minh 1987 – 1988)

Bài 132.

a) Chứng minh rằng biểu thức $A=\left(2^{3n+1}+2^n\right)\left(n^5-n\right)$ chia hết cho 30 với mọi số tự nhiên n.

b) Chứng tỏ rằng $n=1988$ là số tự nhiên duy nhất sao cho tổng các chữ số $S\left(n\right)$ của nó bằng $S\left(n\right)=n^2-1988n+26$.

c) Chứng minh rằng hai số: $A=2n+1; B=\dfrac{n\left(n+1\right)}{2}$ là hai số nguyên tố cùng nhau với mọi số tự nhiên n.

(Thi học sinh giỏi 9 TP Hồ Chí Minh 1988 – 1989 vòng 1 - vòng 2)

Bài 133.

a) Cho hai số nguyên dương a và b $\left(a\ge b\right)$ đề không chia hết cho 5. Chứng minh rằng: a^4-b^4 chia hết cho 5.

b) Cho các số $a_1,a_2,a_3,...,a_n$ mà giá trị của nó bằng 1 hoặc bằng -1. Chứng minh rằng nếu $a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+...+a_na_1=0$ thì n chia hết cho 4.

c) Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho: $n+S\left(n\right)+S\left(S\left(n\right)\right)=60$. Trong đó kí hiệu $S\left(n\right)$ chỉ tổng các chữ số của số n.

CHUYÊN ĐỀ SỐ HỌC

(Thi học sinh giỏi TP Hồ Chí Minh 1982 – 1983 vòng 2)

Bài 134. Cho số $M = 1993^{1997} + 1997^{1993}$.

a) Chứng minh rằng: M chia hết cho 15.

b) Hỏi M tận cùng bằng chữ số nào? (có giải thích)

(Thi học sinh giỏi TP. Hồ Chí Minh 1992 – 1993)

Bài 135. 1) Cho biết x, y, z là các số nguyên sao cho $(x-y)(y-z)(z-x) = x+y+z$. Chứng minh rằng ta có: $x+y+z$ là bội số của 27.

2) Chứng minh rằng với k nguyên dương và a là số nguyên tố lớn hơn 5 thì $a^{4k}-1$ chia hết cho 240.

(Thi học sinh giỏi TP. Hồ Chí Minh 1995 – 1996)

Bài 136.

a) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $n.2^n + 3^n$ chia hết cho 5.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $n.2^n + 3^n$ chia hết cho 25.

(Thi vào lớp 10 toán – tin P.T.N.K Đại học quốc gia TP. Hồ Chí Minh)

Bài 137.

a) Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương ta đều có:

$$A = 5^n\left(5^n+1\right) - 6^n\left(3^n+2^n\right) \text{ chia hết cho 91.}$$

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên tố p, q thỏa mãn phương trình sau:

$$5^{2p} + 1997 = 5^{2p^2} + q^2$$

(Thi vào lớp 10 chuyên toán – tin ĐHSP Hà Nội 1997 - 1198)

Bài 138. Tìm tất cả các số nguyên n để cho $P = 1999n^2 + 1997n + 30$ chia hết cho $6n$

Bài 139. a) Cho hai số tự nhiên a, b sao cho $ab = 1996^{1995}$. Hỏi $a+b$ có chia hết cho 1995 hay không?

b) Cho hai số tự nhiên c, d sao cho $cd = 1991^{1992}$. Hỏi $c+d$ có chia hết cho 1992 hay không?

(Thi vào 10 chuyên toán Hà Nội – AMSTERDAM 1991)

Bài 140. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^3 + y^3 = 1995$

Bài 141. Cho $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng: $S_n = 1^{2019} + 2^{2019} + \ldots + n^{2019}$ chia hết cho

$$T_n = 1 + 2 + \ldots + n.$$

Bài 142. Cho m, n là các số nguyên dương, giả sử $A = \dfrac{(m+n)^3}{n^2}$ là số nguyên lẻ. Tìm giá trị bé nhất có thể của A và tìm m, n thỏa mãn giá trị này. Chứng minh cho câu trả lời.

Bài 143. Tìm các số nguyên dương a, b sao cho $\dfrac{a^3b-1}{a+1}, \dfrac{b^3a+1}{b-1}$ là các số nguyên dương.

Bài 143. Cho các số tự nhiên a,b,c,d,e biết: $a+b+c+d+e=3a=4b=5c, d+e=13$. Tìm số lớn nhất trong các số a,b,c,d,e.

Bài 144. Tìm tất cả các số nguyên dương *m, n* sao cho $m+n^2 \vdots (m^2-n)$ và $n+m^2 \vdots (n^2-m)$

Bài 145. Tìm các số nguyên dương *x, y* sao cho $2xy-1$ chia hết cho $(x-1)(y-1)$.

Bài 146. Tìm các số nguyên dương x, y sao cho $4x^2+6x+3$ chia hết cho $2xy-1$.

Bài 147. Tìm các số nguyên dương x, y sao cho x^2-2 chia hết cho $xy+2$.

Bài 148. Tìm các số tự nhiên x, y sao cho $x^2+3xy+y^2$ là lũy thừa của 5.

Bài 149. Cho x, y là các số nguyên $x, y \neq -1$ sao cho $\frac{x^4-1}{y+1}+\frac{y^4-1}{x+1}$ là số nguyên. Chứng minh: $x^4y^{44}-1$ chia hết $y+1$.

Bài 150. Xác định tất cá các số nguyên tố p, *q* sao cho $\frac{p^{2n+1}-1}{p-1}=\frac{q^3-1}{q-1}$ với $n>1, n\in\mathbb{Z}$.

Bài 151. Cho a,b là các số nguyên và *p* là số nguyên tố lẻ. Chứng minh rằng nếu p^4 là ước của a^2+b^2 và $a(a+b)^2$ thì p^4 cũng là ước của $a(a+b)$.

Bài 152. Cho $a,b\in\mathbb{Z}$ và $a\neq b$ thỏa $ab(a+b)$ chia hết cho a^2+ab+b^2. Chứng minh rằng: $|a-b|>\sqrt[3]{ab}$

Bài 153. Cho n là một số nguyên dương. Tìm tổng của tất cả các số chẵn nằm giữa n^2-n+1 và n^2+n+1.

Bài 154. Cho m, n là các số nguyên dương, giả sử $A=\frac{(m+n)^3}{n^2}$ là số nguyên lẻ, tìm giá trị bé nhất có thể có của A và tìm m, n thỏa mãn giá trị này. Chứng minh cho câu trả lời.

Bài 155. Tìm tất cả các số nguyên $n>1$ sao cho với bất kỳ ước số nguyên tố của n^6-1 là một ước của $(n^3-1)(n^2-1)$.

Bài 156. Tìm n để $M=1\underbrace{00\ldots0}_{n}1\underbrace{00\ldots0}_{n}1$ chia hết cho 37.

Bài 157. Tìm tất cả các số có năm chữ số $\overline{abcde}$ sao cho $\sqrt[3]{\overline{abcde}}=\overline{ab}$.

Bài 158. Tìm các chữ số a, b, c với $a\geq 1$ sao cho $\sqrt{\overline{abc}}=(a+b)\sqrt{c}$.

Bài 159. Tìm số có 3 chữ số $\overline{abc}$ biết $\overline{abc}=a!+b!+c!$

Bài 160. Cho các số tự nhiên a, b. Chứng minh:

a, a^2+b^2 chia hết cho 3 thì a, b đều chia hết cho 3.

b, a^2+b^2 chia hết cho 7 thì a, b đều chia hết cho 7.

c, a^4+b^4 chia hết cho 15 thì a, b đều chia hết cho 3 và 5.

Bài 161. Tìm tất cả các số nguyên dương m, n sao cho $m+n^2 \vdots (m^2-n)$ và $n+m^2 \vdots (n^2-m)$.

Bài 162. Xét phân số $A=\frac{n^2+4}{n+5}$. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên n trong khoảng từ 1 đến 2017 sao cho phân số A chưa tối giản.

Bài 163. Cho a, $b\in\mathbb{N}$ sao cho $\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}\in\mathbb{Z}$. Chứng minh rằng ước chung lớn nhất của a và b không vượt quá $\sqrt{a+b}$.

CHỦ ĐỀ

3 SỐ NGUYÊN TỐ, HỢP SỐ

A. Kiến thức cần nhớ

1. Định nghĩa số nguyên tố, hợp số.

1) Số nguyên tố là những số tự nhiên lớn hơn 1, chỉ có 2 ước số là 1 và chính nó.

Ví dụ: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19....

2) Hợp số là số tự nhiên lớn hơn 1 và có nhiều hơn 2 ước.

Ví dụ: 4 có 3 ước số: 1 ; 2 và 4 nên 4 là hợp số.

3) Các số 0 và 1 không phải là só nguyên tố cũng không phải là hợp số.

4) Bất kỳ số tự nhiên lớn hơn 1 nào cũng có ít nhất một ước số nguyên tố.

2. Một số tính chất.

- Có vô hạn số nguyên tố.
- Nếu số nguyên tố p chia hết cho số nguyên tố q thì $p = q$.
- Nếu tích abc chia hết cho số nguyên tố p thì ít nhất một thừa số của tích abc chia hết cho số nguyên tố p.
- Nếu a và b không chia hết cho số nguyên tố p thì tích ab không chia hết cho số nguyên tố p .
- Nếu A là hợp số thì A có ít nhất một ước nguyên tố không vượt quá $\sqrt{A}$.

Chứng minh. Vì n là hợp số nên $n = ab$ với $a, b \in \mathbb{Z}, 1 < a \le b < n$ và a là ước nhỏ nhất của n. Thế thì $n \ge a^2$. Do đó $a \le \sqrt{n}$.

3. Phân tích một số ra thừa số nguyên tố:

- Phân tích một số tự nhiên lớn hơn 1 ra thừa số nguyên tố là viết số đó dưới dạng một tích các thừa số nguyên tố.

+ Dạng phân tích ra thừa số nguyên tố của mỗi số nguyên tố là chính số đó.

+ Mọi hợp số đều phân tích được ra thừa số nguyên tố, phân tích này là duy nhất nếu không tính thứ tự các thừa số.

Chẳng hạn $A = a^{\alpha}.b^{\beta}...c^{\gamma}$, trong đó a, b, c là các số nguyên tố và $\alpha, \beta, ..., \gamma \in N^*$

Khi đó số các ước số của A được tính bằng $(\alpha+1)(\beta+1)...(\gamma+1)$

Tổng các ước số của A được tính bằng $\dfrac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}.\dfrac{b^{\beta+1}-1}{b-1}...\dfrac{c^{\gamma+1}-1}{c-1}$

4. Số nguyên tố cùng nhau.

Hai số a và b nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi $(a,b)=1$.

Các số a, b, c nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi $(a,b,c)=1$.

Các số a, b, c đôi một nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi $(a,b)=(b,c)=(c,a)=1$.

5. Cách nhận biết số nguyên tố.

Cách 1

Chia số đó lần lượt cho các số nguyên tố từ nhỏ đến lớn: 2; 3; 5; 7...

- Nếu có một phép chia hết thì số đó không là số nguyên tố.
- Nếu thực hiện phép chia cho đến lúc thương số nhỏ hơn số chia mà các phép chia vẫn có số dư thì số đó là số nguyên tố.

Cách 2

- Một số có hai ước số lớn hơn 1 thì số đó không phải là số nguyên tố.
- Nếu A là hợp số thì A có ít nhất một ước nguyên tố không vượt quá $\sqrt{A}$.
- Với quy tắt trên trong một khoảng thời gian ngắn, với các dấu hiệu chia hết thì ta nhanh chóng trả lời được một số có hai chữ số nào đó là nguyên tố hay không.

B. MỘT SỐ DẠNG TOÁN SỐ NGUYÊN TỐ, HỢP SỐ

🗁 Dạng 1: Chứng minh một số là số nguyên tố hay hợp số

Bài toán 1. Nếu p và p^2+8 là các số nguyên tố thì p^2+2 là số nguyên tố.

Hướng dẫn giải

Xét $p=3k+1$ (k nguyên) thì $p^2+8 \vdots 3$, là hợp số.

Xét $p=3k+2$ thì $p^2+8 \vdots 3$, là hợp số.

Vậy $p=3k$, mà p là số nguyên tố nên $p=3$.

Khi đó $p^2+2=11$, là số nguyên tố.

Bài toán 2. Chứng minh rằng n^4+4 là một số nguyên tố khi $n=1$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $n^4+4=n^4+4n^2+4-4n^2=\left(n^2+2\right)^2-\left(2n\right)^2$

$=\left(n^2+2-2n\right)\left(n^2+2+2n\right)=\left[\left(n-1\right)^2+1\right].\left[\left(n+1\right)^2+1\right]$

Nếu $n>1$ thì cả hai thừa số trên đều lớn hơn 1. Như vậy n^4+4 là một số nguyên tố khi $n=1$.

Bài toán 3. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n>1$ thì n^5+n^4+1 là hợp số.

Hướng dẫn giải

Ta có: $n^5+n^4+1=\left(n^2+n+1\right)\left(n^3-n+1\right)$.

Mà $n>1$ nên $n^2+n+1>1$ và suy ra n^5+n^4+1 là hợp số.

Bài toán 4. Chứng minh rằng nếu 2^n-1 là số nguyên tố $(n>2)$ thì 2^n+1 là hợp số.

Hướng dẫn giải

Trong ba số nguyên $2^n-1;\ 2^n;\ 2^n+1$ có một số chia hết cho 3. Mặt khác, 2^n không chia hết cho 3, do đó một trong hai số $2^n-1;\ 2^n+1$ phải có một số chia hết cho 3, nghĩa là một trong hai số này phải có một hợp số. Để cho 2^n-1 là số nguyên tố $(n>2)$ nên chắn chắn rằng 2^n+1 là một hợp số.

Bài toán 5. Cho p và $8p-1$ là các số nguyên tố. Chứng minh $8p+1$ là hợp số.

Hướng dẫn giải

Vì $8p-1$ là số nguyên tố nên $p\neq 2$.

Nếu $p=3$ thì $8p+1=25$ là hợp số.

Nếu $p>3$ thì $8p(8p-1)(8p+1)\,\vdots\,3$. Vì p và $8p-1$ là các số nguyên tố lớn hơn 3 nên $8p+1$ chia hết cho 3 hay $8p+1$ là hợp số.

Bài toán 6. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n, luôn chọn được $n^{2020}+n^{2019}+1$ số nguyên dương liên tiếp mà tất cả đều là hợp số.

Hướng dẫn giải

Xét $A_1=\left(n^{2020}+n^{2019}+2\right)!+2\,\vdots\,2$

$A_2=\left(n^{2020}+n^{2019}+2\right)!+3\,\vdots\,3$

....

$A_{n^{2020}+n^{2019}+1}=\left(n^{2020}+n^{2019}+2\right)!+\left(n^{2020}+n^{2019}+2\right)\,\vdots\,n^{2020}+n^{2019}+2$

Dãy $A_1,A_2,...,A_{n^{2020}+n^{2019}+1}$ là các hợp số liên tiếp.

🗁 **Dạng 2: Chứng minh một số bài toán có liên quan đến tính chất của số nguyên tố**

Bài toán 1. Chứng minh rằng nếu p và $p+2$ là hai số nguyên tố lớn hơn 3 thì tổng của chúng chia hết cho 12.

Hướng dẫn giải

Ta có : $p+(p+2)=2(p+1)$

- p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số nguyên tố lẻ, suy ra :

$$p+1 \vdots 2 \Rightarrow 2(p+1) \vdots 4 \qquad (1)$$

- $p, p+1, p+2$ là ba số nguyên liên tiếp nên có một số chia hết cho 3, mà p và p + 2 không chia hết cho 3 nên :

$$p+1 \vdots 3 \Rightarrow 2(p+1) \vdots 3 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $2(p+1) \vdots 12.$ (đpcm)

Bài toán 2. Chứng minh rằng mọi ước nguyên tố của $2014!-1$ đều lớn hơn 2014.

Hướng dẫn giải

Gọi p là ước nguyên tố của $2014!-1$

Giả sử $p \le 2014 \Rightarrow 1.2.3...2014 \vdots p \Rightarrow 2014! \vdots p$

Mà $(2014!-1) \vdots p$ nên $1 \vdots p$. Điều này mâu thuẫn dẫn đến $p > 2014$.

Bài toán 3. Cho các số $p=b^c+a, q=a^b+c, r=c^a+b$ là các số nguyên tố $(a,b,c \in N^*)$. Chứng minh rằng ba số p, q, r có ít nhất hai số bằng nhau.

Hướng dẫn giải

Trong 3 số $a,\ b,\ c$ có ít nhất hai số cùng tính chẵn lẻ.

Giả sử hai số cùng tính chẵn lẻ là a và b.

Suy ra $p = b^c + a$ là số nguyên tố chẵn nên $p = 2$.

Suy ra $a = b = 1$. Khi đó $q = c + 1$ và $r = c + 1$ nên $q = r$.

Vậy trong ba số $p,\ q,\ r$ có ít nhất hai số bằng nhau.

Bài toán 4. Cho số tự nhiên $n \ge 2$ và số nguyên tố p thỏa mãn $p-1$ chia hết cho n đồng thời n^3-1 chia hết cho p. Chứng minh rằng $n+p$ là một số chính phương

Hướng dẫn giải

Ta có: $n^3-1=(n-1).(n^2+n+1) \vdots p$; $(p-1) \vdots n \Rightarrow p-1 \ge n \Rightarrow p \ge n+1$

Vì $p \ge n+1 \Rightarrow (n-1)$ không chia hết cho p

Do đó: $(n-1)(n^2+n+1) \vdots p \Leftrightarrow (n^2+n+1) \vdots p$

Đặt : $p-1=kn,\quad k \ge 1 \Rightarrow p=kn+1 \quad (*)$

Suy ra $\left(n^2+n+1\right)\vdots(kn+1) \Rightarrow kn+1 \le n^2+n+1$

$\Leftrightarrow kn \le n^2+n \Leftrightarrow k \le n+1 \quad (1)$

Ta có: $k\left(n^2+n+1\right)-n(kn+1)\vdots(kn+1) \Rightarrow \left[(k-1)n+k\right]\vdots(kn+1)$

Do $k \ge 1$nên $(k-1)n+k>0$

Suy ra $(k-1)n+k \ge kn+1 \Rightarrow k \ge n+1 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $k=n+1 \Rightarrow p=kn+1=n^2+n+1$

$\Rightarrow n+p=n^2+2n+1=(n+1)^2$

Vậy $n+p$ là một số chính phương.

🗁 Dạng 3: Tìm số nguyên tố thỏa mãn điều kiện nào đó

Đối với dạng toán tìm số nguyên tố thỏa mãn điều kiện cho trước, chúng ta thường sử dụng các tính chất của phép chia số nguyên sau để giải:

* Trong n số nguyên liên tiếp có một và chỉ một số chia hết cho *n*.

* Mọi số nguyên tố lớn hơn 2 đều có dạng $4n \pm 1$.

* Mọi số nguyên tố lớn hơn 3 đều có dạng $3n \pm 1$.

* Mọi số nguyên tố lớn hơn 3 đều có dạng $6n \pm 1$.

Chứng minh:

● Xét m là số nguyên tố lớn hơn 2

Mỗi số tự nhiên khi chia cho 4 có một trong các số dư 0, 1, 2, 3 do đó mọi số tự nhiên đều viết được dưới dạng 4n – 1; 4n ; 4n + 1; 4n + 2 .

Do m là số nguyên tố lớn hơn 2 nên không thể chia hết 2 do đó m không có dạng 4n và 4n + 2.

Vậy mọi số nguyên tố lớn hơn 2 đều có dạng: $4n \pm 1$

Không phải mọi số có dạng $4n \pm 1$ đều là số nguyên tố.

Chẳng hạn 4. 4 - 1 = 15 không là số nguyên tố .

● Xét m là số nguyên tố lớn hơn 3

+) Ta thấy mọi số nguyên tố lớn hơn 3 đều phải có dạng $3n \pm 1$ vì nếu có dạng 3k thì sẽ chia hết cho 3 nên không thể là số nguyên tố.

Không phải mọi số có dạng $3n \pm 1$ đều là số nguyên tố.

Chẳng hạn 3. 5 + 1 = 16 không là số nguyên tố.

+) Mỗi số tự nhiên khi chia cho 6 có một trong các số dư 0, 1, 2, 3, 4, 5 do đó mọi số tự nhiên đều viết được dưới dạng 6n – 1; 6n ; 6n + 1; 6n + 2 ; 6n + 3

Do m là số nguyên tố lớn hơn 3 nên không thể chia hết 2 và 3 do đó m không có dạng 6n và 6n; 6n + 2; 6n + 3.

Vậy mọi số nguyên tố lớn hơn 3 đề có dạng: $6n \pm 1$.

Không phải mọi số có dạng $6n \pm 1$ đều là số nguyên tố.

Chẳng hạn 6. 4 + 1 = 25 không là số nguyên tố.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm tất cả số nguyên tố p sao cho p + 2 và p + 4 là các số nguyên tố.

Hướng dẫn giải

Với p = 2 thì p + 2 = 4 và p + 4 = 6 không phải là các số nguyên tố.

Với p = 3 thì p + 2 = 5 và p + 4 = 7 là các số nguyên tố.

Với p > 3 mà p là số nguyên tố nên p có dạng p = 3k + 1 hoặc p = 3k + 2

Nếu $p = 3k + 1$ thì $p + 2 = 3k + 3 = 3(3k + 1)\vdots 3$ không là số nguyên tố.

Nếu p = 3k + 2 thì $p + 4 = 3k + 6 = 3(3k + 2)\vdots 3$ không là số nguyên tố;

Vậy với $p = 3$ thì p + 2 và p + 4 là số nguyên tố.

Bài toán 2. Tìm tất cả số nguyên tố p sao cho p + 2; p + 6; p + 8; p + 14 đều là các số nguyên tố.

Hướng dẫn giải

Trường hợp 1: p = 5k mà p nguyên tố nên p = 5, khi đó:

p + 2 = 7; p + 6 = 11; p + 8 = 13; p + 14 = 19 đều là số nguyên tố nên p = 5 thỏa mãn bài toán.

Trường hợp 2: p = 5k + 1, khi đó: p + 14 = 5k + 15 = 5(k + 3) có ít nhất là 3 ước 1, 5 và (p + 14) nên p + 14 không là số nguyên tố.

Vậy với p = 5k + 1 không có tồn tại p nguyên tố thỏa mãn bài toán

Trường hợp 3: p = 5k + 2, khi đó: p + 8 = 5k + 10 = 5(k + 2) có ít nhất là 3 ước 1, 5 và (p + 10) nên p + 10 không là số nguyên tố.

Vậy với p = 5k + 2 không có tồn tại p nguyên tố thỏa mãn bài toán

Trường hợp 4: p = 5k + 3, khi đó: p + 2 = 5k + 5 = 5(k + 1) có ít nhất là 3 ước 1, 5 và (p + 2) nên p + 2 không là số nguyên tố.

Vậy với p = 5k + 3 không có tồn tại p nguyên tố thỏa mãn bài toán

Trường hợp 5: p = 5k + 4, khi đó: p + 6 = 5k + 10 = 5(k + 2) có ít nhất là 3 ước 1, 5 và (p + 6) nên p + 6 không là số nguyên tố.

Vậy với p = 5k + 4 không có tồn tại p nguyên tố thỏa mãn bài toán

Do đó p = 5 là số cần tìm.

Bài toán 3. Tìm số tự nhiên n sao cho $\frac{n^3 - 1}{9}$ là số nguyên tố.

Hướng dẫn giải

$n^3-1\vdots 9 \Rightarrow n^3-1\vdots 3 \Rightarrow n$ chia cho 3 dư 1 (vì nếu n chia cho 3 dư 0 hoặc 2 thì n^3 chia hết cho 3 dư 0 hoặc 2). Đặt $n=3k+1$ $(k\in N)$. Ta có

$$\frac{n^3-1}{9}=\frac{(3k+1)^3-1}{9}=\frac{27k^3+27k^2+9k}{9}=3k^3+3k^2+k=k(3k^2+3k+1)$$

Để $\frac{n^3-1}{9}$ là số nguyên tố, phải có $k=1$. Khi đó $n=4$ và $\frac{n^3-1}{9}=\frac{64-1}{9}=7$, là số nguyên tố.

Đáp số: $n=4$.

Bài toán 4. Tìm số nguyên tố p sao cho $43p+1$ là lập phương của một số tự nhiên.

Hướng dẫn giải

Đặt $43p+1=n^3$ $(n\in N)$ thì $43p=(n-1)(n^2+n+1)$

Số $43p$ có bốn ước nguyên dương là $1, 43, p, 43p$ nên có ba trường hợp:

a) $\begin{cases} n-1=1 \\ n^2+n+1=43p \end{cases}$ Khi đó $n=2$ và $43p=2^2+2+1=7$, loại.

b) $\begin{cases} n-1=43 \\ n^2+n+1=p \end{cases}$ Khi đó $n=44$ và $p=44^2+44+1=1981\vdots 7$, loại.

c) $\begin{cases} n^2+n+1=43 \\ n-1=p \end{cases}$ Khi đó $n(n+1)=42 \Rightarrow n=6, p=5$ (là số nguyên tố).

Đáp số: $p=5$.

Bài toán 5. Tìm tất cả các số nguyên tố p để p vừa là tổng vừa là hiệu của hai số nguyên tố.

Hướng dẫn giải

Giả sử tồn tại số nguyên tố p thỏa mãn điều kiện đề bài.

Khi đó p là số nguyên tố lẻ và $p=p_1+p_2=p_3-p_4$ với p_1, p_2, p_3, p_4 là các số nguyên tố.

Vì p là số nguyên tố lẻ nên p_1, p_2 không cùng tính chẵn lẻ. Nhưng vậy sẽ có một số nguyên tố là 2 và giả sử $p_2=2$.

Lại vì p là số nguyên tố lẻ nên p_3, p_4 không thể cùng tính chẵn lẻ. Cũng sẽ có một số nguyên tố là 2. Do $p_3>p_4$ nên $p_4=2$.

Từ $p=p_1+2=p_3-2$ ta suy ra p, p_1, p_3 là ba số nguyên tố lẻ liên tiếp.

Chỉ có bộ ba số $3; 5; 7$ là thỏa mãn $p=5=3+2=7-2$.

Dạng 4: Nhận biết số nguyên tố, sự phân bố nguyên tố trong tập hợp số tự nhiên

Từ 1 đến 100 có 25 số nguyên tố, trong trăm thứ hai có 21 số nguyên tố, trong trăm thứ ba có 16 số nguyên tố, … Trong nghìn đầu tiên có 168 số nguyên tố, trong nghìn thứ hai có 145 số nguyên tố, trong nghìn thứ ba có 127 số nguyên tố, … Như vậy càng đi xa theo dãy số tự nhiên, các số nguyên tố càng thưa dần.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Nếu $p \geq 5$ và $2p+1$ là các số nguyên tố thì $4p+1$ là số nguyên tố hay là hợp số?

Hướng dẫn giải

Xét ba số tự nhiên liên tiếp: $4p, 4p+1, 4p+2$. Để ý rằng trong ba số này chắc chắn có một số chia hết cho 3.

Vì $p \geq 5$ là số nguyên tố nên p có dạng $3k+1$ hoặc $3k+2$.

+) Nếu $p = 3k+1$ thì $2p+1 = 6k+3 = 3(2k+1) \vdots 3$, mâu thuẫn với giả thiết.

+) Nếu $p = 3k+2$ thì $4p+1 = 4(3k+2)+1 = 12k+9 = 3(4k+3) \vdots 3$ hay $4p+1$ là hợp số.

Bài toán 2. Tìm số tự nhiên k để dãy : $k+1, k+2, k+3, ..., k+10$ chứa nhiều số nguyên tố nhất.

Hướng dẫn giải

- Với $k = 0$ ta có dãy 1, 2, 3, ..., 10 chứa 4 số nguyên tố là 2, 3, 5, 7.
- Với $k = 1$ ta có dãy 2, 3, 4, ..., 11 chứa 5 số nguyên tố là 2, 3, 5, 7, 11.
- Với $k = 2$ ta có dãy 3, 4, 5, ..., 12 chứa 4 số nguyên tố là 3, 5, 7, 11.
- Với $k \geq 3$ dãy $k+1, k+2, ..., k+10$ chứa 5 số lẻ liên tiếp, các số lẻ này đều lớn hơn 3 nên có một số chia hết cho 3, mà 5 số chẵn trong dãy hiển nhiên không là số nguyên tố. Vậy trong dãy có ít hơn 5 số nguyên tố.

Tóm lại với $k = 1$ thì dãy $k+1, k+2, k+3, ..., k+10$ chứa nhiều số nguyên tố nhất.

Bài toán 3. Chứng minh rằng trong 30 số tự nhiên liên tiếp lớn hơn 5, có ít nhất 22 hợp số.

Hướng dẫn giải

Trong 30 số tự nhiên liên tiếp đã cho, có 15 số chẵn, chúng đều lớn hơn 5 nên là hợp số. Ta tìm được 15 hợp số.

Chia 15 số lẻ còn lại thành 5 nhóm, mỗi nhóm gồm ba số lẻ liên tiếp. Trong ba số lẻ liên tiếp, tồn tại một số chia hết cho 3, số đó lớn hơn 5 nên là hợp số. Có 5 nhóm nên ta tìm thêm được 5 hợp số.

Trong 30 số tự nhiên liên tiếp, tồn tại một số chia cho 30 dư 5, một số chia cho 30 dư 25, giả sử $a = 30m+5$ và $b = 30n+25$. Các số a và b là hợp số (vì chia hết cho 5 và lớn hơn 5), đồng thời không trùng với các hợp số đã tìm được (vì a và b không chia hết cho 2, không chia hết cho 3). Ta tìm thêm được 2 hợp số.

Vậy có ít nhất $15+5+2 = 22$ (hợp số).

Bài toán 4. Có tồn tại 1000 số tự nhiên liên tiếp đều là hợp số không?

Hướng dẫn giải

Gọi $A = 2.3.4....1001$.

Ta có: $A_1 = A + 2 = 2.3.4...1001 + 2 \vdots 2$

$A_2 = A + 3 = 2.3.4...1001 + 3 \vdots 3$

.....

$A_{1000} = A + 1001 = 2.3.4....1001 \vdots 1001$

Dãy $A_1, A_2, ...A_{1000}$ gồm 1000 hợp số liên tiếp.

Vậy tồn tại 1000 số tự nhiên liên tiếp là hợp số.

Bài toán 5. (Tổng quát bài số 4)

Chứng minh rằng có thể tìm được 1 dãy số gồm n số tự nhiên liên tiếp (n > 1) không có số nào là số nguyên tố ?

Hướng dẫn giải

Ta chọn dãy số sau:

$a_1 = (n+1)! + 2$ $\quad$ $a_1 \vdots 2,\ a_1 > 2$ nên a_1 là hợp số

$a_2 = (n+1)! + 3$ $\quad$ $a_2 \vdots 3,\ a_2 > 3$ nên a_2 là hợp số

....

$a_n = (n+1)! + (n+1)$ $\quad$ $a_n \vdots (n+1),\ a_n > n+1$ nên a_n là hợp số

Dãy $a_1, a_2, a_2, ..., a_n$ ở trên sẽ gồm có n số tự nhiên liên tiếp trong đó không có số nào là số nguyên tố cả.

Nhận xét: Một vấn đề được đặt ra: Có những khoảng rất lớn các số tự nhiên liên tiếp đều là hợp số. Vậy có thể đến một lúc nào đó không còn số nguyên tố nữa không? Có số nguyên tố cuối cùng không? Từ thế kỉ III trước Công nguyên, nhà toán học cổ Hi Lạp Ơ – clit (*Euclde)* đã chứng minh rằng: Tập các số nguyên tố là vô hạn.

Bài toán 6. Chứng minh rằng không thể có hữu hạn số nguyên tố.

Hướng dẫn giải

Giả sử chỉ có hữu hạn số nguyên tố là $p_1, p_2, ..., p_n$ trong đó p_n là số lớn nhất trong các số nguyên tố.

Xét số $A = p_1 p_2 \ldots p_n + 1$ thì A chia cho mỗi số nguyên tố $p_i\ (1 \le i \le n)$ đều dư 1 (1).

Mặt khác A là hợp số (vì nó lơn hơn số nguyên tố lớn nhất là p_n) do đó A phải chia hết cho một số nguyên tố nào đó, tức là A chia hết cho một trong các số $p_i\ (1 \le i \le n)$ (2), mâu thuẫn với (1).

Vậy không thể có hữu hạn số nguyên tố (đpcm).

Dạng 5: Chứng minh có vô số số nguyên tố dạng $ax+b$ (với $x \in N$ và $(a,b)=1$)

Đây là dạng toán tương đối khó, chúng ta thường giải bằng phương pháp phản chứng.Với dạng toán này, ở trình độ THCS các em chỉ giải quyết được những bài tập ở dạng đơn giản như $3x-1$ và $4x+3$. Việc chứng các bài tập ở dạng này phức tạp hơn, các em sẽ gặp nhiều khó khăn chứ không thể dễ dàng chứng minh được. Chẳng hạn chứng minh về vô số số nguyên tố có dạng 4a + 1; 6a + 1......... phức tạp hơn nhiều.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Chứng minh rằng có vô số số nguyên tố dạng $3k-1$.

Hướng dẫn giải

● ***Nhận xét:*** Mọi số tự nhiên không nhỏ hơn 2 có 1 trong 3 dạng: $3k; 3k+1$ hoặc $3k-1$. Những số có dạng $3k$ (với $k>1$) là hợp số, vậy nếu là số nguyên tố thì phải có dạng $3k+1$ hoặc $3k-1$. Xét 2 số có dạng $3k+1$: đó là số $(3k_1+1)$ và số $(3k_2+1)$

Vì với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ thì $(3k_1+1)(3k_2+1) = 9k_1k_2+3k_1+3k_2+1 = 3(3k_1k_2+k_1+k_2)+1 = 3k_3+1$, do đó tích của những số nguyên có dạng $3k+1$ là số có dạng $3k+1$.

● ***Nhận xét:*** Mỗi số có dạng $3k-1$ sẽ có ít nhất một ước nguyên tố có dạng đó.

Thật vậy, rõ ràng n có ước cùng dạng với nó vì bản thân n là ước của n. Gọi p là ước nhỏ nhất trong các ước như thế. Nếu p là số nguyên tố thì nhận xét được chứng minh. Nếu p là hợp số thì p phân tích được thành tích các thừa số nguyên tố lẻ (do p lẻ). Các thừa số này không thể có cùng dạng $3k+1$ (vì khi đó theo chứng minh trên thì p sẽ có dạng $3k+1$). Vậy ít nhất một thừa số nguyên tố có dạng $3k-1$. Do ước của p cũng là ước của n nên n có ước nguyên tố dạng $3k-1$.

Bây giờ ta sẽ chứng minh có vô số các số nguyên tố có dạng $3k-1$.

Giả sử chỉ có hữu hạn số nguyên tố có dạng $3k-1$ là $p_1, p_2, ..., p_n$.

Xét số $N = 3p_1p_2...p_n - 1$ thì N có dạng $3k-1$

Theo nhận xét trên thì N có ít nhất một ước nguyên tố có dạng $3k-1$. Nhưng từ cách xác định N thì N không chia hết cho bất cứ số nguyên tố nào có dạng $3k-1$. Điều mâu thuẫn này chứng tỏ giả sử trên là sai. Vậy có vô số các số nguyên tố có dạng $3k-1$.

Bài toán 2. Chứng minh rằn tồn tại vô số các số nguyên tố có dạng $4k+3$.

Hướng dẫn giải

● ***Nhận xét:*** Mọi số tự nhiên không nhỏ hơn 2 là số nguyên tố thì phải có dạng $4k+1$ hoặc $4k+3$. Xét 2 số có dạng $4k+1$: đó là số $(4k_1+1)$ và số $(4k_2+1)$

thì $(4k_1+1)(4k_2+1)=16k_1k_2+4k_1+4k_2+1=4(4k_1k_2+k_1+k_2)+1=4k_3+1$, do đó tích của những số nguyên có dạng $4k+1$ là số có dạng $4k+1$.

● ***Nhận xét:*** Mỗi số có dạng $4k+3$ sẽ có ít nhất một ước nguyên tố có dạng đó.

Thật vậy, rõ ràng n có ước cùng dạng với nó vì bản thân n là ước của n. Gọi p là ước nhỏ nhất trong các ước như thế. Nếu p là số nguyên tố thì nhận xét được chứng minh. Nếu p là hợp số thì p phân tích được thành tích các thừa số nguyên tố lẻ (do p lẻ). Các thừa số này không thể có cùng dạng $4k+1$ (vì khi đó theo chứng minh trên thì p sẽ có dạng $4k+1$). Vậy ít nhất một thừa số nguyên tố có dạng $4k+3$. Do ước của p cũng là ước của n nên n có ước nguyên tố dạng $4k+3$.

Bây giờ ta sẽ chứng minh có vô số các số nguyên tố có dạng $4k+3$.

Giả sử chỉ có hữu hạn số nguyên tố có dạng $4k+3$ là $p_1, p_2, ..., p_n$.

Xét số $N=4p_1p_2...p_n-1$ thì N có dạng $4k+3$. Theo nhận xét trên thì N có ít nhất một ước nguyên tố có dạng $4k+3$. Nhưng từ cách xác định N thì N không chia hết cho bất cứ số nguyên tố nào có dạng $4k+3$. Điều mâu thuẫn này chứng tỏ giả sử trên là sai. Vậy có vô số các số nguyên tố có dạng $4k+3$.

Dạng 6: Sử dụng nguyên lý Dirichlet trong bài toán số nguyên tố

Bài toán 1. Cho $p>5$ là số nguyên tố. Chứng minh rằng tồn tại một số có dạng 111…11 chia hết cho p.

Hướng dẫn giải

Ta xét dãy số: $1, 11, 111, \ldots, \underbrace{111\ldots1}_{p}$

Nếu trong dãy trên không có số nào chia hết cho p thì ta cho tương ứng mỗi số với số dư của phép chia. Tập hợp các số dư chỉ có $1, 2, 3, \ldots, p-1$ gồm $p-1$ phần tử (vì 0 không thể có trong tập này).

Nhưng vì chúng ta có p số ở dạng trên nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai số có cùng số dư. Giả sử các số đó là: $\underbrace{111\ldots1}_{m}$ và $\underbrace{111\ldots1}_{n}$ với $m>n$.

Khi đó $1\le n<m\le p$ .Như vậy: $\underbrace{111\ldots1}_{m}-\underbrace{111\ldots1}_{n}=\underbrace{111\ldots1}_{m-n}\underbrace{000\ldots0}_{n}=\underbrace{111\ldots1}_{m-n}.10^n$

Tích này chia hết cho p vì $(p,10)=1$ suy ra $\underbrace{111\ldots1}_{m-n}$ chia hết cho p và nó cũng nằm trong dãy trên. Mà $1\le m-n\le p$ mâu thuẫn với giả thiết không có số nào trong dãy chia hết cho p.

Bài toán 2. Chứng minh rằng trong 12 số nguyên tố phân biệt luôn chọn ra được 6 số ký hiệu p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 sao cho $(p_1-p_2)(p_4-p_3)(p_5+p_6) \vdots 1800$.

Hướng dẫn giải

Vì ba số nguyên tố đầu tiên là $2,3,5$ nên trong 12 số nguyên tố phân biệt đã cho luôn có ít nhất 9 số lớn hơn 5. Vì số nguyên tố lớn hơn 5 nên: 9 số trên khi chia cho 4 có số dư là 1 hoặc 2. Theo nguyên lý Dirichlet phải tồn tại ít nhất 5 số khi chia cho 3 có cùng số dư. Mà 5 số này lại không chia hết cho 5, vì thế trong 5 số ấy có ít nhất 2 số mà ta có thể giả sử là p_1, p_2 sao cho $(p_1 - p_2)\vdots 5$. Ngoài ra hiển nhiên ta có $(p_1 - p_2)\vdots 3$ dẫn đến $(p_1 - p_2)\vdots 15$

Xét 7 số còn lại. theo nguyên lý Dirichlet tồn tại 4 số có cùng số dư khi chia hết cho 3. Đem 4 số này chia cho 5 cho hai khả năng xảy ra:

Nếu có 2 số (chẳng hạn p_3, p_4)mà $(p_3 - p_4)\vdots 5$. Rõ ràng $(p_3 - p_4)\vdots 2$ và $(p_3 - p_4)\vdots 3$. Vì $(5;3;2) = 1$ nên ta có $(p_3 - p_4)\vdots 30$. Lấy hai số p_5, p_6 bất kì (ngoài ra p_1, p_2, p_3, p_4) đã chọn thì p_5, p_6 lẻ (do số nguyên tố khác 2) nên $(p_5 + p_6)\vdots 2$.

Từ đó suy ra $(p_1 - p_2)(p_4 - p_3)(p_5 + p_6)\vdots 30.30.2 = 1800$.

Nếu 4 số này khi chia cho 5 có các số dư khác nhau là $1;2;3;4$. Giả sử $(p_5 - 1)\vdots 5$, $(p_6 - 4)\vdots 5$ thì $(p_5 + p_5 - 5)\vdots 5$ hay $(p_5 + p_6)\vdots 5$

Với 2 số còn lại p_3, p_4 thì rõ ràng $(p_3 - p_4)\vdots 3$ (theo cách chọn 4 số trên)

Do $p_3; p_4; p_5; p_6$ lẻ nên $(p_5 + p_6)\vdots 2, (p_3 - p_4)\vdots 2$.

Từ đó suy ra $(p_5 + p_6)\vdots 10$ và $(p_3 - p_4)\vdots 6$.

Do đó $(p_1 - p_2)(p_4 - p_3)(p_5 + p_6)\vdots 30.10.6 = 1800$

Vậy tồn tại p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 là các số nguyên tố phân biên sao cho $(p_1 - p_2)(p_4 - p_3)(p_5 + p_6)\vdots 1800$.

Dạng 7: Áp dụng định lý Fermat

Cho p là số nguyên tố và a là số nguyên sao cho $(a, p)=1$. Khi đó: $a^{p-1} \equiv 1$ (mod p).

Chứng minh

Xét các số a, $2a$, …, $(p-1)a$. Dễ thấy, không có số nào trong $p-1$ số trên chia hết cho p và không có hai số nào có cùng số dư khi chia cho p. Vậy khi chia $p-1$ số nói trên cho p, ta nhận được các số dư là 1, 2, …, $p-1$. Suy ra $a.(2a).(3a)...((p-1)a) \equiv 1.2.3.(p-1)$ (mod p) hay $(1.2.3...(p-1)).a^{p-1} \equiv 1.2.3...(p-1)$ (mod p)

Vì $(1.2.3...(p-1), p) = 1$ nên $a^{p-1} = 1$(mod p).

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm số nguyên tố p sao cho $2^p + 1$ chia hết cho p.

Hướng dẫn giải

Giả sử p là số nguyên tố thỏa mãn $2^p + 1 \vdots p$.

Theo Định lí Fermat: $2^p \equiv 2 \pmod{p} \Rightarrow 2^p - 2 \vdots p \Rightarrow 3 = (2^p + 1) - (2^p - 2) \vdots p \Rightarrow p = 3$.

Với $p = 3$ ta có $2^p + 1 = 9 \vdots 3$.

Bài toán 2. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 2. Chứng minh rằng có vô số số tự nhiên thỏa $n.2^n - 1$ chia hết cho p.

Hướng dẫn giải

Ta có $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, ta tìm $n = m(p-1)$ sao cho $n.2^n \equiv 1 \pmod{p}$.

Ta có: $n.2^n = m(p-1).2^{m(p-1)} \equiv m(p-1) \pmod{p} \Rightarrow n.2^n \equiv -m \equiv 1 \pmod{p}$

$\Rightarrow m = kp - 1$ ($k \in \mathbb{N}^*$).

Vậy, với $n = (kp-1)(p-1)$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ thì $n.2^2 - 1 \vdots p$

Bài toán 3. Cho p là số nguyên tố, chứng ming rằng số $2^p - 1$ chỉ có ước nguyên tố có dạng $2pk + 1$.

Hướng dẫn giải

Gọi q là ước nguyên tố của $2^p - 1$ thì q lẻ, nên theo Định lí Fermat:

$2^{q-1} - 1 \vdots q \Rightarrow (2^p - 1, 2^{q-1} - 1) = 2^{(p,q-1)} - 1 \vdots q \Rightarrow q - 1 \vdots p$, vì nếu $(q-1, p) = 1$ thì $1 \vdots q$, vô lí.

Mặt khác, $q - 1$ chẵn suy ra $q - 1 \vdots 2p \Rightarrow q = 2pk + 1$.

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Tìm số nguyên tố p sao cho các số sau cũng là số nguyên tố:

a) p + 2 và p + 10.

b) p + 10 và p + 20.

Bài 2. Chứng minh rằng nếu n và $n^2 + 2$ là các số nguyên tố thì $n^3 + 2$ cũng là số nguyên tố.

Bài 3. Chứng minh rằng nếu a, a + k, a + 2k ($a, k \in N^*$) là các số nguyên tố lớn hơn 3 thì k chia hết cho 6.

Bài 4. Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì (p - 1)(p + 1) chia hết cho 24.

Bài 5. Một số nguyên tố p chia cho 42 có dư là một hợp số r. Tìm r.

Bài 6. Một số nguyên tố p chia cho 30 có số dư là r. Tìm r biết rằng r không là số nguyên tố.

Bài 7. Chứng minh rằng số $\underbrace{11...1}_{n}2\underbrace{11...1}_{n}$ là hợp số với $n \geq 1$.

Bài 8. Tìm n số sao cho 10101...0101 (n chữ số 0 và n + 1 chữ số 1 xen kẽ nhau) là số nguyên tố.

Bài 9. Các số sau là số nguyên tố hay hợp số.

a) A = 11...1(2001 chữ số 1);

b) B = 11...1 (2000 chữ số 1);

c) C = 1010101;

d) D = 1112111;

e) E = 1! + 2! + 3! +...+100!;

g) G = 3. 5. 7. 9 - 28;

h) H= 311141111.

Bài 10. Cho $n \in N^*$,chứng minh rằng các số sau là hợp số:

a) $A = 2^{2^{2n+1}} + 3$;

b) B = $2^{2^{4n+1}} + 7$;

c) C = $2^{2^{6n+2}} + 13$.

Bài 11. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 5, chứng minh rằng $p^4 \equiv 1$ (mod 240).

Bài 12. Chứng minh rằng dãy $a_n = 10^n + 3$ có vô số hợp số.

Bài 13. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên tố p có vô số dạng $2^n - n$ chia hết cho p.

Bài 14. Tìm $n \in N^*$ để $n^3 - n^2 + n - 1$ là số nguyên tố.

Bài 15. Tìm các số $x, y \in N^*$ sao cho $x^4 + 4y^4$ là số nguyên tố.

Bài 16. Tìm tất cả các số nguyên tố p có dạng $\frac{n(n+1)(n+2)}{6} + 1$ $(n \geq 1)$.

Bài 17. Cho $n \in N^*$, chứng minh $A = n^4 + 4^n$ là hợp số với $\text{n} > 1$.

Bài 18. Giải phương trình nghiệm nguyên $4(a-x)(x-b) + b - a = y^2$ (1)

trong đó a, b là các số nguyên cho trước và a > b.

Bài 19. Cho tập hợp A gồm 16 số nguyên dương đầu tiên. Hãy tìm số nguyên dương k nhỏ nhất có tính chất: Trong mỗi tập con gồm k phần tử của A đều tồn tại hai số phân biệt a, b sao cho $a^2 + b^2$ là số nguyên tố.

(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 tỉnh Bắc Ninh 2017-2018)

Bài 20. Chứng minh rằng nếu $a, a+m, a+2m$ là các số nguyên tố lớn hơn 3 thì m chia hết cho 6.

Bài 21. Cho tập $A = \{6;12;18;24\}$. Tìm số nguyên tố p sao cho p cộng với mỗi phần tử của A cũng là nguyên tố.

Bài 22. Tìm số nguyên tố p sao cho $p^4 + 2$ cũng là số nguyên tố.

(Vòng 2, THPT Chuyên – Đại học Quốc gia Hà Nội, năm học 2007 – 2008)

Bài 23. Cho các biểu thức $A = x^4 + 4; B = x^4 + x + 1$. Tìm các số tự nhiên x để A và B đều là các số nguyên tố.

Bài 24. Giả sử phương trình $x^2 + ax + b + 1 = 0$ có hai nghiệm nguyên dương. Chứng minh rằng $a^2 + b^2$ là hợp số.

Bài 25. Giải phương trình $x^2 - mx + n = 0$ biết phương trình có hai nghiệm nguyên dương phân biệt và m, n là các số nguyên tố.

Bài 26. *(Trích đề vào 10 Chuyên Vinh năm học 2013-2014)*

Giả sử n là số nguyên tố lớn hơn 2. Chứng minh rằng $\frac{2013n^2+3}{8}$ là số nguyên dương.

Bài 27. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Ninh Bình năm học 2018-2019)*

Tìm tất cả các bộ ba số nguyên tố $(p;q;r)$ sao cho $pqr = p+q+r+160$.

Bài 28. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Bắc Ninh năm học 2018-2019)*

Tìm số nguyên tố p thỏa mãn $p^3 - 4p + 9$ là số chính phương.

Bài 29. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Phú Yên năm học 2018-2019)*

Tìm hai số nguyên tố *p, q* sao cho $8q + 1 = p^2$.

Bài 30. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Thái Bình năm học 2018-2019)*

Tìm tất cả các bộ số nguyên dương $(x;y;z)$ sao cho $\frac{x+y\sqrt{2019}}{y+z\sqrt{2019}}$ là số hữu tỉ và $x^2+y^2+z^2$ là số nguyên tố.

Bài 31. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Quảng Nam năm học 2018-2019)*

Cho số nguyên tố $p\,(p>3)$ p và hai số nguyên dương a, b sao cho $p^2 + a^2 = b^2$.

Bài 32. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Thanh Hóa năm học 2017-2018)*

Cho a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $p = a^2 + b^2$ là số nguyên tố và $p-5$ chia hết cho 8. Giả sử x, y là các số nguyên thỏa mãn $ax^2 - by^2$ chia hết cho p. Chứng minh rằng cả hai số x, y chia hết cho p.

Bài 33. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Thanh Hóa năm học 2016-2017)*

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh $p^{2016} - 1$ chia hết cho 60.

Bài 34. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Nghệ An năm học 2016-2017)*

Tìm tất cả các số nguyên tố khác nhau m, n, p, q thỏa mãn

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{mnpq}=1.$$

Bài 35. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 TP Hà Nội năm học 2014-2015)*

Cho n nguyên dương. Chứng minh rằng $A = 2^{3n+1} + 2^{3n-1} + 1$ là hợp số

Bài 36. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Vĩnh Long năm học 2015-2016)*

Cho p và q là các số nguyên tố lớn hơn 3 và thỏa mãn $p = q + 2$. Tìm số dư khi chia $p + q$ cho 12.

Bài 37. *(Thi vào lớp 10 chuyên Lê Hồng Phong năm 1981)*

Chứng minh rằng nếu p và $p^2 + 2$ là hai số nguyên tố thì $p^3 + 2$ cũng là số nguyên tố.

Bài 38. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Nghệ An năm học 2014-2015)*

Tìm số tự nhiên n sao cho số 2015 có thể viết được thành tổng của n hợp số nhưng không thể viết được thành tổng của $n+1$ hợp số.

Bài 39. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Thanh Hóa năm học 2014-2015)*

Tìm tất cả các số nguyên tố *p*, *q* sao cho tồn tại số tự nhiên *m* thỏa mãn: $\frac{pq}{p+q}=\frac{m^2+1}{m+1}$.

Bài 40. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Hải Dương năm học 2014-2015)*

Tìm số nguyên tố *p* sao cho các số $2p^2-1;\ 2p^2+3;\ 3p^2+4$ đều là số nguyên tố.

Bài 41. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Cẩm Thủy năm học 2011-2012)*

Tìm số tự nhiên n để $A=n^{2012}+n^{2002}+1$ là số nguyên tố

Bài 42. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Tiền Hải năm học 2016-2017)*

Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn:

$\frac{a-b\sqrt{2}}{b-c\sqrt{2}}$ là số hữu tỉ và $a^2+b^2+c^2$ là số nguyên tố

Bài 43. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Gia Lộc năm học 2015-2016)*

Tìm số nguyên tố k để k^2+4 và k^2+16 đồng thời là các số nguyên tố.

Bài 44. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Lục Nam năm học 2018-2019)*

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh $p^{20}-1$ chia hết cho 100

Bài 45. Giả sử a, b là các số tự nhiên sao cho $p=\frac{b}{4}\sqrt{\frac{2a-b}{2a+b}}$ là số nguyên tố. Tìm giá trị lớn nhất của p.

Bài 46. *(Trích đề chọn học sinh giỏi lớp 9 Amsterdam năm học 2018-2019)*

Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương $(p;q;n)$, trong đó p, q là các số nguyên tố thỏa mãn: $p(p+3)+q(q+3)=n(n+3)$

Bài 47. *(Trích đề vào 10 Chuyên toán Hải Phòng năm học 2019-2020)*

Tìm các số nguyên tố *p*, *q* thoả mãn đồng thời hai điều kiện sau:

i) p^2q+p chia hết cho p^2+q

ii) pq^2+q chia hết cho q^2-p

Bài 48. *(Trích đề vào 10 Chuyên toán Quảng Bình năm học 2019-2020)*

Cho $\overline{abc}$ là số nguyên tố. Chứng minh rằng phương trình $ax^2+bx+c=0$ không có nghiệm hữu tỉ.

Bài 49. *(Trích đề thi HSG TP. Hà Nội năm học 2013-2014)*

Tìm số tự nhiên *n* để $25^{n^2-3n+1}-12$ là số nguyên tố

Bài 50. *(Trích đề vào 10 Chuyên Tin Lam Sơn năm học 2015-2016)*

Cho dãy số tự nhiên 2; 6; 30; 210; ... được xác định như sau: số hạng thứ k bằng tích của k số nguyên tố đầu tiên $\left(k=1;2;3;...\right)$. Biết rằng có hai số hạng của dãy số đó có hiệu bằng 30000. Tìm hai số hạng đó.

Bài 51. *(Vòng 2 , THPT chuyên Đại học Vinh, năm học 2009 - 2010)*

Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố lẻ p đều không tồn tại các số nguyên dương m,n thỏa mãn : $\frac{1}{p}=\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}$

Bài 52. *(Trích đề vào 10 Chuyên Quảng Nam năm học 2018-2019)*

Tìm hai số nguyên tố p và q, biết rằng $p+q$ và $p+4q$ đều là các số chính phương.

Bài 53. *(Trích đề vào 10 Chuyên Hải Dương năm học 2018-2019)*

Tìm tất cả các số tự nhiên n,k để n^8+4^{2k+1} là số nguyên tố

Bài 54. *(Trích đề vào 10 Chuyên Vĩnh Long năm học 2018-2019)*

Tìm các số tự nhiên x thỏa mãn biểu thức $P=-x^4+x^2+14x+49$ là số nguyên tố

Bài 55. *(Trích đề vào 10 Chuyên Phú Thọ năm học 2015-2016)*

Chứng minh rằng nếu số nguyên n lớn hơn 1 thoả mãn n^2+4 và n^2+16 là các số nguyên tố thì n chia hết cho 5.

Bài 56. *(Trích đề vào 10 Chuyên Amsterdam năm học 2014-2015)*

1) Cho số nguyên dương n thỏa mãn n và 10 là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh $(n^4-1)\,\vdots\,40$

2) Tìm tất cả các số nguyên tố p và các số nguyên dương x,y thỏa mãn $\begin{cases} p-1=2x(x+2) \\ p^2-1=2y(y+2) \end{cases}$

Bài 57. *(Trích đề vào 10 Chuyên TP Hồ Chí Minh năm học 2014-2015)*

Cho các số nguyên dương a, b, c sao cho $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$

a) Chứng minh rằng a + b không thể là số nguyên tố.

b) Chứng minh rằng nếu c > 1 thì a + c và b + c không thể đồng thời là số nguyên tố

Bài 58. *(Trích đề vào 10 Chuyên Thái Bình năm học 2014-2015)*

Cho a, b, c, d là các số nguyên dương thỏa mãn: $a^2+ab+b^2=c^2+cd+d^2$. Chứng minh a + b + c + d là hợp số.

Bài 59. *(Trích đề HSG lớp 8 Gia Viễn năm học 2014-2015)*

Tìm số tự nhiên n để p là số nguyên tố biết: $p=n^3-n^2+n-1$.

Bài 60. *(Trích đề HSG lớp 8 Thanh Chương năm học 2012-2013)*

Chứng minh $\forall n\in\mathbb{N}^*$ thì n^3+n+2 là hợp số

Bài 61. *(Trích đề HSG lớp 8 Bắc Ninh năm học 2018-2019)*

Cho a,b,c là các số nguyên khác 0, $a \ne c$ sao cho $\dfrac{a^2+b^2}{b^2+c^2} = \dfrac{a}{c}$. Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2$ không phải là số nguyên tố.

Bài 62. *(Trích đề HSG lớp 8 Trực Ninh năm học 2017-2018)*

Cho p và $2p+1$ là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $4p+1$ là hợp số

Bài 63. Cho số nguyên tố $p > 3$. Biết rằng có số tự nhiên n sao cho trong cách viết thập phân của số p^n có đúng 20 chữ số. Chứng minh rằng trong 20 chữ số này có ít nhất 3 chữ số giống nhau.

Bài 64. *(Trích đề vào 10 Chuyên Vinh năm học 2015-2016)*

Tìm các số nguyên tố p, q thỏa mãn $p+q = 2(p-q)^2$.

Bài 65. *(Trích đề HSG lớp 6 Hoằng Hóa 2018-2019)*

Tìm tất cả các số nguyên tố p, q sao cho $7p+q$ và $pq+11$ đều là số nguyên tố.

Bài 66. *(Trích đề HSG lớp 6 Sông Lô 2018-2019)*

Biết $\overline{abcd}$ là nguyên tố có bốn chữ số thỏa mãn $\overline{ab}; \overline{cd}$ cũng là các số nguyên tố và $b^2 = \overline{cd} + b - c$. Hãy tìm $\overline{abcd}$

Bài 67. *(Trích đề Chuyên Khoa học tự nhiên Hà Nội năm 2009-2010)*

Tìm số nguyên dương n sao cho tất cả các số

n + 1, n + 5, n + 7, n + 13, n + 17, n + 25, n + 37 đều là nguyên tố.

Bài 68. *(Trích đề HSG lớp 6 Gia Bình 2018-2019)*

Giả sử p và p^2+2 là các số nguyên tố. Chứng tỏ p^3+p^2+1 cũng là số nguyên tố.

Bài 69. *(Trích đề HSG lớp 6 Nghĩa Đàn 2018-2019)*

Tìm hai số nguyên tố x, y thỏa mãn $x^2 - y^2 = 45$.

Bài 70. *(Trích đề HSG lớp 6 Như Thanh 2018-2019)*

1) Chứng minh rằng hai số $2n+1$ và $10n+7$ là hai số nguyên tố cùng nhau với mọi số tự nhiên n.
2) Tìm các số x, y nguyên tố để $x^2+23 = y^3$.

Bài 71. *(Trích đề HSG lớp 6 Nông Cống 2018-2019)*

Tìm số nguyên tố $\overline{ab}(a > b > 0)$, biết $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương

Bài 72. Tìm tất cả các số nguyên tố p để $4p^2+1$ và $6p^2+1$ cũng là số nguyên tố.

Bài 73. Giả sử p và q là các số nguyên tố thỏa mãn đẳng thức $p(p-1) = q(q^2-1)$.

a) Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương k sao cho $p-1 = kq, q^2-1 = kp$.

b) Tìm tất cả các số nguyên tố p, q thỏa mãn đẳng thức $p(p-1) = q(q^2-1)$.

(Trích đề vào 10 Chuyên Khoa học tự nhiên Hà Nội 2017-2018)

Bài 74. Cho p, q, r, s là các số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $p^2 - q^2 + r^2 - s^2$ chia hết cho 24.

Bài 75. Tìm tất cả các cặp số nguyên tố $(p;q)$ sao cho $p^2 - 2q^2 = 1$.

Bài 76. Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố p thì $p^3 + \frac{p-1}{2}$ không phải là tích của hai số tự nhiên liên tiếp.

Bài 77. Tìm các số nguyên tố p, q, r thỏa mãn $p^q + q^p = r$

Bài 78. Tìm các số nguyên tố p, q, r thỏa mãn các điều kiện sau:

$$5 \le p < q < r; 49 \le 2p^2 - r^2; 2q^2 - r^2 \le 193$$

Bài 79. Tìm tất cả các bộ ba số nguyên tố a, b, c đôi một khác nhau thoả mãn điều kiện

$$20abc < 30(ab + bc + ca) < 21abc$$

Bài 80. Tìm các số nguyến tố p, q và số nguyên x thỏa mãn $x^5 + px + 3q = 0$

Bài 81.Tìm số nguyên tố p để $\frac{p+1}{2}$ và $\frac{p^2+1}{2}$ là các số chính phương.

Bài 82. Chứng minh rằng nếu tồn tại số nguyên dương x thỏa mãn $\frac{(x+1)(2x+1)}{2012}$ là một số chính phương thì x là hợp số.

Bài 83. Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $\frac{p^2 - p - 2}{2}$ là lập phương của một số tự nhiên.

Bài 84. Cho bảy số nguyên tố khác nhau $a, b, c, a + b + c, a + b - c, a + c - b, b + c - a$ trong đó hai trong ba số a, b, c có tổng bằng 800. Gọi d là hiệu giữa số lớn nhất và số nhỏ nhất trong bảy số nguyên tố đó. Hỏi giá trị lớn nhất của d có thể nhận là bao nhiêu.

Bài 85. Cho p là số nguyên tố. Tìm tất cả các số nguyên k sao cho $\sqrt{k^2 - pk}$ là số nguyên dương

Bài 86. Tìm số nguyên dương n lớn nhất sao cho số 2016 viết được thành $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ trong đó các số $a_1; a_2; a_3; ...; a_n$ là các hợp số. Kết quả trên thay đổi như thế nào nếu thay số 2016 bằng số 2017.

Bài 87. Tìm tất cả số nguyên tố p, q, r thỏa mãn phương trình $(p+1)(q+2)(r+3) = 4pqr$.

Bài 88. Cho số tự nhiên $n \ge 2$, xét các số $a_1; a_2; ...; a_n$ và các số nguyên tố phân biệt $p_1; p_2; ...; p_n$ thỏa mãn điều kiện $p_1|a_1 - a_2| = p_2|a_2 - a_3| = ... = p_n|a_n - a_1|$. Chứng minh rằng $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Bài 89. Tồn tại hay không số nguyên tố a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^b + 2011 = c$.

Bài 90.Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho với mỗi số nguyên tố p đó luôn tồn tại các số nguyên dương n, x, y thỏa mãn $p^n = x^3 + y^3$.

Bài 91. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho phần nguyên của $\frac{n^3+8n^2+1}{3n}$ là một số nguyên tố.

Bài 92. Cho p là số nguyên tố sao cho $A = \frac{x^2+py^2}{xy}$ là số tự nhiên. Khi đó $A = p+1$.

Bài 93. Tìm tất cả các số nguyên tố p và q thỏa mãn $p^3 - q^5 = (p+q)^2$.

Bài 94. Cho a, b là các số nguyên và p là số nguyên tố lẻ. Chứng minh rằng nếu p^4 là ước của a^2+b^2 và $a(a+b)^2$ thì p^4 cũng là ước của $a(a+b)$.

Bài 95. Tìm các số nguyên không âm a, b sao cho $a^2 - b^2 - 5a + 3b + 4$ là số nguyên tố.

Bài 96. Cho đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với a là số nguyên dương. Biết $f(5) - f(4) = 2012$. Chứng minh rằng $f(7) - f(2)$ là hợp số.

Bài 97. Cho đa thức bậc ba f(x) với hệ số của x^3 là một số nguyên dương và biết $f(5) - f(3) = 2010$. Chứng minh rằng $f(7) - f(1)$ là hợp số.

Bài 98. Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương $(m;p;q)$ sao cho p, q là số nguyên tố và $2^m.p^2 + 1 = q^5$.

Bài 99.Tìm sáu số nguyên tố $p_1;p_2;p_3;p_4;p_5;p_6$ thỏa mãn $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^3 + p_5^2 = p_6^2$.

Bài 100. Cho số nguyên tố p dạng $4k+3$. Tồn tại hay không số nguyên a nào thỏa điều kiện $(a^2+1) \vdots p$

Bài 101. *(Trích đề thi HSG thành phố Hà Nội năm 2019-2020)*
Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương (x, y, p) với p là số nguyên tố thỏa mãn

$$x^2 + p^2y^2 = 6(x+2p).$$

Bài 102. Cho a,b,c là các số nguyên dương. Chứng minh $a+b+2\sqrt{ab+c^2}$ không phải là số nguyên tố.

(Tuyển sinh vào lớp 10 chuyên TP Hà Nội, 2017).

Bài 103.
a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố khác 2 và khác 3 có dạng: $6m+1$ hoặc $6m-1$.
b) Chứng minh rằng có vô số số nguyên tố có dạng $6m-1$.

(Thi học sinh giỏi quốc gia 1991 – 1992)

Bài 104. Tìm các số nguyên tố x, y, z thỏa $x^y + 1 = z$.

Bài 105. Chứng minh rằng nếu $1 + 2^n + 4^n (n \in N^*)$ là số nguyên tố thì $n = 3^k$ với $k \in N$.

Bài 106. Cho $a,b,c,d \in N^*$ thỏa mãn $ab = cd$. Chứng minh rằng: $A = a^n + b^n + c^n + d^n$ là hợp số với mọi $n \in N$.

Bài 107. Tìm tất cả các số nguyên tố p dạng $\frac{n(n+1)}{2}-1 \quad (n \geq 1)$.

Bài 108. Tìm tất cả các số có hai chữ số $\overline{ab}$ sao cho $\frac{ab}{|a-b|}$ là số nguyên tố.

Bài 109. a) Cho 2^k+1 là số nguyên tố (gọi là nguyên tố Fermat). Chứng minh rằng $k=0$ hoặc $k=2^n$.

b) Cho 2^k-1 là số nguyên tố (gọi là số nguyên tố Mersenne). Chứng minh rằng k là số nguyên tố.

Bài 110. *(Thi học sinh giỏi TP Hồ Chí Minh 1995 – 1996)*

1) Cho biết x, y, z là các số nguyên sao cho $(x-y)(y-z)(z-x)=x+y+z$. Chứng minh rằng ta có: $x+y+z$ là bội số của 27.

2) Chứng minh rằng với k nguyên dương và a là số nguyên tố lớn hơn 5 thì $a^{4k}-1$ chia hết cho 240.

Bài 111. Chứng minh rằng: (p – 1)! chia hết cho p nếu p là hợp số, không chia hết cho p nếu p là số nguyên tố.

Bài 112. Chứng minh rằng: mọi ước nguyên tố của 1994! – 1 đều lớn hơn 1994.

Bài 113. Chứng minh rằng: n > 2 thì giữa n và n! có ít nhất 1 số nguyên tố (từ đó suy ra có vô số số nguyên tố).

Bài 114. Giả sử p là số nguyên tố lẻ và $m=\frac{9^p-1}{8}$. Chứng minh rằng m là hợp số lẻ không chia hết cho 3 và $3^{m-1} \equiv 1$ (mod m).

Bài 115. Chứng minh rằng dãy số $2003+23k$ với $k=1,2,3....$ chứa vô hạn số là lũy thừa của cùng một số nguyên tố.

Bài 116. Tìm bảy số nguyên tố sao cho tích của chúng bằng tổng các lũy thừa bậc sáu của bảy số đó.

Bài 117. Tìm tất cả các số nguyên tố p có dạng $p=a^2+b^2+c^2$ với *a, b, c* là các số nguyên dương thỏa mãn $a^4+b^4+c^4$ chia hết cho p.

(Trích đề toán 10 chuyên sư phạm Hà Nội năm 2011-2012)

Bài 118. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) sao cho $\frac{x^2+y^2}{x-y}$ là số nguyên dương và là ước số của 1995.

Bài 119. Một xí nghiệp điện tử trong một ngày đã giao cho một cửa hàng một số máy tivi. Số máy này là một số có ba chữ số mà nếu tăng chữ số đầu lên n lần, giảm các chữ số thứ hai và thứ ba đi n lần thì sẽ được một số mới lớn gấp n lần số máy đã giao. Tìm n và số máy tivi đã giao.

Bài 120. Tìm 3 số nguyên tố sao cho tích của chúng gấp 5 lần tổng của chúng.

Bài 121. Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng luôn tồn tại n số tự nhiên liên tiếp sao cho chúng là hợp số.

Bài 122. Cho số nguyên dương n thỏa mãn $2^n - 1$ là số nguyên tố. Chứng minh rằng n là số nguyên tố.

Bài 123. Tìm số nguyên tố p để $2^p + p^2$ cũng là số nguyên tố.

Bài 124. Cho p, q là các số nguyên tố và phương trình $x^2 - px + q = 0$ có nghiệm nguyên dương. Tìm p và q .

Bài 125. Cho p, q, r là các số nguyên tố và n là các số tự nhiên thỏa $p^n + q^n = r^2$. Chứng minh rằng $n = 1$.

Bài 126. Cho p là số nguyên tố dạng $4k+3$. Chứng minh rằng $x^2 + y^2$ chia hết cho p khi và chỉ khi x và y chia hết cho p .

Bài 127. Tìm các số tự nhiên m, n sao cho $x = 3^{3m^2+6n-61} + 4$ là số nguyên tố.

Bài 128. Tìm tất cả các số tự nhiên a,b,c sao cho $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ là số nguyên tố.

Bài 129. *(Trích đề thi HSG quận Thanh Xuân năm 2019-2020)*

Chứng minh rằng, nếu p và $8p^2+1$ là hai số nguyên tố lẻ thì $8p^2+2p+1$ là số nguyên tố.

Bài 130. Tìm các số nguyên tố a, b, c và số nguyên dương k sao cho $a^2 + b^2 + 16c^2 = 9k^2 + 1$.

Bài 131. Tìm các số nguyên tố p và q sao cho $p^2 \mid q^3 + 1$ và $q^2 \mid p^6 - 1$.

Bài 132. Ta gọi p, q là hai số nguyên tố liên tiếp, nếu giữa p và q không có số nguyên tố nào khác. Tìm ba số nguyên tố liên tiếp p, q, r sao cho $p^2 + q^2 + r^2$ cũng là số nguyên tố.

Bài 133. Cho số $A = \dfrac{5^{125} - 1}{5^{25} - 1}$. Chứng minh A là một hợp số.

Bài 134. Cho p và $p+2$ là số nguyên tố ($p > 3$). Chứng minh rằng $p+1 \vdots 6$.

Bài 135. Cho p và $p+4$ là các số nguyên tố $(p > 3)$. Chứng minh rằng $p+8$ là hợp số.

Bài 136. *(Chuyên Vũng Tàu 2016-2017)*

Tìm các cặp số nguyên tố (p, q) thỏa mãn $p^2 - 5q^2 = 4$.

Bài 137. Chứng minh rằng trong 12 số nguyên tố phân biệt luôn chọn ra được 6 số ký hiệu p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 sao cho $(p_1 - p_2)(p_4 - p_3)(p_5 + p_6) \vdots 1800$.

Bài 138. *(Đề thi HSG Toán TP.HCM năm học 2004 – 2005)*

Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho phần nguyên của $\dfrac{n^3 + 8n^2 + 1}{3n}$ là một số nguyên tố.

Bài 139. Cho p, q là hai số nguyên tố sao cho $p > q > 3$ và $p - q = 2$. Chứng minh rằng: $(p+q) \vdots 12$.

Bài 140. Tìm số nguyên tố p sao cho $p+10$ và $p+14$ là các số nguyên tố.

Bài 141. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh $2007 - p^2$ chia hết cho 24.

(Đề tuyển sinh Chuyên Toán Amsterdam 2017).

Bài 142. Tìm ba số nguyên tố p, q, r sao cho $p^q + q^p = r$.

Bài 143. a) Chứng minh rằng số dư trong phép chia một số nguyên tố cho 30 chỉ có thể là 1 hoặc là một số nguyên tố. Khi chia cho 60 thì kết quả ra sao?

b) Chứng minh rằng nếu tổng của n lũy thừa bậc 4 của các số nguyên tố lớn hơn 5 là một số nguyên tố thì $(n,30) = 1$.

Bài 144. Tìm tất cả các bộ ba số nguyên tố a, b, c sao cho $abc < ab + bc + ca$.

Bài 145. Cho dãy số nguyên dương $a_1, a_2, ..., a_n$ được xác định như sau: $a_1 = 2$, a_n là ước nguyên tố lớn nhất của $a_1a_2...a_{n-1} + 1$ với $n \geq 2$. Chứng minh rằng $a_k \neq 5$ với mọi k.

Bài 146. Tìm tất cả các số nguyên tố p để $2^p + p^2$ cũng là số nguyên tố.

Bài 147. Tìm $n \in \mathbb{N}*$ để: $n^{2003} + n^{2002} + 1$ là số nguyên tố.

Bài 148. a) Tìm các số nguyên tố p để $2p + 1$ là lập phương của một số tự nhiên.

b) Tìm các số nguyên tố p để $13p + 1$ là lập phương của một số tự nhiên.

Bài 149. Cho $a, b, c, d \in N$ thỏa mãn a > b > c > d và $ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c)$

Chứng minh rằng $ab + cd$ là hợp số.

Bài 150. Cho các số nguyên dương a, b, c, d thỏa mãn: $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$.

Chứng minh $a + b + c + d$ là hợp số .

(Trích đề thi HSG lớp 9 Nghệ An 2014-2015)

Bài 151. Chứng minh rằng nếu $1 + 2^n + 4^n (n \in \mathbb{N}^*)$ là số nguyên tố thì $n = 3^k$ với $k \in \mathbb{N}$.

Bài 152. Tìm số tự nhiên n sao cho số 2015 có thể viết được thành tổng của n hợp số nhưng không thể viết được thành tổng của n + 1 hợp số.

(Trích đề thi HSG lớp 9 Nghệ An 2014-2015)

Bài 153. Tìm tất cả các số nguyên tố p dạng $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ $(n \geq 1)$.

Bài 154. Chứng minh rằng số $A = 2^{2^{2n+1}} + 31$ là hợp số với mọi số tự nhiên n.

(Trích đề thi HSG lớp 9 Nghệ An 2017-2018)

Bài 155. Cho $n \in \mathbb{N}^*$, chứng minh rằng $2^{2^{10n+1}} + 19$ và $2^{3^{4n+1}} + 3^{2^{4n+1}} + 5$ là những hợp số.

Bài 156. Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên dương m, n, p với p nguyên tố thỏa mãn: $m^{2019} + n^{2019} = p^{2018}$

(Trích đề thi HSG lớp 9 TP. Hà Nội 2017-2018)

Bài 157. Tìm số tự nhiên n sao cho $n + 3$ là số nguyên tố và $A = 2n + 7$ là lập phương của một số tự nhiên.

Bài 158. Chứng minh rằng nếu b là số nguyên tố lớn hơn 3 thì số $A = 3n + 1 + 2009b^2$ là hợp số, với mọi số tự nhiên n.

(THPT chuyên Quảng Ngãi, năm học 2009-2010)

CHỦ ĐỀ 4

CÁC BÀI TOÁN VỀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG

A. Kiến thức cần nhớ

1. Định nghĩa số chính phương.

Số chính phương là số bằng bình phương của một số nguyên.

(tức là nếu n là số chính phương thì: $n = k^2 \ (k \in Z)$)

2. Một số tính chất cần nhớ

1- Số chính phương chỉ có thể có chữ số tận cùng bằng 0, 1, 4, 5, 6, 9; không thể có chữ tận cùng bằng 2, 3, 7, 8.

2- Khi phân tích ra thừa số nguyên tố, số chính phương chỉ chứa các thừa số nguyên tố với số mũ chẵn.

3- Số chính phương chỉ có thể có một trong hai dạng 4n hoặc 4n + 1. Không có số chính phương nào có dạng 4n + 2 hoặc 4n + 3 (n ∈ N).

4- Số chính phương chỉ có thể có một trong hai dạng 3n hoặc 3n + 1. Không có số chính phương nào có dạng 3n + 2 (n ∈ N).

5- Số chính phương tận cùng bằng 1, 4 hoặc 9 thì chữ số hàng chục là chữ số chẵn.

Số chính phương tận cùng bằng 5 thì chữ số hàng chục là 2.

Số chính phương tận cùng bằng 6 thì chữ số hàng chục là chữ số lẻ.

6- Số chính phương chia hết cho 2 thì chia hết cho 4.

Số chính phương chia hết cho 3 thì chia hết cho 9

Số chính phương chia hết cho 5 thì chia hết cho 25

Số chính phương chia hết cho 8 thì chia hết cho 16.

7. Mọi số chính phương khi chia cho 5, cho 8 chỉ dư 1, 0, 4.

8. Giữa hai số chính phương liên tiếp không có số chính phương nào.

9. Nếu hai số nguyên liên tiếp có tích là một số chính phương thì một trong hai số đó là số 0.

10. Số các ước của một số chính phương là số lẻ. Ngược lại, một số có số các ước là số lẻ thì số đó là số chính phương.

11. Nếu $n^2 < k < (n+1)^2$ ($n \in Z$) thì k không là số chính phương.

12. Nếu hai số tự nhiên a và b nguyên tố cùng nhau có tích là một số chính phương thì mỗi số a, b cũng là các số chính phương.

13. Nếu a là một số chính phương, a chia hết cho số nguyên tố p thì a chia hết cho p^2.

14. Nếu tích hai số a và b là một số chính phương thì các số a và b có dạng $a = mp^2; b = mq^2$

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

🗁 Dạng 1: Chứng minh một số là số chính phương, hoặc là tổng nhiều số chính phương.

*** Cơ sở phương pháp:**

Để chứng minh một số n là số là số chính phương ta thường dựa vào định nghĩa, tức là chứng minh : $n = k^2 \ (k \in Z)$

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Cho n là một số tự nhiên. Chứng minh rằng: $A = n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ là số chính phương.

Hướng dẫn giải

Ta có: $A = (n^2+3n)(n^2+3n+2)+1 = (n^2+3n)^2 + 2(n^2+3n)+1 = (n^2+3n+1)^2$

Vì $n \in \mathbb{N}$ nên $n^2+3n+1 \in \mathbb{N}$. Vậy A là số chính phương.

Bài toán 2. Cho: $B = 1.2.3 + 2.3.4 + ... + k(k+1)(k+2)$ với k là số tự nhiên. Chứng minh rằng 4B + 1 là số chính phương.

Hướng dẫn giải

Ta thấy biểu thức B là tổng của một biểu thức chúng ta nghĩ đến việc phải thu gọn biểu thức B trước.

Ta có:

$$n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)[(n+3)-(n-1)] = \frac{1}{4}[n(n+1)(n+2)(n+3)-(n-1)n(n+1)(n+2)]$$

Áp dụng:

$$1.2.3 = \frac{1}{4}(1.2.3.4 - 0.1.2.3)$$

$2.3.4=\frac{1}{4}(2.3.4.5-1.2.3.4)$

$3.4.5=\frac{1}{4}(3.4.5.6-2.3.4.5)$

....

$k(k+1)(k+2)=\frac{1}{4}[k(k+1)(k+2)(k+3)-(k-1)k(k+1)(k+2)]$

Cộng theo vế các đẳng thức trên ta được:

$$B=1.2.3+2.3.4+...+k(k+1)(k+2)=\frac{1}{4}k(k+1)(k+2)(k+3)$$

$\Rightarrow 4B+1=k(k+1)(k+2)(k+3)+1$

Theo ví dụ 1 ta có: $4B+1=\left(k^2+3k+1\right)^2$

Vì $k\in\mathbb{N}$ nên $k^2+3k+1\in\mathbb{N}$. Vậy $4B+1$ là số chính phương.

Bài toán 3. Chứng minh rằng: $C=\underbrace{11...1}_{2n}+\underbrace{44...4}_{n}+1$ với n là số tự nhiên. Chứng minh rằng C là số chính phương.

Hướng dẫn giải

Ta có: $C=\underbrace{11...1}_{n}\underbrace{00...0}_{n}+\underbrace{11...1}_{n}+\underbrace{44...4}_{n}+1$

Đặt $a=\underbrace{11...1}_{n}$ thì $9a=\underbrace{99...9}_{n}$. Do đó $\underbrace{99...9}_{n}+1=10^n=9a+1$

$$C=a.10^n+a+4a+1=a(9a+1)+5a+1$$

$$\Rightarrow C=9a^2+6a+1=(3a+1)^2$$

$$\Rightarrow C=\underbrace{33...3}_{n-1}4^2.$$

Vậy C là một số chính phương.

Nhận xét:

Khi biến đổi một số trong đó có nhiều chữ số giống nhau thành một số chính phương ta nên đặt $\underbrace{11...1}_{n}=a$ *và như vậy* $\underbrace{99...9}_{n}+1=10^n=9a+1$.

Bài toán 4. Cho $a=\underbrace{11...1}_{2016}$, $b=1\underbrace{0...0}_{2015}5$. Chứng minh $\sqrt{ab+1}$ là số tự nhiên.

Hướng dẫn giải

<u>*Cách 1:*</u>

Ta có: $b = 1\underbrace{0...0}_{2015}5 = 1\underbrace{0...0}_{2016} - 1 + 6 = \underbrace{9...9}_{2016} + 6 = 9a + 6$.

$\Rightarrow$ ab + 1 = a(9a + 6) + 1 = 9a² + 6a + 1 = (3a + 1)²

$\Rightarrow \sqrt{ab+1} = \sqrt{(3a+1)^2} = 3a + 1 \in N$.

Vậy $\sqrt{ab+1}$ là số tự nhiên.

Cách 2:

Ta có: $a = \underbrace{11...1}_{2016} = \dfrac{10^{2016}-1}{9}, b = 10^{2016} + 5$.

$$\Rightarrow ab+1 = \frac{10^{2016}-1}{9}.\left(10^{2016}+5\right)+1 = \frac{\left(10^{2016}\right)^2 + 4.10^{2016} - 5 + 9}{9} = \left(\frac{10^{2016}+2}{3}\right)^2.$$

$$\Rightarrow \sqrt{ab+1} = \frac{\left(10^{2016}+2\right)}{3}.$$

Mà $\left(10^{2016}+2\right) \vdots 3$. Do đó, $\sqrt{ab+1}$ là số tự nhiên.

Vậy $\sqrt{ab+1}$ là số tự nhiên.

Bài toán 5. Cho số tự nhiên *a* gồm 60 chữ số 1, số tự nhiên *b* gồm 30 chữ số 2. Chứng minh *a* - *b* là một số chính phương.

Hướng dẫn giải

Cách 1:

Ta có: $a = \underbrace{11...1}_{60} = \dfrac{10^{60}-1}{9}$, $b = \underbrace{22...2}_{30} = 2.\dfrac{10^{30}-1}{9}$.

$$\Rightarrow a - b = \frac{10^{60}-1}{9} - \frac{2(10^{30}-1)}{9} = \frac{10^{60} - 2.10^{30} + 1}{9} = \left[\frac{10^{30}-1}{3}\right]^2 = \left(\underbrace{33...3}_{30}\right)^2.$$

Cách 2:

$b = \underbrace{22...2}_{30} = 2.\underbrace{11...1}_{30}$, $a = \underbrace{11...1}_{60} = \underbrace{11...1}_{30}.\underbrace{00...0}_{30} + \underbrace{11...1}_{30} = \underbrace{11...1}_{30}.10^{30} + \underbrace{11...1}_{30}$.

Đặt $c = \underbrace{11...1}_{30}$. $\Rightarrow 9c + 1 = \underbrace{99...9}_{30} + 1 = 10^{30}$.

Khi đó: $a = c.(9c+1) + c = 9c^2 + 2c$. $b = 2c$.

$$\Rightarrow a - b = 9c^2 + 2c - 2c = (3c)^2 = \left(\underbrace{33...3}_{30}\right)^2.$$

Bài toán tổng quát: Cho k số tự nhiên khác 0, số tự nhiên *a* gồm 2*k* chữ số 1 và số tự nhiên *b* gồm *k* chữ số 2. Chứng minh rằng $a - b$ là một số chính phương.

Bài toán 6. Cho $n \in \mathbb{N}$ sao cho $\frac{n^2-1}{3}$ là tích của hai số tự nhiên liên tiếp. Chứng minh rằng n là tổng của hai số chính phương liên tiếp.

Hướng dẫn giải

Giả sử ta có: $\frac{n^2-1}{3} = a(a+1)$.

Từ đó có $n^2 = 3a^2 + 3a + 1 \Rightarrow 4n^2 - 1 = 12a^2 + 12a + 3$

$\Rightarrow (2n-1)(2n+1) = 3(2a+1)^2$.

Vì $2n+1; 2n-1$ là hai số lẻ liên tiếp nên ta có các trường hợp:

Trường hợp 1: $\begin{cases} 2n-1 = 3p^2 \\ 2n+1 = q^2 \end{cases}$.

Khi đó $q^2 = 3p^2 + 2$ (Vô lí). Vậy trường hợp này không xảy ra.

Trường hợp 2: $\begin{cases} 2n-1 = p^2 \\ 2n+1 = 3q^2 \end{cases}$.

Từ đó p là số lẻ nên $p = 2k+1$.

Từ đó $2n = (2k+1)^2 + 1 \Rightarrow n = k^2 + (k+1)^2$ (đpcm).

Bài toán 7. Cho k là một số nguyên dương và $a = 3k^2 + 3k + 1$

a) Chứng minh rằng $2a$ và a^2 là tổng của ba số chính phương.

b) Chứng minh rằng nếu a là một ước của một số nguyên duong b và b là một tổng gồm ba số chính phương thì b^n là một tổng của bà số chính phương.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $2a = 6k^2 + 6k + 2 = (2k+1)^2 + (k+1)^2 + k^2$

và $a^2 = 9k^4 + 18k^3 + 15k^2 + 6k + 1 = (k^2+k)^2 + (2k^2+3k+1)^2 + (2k^2+k)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$.

b) Vì $b \vdots a$ nên đặt $b = ca$.

Vì b là tổng của ba số chính phương nên đặt $b = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$.

Khi đó $b^2 = c^2.a^2 = c^2\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)$

Để kết thúc việc chứng minh, ta tiến hành như sau: cho $n = 2p + 1$ ta được:
$b^{2p+1} = \left(b^p\right)^2\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right)$ và cho $n = 2p + 2$ ta được $b^n = \left(b^p\right)^2 b^2\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)$

🗁 Dạng 2: Chứng minh một số không là số chính phương.

*** Cơ sở phương pháp:**

Để chứng minh n không là số chính phương, tùy vào từng bài toán ta có thể sử dụng các cách sau:

1) Chứng minh n không thể viết được dưới dạng một bình phương một số nguyên.
2) Chứng minh $k^2 < n < (k + 1)^2$ với k là số nguyên.
3) Chứng minh n có tận cùng là 2; 3; 7; 8
4) Chứng minh n có dạng 4k + 2; 4k + 3
5) Chứng minh n có dạng 3k + 2
6) Chứng minh n chia hết cho số nguyên tố p mà không chia hết cho p^2.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Một số tự nhiên có tổng các chữ số bằng 2018 thì có thể là số chính phương được không ? tại sao?

Hướng dẫn giải

Gọi số tự nhiên có tổng các chữ số bằng 2018 là n

Ta có : 2018 = 3m + 2 nên số tự nhiên n chia 3 dư 2, do đó số n có dạng 3k + 2 với k là số tự nhiên. Mặt khác một số chính phương trình không có dạng 3k + 2 suy ra số tự nhiên n không là số chính phương.

Bài toán 2. Chứng minh rằng số $A = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$ trong đó $n \in N$ và $n > 1$ không phải là số chính phương.

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$A = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1 = \left(n^4 + 2n^3 + n^2\right) + \left(n^2 + 2n + 1\right)$$
$$= \left(n^2 + n\right)^2 + \left(n + 1\right)^2 > \left(n^2 + n\right)^2 \ \forall n > 1$$
$$\Rightarrow A > \left(n^2 + n\right)^2 \ \forall n > 1$$

Mặt khác:

$$\left(n^2 + n + 1\right)^2 = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n^2 + 2n + 1$$
$$= \left(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1\right) + n^2 = A + n^2 > A \quad \forall n > 1$$

$\Rightarrow A < \left(n^2 + n + 1\right)^2$

Do đó $\left(n^2 + n\right)^2 < A < \left(n^2 + n + 1\right)^2$

Ta có (n^2 + n) và (n^2 + n + 1) là hai số tự nhiên liên tiếp nên A không thể là số chính phương.

Bài toán 3. Cho $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{33}$. Hỏi A có là số chính phương không? Vì sao?

Hướng dẫn giải

Ta có $A = 1 + 2 + \left(2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5\right) + ... + \left(2^{30} + 2^{31} + 2^{32} + 2^{33}\right)$

$= 3 + 2^2.\left(1 + 2 + 2^2 + 2^3\right) + ... + 2^{30}.\left(1 + 2 + 2^2 + 2^3\right)$

$= 3 + 2.30 + ... + 2^{29}.30 = 3 + \left(2 + ... + 2^{29}\right).3.10$.

Ta thấy A có chữ số tận cùng bằng 3.

Mà số chính phương không có chữ số tận cùng là 3. Do đó, A không là số chính phương.

Vậy A không là số chính phương.

Bài toán 4. Chứng minh rằng $A = 2012^{4n} + 2013^{4n} + 2014^{4n} + 2015^{4n}$ không phải là số chính phương với mọi số nguyên dương n.

(Đề thi vào lớp 10 chuyên trường ĐHSP TP Hồ Chí Minh 2015 - 2016)

Hướng dẫn giải

Ta có:

$2012^{4n} \vdots 4; 2014^{4n} \vdots 4,\ \forall n \in N^*$.

$2013^{4n} = 2013^{4n} - 1 + 1 = \left(2013^{4n} - 1\right) + 1$ chia cho 4 dư 1.

$2015^{4n} = 2015^{4n} - \left(-1\right)^{4n} + 1$ chia cho 4 dư 1.

Do đó, $A = 2012^{4n} + 2013^{4n} + 2014^{4n} + 2015^{4n}$ chia cho 4 dư 2.

Ta có: $A \vdots 2$, nhưng A không chia hết cho 2^2, mà 2 là số nguyên tố. Suy ra A không là số chính phương.

Vậy A không là số chính phương.

Bài toán 5. Cho $2 \le n \in \mathbb{N}$, Chứng minh rằng $A = n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$ không thể là số chính phương

Hướng dẫn giải

Ta có $A = n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2 = n^2\left(n^4 - n^2 + 2n + 2\right)$

$$= n^2\left[n^2\left(n^2 - 1\right) + 2\left(n + 1\right)\right]$$

$$= n^2\left[n^2\left(n - 1\right)\left(n + 1\right) + 2\left(n + 1\right)\right]$$

$$= n^2\left(n + 1\right)^2\left(n^2 - 2n + 2\right)$$

Với $2 \le n \in \mathbb{N}$, ta có $n^2 - 2n + 2 > n^2 - 2n + 1 = \left(n + 1\right)^2$

Và $n^2 - 2n + 2 = n^2 - 2\left(n - 1\right) < n^2$. Do đó $\left(n - 1\right)^2 < n^2 - 2n + 2 < n^2$

Như vậy $n^2 - 2n + 2$ không phải là số chính phương nên A không phải là số chính phương.

Bài toán 6. Chứng minh rằng tổng bình phương của hai số lẻ bất kì không phải là một số chính phương.

Hướng dẫn giải

Giả sử: $a = 2m + 1$, $b = 2n + 1$, với $m, n \in \mathbb{N}$

Ta có: $a^2 + b^2 = \left(2m + 1\right)^2 + \left(2n + 1\right)^2 = 4\left(m^2 + m + n^2 + n\right) + 2 = 4k + 2$ với $k \in \mathbb{N}$.

Không có số chính phương nào có dạng $4k + 2$ vì vậy $a^2 + b^2$ không phải số chính phương.

🗁 **Dạng 3: Điều kiện để một số là số chính phương.**

*** Cơ sở phương pháp:** Chúng ta thường sử dụng các phương pháp sau:

- Phương pháp 1: Sử dụng định nghĩa.
- Phương pháp 2: Sử dụng tính chẵn, lẻ.
- Phương pháp 3: Sử dụng tính chất chia hết và chia có dư.
- Phương pháp 4: Sử dụng các tính chất.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm số nguyên n sao cho $n\left(n + 3\right)$ là số chính phương.

Hướng dẫn giải

Để $A = n\left(n + 3\right)$ là số chính phương thì $n\left(n + 3\right) = k^2$ với k là số tự nhiên, do đó:

$$n^2 + 3n = k^2$$
$$\Leftrightarrow 4n^2 + 12n = 4k^2$$

$$\Leftrightarrow 4n^2+12n+9=4k^2+9$$
$$\Leftrightarrow (2n+3)^2-(2k)^2=9$$
$$\Leftrightarrow (2n+2k+3)(2n-2k+3)=9$$

Ta có $(2n+2k+3)\geq(2n-2k+3)$

Và $9=9.1=3.3=(-1).(-9)=(-3).(-3)$

Trường hợp 1 : $\begin{cases}2n+2k+3=9\\2n-2k+3=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n+k=3\\n-k=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n=1\\k=2\end{cases}\Rightarrow A=4$

Trường hợp 2 : $\begin{cases}2n+2k+3=3\\2n-2k+3=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n+k=0\\n-k=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n=0\\k=0\end{cases}\Rightarrow A=0$

Trường hợp 3 : $\begin{cases}2n+2k+3=-1\\2n-2k+3=-9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n+k=-2\\n-k=-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n=-4\\k=2\end{cases}\Rightarrow A=4$

Trường hợp 4 : $\begin{cases}2n+2k+3=-3\\2n-2k+3=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n+k=-3\\n-k=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n=-3\\k=0\end{cases}\Rightarrow A=0$

Vậy khi $n=-4;-3;0;1$ thì ta có A là số chính phương.

Bài toán 2. Tìm số nguyên n sao cho $n+1955$ và $n+2014$ là một số chính phương.

Hướng dẫn giải

Giả sử $n+1955=a^2$; $n+2014=b^2$ với $a,\ b\in\mathbb{N}$ và $a<b$.

Khi đó $b^2-a^2=59\Leftrightarrow(b-a)(b+a)=59\Leftrightarrow\begin{cases}b-a=1\\b+a=59\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=29\\b=30\end{cases}$.

Dễ dàng suy ra $n=-1114$.

Bài toán 3. Tìm số nguyên dương n để các biểu thức sau là số chính phương:

a) $A=n^2-n+2$ *b*) $B=n^5-n+2$

Hướng dẫn giải

a) Với n = 1 thì A = n^2 – n + 2 = 2 không là số chính phương

Với n = 2 thì A = n^2 – n + 2 = 4 là số chính phương

Với n > 2 thì A = n^2 – n + 2 không là số chính phương vì

$(n-1)^2=n^2-(2n-1)<n^2-(n-2)<n^2$

Vậy n = 2 thì A là số chính phương.

b) Ta có: $n^5 - n = (n^2 - 1)n(n^2 + 1)$

Với n = 5k thì n chia hết cho 5.

Với $n = 5k \pm 1$ thì $n^2 - 1$ chia hết cho 5

Với $n = 5k \pm 2$ thì $n^2 + 1$ chia hết cho 5

Do đó $n^5 - n$ luôn chia hết cho 5

Nên $n^5 - n + 2$ chia cho 5 thì dư 2 nên $n^5 - n + 2$ có chữ số tận cùng là 2 hoặc 7 nên $B = n^5 - n + 2$ không là số chính phương

Vậy không có giá trị nào của n thỏa để B là số chính phương.

Bài toán 4. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho các số $n+1$, $2n+1$, $5n+1$ đều là các số chính phương.

Hướng dẫn giải

Nếu $n = 3k + 1$ $(k \in \mathbb{N})$ thì $n + 1 = 3k + 2$, không là số chính phương.

Nếu $n = 3k + 2$ thì $2n + 1 = 6k + 5$, cho cho 3 dư 2 nên không là số chính phương. Vậy $n \vdots 3$.

$2n+1$ là số chính phương lẻ nên chia cho 8 dư 1. Suy ra $2n \vdots 8 \Rightarrow n \vdots 4 \Rightarrow n+1$ lẻ. Do $n+1$ là số chính phương lẻ nên $n+1$ chia cho 8 dư 1, suy ra $n \vdots 8$.

n chia hết cho các số nguyên tố cùng nhau 3 và 8 nên $n \vdots 24$. Với $n = 24$ thì $n+1 = 25 = 5^2$, $2n+1 = 49 = 7^2$, $5n+1 = 121 = 11^2$.

Giá trị nhỏ nhất của n phải tìm là 24.

Bài toán 5. Tìm số tự nhiên n ≥ 1 sao cho tổng 1! + 2! + 3! + … + n! là một số chính phương.

(Đề thi HSG lớp 6 - Phòng giáo dục đào tạo Phúc Yên - Vĩnh Phúc)

Hướng dẫn giải

Với n = 1 thì 1! = 1 = 1^2 là số chính phương

Với n = 2 thì 1! + 2! = 3 không là số chính phương

Với n = 3 thì 1! + 2! + 3! = 1 + 1.2 + 1.2.3 = 9 = 3^2 là số chính phương

Với n ≥ 4 ta có 1! + 2! + 3! + 4! = 1 + 1.2 + 1.2.3 + 1.2.3.4 = 33 còn 5!; 6!; …; n! đều tận cùng bởi 0 do đó 1! + 2! + 3! + … n! có tận cùng bởi chữ số 3 nên nó không phải là số chính phương.

Vậy có 2 số tự nhiên n thoả mãn đề bài là n = 1; n = 3.

Bài toán 6. Tìm số nguyên dương n sao cho $A = (n+3)(4n^2 + 14n + 7)$ là số một chính phương.

(Đề thi chọn HSG Toán 9 tỉnh Thái Bình)

Hướng dẫn giải

Ta có: $4n^2+14n+7=(n+3)(4n+2)+1$ và n là số nguyên dương nên $n+3$ và $4n^2+14n+7$ là nguyên tố cùng nhau. Vì vậy, để A là số chính phương thì $4n^2+14n+7$ và n + 3 phải là số chính phương.

Do $n \in Z^+$ nên ta có $(2n+3)^2 \le 4n^2+14n+7<(2n+4)^2$.

$\Rightarrow 4n^2+14n+7=(2n+3)^2 \Rightarrow n=1$. Khi đó n + 3 = 4 là số chính phương.

Thử lại, với $n=1$, ta có $A=10^2$.

Vậy số nguyên dương cần tìm là $n=1$.

Bài toán 7. Tìm $3 \le a \in \mathbb{N}$ sao cho $\overline{a(a-1)}.\overline{a(a-1)}=\overline{(a-2)aa(a-1)}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\overline{a(a-1)}.\overline{a(a-1)}=\overline{(a-2)aa(a-1)} \Leftrightarrow \overline{a(a-1)}^2=\overline{(a-2)aa(a-1)}$. (*)

Vì VT(*) là số chính phương nên VP(*) cũng là số chính phương.

Vì số chính phương chỉ có chữ số tận cùng thuộc tập hợp $\{0;1;4;5;6;9\}$

nên a có chữ số tận cùng thuộc tập hợp $\{1;2;5;6;7;0\}$.

Do a là chữ số nên $a \le 9$. Kết hợp với $3 \le a \in \mathbb{N}$ nên $a \in \{5;6;7\}$.

Thử lần lượt từng giá trị ta thu được $a=7$ thỏa mãn $76^2=5776$.

Bài toán 8. Tìm số tự nhiên n sao cho 2^n+9 là số chính phương.

Hướng dẫn giải

Giả sử $2^n+9=m^2$, $m \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (m-3)(m+3)=2^n$.

Vì $m-3<m+3$ nên $\begin{cases} m-3=2^a \\ m+3=2^b \end{cases}$, với a, $b \in \mathbb{N}$ và $a<b$.

Ta có $2^b-2^a=6 \Leftrightarrow 2^a\left(2^{b-a}-1\right)=6$.

Vì $2^a\left(2^{b-a}-1\right)\,\vdots\, 2$ mà $2^a\left(2^{b-a}-1\right) \not\vdots\, 4$ nên $a=1$. Điều này dẫn đến $m=5$ và $n=4$.

Dạng 4: Tìm số chính phương.

*** Cơ sở phương pháp:** Dựa vào định nghĩa về số chính phương $A = k^2$, với k là số nguyên và các yêu cầu của bài toán để tìm ra số chính phương thỏa bài toán.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm số chính phương $\overline{abcd}$ biết $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$.

Hướng dẫn giải

Giả sử $n^2 = \overline{abcd} = 100\overline{ab} + \overline{cd} = 100\left(1 + \overline{cd}\right) + \overline{cd} = 101\overline{cd} + 100$, $n \in Z$.

$\Rightarrow 101.\overline{cd} = n^2 - 100 = (n-10)(n+10)$.

Vì $n < 100$ và 101 là số nguyên tố nên $n + 10 = 101$.

$\Rightarrow n = 91$.

Thử lại: $\overline{abcd} = 91^2 = 8281$ có $82 - 81 = 1$.

Vậy $\overline{abcd} = 8281$.

Bài toán 2. Cho A là số chính phương gồm 4 chữ số. Nếu ta thêm vào mỗi chữ số của A một đơn vị thì ta được số chính phương B. Hãy tìm các số A và B.

Hướng dẫn giải

Gọi $A = \overline{abcd} = k^2$.

Theo đề bài ta có: $\begin{cases} A = \overline{abcd} = k^2 \\ B = \overline{abcd} + 1111 = m^2 \end{cases}$.

(với $k, m \in N^*$ và $31 < k < m < 100$, $a, b, c, d = \overline{1,9}$).

$\Rightarrow m^2 - k^2 = 1111 \Leftrightarrow$ (m - k)(m + k) = 1111 (*)

Nhận xét thấy tích (m – k)(m + k) > 0 nên m – k và m + k là 2 số nguyên dương.

Và m – k < m + k < 200 nên (*) có thể viết (m – k) (m + k) = 11.101

Do đó: $\begin{cases} m - k = 11 \\ m + k = 101 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 56 \\ k = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2025 \\ B = 3136 \end{cases}$

Vậy A = 2025, B = 3136.

Bài toán 3. Tìm một số chính phương gồm 4 chữ số sao cho chữ số cuối là số nguyên tố, căn bậc hai của số đó có tổng các chữ số là một số chính phương.

Hướng dẫn giải

Gọi số phải tìm là $\overline{abcd}$ với a; b; c; d là các số tự nhiên

và $1 \leq a \leq 9; 0 \leq b, c, d \leq 9$.

Ta có $\overline{abcd}$ chính phương $\Rightarrow d \in \{0,1,4,5,6,9\}$.

Vì d là số nguyên tố $\Rightarrow d = 5$.

Đặt $\overline{abcd} = k^2 < 10000 \Rightarrow 32 \leq k < 100,\ k \in N$.

Do k là một số có hai chữ số mà k^2 có tận cùng bằng 5 $\Rightarrow$ k tận cùng bằng 5

Tổng các chữ số của k là một số chính phương $\Rightarrow$ k = 45 (vì k tận cùng bằng 5 và có 2 chữ số)

$\Rightarrow \overline{abcd} = 2025$

Vậy số phải tìm là: 2025.

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Cho $a;b;c$ là 3 số nguyên thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$.

Chứng minh rằng $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$ là 1 số chính phương.

Bài 2: Tìm số nguyên dương n sao cho $\dfrac{n(2n-1)}{26}$ là số chính phương .

(Đề TS lớp 10 THPT Chuyên Lam Sơn- Thanh Hóa 2012-2013)

Bài 3: Tìm tất cả các số nguyên n sao cho $A = n^4 + n^3 + n^2$ có giá trị là số chính phương.

(Đề TS lớp 10 THPT Chuyên Phan Bội Châu-Nghệ An 2010-2011)

Bài 4: Chứng minh rằng mọi số nguyên x, y thì biểu thức

$A = (x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y)+y^4$ có giá trị là số chính phương.

Bài 5: Chứng minh rằng các số sau đây là số chính phương:

a) $A = 224\underbrace{99...9}_{n-2}1\underbrace{00...0}_{n}9$ b) $B = \underbrace{11...1}_{n}\underbrace{55...5}_{n-1}6$

Bài 6: Chứng minh rằng tổng các bình phương của 5 số liên tiếp không thể là số chính phương.

Bài 7: Cho dãy số $49; 4489; 444889; 44448889; ...$

Dãy số trên được xây dựng bằng cách thêm số 48 vào giữa số đứng trước nó. Chứng minh rằng tất cả các số của dãy trên đều là số chính phương

Bài 8: Chứng minh rằng nếu p là tích của n số nguyên tố đầu tiên thì $p-1$ và $p+1$ không thể là các số chính phương.

Bài 9: Có hay không số tự nhiên n để $2010 + n^2$ là số chính phương.

Bài 10: Chứng minh rằng tổng các bình phương của 5 số tự nhiên liên tiếp không thể là một số chính phương

Bài 11: Chứng minh rằng nếu n là số tự nhiên sao cho n + 1 và 2n + 1 đều là các số chính phương thì n là bội số của 24.

Bài 12: Tìm số chính phương có 4 chữ số biết rằng 2 chữ số đầu giống nhau, 2 chữ số cuối giống nhau.

Bài 13 : Tìm 3 số lẻ liên tiếp mà tổng bình phương là một số có 4 chữ số giống nhau.

Bài 14: Cho số nguyên dương n và các số A = $\underbrace{444....4}_{2n}$ (A gồm 2n chữ số 4); B = $\underbrace{888.....8}_{n}$ (B gồm n chữ số 8). Chứng minh rằng A + 2B + 4 là số chính phương.

(Đề vào chuyên toán Hà Nam năm 2013-2014)

Bài 15: Giả sử $N = 1.3.5.7....2007$

Chứng minh rằng trong 3 số nguyên liên tiếp $2N-1,\ 2N,$ và $2N+1$ không có số nào là số chính phương.

Bài 16: Với mỗi số nguyên dương n, ký hiệu S_n là tổng của n số nguyên tố đầu tiên $\left(S_1 = 2, S_2 = 2+3, S_3 = 2+3+5, ...\right)$. Chứng minh rằng trong dãy số $S_1, S_2, S_3, ...$ không tồn tại hai số hạng liên tiếp đều là các số chính phương .

(Đề vào chuyên toán sư phạm Hà Nội năm 2013-2014)

Bài 17: Cho p là một số nguyên tố. Tìm p để tổng các ước nguyên dương của p^4 là một số chính phương.

(Đề vào chuyên Hưng Yên năm 2013-2014)

Bài 18: Tìm tất cả số tự nhiên n sao cho $n^2 - 14n - 256$ là một số chính phương.

(Đề thi HSG lớp 9 Thanh Oai năm 2012-2013)

Bài 19: Cho các số nguyên a, b, c $\neq$ 0 thoả mãn: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{abc}$

Chứng minh rằng: $\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)$ là số chính phương

(Đề thi HSG lớp 9 trường Trần Mai Ninh năm 2012-2013)

Bài 20: Tìm số tự nhiên n sao cho $A = n^2 + n + 6$ là số chính phương

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Vĩnh Lộc năm 2018-2019)

Bài 21: Tìm số tự nhiên gồm bốn chữ số $\overline{abcd}$ biết rằng nó là một số chính phương, chia hết cho 9 và d là một số nguyên tố.

(Đề thi HSG lớp 9 quận Ngô Quyền năm 2018-2019)

Bài 22: *(Đề thi HSG lớp 9 huyện Cẩm Giang năm 2018-2019)*

Cho $S = 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{98}$. Chứng tỏ S không phải là số chính phương.

Bài 23: Tìm x nguyên dương để $4x^3+14x^2+9x-6$ là số chính phương

(Đề thi HSG lớp 9 TP Bắc Giang năm 2017-2018)

Bài 24: Tìm số tự nhiên n sao cho n^2+17 là số chính phương?

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Kim Thành năm 2012-2013)

Bài 25: Tìm các số nguyên dương n sao cho $2^n+3^n+4^n$ là số chính phương.

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Vũ Quang năm 2018-2019)

Bài 26: Tìm tất cả các số nguyên n sao cho n^2+2014 là một số chính phương

(Đề thi HSG lớp 9 Trường Thanh Văn năm 2017-2018)

Bài 27: Tìm các số nguyên x sao cho x^3-3x^2+x+2 là số chính phương.

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Lục Nam năm 2018-2019)

Bài 28: Tìm số tự nhiên *A* biết rằng trong ba mệnh đề sau có hai mệnh đề đúng và một mệnh đề sai:

a) $A+51$ là số chính phương.

b) Chữ số tận cùng bên phải của *A* là số 1.

c) $A-38$ là số chính phương.

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Đan Phượng năm 2018-2019)

Bài 29: Tìm các số hữu tỉ n thỏa mãn tổng sau là số chính phương: $n^2+n+503$.

Giả sử tồn tại số hữu tỉ n và số nguyên dương m để $n^2+n+503=m^2$.

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Vũ Quang năm 2018-2019)

Bài 30: Tìm các số tự nhiên n sao cho $n-50$ và $n+50$ đều là số chính phương.

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Thăng Bình năm 2018-2019)

Bài 31: Tìm số tự nhiên n sao cho: $n+24$ và $n+65$ là hai số chính phương.

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Phù Ninh năm 2018-2019)

Bài 32: Chứng minh rằng: $B=4x(x+y)(x+y+z)(x+z)+y^2z^2$ là một số chính phương với x, y, z là các số nguyên.

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Tiền Hải năm 2017-2018)

Bài 33: Tìm $n\in\mathbb{N}^*$ sao cho: n^4+n^3+1 là số chính phương.

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Thanh Oai năm 2012-2013)

Bài 34: Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(x;y)$ sao cho $2\left(x^2+y^2-3x+2y\right)-1$ và $5\left(x^2+y^2+4x+2y+3\right)$ đều là số chính phương.

(Đề vào 10 Chuyên Nam Định năm 2019-2020)

Bài 35: Chứng minh rằng số $M=(n+1)^4+n^4+1$ chia hết cho một số chính phương khác 1 với mọi số n nguyên dương.

(Đề vào 10 Chuyên Bình Thuận năm 2019-2020)

Bài 36: Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $\sqrt{12n^2+1}$ là số nguyên. Chứng minh rằng $2\sqrt{12n^2+1}+2$ là số chính phương.

(Đề vào 10 Chuyên Bắc Ninh năm 2019-2020)

Bài 37: Cho a, b, c là các số nguyên dương nguyên nguyên tố cùng nhau và thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$. Chứng minh rằng $a+b$ là số chính phương.

(Đề vào 10 Chuyên Thái Nguyên năm 2016-2017)

Bài 38: Chứng minh rằng nếu a và b là các số tự nhiên lẻ thì a^2+b^2 không phải là số chính phương.

(Đề vào 10 Chuyên Hòa Bình năm 2016-2017)

Bài 39: Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho n^2+3^n là một số chính phương.

(Đề vào 10 Chuyên Quốc Học Huế năm 2017-2018)

Bài 40: Chứng minh rằng nếu số tự nhiên $\overline{abc}$ là số nguyên tố thì b^2-4ac không là số chính phương.

(Đề vào 10 Chuyên Bình Định năm 2017-2018)

Bài 41: Tìm các số nguyên m sao cho m^2+12 là số chính phương.

(Đề vào 10 Chuyên Phú Thọ năm 2017-2018)

Bài 42: Tìm tất cả các cặp (x; y) nguyên dương sao cho x^2+8y và y^2+8x là các số chính phương.

(Đề vào 10 Chuyên Toán Hải Dương năm 2017-2018)

Bài 43: Cho biểu thức $A=(m+n)^2+3m+n$ với m, n là các số nguyên dương. Chứng minh rằng nếu A là một số chính phương thì n^3+1 chia hết cho m.

(Đề vào 10 Chuyên TP Hồ Chí Minh năm 2017-2018)

Bài 44: Cho p là một số nguyên tố. Tìm tất cả các số nguyên n để $A=n^4+4n^{p-1}$ là số chính phương.

(Đề vào 10 Chuyên Bà Rịa Vũng Tàu năm 2017-2018)

Bài 45: Cho hai số nguyên dương m, n thỏa mãn $m+n+1$ là một ước nguyên tố của $2(m^2+n^2)-1$. Chứng minh rằng $m.n$ là số chính phương.

(Đề vào 10 Chuyên Nghệ An năm 2018-2019)

Bài 46: Tìm các giá trị nguyên của x để $M=x^4+(x+1)^3-2x^2-2x$ là số chính phương.

(Đề vào 10 Chuyên Hưng Yên năm 2018-2019)

Bài 47: Cho số tự nhiên $n\ge 2$ và số nguyên tố p thỏa mãn $p-1$ chia hết cho n đồng thời n^3-1 chia hết cho p. Chứng minh rằng $n+p$ là một số chính phương.

(Đề vào 10 Chuyên Đại học Vinh Nghệ An năm 2018-2019)

Bài 48: Tìm hai số nguyên tố p và q, biết rằng $p+q$ và $p+4q$ đều là các số chính phương.

(Đề vào 10 Chuyên Quảng Nam năm 2018-2019)

Bài 49: Chứng minh rằng nếu hiệu các lập phương của 2 số nguyên liên tiếp là bình phương của một số tự nhiên n thì n là tổng 2 số chính phương liên tiếp.

(Đề vào 10 Chuyên Bắc Ninh năm 2018-2019)

Bài 50: Chứng minh rằng không tồn tại số tự nhiên n để $2018+n^2$ là số chính phương.

(Đề vào 10 Chuyên Bắc Giang năm 2018-2019)

Bài 51: Cho $A=m^2n^2-4m-2n$ với m,n là các số nguyên dương. Khi $n=2$ tìm m để A là số chính phương. Khi $n\ge 5$ chứng minh rằng A không thể là số chính phương.

(Đề vào 10 Chuyên Bà Rịa Vũng Tàu năm 2018-2019)

Bài 52: Chứng minh nếu $a;b$ là các số nguyên thỏa mãn hệ thức $2a^2+a=3b^2+b$ thì $a-b$ và $2a+2b+1$ là những số chính phương.

Bài 53: Tìm số tự nhiên x để biểu thức $x^2+2x+20$ có giá trị là một số chính phương.

Bài 54. Tìm các số nguyên x sao cho $A=x(x-1)(x-7)(x-8)$ là một số chính phương.

Bài 55. Cho $A=\underbrace{11...1}_{2n}-\underbrace{88...8}_{n}+1$. Chứng minh A là một số chính phương.

Bài 56. Tìm tất cả số tự nhiên x,y để 2^x+5^y là số chính phương.

Bài 57. Tìm $n\in N$ để $2^8+2^{11}+2^n$ là số chính phương .

Bài 58. Tìm số tự nhiên n có 2 chữ số biết rằng $2n+1$ và $3n+1$ đều là các số chính phương.

Bài 59. Cho các số: $\begin{cases} A=\underbrace{11.....11}_{2m} \\ B=\underbrace{11.....11}_{m+1} \\ C=\underbrace{66.....66}_{m} \end{cases}$; Chứng minh rằng: $A+B+C+8$ là một số chính phương.

Bài 60. Tìm tất cả các số nguyên n sao cho $n^4+2n^3+2n^2+n+7$ là số chính phương.

(Đề thi vào lớp 10 chuyên, trường ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội năm 1992)

Bài 61. Tìm tất cả các số nguyên không âm n sao cho có các số nguyên $a,\ b$ thỏa mãn $n^2=a+b$ và $n^3=a^2+b^2$.

(Romanian MO 2004)

Bài 62. Hãy tìm hai số chính phương phân biệt $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ và $\overline{b_1b_2b_3b_4}$ biết rằng $a_1-b_1=a_2-b_2=a_3-b_3=a_4-b_4$

Bài 63. Có tồn tại hay không 2013 số nguyên dương $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_{2013}$ sao cho các số

$a_1^2+a_2^2,\ a_1^2+a_2^2+a_3^2,\ a_1^2+a_2^2+...+a_{2013}^2$ đều là số chính phương?

Bài 64. Thay các dấu * bằng các chữ số sao cho số sau đây là một số tự nhiên.

$$A=\sqrt[6]{4****}$$

Bài 65. Với mỗi $n\in\mathbb{N}$, đặt $A_n=\left(10^n+10^{n-1}+...+10+1\right)\left(10^{n+1}+5\right)+1$. Chứng minh rằng A_n là số chính phương.

Bài 66. Giả sử rằng $2n+1$ và $3n+1$ là các số chính phương. Chứng minh rằng $5n+3$ là một hợp số.

Bài 67. Có hay không các số x,y phân biệt thuộc khoảng $(988;1994)$ sao cho $xy+x$ và $xy+y$ đều là các số chính phương ?

(Thi học sinh giỏi toán lớp 9, TP.HCM năm 1994)

Bài 68. Có tồn tại hay không một số tự nhiên n sao cho số $k=\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}$ là một số hữu tỉ.

Bài 69. Cho dãy số , $a_2 = 144$, $a_3 = 1444$, $a_n = 1\underbrace{444...44}_{n\ chu\ so\ 4}$

Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho a_n là số chính phương.

Bài 70. Chứng minh rằng có vô số bộ ba 3 số tự nhiên (a,b,c) sao cho a,b,c nguyên tố cùng nhau và số $n = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$ là một số chính phương.

Bài 71. Tìm các số nguyên m và n để cho đa thức $p(x) = x^4 + mx^3 + 29x^2 + nx + 4, x \in \mathbb{Z}$ là một số chính phương.

Bài 72.

1. Tìm số tự nhiên a nhỏ nhất, $a \neq 0$ sao cho a chia hết cho 6 và 1000a là số chính phương.
2. Tìm số tự nhiên b nhỏ nhất sao cho số $(b-1)$ không chia hết cho 9, b chia hết cho tích của bốn số nguyên tố liên tiếp và 2002.b là số chính phương.

Bài 73. Cho a và b là 2 số tự nhiên, $a^2 - b^2$ có thể là một số chính phương không?

Bài 74. Tìm số tự nhiên $k = \overline{ab}$ có hai chữ số sao cho $k + ab = (a+b)^2$

Bài 75. Tìm tất cả các số nguyên n để $A = 2017^2(n^4 + n^3 + n^2)$ là số chính phương

(Tạp chí Toán & học tuổi trẻ số 468)

Bài 76. Tìm số nguyên dương n để $\dfrac{n-37}{n+43}$ là bình phương của một số hữu tỷ dương tùy ý.

(HSG Nam Định 2015 -2016)

Bài 77. Tìm số tự nhiên có dạng $\overline{abc}$ thỏa mãn: $\overline{abc} = n^2 - 1$ và $\overline{cba} = (n-2)^2$ với $n \in \mathbb{Z}$, $n > 2$.

(HSG Sóc Trăng 2015 - 2016)

Bài 78. Tìm số tự nhiên n sao cho $n+12$ và $n-11$ đều là số chính phương.

(HSG Sóc Trăng 2016 - 2017)

Bài 79. Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $n^2 - 14n - 256$ là một số chính phương.

(HSG Quảng Nam 2014 - 2015)

Bài 80. Cho n là số tự nhiên có 2 chữ số. Tìm n biết n + 4 và 2n đều là các số chính phương.

(HSG Trà Vinh 2016 - 2017)

Bài 81. Cho n là số tự nhiên. Hãy tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho số $A = 1010n^2 + 2010(n+p) + 10^{10^{195}}$ có thể viết dưới dạng hiệu của 2 số chính phương.

(HSG Lâm Đồng 2016 - 2017).

Bài 82. Tìm nghiệm nguyên dương x để $3^x + 171$ là số chính phương.

(HSG Lai Châu 2015 - 2016)

Bài 83. Tìm tất cả các số tự nhiên x sao cho $5^x + 12^x$ là một số chính phương.

(HSG Bắc Giang 2015 - 2016)

Bài 84. Tìm tất cả các số nguyên n sao cho A là một số chính phương với $A = 4n^4 + 22n^3 + 37n^2 + 12n - 12.$

(Chuyên Yên Bái 2016 - 2017).

Bài 85. Tìm các số nguyên k để $k^4 - 8k^3 + 23k^2 - 26k + 10$ là số chính phương.

(Chuyên Hải Dương 2015 - 2016).

Bài 86. Tìm số tự nhiên n (n > 1) bé nhất sao cho $\dfrac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n}$ là số chính phương.

(Tạp chí toán học tuổi trẻ số 362).

Bài 87: Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho cả hai số $9n + 16$ và $16n + 9$ đều là số chính phương.

Bài 88: Lấy một số tự nhiên có 2 chữ số chia cho số có 2 chữ số viết theo thứ tự ngược lại thì được thương là 4 và dư 15. Nếu lấy số đó trừ đi 9 thì được một số bằng tổng bình phương của 2 chữ số tạo thành số đó. Tìm số tự nhiên ấy.

Bài 89. Viết các số 1, 2, 3, …, 2007 thành dãy theo thứ tự tùy ý được số A. Hỏi số $A + 2008^{2007} + 2009$ có phải là số chính phương hay không? Vì sao?

(Tạp chí toán học và tuổi trẻ số 377)

Bài 90. Cho các số hữu tỉ x, y thỏa mãn $x^5 + y^5 = 2x^2y^2$. Chứng minh $1 - xy$ là bình phương của một số hữu tỉ.

Bài 91. Cho m, n là hai số nguyên dương lẻ sao cho $n^2 - 1$ chia hết cho $[m^2 + 1 - n^2]$. Chứng minh rằng $[m^2 + 1 - n^2]$ là số chính phương.

Bài 92. Chứng minh rằng trong ba số chính phương tuỳ ý luôn tồn tại hai số mà hiệu của chúng chia hết cho 4.

Bài 93. Chứng minh rằng $n^5 + 1999n + 2017$ $(n \in N)$ không phải là số chính phương.

(HSG Tỉnh Quảng Ngãi 2017 – 2018)

Bài 94. Giả sử n là số nguyên dương thoả mãn điều kiện $n^2 + n + 3$ là số nguyên tố. Chứng minh rằng n chia 3 dư 1 và $7n^2 + 6n + 2017$ không phải số chính phương.

(Chuyên Tỉnh Quảng Ngãi 2017-2018)

Bài 95. Cho x, y là các số nguyên thoả mãn $2x^2 + x = 3y^2 + y$.

Chứng minh $x - y; 2x + 2y + 1$ và $3x + 3y + 1$ đều là các số chính phương.

(HSG Tỉnh Thanh Hoá 2015-2016)

Bài 96. Cho biểu thức $A = 2(1^2 + 2^2 + ... + 2017^2)$. Hỏi A có là bình phương của một số nguyên hay không?

(Toán học tuổi thơ số 120)

Bài 97. Cho a và b là các số tự nhiên thoả mãn $2016a^2 + a = 2017b^2 + b$ (1).

Chứng minh rằng $a-b$ là một số chính phương.

(Toán học tuổi thơ số 120)

Bài 98. Cho x, y, z là các số nguyên tố cùng nhau và thoả mãn $(x-z)(y-z)=z^2$. Chứng minh rằng tích 2017^2xyz là một số chính phương.

(Toán học tuổi thơ số 120)

Bài 99: Xác định số điện thoại của THCS thành phố Thủ Dầu Một, biết số đó dạng $\overline{82xxyy}$ với $\overline{xxyy}$ là số chính phương.

(HSG Bình Dương 2016 – 2017)

Bài 100: Tìm tất cả các số tự nhiên *n* sao cho $C=2019^n+2020$ là số chính phương.

(HSG Quảng Bình 2018 – 2019)

Bài 101: Tìm số nguyên tố p thỏa mãn p^3-4p+9 là số chính phương.

(HSG Bắc Ninh 2018 – 2019)

Bài 102: Cho $B=1.2.3+2.3.4+3.4.5+...+n.(n-1).(n-2)$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng B không là số chính phương.

(HSG Bắc Ninh 2018 – 2019)

Bài 103: Cho số nguyên tố $p\,(p>3)$ và hai số nguyên dương a,b sao cho $p^2+a^2=b^2$. Chứng minh a chia hết cho 12 và $2(p+a+1)$ là số chính phương.

(HSG Quảng Nam 2018 – 2019)

Bài 104: Từ 625 số tự nhiên liên tiếp 1; 2; 3; …; 625 chọn ra 311 số sao cho không có hai số nào có tổng bằng 625. Chứng minh rằng trong 311 số được chọn, bao giờ cũng có ít nhất một số chính phương.

(HSG Hưng Yên 2017 – 2018)

Bài 105: Tìm các số tự nhiên n sao cho $n^2+2n+\sqrt{n^2+2n+18}+9$ là số chính phương.

(HSG Hải Dương 2016 – 2017)

Bài 106: Tìm các số có 2 chữ số $\overline{ab}\,(a\neq b)$ sao cho số $n=\overline{ab}-\overline{ba}$ là một số chính phương

(HSG Hưng Yên 2015 – 2016)

Bài 107: Cho $a=\underbrace{111\,...1}_{2017\text{ số }1}$ và $b=1\underbrace{000...0}_{2016\text{ số }0}5$. Chứng minh rằng số $M=ab+1$ là số chính phương.

(HSG Đăk Lăk 2015 – 2016)

Bài 108: Chứng minh rằng với mỗi số nguyên $n\geq 6$ thì số: $a_n=1+\dfrac{2.6.10....(4n-2)}{(n+5)(n+6)...(2n)}$ là một số chính phương

(Trích đề chuyên toán Đại học sư phạm Hà Nội 2014 – 2015)

Bài 109: Tìm a, b để $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + x(a-4) + b + 2$ viết thành bình phương của một đa thức.

(HSG huyện Chương Mỹ 2019 – 2010)

Bài 110: Xác định số điện thoại của THCS X thành phố Thủ Dầu Một, biết số đó dạng $\overline{82xxyy}$ với $\overline{xxyy}$ là số chính phương.

(HSG tỉnh Bình Dương 2016 – 2017)

Bài 111: Cho hai số tự nhiên *a, b* thỏa mãn $2a^2 + a = 3b^2 + b$. Chứng minh rằng 2a + 3b + 1 là số chính phương.

(HSG tỉnh Hải Dương 2016 – 2017)

Bài 112: Cho *n* là số nguyên dương và *m* là ước nguyên dương của $2n^2$. Chứng minh rằng $n^2 + m$ không là số chính phương.

(HSG tỉnh Hải Dương 2016 – 2017)

Bài 113: Tìm tất cả các số nguyên dương n để $A = 2^9 + 2^{13} + 2^n$ là số chính phương.

(HSG tỉnh Hải Dương 2009 – 2010)

Bài 114. Cho a, b là hai số nguyên dương, đặt $A = (a+b)^2 - 2a^2$, $B = (a+b)^2 - 2b^2$. Chứng minh rằng A và B không đồng thời là số chính phương.

(Vào 10 Chuyên Sư Phạm Hà Nội 2018 – 2019)

Bài 115. Cho 2 số nguyên a,b thỏa mãn $a^2 + b^2 + 1 = 2(ab + a + b)$. Chứng minh a và b là hai số chính phương liên tiếp.

(Vào 10 Chuyên Sư Phạm Hà Nội 2015 – 2016)

Bài 116. Cho hai số hữu tỉ *a, b* thỏa mãn đẳng thức $a^3b + ab^3 + 2a^2b^2 + 2a + 2b + 1 = 0$. Chứng minh rằng $1 - ab$ là bình phương của một số hữu tỉ.

(Vào 10 Chuyên Sư Phạm Hà Nội 2011 – 2012)

Bài 117. Giả sử *m* và *n* là những số nguyên dương với n > 1. Đặt $S = m^2n^2 - 4m + 4n$. Chứng minh rằng:

1) Nếu $m > n$ thì $(mn^2 - 2)^2 < n^2S < m^2n^4$.

2) Nếu *S* là số chính phương thì $m = n$.

(Vào 10 Chuyên Sư Phạm Hà Nội 2010 – 2011)

Bài 118. Cho x, y là những số nguyên lớn hơn 1 sao cho $4x^2y^2 - 7x + 7y$ là số chính phương. Chứng minh rằng: $x = y$.

(Vào 10 Chuyên Khoa học tự nhiên 2014 – 2015)

Bài 119. Cho biểu thức $A = (m+n)^2 + 3m + n$ với m, n là các số nguyên dương. Chứng minh rằng nếu A là một số chính phương thì $n^3 + 1$ chia hết cho m.

(Vào 10 Chuyên TP. Hồ Chí Minh 2017 – 2018)

Bài số 120. Chứng minh rằng: Nếu $\overline{abc}$ là số nguyên tố thì $b^2 - 4ac$ không phải là số chính phương.

Bài 121. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất để $\frac{(n+1)(4n+3)}{3}$ là số chính phương.

Bài 122. Tìm các số nguyên tố x, y sao cho: $x^2+3xy+y^2$ là số chính phương.

Bài 123. Cho 2 số tự nhiên $y > x$ thỏa mãn: $(2y-1)^2 = (2y-x)(6y+x)$. Chứng minh $2y-x$ là số chính phương.

Bài 124. Cho các số nguyên dương a,b,c thỏa mãn: $(a,b,c)=1, ab=c(a-b)$. Chứng minh: $a-b$ là số chính phương.

Bài 125. Cho x, y là số nguyên dương sao cho x^2+y^2-x chia hết cho xy. Chứng minh: x là số chính phương.

Bài 126. Cho 3 số tự nhiên a,b,c thỏa mãn điều kiện $a-b$ là số nguyên tố và $3c^2 = ab + c(a+b)$. Chứng minh: $8c+1$ là số chính phương.

Bài 127. Giả sử n là số tự nhiên lớn hơn 1 sao cho $8n+1$ và $24n+1$ là số chính phương. Chứng minh rằng: $8n+3$ là hợp số.

Bài 128. Cho a,b là hai số nguyên sao cho tồn tại hai số nguyên liên tiếp c và d để $a-b = a^2c - b^2d$. Chứng minh rằng $|a-b|$ là số chính phương.

Bài 129. Cho các số tự nhiên a,b,c sao cho $a^2+b^2+c^2 = (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$. Chứng minh rằng các số ab, bc, ca và $ab+bc+ca$ đều là số chính phương.

Bài 130. Cho $A = \underbrace{33...3}_{n}{}^2 + \underbrace{55...5}_{n-1}\underbrace{44...4}_{n}{}^2$. Chứng minh rằng A là số chính phương.

Bài 131. Tìm tất cả các số tự nhiên n để $4n+9$ và $9n+10$ đều là số chính phương.

Bài 132. Tìm tất cả các số tự nhiên n để 3^n+144 là số chính phương.

Bài 133. Tìm tất cả các số nguyên dương n để 3^n+63 là số chính phương.

Bài 134. Chứng minh rằng không thể thêm chữ số 0 vào giữa chữ số 6 và 8 trong số 1681 để thu được một số chính phương.

Bài 135. Tìm tất cả các số tự nhiên n để $2^{2012}+2^{2015}+2^n$ là số chính phương.

Bài 136. Tìm tất cả các cặp số tự nhiên m,n sao cho 2^m+3^n là số chính phương.

Bài 137. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (m,n) để $2^m.5^n+25$ là số chính phương.

Bài 138. Tìm các số nguyên dương $x,\ y$ sao cho x^2+3y và y^2+3x là số chính phương.

Bài 139.

a) Chứng minh rằng: Nếu n là số tự nhiên sao cho $2n+1$ và $3n+1$ là số chính phương thì $n \vdots 40$.

b) Tìm tất cả các số tự nhiên $\overline{ab}$ để $2\overline{ab}+1,\ 3\overline{ab}+1$ là các số chính phương.

Bài 141.

a) Chứng minh: $n=1984$ là giá trị lớn nhất của n để số $4^{31}+4^{1008}+4^n$ là số chính phương.

b) Tìm các số nguyên dương $x,\ y,\ z$ để: $4^x+4^y+4^z$ là số chính phương.

Bài 142. Cho số nguyên dương n và d là một ước số nguyên dương của $3n^2$. Chứng minh: n^2+d là số chính phương khi và chỉ khi $d=3n^2$.

Bài 143. Cho m,n là 2 số nguyên dương lẻ sao cho n^2-1 chia hết cho $|m^2-n^2+1|$. Chứng minh rằng: $|m^2-n^2+1|$ là số chính phương.

CHỦ ĐỀ 5

ỨNG DỤNG ĐỒNG DƯ THỨC TRONG GIẢI TOÁN SỐ HỌC

A. Kiến thức cần nhớ

1. Định nghĩa

Cho a,b là các số nguyên và n là số nguyên dương. Ta định nghĩa a đồng dư với b theo môđun n và kí hiệu là: $a \equiv b \pmod{n}$, nếu a và b có cùng số dư khi chia cho n.

Chú ý : a) $a \equiv b (\text{mod}\, m)$ là một đồng dư thức với a là vế trái, b là vế phải.

b) $a \equiv b(\text{mod}\, m) \Leftrightarrow a - b \vdots m \Leftrightarrow \exists t \in Z$ sao cho $a = b + mt$.

c) Nếu a và b không đồng dư với nhau theo môđun m ta ký hiệu :

$a \not\equiv b$ (mod m).

d) Nếu a chia cho b dư r thì $a \equiv r \pmod{b}$

2. Tính chất

1. Tính chất phản xạ : $a \equiv a$ (mod m).

2. Tính chất đối xứng : $a \equiv b$ (mod m) $\Rightarrow$ $b \equiv a$ (mod m).

3. Tính chất bắc cầu :

$a \equiv b$ (mod m); $b \equiv c$ (mod m) $\Rightarrow$ $a \equiv c$ (mod m).

4. Cộng hay trừ từng vế của đồng dư thức có cùng môđun :

$a \equiv b$ (mod m) ; $c \equiv d$ (mod m) $\Rightarrow a \pm c \equiv b \pm d$ (mod m)

Tổng quát : $a_i \equiv b_i$ (mod m), i = 1; 2; ...; k $\Rightarrow$ $a_1 \pm a_2 \pm ... \pm a_k = b_1 \pm b_2 \pm ... \pm b_k$ (mod m).

5. a) Nhân hai vế của đồng dư thức với một số nguyên :

$a \equiv b$ (mod m) $\Rightarrow$ $ka \equiv kb$ (mod m) với $k \in Z$

b) Nhân hai vế và môđun của đồng dư thức với một số nguyên dương:

$a \equiv b$ (mod m) $\Rightarrow$ $ka \equiv kb$ (mod km) với $k \in N^*$

6. Nhân từng vế của nhiều đồng dư thức có cùng môđun :

$a \equiv b$ (mod m) ; $c \equiv d$ (mod m) $\Rightarrow ac \equiv bd$ (mod m)

Tổng quát $a_i \equiv b_i$ (mod m), i = 1; 2; ...; k $\Rightarrow$ $a_1 a_2 ... a_k \equiv b_1 b_2 ... b_k$ (mod m).

7. Nâng hai vế của một đồng dư thức lên cùng một lũy thừa :

$a \equiv b$ (mod m) $\Rightarrow a^k \equiv b^k$ (mod m) $(k \in N^*)$

8. Nếu hai số đồng dư với nhau theo nhiều môđun thì chúng đồng dư với nhau theo môđun là BCNN của các môđun ấy:

$$a \equiv b \pmod{m_i},\ i = 1; 2; ...; k \Rightarrow a \equiv b \pmod{[m_1; m_2; ...; m_k]}.$$

Đặc biệt nếu $(m_i, m_j) = 1$ (i, j = 1; 2;...; k) thì

$$a \equiv b \pmod{m_i} \Rightarrow a \equiv b \pmod{m_1.m_2....m_k}.$$

9. Nếu $a \equiv b \pmod m$ thì tập hợp các ước chung của a và m bằng tập hợp các ước chung của b và m.

Đặc biệt : $a \equiv b \pmod m \Rightarrow (a, m) = (b, m)$

10. Chia hai vế và môđun của một đồng dư cho một ước dương chung của chúng :

$$a \equiv b \pmod m,\ k \in UC(a,b,m),\ k > 0 \Rightarrow \frac{a}{k} \equiv \frac{b}{k}\left(\bmod \frac{m}{k}\right)$$

Đặc biệt : $ac \equiv bc \pmod m \Rightarrow a \equiv b \left(\bmod \dfrac{m}{(c, m)}\right)$

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

🗁 Dạng 1: Sử dụng đồng dư thức trong các bài toán chứng minh chia hết

*** Cơ sở phương pháp:** Khi số dư trong phép chia a cho m bằng 0 thì $a \vdots m$. Như vậy để chứng tỏ $a \vdots m$ ta chứng minh $a \equiv 0 \pmod m$

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Chứng minh rằng: $\left(2222^{5555} + 5555^{2222}\right) \vdots 7$

Hướng dẫn giải

Ta có: $2222 \equiv 3 \pmod 7$ hay $2222 \equiv -4 \pmod 7 \Rightarrow 2222^{5555} \equiv (-4)^{5555} \pmod 7$ (*)

Mặt khác $5555 \equiv 4 \pmod 7 \Rightarrow 5555^{2222} \equiv 4^{2222} \pmod 7$ (**)

Từ (*) và (**)

$$\Rightarrow \left(2222^{5555} + 5555^{222}\right) \equiv \left[(-4)^{5555} + 4^{2222}\right] \pmod 7$$

$$\Rightarrow \left(2222^{5555} + 5555^{222}\right) \equiv -4^{2222}\left(4^{3333} - 1\right) \pmod 7$$

Ta lại có: $4^{3333} = \left(4^3\right)^{1111} = 64^{1111}$ mà $64 \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow 4^{3333} \equiv 1 \pmod 7$

$$\Rightarrow 4^{3333} - 1 \equiv 0 \pmod 7 \Rightarrow -4^{2222}\left(4^{3333} - 1\right) \equiv 0 \pmod 7$$

Do vậy $\left(2222^{5555} + 5555^{2222}\right) \equiv 0 \pmod 7$ hay $\left(2222^{5555} + 5555^{2222}\right) \vdots 7$

Bài toán 2. Chứng minh rằng: $A = \left(7.5^{2n} + 12.6^n\right) \vdots 19$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$5^{2n}=\left(5^2\right)^n=25^n\Rightarrow A=7.25^n+12.6^n$$

$$25\equiv 6\left(\text{mod}19\right)\Rightarrow 25^n\equiv 6^n\left(\text{mod}19\right)\Rightarrow A\equiv 7.6^n+12.6^n\left(\text{mod}19\right)\Leftrightarrow A\equiv 19.6^n\left(\text{mod}19\right)$$

$$\Rightarrow A\equiv 0\left(\text{mod}19\right)\Rightarrow A\vdots 19$$

Bài toán 3. Chứng minh rằng $12^{2n+1}+11^{n+2}\ \vdots\ 133$ ($n\in N$)

Hướng dẫn giải

Cách 1:Ta có $12^2=144\equiv 11(\text{mod } 133)$; $11^2=121\equiv -12(\text{mod } 133)$

Do đó $12^{2n+1}=12.\left(12^2\right)^n\equiv 12.\,11^n\,(\text{mod } 133)$

$11^{n+2}=11^2.\,11^n\equiv -12.\,11^n\,(\text{mod } 133)$

Do đó $12^{2n+1}+11^{n+2}\equiv 12.\,11^n-12.\,11^n\equiv 0\,(\text{mod } 133)$.

Vậy với $n\in N$ thì $12^{2n+1}+11^{n+2}\ \vdots\ 133$.

Cách 2: Ta có $12^2=144\equiv 11(\text{mod } 133)\Rightarrow 12^{2n}\equiv 11^n\,(\text{mod } 133)$ (1)

Mà $12\equiv -11^2\,(\text{mod } 133)$ (2) Nhân vế với vế của (1) và (2) ta có :

$12^{2n}.\,12\equiv 11^n.\,(-11^2)\,(\text{mod } 133)\Rightarrow 12^{2n+1}\equiv -11^{n+2}\,(\text{mod } 133)$

$12^{2n+1}+11^{n+2}\equiv 0\,(\text{mod } 133)$ hay $12^{2n+1}+11^{n+2}\ \vdots\ 133$.

Bài toán 4. Chứng minh rằng: $A=\left(2^{2^{2n}}+5\right)\vdots 7\left(\forall n\in N\right)$

Hướng dẫn giải

Ta có $2^3=8\equiv 1\left(\text{mod}\,7\right)$

Ta đi tìm số dư của 2^{2n} khi chia cho 3 (đây chính là điểm mấu chốt của bài toán).

Vì $4\equiv 1\left(\text{mod}\,3\right)\Rightarrow 4^n\equiv 1\left(\text{mod}\,3\right)\Rightarrow 2^{2n}\equiv 1\left(\text{mod}\,3\right)$ hay n chia cho 3 dư 1.

Giả sử: $2^{2n}=3k+1\left(k\in N\right)$

Khi đó ta có: $A=2^{3k+1}+5=2.8^k+5$

Vì $8^k\equiv 1\left(\text{mod}\,7\right)\Rightarrow 2.8^k\equiv 2\left(\text{mod}\,7\right)\Rightarrow 2.8^k+5\equiv 2+5\left(\text{mod}\,7\right)$

$\Rightarrow A\equiv 0\left(\text{mod}\,7\right)$

Vậy $A\vdots 7$

🗁 Dạng 2: Sử dụng đồng dư thức tìm số dư

*** Cơ sở phương pháp:** Với hai số nguyên a và m, m > 0 luôn có duy nhất cặp số nguyên q, r sao cho a = mq + r, $0 \le r < m$. Để tìm số dư r trong phép chia a cho m ta cần tìm r sao cho $\begin{cases} a \equiv r(\text{mod } m) \\ 0 \le r < m \end{cases}$.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm số dư khi chia 3^{2000} cho 7.

Hướng dẫn giải

Ta có

$$3^2 \equiv 2\left(\text{mod}\,7\right) \Rightarrow 3^6 \equiv \left(3^2\right)^3 \equiv 1\left(\text{mod}\,7\right)$$

$$\Rightarrow \left(3^6\right)^{333} \equiv 1\left(\text{mod}\,7\right) \Leftrightarrow 3^{1998} \equiv 1\left(\text{mod}\,7\right)$$

Mặt khác $3^2 \equiv 2\left(\text{mod}\,7\right) \Rightarrow 3^{2000} \equiv 3^{1998}.3^2 \equiv 1.2\left(\text{mod}\,7\right) \Rightarrow 3^{2000} : 7$ dư 2.

Nhận xét: Để tìm số dư khi chia a^n cho $b > 0$, ta lấy lũy thừa với số mũ tăng dần của a chia cho b để tìm số dư. Ta sẽ dừng lại để xem xét khi tìm được số dư có giá trị tuyệt đối nhỏ hoặc là một giá trị đặc biệt có liên quan đến bài toán.

Bài toán 2. Tìm số dư trong phép chia $5^{70} + 7^{50}$ cho 12.

Hướng dẫn giải

Ta có

$$5^2 \equiv 1\left(\text{mod}12\right) \Rightarrow \left(5^2\right)^{35} \equiv 1\left(\text{mod}12\right) \Leftrightarrow 5^{70} \equiv 1\left(\text{mod}12\right)(*)$$

$$7^2 \equiv 1\left(\text{mod}12\right) \Rightarrow \left(7^2\right)^{25} \equiv 1\left(\text{mod}12\right) \Leftrightarrow 7^{50} \equiv 1\left(\text{mod}12\right)(**)$$

Từ $(*);(**) \Rightarrow 5^{70} + 7^{50}$ cho 12 dư 2.

Bài toán 3. Tìm số dư của số $A = 3^{2005} + 4^{2005}$ khi chia cho 11

Hướng dẫn giải

Ta có $3^5 = 243 \equiv 1\left(\text{mod}11\right) \Rightarrow \left(3^5\right)^{401} \equiv 1\left(\text{mod}11\right) \Rightarrow 3^{2005} \equiv 1\left(\text{mod}11\right)(1)$

Mặt khác $4^5 = 1024 \equiv 1\left(\text{mod}11\right) \Rightarrow \left(4^5\right)^{401} \equiv 1\left(\text{mod}11\right) \Rightarrow 4^{2005} \equiv 1\left(\text{mod}11\right)(2)$

Từ $(1);(2) \Rightarrow$ số dư của số $A = 3^{2005} + 4^{2005}$ khi chia cho 11 là 2.

Bài toán 4. a) Tìm số dư trong phép chia $1532^5 - 1$ cho 9.

b) Tìm số dư trong phép chia $2016^{2018} + 2$ cho 5

Hướng dẫn giải

a) Ta có $1532 = 9.170 + 2 \equiv 2 \pmod 9$ do đó $1532^5 \equiv 2^5 \pmod 9$

$\Rightarrow 1532^5 - 1 \equiv 2^5 - 1 \pmod 9$. Vì $2^5 - 1 = 31 \equiv 4 \pmod 9$. Do đó

$1532^5 - 1 \equiv 4 \pmod 9$. Vậy số dư cần tìm là 4.

b) Ta có $2016 \equiv 1 \pmod 5$ do đó $2016^{2018} \equiv 1^{2018} \pmod 5$

suy ra $2016^{2018} + 2 \equiv 1^{2018} + 2 \pmod 5$. Vì $1 + 2 = 3 \equiv 3 \pmod 5$.

Do đó $2016^{2018} + 2 \equiv 3 \pmod 5$.

Vậy số dư cần tìm là 3.

Dạng 3: Tìm điều kiện của biến để chia hết

*** Cơ sở phương pháp:** Dựa vào tính chất của đồng dư thức về số dư để tìm ra điều kiện của ẩn để biểu thức chia hết.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm số tự nhiên n sao cho: a. $\left(2^{3n+4} + 3^{2n+1}\right) \vdots 19$ b. $\left(n.2^n + 1\right) \vdots 3$

Hướng dẫn giải

a. Ta có $2^{3n+4} + 3^{2n+1} = 16.8^n + 3.9^n$

Vì $16 \equiv -3 \pmod{19} \Rightarrow 16.8^n \equiv -3.8^n \pmod{19}$

$\Rightarrow \left(16.8^n + 3.9^n\right) \vdots 19 \Leftrightarrow (-3).8^n + 3.9^n \equiv 0 \pmod{19}$

$\Leftrightarrow 9^n - 8^n \equiv 0 \pmod{19} \Leftrightarrow 9^n \equiv 8^n \pmod{19}$

$\Rightarrow n = 0$

vì trái lại $9^n \equiv 8^n \pmod{19} \Rightarrow 9 \equiv 8 \pmod{19}$ là vô lý

Vậy $n = 0$.

b.Ta xét các trường hợp sau

Trường hợp 1

Nếu $n = 3k\,(k \in N) \Rightarrow n.2^n \vdots 3 \Rightarrow n.2^n + 1 \not\vdots\, 3 \Rightarrow$ loại

Trường hợp 2

Nếu $n = 3k + 1\,(k \in N) \Rightarrow n.2^n + 1 = (3k+1).2^{3k+1} + 1 = 3k.2^{3k+1} + 2^{3k+1} + 1 = 3k.2^{3k+1} + 2.8^k + 1$

$\Rightarrow n.2^n + 1 \vdots 3 \Leftrightarrow \left(2.8^k + 1\right) \vdots 3$

$8 \equiv -1 \pmod 3 \Rightarrow 8^k \equiv (-1)^k \pmod 3$

$\Rightarrow 2.8^k + 1 \vdots 3 \Leftrightarrow 2.(-1)^k + 1 \equiv 0 \pmod 3$

tương đương với k chẵn $\Leftrightarrow k = 2m\,(m \in N) \Rightarrow n = 6m + 1\,(m \in N)$

Trường hợp 3

Nếu

$n = 3k + 2\left(k \in N\right) \Rightarrow n.2^n + 1 = \left(3k+2\right).2^{3k+2} + 1$

$= 3k.3^{3k+2} + 2.2^{3k+2} + 1 = 3k.2^{3k+2} + 8^{k+1} + 1$

$\Rightarrow \left(n.2^n + 1\right) \vdots 3 \Leftrightarrow \left(-1\right)^{k+1} + 1 \equiv 0 \left(\bmod 3\right)$

$\Rightarrow$ k+1 lẻ $k = 2m\left(m \in N\right) \Rightarrow n = 6m + 2\left(m \in N\right)$

Vậy điều kiện cần tìm là $m \equiv 1\left(\bmod 6\right)$ hoặc $m \equiv 2\left(\bmod 6\right)$.

Bài toán 2. Tìm số tự nhiên n có 4 chữ số sao cho chia n cho 131 thì dư 112 và chia n cho 132 thì dư 98.

Hướng dẫn giải

$n \equiv 98\left(\bmod 132\right) \Rightarrow n = 132k + 98\left(k \in N\right)\left(1\right)$

$\Rightarrow 132 + 98 \equiv 112\left(\bmod 131\right)$

$\Rightarrow k + 98 + 33 = 112 + 33\left(\bmod 131\right) \Rightarrow k \equiv 14\left(\bmod 131\right)$

$\Rightarrow k \equiv 131m + 14\left(m \in N\right)\left(2\right)$

Từ (1) và (2) $n = 131.132m + 1946 \Rightarrow n = 1946$

🗁 **Dạng 4: Tìm một chữ số tận cùng**

*** Cơ sở phương pháp:**

Nếu $a \equiv r\left(\bmod 10\right); 0 \le r < b$ thì r là chữ số tận cùng của a.

Ta cần lưu ý một số tính chất sau:

Tính chất 1

Nếu a có chữ số tận cùng là $0;1;5;6$ thì a^n cũng có chữ số tận cùng như a nghĩa là $a^n \equiv a\left(\bmod 10\right)$

Tính chất 2

Nếu a có chữ số tận cùng bằng $4;9$ thì a^2 có chữ số tận cùng bằng $6;1$.

Nghĩa là: Nếu $a \equiv 4\left(\bmod 10\right) \Rightarrow a^2 \equiv 6\left(\bmod 10\right) \Rightarrow a^{2k} \equiv 6\left(\bmod 10\right)$

Nếu $a \equiv 9\left(\bmod 10\right) \Rightarrow a^2 \equiv 1\left(\bmod 10\right) \Rightarrow a^{2k} \equiv 1\left(\bmod 10\right)$

Do vậy để tìm chữ số tận cùng của a^n ta chia n cho 2.

Tính chất 3

Nếu a có chữ số tận cùng là $2;3;7;8$ thì ta áp dụng một trong các kết quả sau:

$2^{4k} \equiv 6\left(\bmod 10\right); 3^{4k} \equiv 1\left(\bmod 10\right); 7^{4k} \equiv 1\left(\bmod 10\right); 8^{4k} \equiv 6\left(\bmod 10\right)$

Do vậy để tìm chữ số tận cùng của a^n ta chia n cho 4.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Cho số $A = 2012^{2013}$ tìm chữ số tận cùng của A.

Hướng dẫn giải

Ta có $2013 = 4.503 + 1$

Vì $2012 \equiv 2 \pmod{10} \Rightarrow 2012^4 \equiv 6 \pmod{10}$

$\Rightarrow \left(2012^4\right)^{503} \equiv 6 \pmod{10} \Leftrightarrow 2012^{2012} \equiv 6 \pmod{10}$

$\Rightarrow 2012^{2013} \equiv 6.2 \pmod{10} \Leftrightarrow 2012^{2013} \equiv 2 \pmod{10}$

Vậy A có chữ số tận cùng là 2.

Bài toán 2. Cho $B = 1978^{1986^8}$ tìm chữ số tận cùng của B.

Hướng dẫn giải

$1978 \equiv 8 \pmod{10} \Rightarrow 1978^4 \equiv 6 \pmod{10}$

$1986^8 \equiv 0 \pmod 4 \Rightarrow 1986 = 4k \left(k \in N\right)$

$\Rightarrow C = 1978^{4k} \equiv 6 \pmod{10}$

Vậy chữ số tận cùng của B là 6.

🗁 Dạng 5: Tìm hai chữ số tận cùng

*** Cơ sở phương pháp:** Nếu $a \equiv r \pmod{100}; 10 \le r < 100$ thì r là chữ số tận cùng của a.

Ta cần lưu ý một số tính chất sau:

$2^{20} \equiv 76 \pmod{100}; 3^{20} \equiv 01 \pmod{100}; 6^5 \equiv \pmod{100}$

$7^6 \equiv 01 \pmod{100}; 5^2 \equiv 25 \pmod{100}$

$76^n \equiv 76 \pmod{100}; 25^n \equiv 25 \pmod{100} \left(\forall n \ge 2\right)$

Từ đó ta có: $\begin{cases} a \equiv 0 \pmod{10} \Rightarrow a^{20k} \equiv 01 \pmod{100} \\ a \equiv 1;3;7;9 \pmod{10} \Rightarrow a^{20k} \equiv 01 \pmod{100} \\ a \equiv 5 \pmod{10} \Rightarrow a^{20k} \equiv 25 \pmod{100} \\ a \equiv 2;4;6;8 \Rightarrow a^{20k} \equiv 76 \pmod{100} \end{cases}$

Do vậy để tìm hai chữ số tận cùng của a^n ta chia n cho 20.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Cho số $A = 2012^{2013}$ tìm hai chữ số tận cùng của A.

Hướng dẫn giải

Ta có

$2013 = 20.100 + 13$

$2012 \equiv 2(\bmod 10) \Rightarrow 2012^{20} \equiv 76(\bmod 100)$

$\Rightarrow \left(2012^{20}\right)^{100} \equiv 76(\bmod 100) \Leftrightarrow 2012^{2000} \equiv 76(\bmod 100)(1)$

Mặt khác $2012 \equiv 12(\bmod 100) \Rightarrow 2012^{6} \equiv 12^{6}(\bmod 100) \Rightarrow 2012^{6} \equiv 84(\bmod 100)$
$\Rightarrow 2012^{6} \equiv 56(\bmod 100) \Rightarrow 2012^{12} \equiv 56(\bmod 100) \Rightarrow 2012^{2013} \equiv 72(\bmod 100)(2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 2012^{2013} = 2012^{2000}.2012^{2013} \equiv 76.72(\bmod 100) \Leftrightarrow 2012^{2013} \equiv 72(\bmod 100)$

Vậy A có hai chữ số tận cùng là: 72

Bài toán 2. Tìm hai chữ số tận cùng của các số sau

a. $A = 7^{9^{7^9}}$ b. $B = 29^{9^{2012}}$ c. $C = 1978^{1986^8}$

Hướng dẫn giải

a. Vì $7^4 \equiv 01(\bmod 100)$ nên ta đi tìm số dư khi chia 9^{7^9} cho 4.

Ta có

$9 \equiv 1(\bmod 4) \Rightarrow 9^{7^9} \equiv 1(\bmod 4) \Rightarrow 9^{7^9} = 4k\,(k \in N)$

$\Rightarrow A = 7^{9^{7^9}} = 7^{4k+1} = 7.\left(7^4\right)^k \equiv 7.01(\bmod 100) \Rightarrow 7^{9^{7^9}} \equiv 07(\bmod 100)$

Vậy A có hai chữ số tận cùng là 07.

b. Vì $29^{10} \equiv 01(\bmod 100) \Rightarrow$ nên ta đi tìm số dư khi chia 9^{2012} cho 10

Ta có :

$9 \equiv -1(\bmod 10) \Rightarrow 9^{2012} \equiv 1(\bmod 10) \Rightarrow 9^{2012} = 10k + 1\,(k \in N)$

$\Rightarrow B = 29^{10k+1} = 29.\left(29^{10}\right)^k \equiv 29.01(\bmod 100) \Leftrightarrow B \equiv 29(\bmod 100)$

Vậy B có hai chữ số tận cùng là 29.

c. Vì $C \equiv 6(\bmod 10) \Rightarrow C^{20} \equiv 76(\bmod 100) \Rightarrow C^{20m} \equiv 76(\bmod 100)$

Mặt khác

$1986 \equiv 6(\bmod 20) \Rightarrow 1986^8 \equiv 16(\bmod 20)$

$\Rightarrow C = 1978^{20k+6} = \left(1978^{20}\right)^k.1978^{16} \equiv 1978^{16}.76(\bmod 100)$

Ta lại có :

$1978 \equiv -22(\bmod 100) \Rightarrow 1978^4 \equiv 56(\bmod 100) \Rightarrow \left(1978^4\right)^4 \equiv 56^4(\bmod 100)$

$\Rightarrow 1978^{16} \equiv 76(\bmod 100)$

$\Rightarrow C \equiv 96.76(\bmod 100) \Leftrightarrow C \equiv 76(\bmod 100)$

Vậy C có hai chữ số tận cùng là 76.

Dạng 6: Sử dụng đồng dư thức trong các bài toán về số chính phương

*** Cơ sở phương pháp:**

Số chính phương là số có dạng $n^2\left(n\in N\right)$

Ta đi chứng minh một số tính chất cơ bản của số chính phương bằng đồng dư :

1. Số chính phương khi chia cho 3 chỉ có hai số dư là 0 hoặc 1.

Thật vậy ta đi xét các trường hợp sau

Với $n=3k\Rightarrow n\equiv 0\left(\bmod 3\right)\Rightarrow n^2\equiv 0^2\left(\bmod 3\right)\Leftrightarrow n^2\equiv 0\left(\bmod 3\right)$ số dư bằng 0

Với $n=3k\pm 1\Rightarrow n\equiv \pm 1\left(\bmod 3\right)\Rightarrow n^2\equiv \left(\pm 1\right)^2\left(\bmod 3\right)\Leftrightarrow n^2\equiv 1\left(\bmod 3\right)\Rightarrow$ số dư bằng.

2. Số chính phương khi chia cho 4 chỉ có hai số dư là 0 hoặc 1.

Chứng minh tương tự :

Với $n=4k\Rightarrow n\equiv 0\left(\bmod 4\right)\Rightarrow n^2\equiv 0^2\left(\bmod 4\right)\Rightarrow n\equiv 0\left(\bmod 4\right)\Rightarrow$ số dư bằng 0.

Với $n=4k\pm 1\Rightarrow n\equiv \pm 1\left(\bmod 4\right)\Rightarrow n^2\equiv \left(\pm 1\right)^2 \bmod 4\Leftrightarrow n^2\equiv 1\left(\bmod 4\right)\Rightarrow$ số dư bằng 1.

Với $n=4k+2\Rightarrow n\equiv 2\left(\bmod 4\right)\Rightarrow n^2\equiv 2^2=4\left(\bmod 4\right)\Leftrightarrow n^2\equiv 0\left(\bmod 4\right)\Rightarrow$ số dư bằng 0.

3. Số chính phương khi chia cho 8 chỉ có ba số dư là 0,1 hoặc 4.

Tương tự ta xét các trường hợp sau :

$n=8k\Rightarrow n\equiv 0\left(\bmod 8\right)\Rightarrow n^2\equiv 0\left(\bmod 8\right)$

$n=8k\pm 1\Rightarrow n\equiv \pm 1\left(\bmod 8\right)\Rightarrow n^2\equiv 1\left(\bmod 8\right)$

$n=8k\pm 2\Rightarrow n\equiv \pm 2\left(\bmod 8\right)\Rightarrow n^2\equiv \left(\pm 2\right)^2=4\left(\bmod 8\right)$

$n=8k\pm 3\Rightarrow n\equiv \pm 3\left(\bmod 8\right)\Rightarrow n^2\equiv \left(\pm 3\right)^2\left(\bmod 8\right)\Leftrightarrow n^2\equiv 1\left(\bmod 8\right)$

$n=8k+4\Rightarrow n\equiv 4\left(\bmod 8\right)\Rightarrow n^2\equiv 4^2\left(\bmod 8\right)\Leftrightarrow n^2\equiv 0\left(\bmod 8\right)$

Hoàn toàn tương tự ta có thể xét các trường hợp số dư của số chính phương khi chia cho 5,7,9..

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Chứng minh rằng số : $A=19^k+5^k+1995^k+1996^k$ với k chẵn không thể là số chính phương.

Hướng dẫn giải

Với k chẵn ta có

$19^k\equiv \left(-1\right)^k\left(\bmod 4\right)\Rightarrow 19^k\equiv 1\left(\bmod 4\right)$

$1995^k\equiv \left(-1\right)^k\left(\bmod 4\right)\Rightarrow 1995^5\equiv 1\left(\bmod 4\right)$

$1996^k\equiv 0\left(\bmod 4\right)\Rightarrow A=19^k+5^k+1995^k+1996^k\equiv 3\left(\bmod 4\right)$

Hay A chia 3 dư 4. Vậy A không thể là số chính phương.

Bài toán 2. Tìm tất cả số tự nhiên x,y để $2^x + 5^y$ là số chính phương.

Hướng dẫn giải

Giả sử $2^x + 5^y = k^2 \ (k \in N)$

Nếu $x = 0$ thì $1 + 5^y = k^2$ do đó k chẵn $\Rightarrow k^2$ chia hết cho 4 nhưng $1 + 5^y$ chia 4 dư 2.

Vậy $x \neq 0$, từ $1 + 5^y = k^2 \Rightarrow$ k lẻ và k không chia hết cho 5. Xét hai trường hợp.

+) Với $y = 0$ thì $2^x + 1 = k^2 = (2n+1)^2$ (vì k lẻ nên $k = 2n+1, n \in N$).

$\Rightarrow 2^x = 4n(n+1) \Rightarrow n = 1$. Khi đó x = 3; y = 0 (thỏa mãn)

Thử lại: $2^x + 5^y = 2^3 + 5^0 = 9$ là số chính phương.

+) Với $y \neq 0$ và k không chia hết cho 5 $\Rightarrow k^2 \equiv \pm 1 (\bmod 5)$

Từ $2^x + 5^y = k^2 \Rightarrow 2^x \equiv \pm 1 (\bmod 5) \Rightarrow x$ chẵn

Đặt $x = 2x_1 \ (x_1 \in N)$, ta có

$5^y = (k + 2^{x_1})(k - 2^{x_1})$

$\Rightarrow \begin{cases} k + 2^{x_1} = 5^{y_1} \\ k - 2^{x_1} = 5^{y_2} \end{cases}$ với $y_1 + y_2 = y$ với $y_1 > y_2$, y_1, y_2 là các số tự nhiên.

$\Rightarrow 2^{x_1+1} = 5^{y_2}(5^{y_1-y_2} - 1) \Rightarrow 5^{y_2} = 1 \Rightarrow y_2 = 0$.

$\Rightarrow y_1 = y$. Khi đó $2^{x_1+1} = 5^y - 1$.

Nếu y = 2t $(t \in N)$ thì $2^{x_1+1} = 5^{2t} - 1 = 25^t - 1 \vdots 3$, vô lý

Vậy y lẻ, khi đó $2^{x_1+1} = 5^y - 1 = 4(5^{y-1} + 5^{y-2} + ... + 5 + 1)$.

Nếu $y > 1$ thì $5^{y-1} + 5^{y-2} + .. + 1$,lẻ (vô lý).

Nếu $y = 1 \Rightarrow x_1 = 1$ khi đó $x = 2; y = 1$.

Thử lại $2^x + 5^y = 2^2 + 5^1 = 9$ là số chính phương

Vậy $x = 2; y = 1$ hoặc x = 3, y = 0.

Bài toán 3. Giả sử rằng $2n+1$ và $3n+1$ là các số chính phương. Chứng minh rằng $5n+3$ là một hợp số.

Hướng dẫn giải

Giả sử $2n+1 = a^2$ và $3n+1 = b^2$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$.

Khi đó $5n+3 = 4(2n+1) - (3n+1) = 4a^2 - b^2 = (2a-b)(2a+b)$.

Do $a^2 \equiv 1(mod 2)$ nên $a^2 \equiv 1(mod\,4)$. Suy ra $n \equiv 0(\mathrm{mod}\,2)$ và $b \equiv 1(\mathrm{mod}\,2)$. Do đó $2a-b>1$ và $2a+b>1$. Vậy $5n+3$ là hợp số.

Bài toán 3. Tìm nghiệm nguyên dương *x* để $3^x + 171$ là số chính phương.

(HSG Lai Châu 2015 - 2016)

Hướng dẫn giải

Ta có: $3^x \equiv 1,3(mod 8)$; $y^2 \equiv 0,1,4(mod 8)$. Mà: $3^x + 171 = y^2 \Rightarrow 3^x \equiv 1(mod 8)$. Do đó: x có dạng 2k $(k \in \mathbb{N})$.

Phương trình trở thành $A = (3^k)^2 + 171 = y^2$ với k = 0, 1, 2 thì phương trình vô nghiệm nên nếu phương trình có nghiệm thì nghiệm đó phải ≥ 3. Do đó theo nguyên lý kẹp được ta có: $\left[(3^k)^2+3\right]^2 \geq a > (3^k)^2$.

Khi đó: $A = \left[(3^k)^2+3\right]^2$ hoặc $A = \left[(3^k)^2+2\right]^2$

Giải từng trường hợp ra ta được k = 3 $\Rightarrow x = 6 \Rightarrow y = 30$. Vậy x = 6.

Dạng 7: Sử dụng đồng dư thức trong các bài toán về số nguyên tố, hợp số

*** Cơ sở phương pháp:** Đối với nhiều bài toán về số nguyên tố và hợp số ngoài sử dụng các tính chất về số nguyên tố chúng ta còn phải vận dụng các tính chất của đồng dư thức và định lý Fermat.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho p^2+14 là số nguyên tố

Hướng dẫn giải

Ta xét hai trường hợp sau

Trường hợp 1

Với $p = 3 \Rightarrow p^2 + 14 = 23$ là số nguyên tố

Trường hợp 2

Với $p \neq 3 \Rightarrow p^2 \equiv 1(\mathrm{mod}\,3) \Rightarrow p^2+14 \vdots 3\left(p^2+14>3\right) \Rightarrow$ p^2+14 không phải là số nguyên tố.

Vậy $p=3$.

Bài toán 2. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên tố p đều tồn tại vô số số tự nhiên n sao cho $2^n - n \vdots p$.

Hướng dẫn giải

Ta xét hai trường hợp sau

Trường hợp 1

Nếu $p=2 \Rightarrow 2^n-n \vdots 2\left(\forall n=2k; k \in N\right)$

Trường hợp 2

Nếu $p>2 \Rightarrow 2^{p-1} \equiv 1\left(\bmod p\right)$

Theo định lý Fermat $\Rightarrow 2^{(p-1)k}-\left(p-1\right)k \equiv 1+k\left(\bmod p\right)\left(\forall k \in N\right)$

Do đó với mọi số tự nhiên n có dạng $n=\left(p-1\right)\left(hp-1\right)\left(k \in N^*\right)$

Ta có $2^n-n \equiv 1+\left(hp-1\right) \equiv 0\left(\bmod p\right)$ tức là $2^n-n \vdots p$

Bài toán 3. Cho $n \in N^*$ chứng minh rằng: 19.8^n+17 là hợp số.

Hướng dẫn giải

Ta xét các trường hợp sau

Trường hợp 1

Nếu $n=2k \Rightarrow 19.8^n+17 \equiv 1.(-1)^{2k}+2=3 \equiv 0\left(\bmod 3\right) \Rightarrow 19.8^n+17 \vdots 3$

Mặt khác $19.8^n+17>3 \Rightarrow$ 19.8^n+17 là hợp số.

Trường hợp 2

$n=4k+1 \Rightarrow 19.8^n+17=19.8^{4k+1}+17=19.8.64^{2k}+17 \equiv 6.8.(-1)^{2k}+4 \equiv 52 \equiv 0\left(\bmod 13\right)$ Mà $19.8^n+17>3 \Rightarrow$ 19.8^n+17 là hợp số

Trường hợp 3

$n=4k+3 \Rightarrow 19.8^n+17=19.8^{4k+3}+17=19.8.64^{2k+1}+17 \equiv (-1).3.(-1)^{2k+1}+2 \equiv 5 \equiv 0\left(\bmod 3\right)$

$\Rightarrow 19.8^n+17 \vdots 5$

Mà $19.8^n+17>5 \Rightarrow$ 19.8^n+17 là hợp số.

Bài toán 4. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 8. Chứng min rằng : $\left(3^p-2^p-1\right) \vdots 42p$

Hướng dẫn giải

Ta có $42p=2.3.7.9$ đề chứng minh $A=3^p-2^p-1$ chia hết cho $42p$ ta chỉ cần chỉ ra rằng A chia hết cho 2,3,7

Thật vậy

Ta có $A \equiv 1^p-0-1=0\left(\bmod 2\right) \Rightarrow A \vdots 2$

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 8 nên p là số lẻ :

$p=2k+1 \Rightarrow A=3^p-2^{2k+1}-1 \equiv 0-4^k.2-1 \equiv -1.2-1 \equiv -3 \equiv 0\left(\bmod 3\right) \Rightarrow A \vdots 3$

Mặt khác $A = 3^{2k+1} - 2^{2k+1} - 1 = 3.9^k - 2^{2k+1} - 1 \equiv 3.2^k - 2^{2k+1} - 1 = -\left(2^k - 1\right)\left(2^{2k+1} - 1\right)\left(\bmod 7\right)$

Do $p = 2k + 3$ không chia hết cho $3 \Rightarrow k\,\vdots\,3$ hoặc $k + 1\,\vdots\,3$

Ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1

Nếu $k = 3h\left(h \in N\right) \Rightarrow 2^k - 1 = 8^h - 1\,\vdots\,7$

Trường hợp 2

Tương tự nếu $k + 1\,\vdots\,3 \Rightarrow 2^{k+1} - 1\,\vdots\,7$

Vậy trong mọi trường hợp ta đều có $A\,\vdots\,7$

Theo định lý Fermat ta có $A = 3^p - 2^p - 1 = \left(3^p - 3\right) - \left(2^p - 2\right)\,\vdots\,p$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

🗁 **Dạng 8: Sử dụng đồng dư thức trong các bài toán giải phương trình nghiệm nguyên**

*** Cơ sở phương pháp:** Trong giải phương trình nghiệm nguyên việc lựa chọn môđun một cách thích hợp sẽ giúp việc giải các phương trình khó phức tạp trở nên đơn giản hơn. Đặc biệt là các bài toán chứng minh phương trình nghiệm nguyên vô nghiệm.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Chứng minh rằng các phương trình sau không có nghiệm nguyên:

a) $x^2 - y^2 = 1998$ b) $x^2 + y^2 = 1999$

Hướng dẫn giải

- Nhận xét: Số chính phương chia cho 4 chỉ có số dư 0 hoặc 1

a) Ta có: $\left.\begin{matrix} x^2 \equiv 0,1\left(\bmod 4\right) \\ y^2 \equiv 0,1\left(\bmod 4\right) \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^2 - y^2 \equiv 0,1,3\left(\bmod 4\right)$

Mà 1998 chia cho 4 dư 2, nên phương trình không có nghiệm nguyên.

b) Ta có: $\left.\begin{matrix} x^2 \equiv 0,1\left(\bmod 4\right) \\ y^2 \equiv 0,1\left(\bmod 4\right) \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^2 + y^2 \equiv 0,1,2\left(\bmod 4\right)$

Mà 1999 chia cho 4 dư 3, nên phương trình không có nghiệm nguyên.

Bài toán 2. Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 = 2y^2 - 8y + 3$ (1)

Hướng dẫn giải

Ta có: (1) $\Leftrightarrow x^2 = 2(y-2)^2 - 5$

- Nhận xét: Số chính phương chia cho 8 chỉ có số dư 0, 1 hoặc 4

Ta có: $x^2 \equiv 0,1,4\left(\bmod 8\right)$

$$\left.\begin{matrix} (y-2)^2 \equiv 0,1,4 \pmod 8 \Rightarrow 2(y-2)^2 \equiv 0,2 \pmod 8 \\ -5 \equiv 3 \pmod 8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2(y-2)^2 - 5 \equiv 3,5 \pmod 8$$

Suy ra phương trình không có nghiệm nguyên.

Bài toán 3. Phương trình $z^2 = (x^2-1).(y^2-1)+2013$ có nghiệm nguyên dương hay không?

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\left.\begin{matrix} \left.\begin{matrix} x^2 \equiv 0,1,4 \pmod 8 \Rightarrow x^2-1 \equiv 0,3,7 \pmod 8 \\ y^2 \equiv 0,1,4 \pmod 8 \Rightarrow y^2-1 \equiv 0,3,7 \pmod 8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (x^2-1)(y^2-1) \equiv 0,1,5 \pmod 8 \\ 2013 \equiv 5 \pmod 8 \end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow (x^2-1)(y^2-1)+2013 \equiv 5,6,2 \pmod 8$$

Mà $z^2 \equiv 0,1,4 \pmod 8$

Suy ra phương trình không có nghiệm nguyên.

🗁 **Dạng 9: Sử dụng các định lý (ta thừa nhận không chứng minh)**

*** Cơ sở phương pháp:**

1. Định lý Fermat bé. Cho a là số nguyên dương và p là số nguyên tố. Khi đó ta luôn có $a^p \equiv a$ (mod p). Đặc biệt nếu (a, p) =1thì $a^{p-1} \equiv 1$ (mod p).

2. Định lý Wilson. Với mọi số nguyên tố p thì (p – 1)! ≡–1(mod p).

3. Định lý Euler. Cho m là số nguyên dương và a là số nguyên tố cùng nhau với m; φ(m) là số các số nguyên dương nhỏ hơn m và nguyên tố cùng nhau với m. Khi đó $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$.

Chú ý: Nếu số nguyên dương m có dạng phân tích thành thừa số nguyên tố: m = $p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.....p_k^{\alpha_k}$ thì $\varphi(m) = m\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)...\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Cho $a,b \in Z; (a,b)=1$ Chứn minh rằng : a^3-2b^3 không chia hết cho 19.

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh bằng phản chứng như sau:

Giả sử $(a^3-2b^3) \vdots 19$ khi đó $(a^3)^6 - (2b^3)^6 \vdots (a^3-2b^3) \vdots 19$.

Mặt khác $\left(a^3\right)^6 - \left(2b^3\right)^6 = a^{18} - 64b^{18}$. Nếu a,b không chia hết cho 19 thì theo định lý Fermat *(Định lý Fermat: $a^p \equiv a\left(\text{mod } p\right) \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1\left(\text{mod } p\right)$ Với mọi a nguyên và p nguyên tố).*

$\Rightarrow a^{18} \equiv b^{18} \equiv 1\left(\text{mod}19\right) \Rightarrow a^{18} - 64b^{18} \equiv 1 - 64 = -63 \not\equiv 0\left(\text{mod}19\right)$ (Vô lý)

Nếu một trong hai số chia hết cho 19 thì từ $\left(a^3 - 2b^3\right) \vdots 19 \Rightarrow \begin{cases} a \vdots 19 \\ b \vdots 19 \end{cases} \Rightarrow$ vô lý vì $\left(a,b\right) = 1$.

Vậy $a^3 - 2b^3$ không chia hết cho 19.

Bài toán 2. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì : $2^{3^{4n+1}} + 3^{2^{4n+1}} + 2007$ chia hết cho 22

Hướng dẫn giải

Theo Định lý Fermat bé ta có $2^{10} \equiv 1(\text{mod } 11)$; $3^{10} \equiv 1(\text{mod } 11)$

Ta có $3^4 = 81 \equiv 1(\text{mod } 10) \Rightarrow 3^{4n+1} = 3.\,(3^4)^n \equiv 3(\text{mod } 10)$

$\Rightarrow 3^{4n+1} = 10k + 3$, $(k \in N)$

Mặt khác $2^4 = 16 \equiv 1$ (mod 5) $\Rightarrow 2^{4n} \equiv 1(\text{mod } 5)$

$\Rightarrow 2^{4n+1} = 2.(2^4)^n \equiv 2$ (mod 10) $\Rightarrow 2^{4n+1} = 10t + 2$, $(t \in N)$

Do đó $2^{3^{4n+1}} + 3^{2^{4n+1}} + 2007 = 2^{10k+3} + 3^{10t+2} + 2002 + 5$

$= 2^3.\left(2^{10}\right)^k + 3^2.\left(3^{10}\right)^t + 22.91 + 5 \equiv 2^3 + 3^2 + 0 + 5 \equiv 0$ (mod 11)

Mà $2^{3^{4n+1}} + 3^{2^{4n+1}} + 2007 \vdots 2$ (vì $2^{3^{4n+1}}$ là số chẵn $3^{2^{4n+1}}$ là số lẻ 2007 là số lẻ).

Do (2 ; 11) = 1 nên $2^{3^{4n+1}} + 3^{2^{4n+1}} + 2007 \vdots 22$.

Bài toán 3. Cho $a_1; a_2; ...; a_{2016}$ là 2016 số nguyên dương . Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để $a_1^5 + a_2^5 + a_3^5 + ... + a_{2016}^5 \vdots 30$ là $a_1 + a_2 + ... + a_{2016} \vdots 30$.

Hướng dẫn giải

Theo định lý Fermat bé , do 2; 3; 5 là các số nguyên tố và a là số nguyên dương bất kỳ ta có :

$a^2 \equiv a$ (mod 2) $\Rightarrow a^4 = (a^2)^2 \equiv a^2 \equiv a$ (mod 2) $\Rightarrow a^5 \equiv a$ (mod 2)

$a^3 \equiv a$ (mod 3) $\Rightarrow a^5 = a^3.\, a^2 \equiv a.a^2 \equiv a^3 \equiv a$ (mod 3)

$a^5 \equiv a$ (mod 5)

Theo tính chất nếu hai số đồng dư với nhau theo nhiều môđun thì chúng đồng dư với nhau theo mô đun là BCNN của các môđun ấy.

Do đó $a^5 \equiv a$ (mod 2.3.5) hay $a^5 \equiv a$ (mod 30) $\Rightarrow a^5 - a \equiv 0$ (mod 30)

Nghĩa là $\left(a_1^5 + a_2^5 + a_3^5 + ... + a_{2016}^5\right) - \left(a_1 + a_2 + ... + a_{2016}\right) \equiv 0$ (mod 30)

Vậy $a_1 + a_2 + ... + a_{2016} \vdots 30 \Leftrightarrow a_1^5 + a_2^5 + a_3^5 + ... + a_{2016}^5 \vdots 30$

Bài toán 3. Chứng minh rằng trong các số tự nhiên thế nào cũng có số k sao cho $1983^k - 1$ chia hết cho 10^5.

(Đề thi học sinh giỏi toán cấp 2 toàn quốc năm 1983).

Hướng dẫn giải

Vì 1983 không chia hết cho 2 và không chia hết cho 5 mà $10^5 = 2^5.5^5$ nên $(1983; 10^5) = 1$. Áp dụng định lý Euler ta có :

$$1983^{\varphi(10^5)} \equiv 1\left(\bmod 10^5\right).$$

Ta có $\varphi\left(10^5\right) = 10^5\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right) = 4.10^4$. Nghĩa là $1983^{4.10^4} - 1 \vdots 10^5$

Vậy $k = 4.\ 10^4$.

B. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Chứng minh $4^{2018} - 7 \vdots 9$

Bài 2: Chứng minh rằng với mọi số nguyên

$A = \left(n^n - n^2 + n - 1\right) \vdots \left(n-1\right)^2 \quad \left(\forall n \in Z, n > 1\right)$

Bài 3. Chứng minh rằng: $\left(9^n + 1\right)$ không chia hết cho $100\left(\forall n \in N\right)$

Bài 4. Cho số a = $\overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}$ $(1 \le a_n \le 9\ ;\ 0 \le a_i \le 9$; i = 0; 1; ...; n –1)

Hãy xác định dấu hiệu chia hết :

a) Cho 3; b) Cho 4.

Bài 5. Chứng minh rằng: $A = \left(1924^{2003^{2004^n}} + 1920\right) \vdots 124 \left(\forall n \in N^*\right)$

Bài 6. a) Hãy tìm chữ số tận cùng của $9^{9^{10}}$

b) Hãy tìm hai chữ số tận cùng của 3^{1000}

Bài 7. Tìm số dư trong phép chia

a) $8! - 1$ cho 11. b) $2014^{2015} + 2016^{2015} + 2018$ cho 5.

c) $2^{50} + 41^{65}$ cho 7 d) $1^5 + 3^5 + 5^5 + ... + 97^5 + 99^5$ cho 4.

Bài 8. Tìm số dư trong phép chia :

a) $1532^5 - 4$ cho 9 ; b) 2^{2000} cho 25;

c) $2014^{2015^{2016}}$ cho 13.

Bài 9. Tìm số dư trong phép chia :

a) $A = 35^2 - 35^3 + 35^4 - 35^8 + 35^{16} + 35^{32}$ cho 425.

b) $B = 10^{10} + 10^{10^2} + 10^{10^3} + ... + 10^{10^{10}}$ cho 7.

Bài 10. a) Tìm chữ số tận cùng của 4^{3^2}

b) Tìm hai chữ số tận cùng của 3^{999}.

c) Tìm ba chữ số tận cùng của số 2^{512}.

Bài 11. Chứng minh :

a) $41^{2015} - 6 \vdots 7$; b) $2^{4n+1} - 2 \vdots 15$ $(n \in N)$;

c) $3^{76} - 2^{76} \vdots 13$; d) $20^{15} - 1 \vdots 341$.

Bài 12. Chứng minh $1890^{79} + 1945^{2015} + 2017^{2018} \vdots 7$.

Bài 13. a) Chứng minh $5555^{2222} + 2222^{5555} + 15554^{1111} \vdots 7$

b) Cho $M = 220^{119^{69}} + 119^{69^{220}} + 69^{220^{119}} + (220+119+69)^{102}$

Chứng minh $M \vdots 102$.

Bài 14. Chứng minh rằng $5^{2n-1}.2^{n+1} + 2^{2n-1}.3^{n+1} \vdots 38$ $(n \in N^*)$

Bài 15. Cho số $a = \overline{a_n a_{n-1}...a_1 a_0}$ $(1 \le a_n \le 9$; $0 \le a_i \le 9$; $i = 0; 1; ...; n-1)$

Hãy xác định dấu hiệu chia hết :

a) Cho 9; b) Cho 25; c) Cho 11; d) Cho 8.

Bài 16. Cho $A = 2^{2^{10n+1}} + 19$ với $n \in N^*$. Chứng minh rằng A là một hợp số.

Bài 17. Cho $B = (12!)^{13} + 2016^{2015}$. Chứng minh rằng B chia hết cho 13.

Bài 18. Chứng minh rằng với $n \in N$:

a) $2^{2^{2n+1}} + 3.2^{3n} \vdots 7$;

b) $2^{2^{4n+1}} + 2.12^{5n+1} + 5.10^{2n} \vdots 11$.

Bài 19. a) Với giá trị nào của số tự nhiên n thì $3^n + 63$ chia hết cho 72.

b) Cho $A = 20^n + 16^n - 3^n - 1$. Tìm giá trị tự nhiên của n để $A \vdots 323$.

Bài 20. Tìm các số nguyên tố p thỏa mãn $2^p + 1 \vdots p$.

Bài 21. Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $p^2 + 20$ là số nguyên tố .

Bài 22. Cho p là số nguyên tố. Chứng minh rằng số $ab^p - ba^p \vdots p$ với mọi số nguyên dương a, b.

Bài 23. a) Chứng minh rằng tổng các bình phương của ba số nguyên trong phép chia cho 8 không thể có dư là 7.

b) Chứng minh phương trình $4x^2 + y^2 + 9z^2 = 2015$ không có nghiệm nguyên.

Bài 24. Tìm hai chữ số tận cùng của $2011^{2010^{2009}}$

(Đề thi Olympic Toán Singapore năm 2010)

Bài 25. Cho biểu thức $A = (a^{2012} + b^{2012} + c^{2012}) - (a^{2008} + b^{2008} + c^{2008})$ với a, b, c là các số nguyên dương. Chứng minh rằng A chia hết cho 30.

(Đề thi chọn học sinh giỏi môn toán lớp 9 TP Hà Nội năm học 2011 – 2012)

Bài 26. Chứng minh rằng không tồn tại các bộ ba số nguyên (x; y; z) thỏa mãn đẳng thức $x^4 + y^4 = 7z^4 + 5$.

(Đề thi vào lớp 10 trường THPT chuyên KHTN Hà Nội năm học 2011 – 2012).

Bài 27. Tìm hai chữ số cuối cùng của số $A = 41^{106} + 57^{2012}$.

(Đề thi vào lớp 10 trường THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội năm học 2012 – 2013).

Bài 28. Cho a, b là hai số nguyên dương thỏa mãn a + 20 và b + 13 cùng chia hết cho 21. Tìm số dư trong phép chia $A = 4^a + 9^b + a + b$ cho 21.

(Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT chuyên Trần Phú Hải Phòng năm học 2013 – 2014)

Bài 29. Cho n là một số nguyên dương chứng minh $A = 2^{3n+1} + 2^{3n-1} + 1$ là hợp số.

(Đề thi học sinh giỏi lớp 9 TP Hà Nội năm học 2014 – 2015)

Bài 30. Chứng minh $A = 2012^{4n} + 2013^{4n} + 2014^{4n} + 2015^{4n}$ không phải là số chính phương với mọi số nguyên dương n.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên trường ĐHSP TP Hồ Chí Minh năm học 2015 – 2016)

Bài 31. Chứng minh rằng phương trình : $x^{15} + y^{15} + z^{15} = 19^{2003} + 7^{2003} + 9^{2003}$ không có nghiệm nguyên.

Bài 32. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $x(x+3) + y(y+3) = z(z+3)$ với điều kiện x, y là các số nguyên tố.

Bài 33. Chứng minh $\left(2013^{2016} + 2014^{2016} - 2015^{2016}\right)^{10} \vdots 106$.

Bài 34. Chứng minh rằng $1^{4k} + 2^{4k} + 3^{4k} + 4^{4k}$ không chia hết cho 5.

Bài 35. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên tố p tồn tại vô số số có dạng $2^n - n$, (n $\in$N) chia hết cho p.

Bài 36. Tìm hai chữ số tận cùng của $26^{6^{2001}}$

Bài 37. Tìm số tự nhiên n sao cho $3^n + 4n + 1$ chia hết cho 10.

Bài 38. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất lớn hơn 4 sao cho $n^3 + 4n^2 - 20n - 48 \vdots 125$

Bài 39. Cho số nguyên a không chia hết cho 5 và 7. Chứng minh rằng:

$$\left(a^4 - 1\right)\left(a^4 + 15a^2 + 1\right) \vdots 35$$

Bài 40. Chứng minh rằng $2^m + 3^n$ không chia hết cho 23 với mọi số tự nhiên m, n.

Bài 41. Chứng minh rằng trong các số tự nhiên thế nào cũng có số k sao cho $2017^k - 1$ chia hết cho 10^5.

Bài 42. Tìm n nguyên dương để phương trình sau có nghiệm hữu tỉ:

$$x^n + (x+2)^n + (2-x)^n = 0$$

Bài 43. Gọi a là tổng các chữ số của số $\left(2^9\right)^{1945}$. Gọi b là tổng các chữ số của số a. Gọi c là tổng các chữ số của b. Tính c.

CHỦ ĐỀ 6 PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

A. Kiến thức cần nhớ

1. Giải phương trình nghiệm nguyên.

Giải phương trình *f(x, y, z, ...) = 0* chứa các ẩn x, y, z, ... với nghiệm nguyên là tìm tất cả các bộ số nguyên (x, y, z, ...) thỏa mãn phương trình đó.

2. Một số lưu ý khi giải phương trình nghiệm nguyên.

Khi giải các phương trình nghiệm nguyên cần vận dụng linh hoạt các tính chất về chia hết, đồng dư, tính chẵn lẻ,… để tìm ra điểm đặc biệt của các ẩn số cũng như các biểu thức chứa ẩn trong phương trình, từ đó đưa phương trình về các dạng mà ta đã biết cách giải hoặc đưa về những phương trình đơn giản hơn. Các phương pháp thường dùng để giải phương trình nghiệm nguyên là:

- Phương pháp dùng tính chất chia hết
- Phương pháp xét số dư từng vế
- Phương pháp sử dụng bất đẳng thức
- Phương pháp dùng tính chất của số chính phương
- Phương pháp lùi vô hạn, nguyên tắc cực hạn.

B. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

I. PHƯƠNG PHÁP DÙNG TÍNH CHIA HẾT

🗁 **Dạng 1: Phát hiện tính chia hết của một ẩn**

Bài toán 1. Giải phương trình nghiệm nguyên $3x+17y=159 \quad (1)$

Hướng dẫn giải

Giả sử x, y là các số nguyên thỏa mãn phương trình (1). Ta thấy 159 và 3x đều chia hết cho 3 nên $17y \vdots 3 \Rightarrow y \vdots 3$ (do 17 và 3 nguyên tố cùng nhau).

Đặt $y=3t\left(t \in Z\right)$ thay vào phương trình ta được $3x+17.3t=159 \Leftrightarrow x+17t=53.$

Do đó: $\begin{cases} x = 53 - 17t \\ y = 3t \end{cases} (t \in Z)$. Thử lại ta thấy thỏa mãn phương trình đã cho

Vậy phương trình có nghiệm (x, y) = (53 – 17t, 3t) với t là số nguyên tùy ý.

Bài toán 2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $2x + 13y = 156$ (1).

Hướng dẫn giải

- Phương pháp 1: Ta có $13y \vdots 13$ và $156 \vdots 13$ nên $2x \vdots 13 \Rightarrow x \vdots 13$ (vì (2,3) = 1).

Đặt $x = 13k\ (k \in Z)$ thay vào (1) ta được: $y = -2k + 12$

Vậy nghiệm nguyên của phương trình là: $\begin{cases} x = 13k \\ y = -2k + 12 \end{cases} (k \in Z)$.

- Phương pháp 2: Từ $(1) \Rightarrow x = \dfrac{156 - 13y}{2} = 78 - \dfrac{13y}{2}$,

Để $x \in Z \Rightarrow \dfrac{13y}{2} \in Z$ Mà $(13,2) = 1 \Rightarrow y \vdots 2$ Đặt $y = 2t(t \in Z) \Rightarrow x = 78 - 13t$

Vậy nghiệm nguyên của phương trình là: $\begin{cases} x = 78 - 13t \\ y = -2t \end{cases} (t \in Z)$.

Bài toán 3. Giải phương trình nghiệm nguyên $23x + 53y = 109$.

Hướng dẫn giải

Ta có $x = \dfrac{109 - 53y}{23} = \dfrac{23(4 - 2y) + 17 - 7y}{23} = 4 - 2y + \dfrac{17 - 7y}{23}$

Ta phải biến đổi tiếp phân số $\dfrac{17 - 7y}{23}$ để sao cho hệ số của biến y là 1.

Phân tích: Ta thêm, bớt vào tử số một bội thích hợp của 23

$$\frac{17 - 7y}{23} = \frac{17 - 7y + 46 - 46}{23} = \frac{7(9 - y) - 46}{23} = -2 + \frac{7(9 - y)}{23}$$

Từ đó $x = 2 - 2y + \dfrac{7(9 - y)}{23}$, Để $x \in Z \Rightarrow \dfrac{9 - y}{23} \in Z$, do (7,23) = 1.

Đặt $9 - y = 23t\ (t \in Z) \Rightarrow y = 9 - 23t$

Vậy nghiệm nguyên của phương trình là: $\begin{cases} x = 9 - 23t \\ y = 53t - 16 \end{cases} (t \in Z)$.

Chú ý: Phương trình có dạng $ax + by = c$ với a,b,c là các số nguyên.

* Phương pháp giải:

- Rút gọn phương trình chú ý đến tính chia hết của các ẩn.
- Biểu thị ẩn mà hệ số của nó có giá trị tuyệt đối nhỏ (chẳng hạn x) theo ẩn kia.
- Tách riêng giá trị nguyên ở biểu thức của x.
- Đặt điều kiện để phân số trong biểu thức chứa x bằng một số nguyên t_1, ta được một phương trình bậc nhất hai ẩn y và t_1.
- Cứ tiếp tục làm như trên cho đến khi các ẩn đều được biểu thị dưới dạng một đa thức với các hệ số nguyên.

Bài toán 4. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $11x + 18y = 120 \quad (1)$

Hướng dẫn giải

Ta thấy $11x \vdots 6$ nên $x \vdots 6$. Đặt x = 6k (k nguyên). Thay vào (1) và rút gọn ta được:

$$11k + 3y = 20$$

Biểu thị ẩn mà hệ số của nó có giá trị tuyệt đối nhỏ (là y) theo k ta được: $y = \dfrac{20 - 11k}{3}$

Tách riêng giá trị nguyên của biểu thức này: $y = 7 - 4k + \dfrac{k-1}{3}$

Lại đặt $\dfrac{k-1}{3}$ = t với t nguyên suy ra k = 3t + 1. Do đó:

$$y = 7 - 4(3t+1) + t = 3 - 11t$$
$$x = 6k = 6(3t+1) = 18t + 6$$

Thay các biểu thức của x và y vào (1), phương trình được nghiệm đúng.

Vậy các nghiệm nguyên của (10 được biểu thị bởi công thức:

$\begin{cases} x = 18t + 6 \\ y = 3 - 11t \end{cases}$ với t là số nguyên tùy ý

Chú ý: *a) Nếu đề bài yêu cầu tìm nghiệm nguyên dương của phương trình (1) thì sau khi tìm được nghiệm tổng quát ta có thể giải điều kiện:* $\begin{cases} 18t + 6 > 0 \\ 3 - 11t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{3} < t < \dfrac{3}{11}$

Do đó t = 0 do t là số nguyên. Nghiệm nguyên dương của (1) là (x, y) = (6, 3).

Trong trường hợp tìm nghiệm nguyên dương của (1) ta còn có thể giải như sau: 11x + 18y = 120

Do $y \geq 1$ *nên* $11x \leq 120 - 18.1 = 102$.

Do x nguyên nên $x \leq 9$ *. Mặt khác* $x \vdots 6$ *và x nguyên dương nên x = 6* $\Rightarrow y = 3$

b) Có nhiều cách tách giá trị nguyên của biểu thức $y = \dfrac{20 - 11k}{3}$*, chẳng hạn:*

$y = 7 - 4k + \dfrac{k-1}{3}$ *(cách 1)*

$y = 7 - 3k - \dfrac{1+2k}{3}$ *(cách 2)*

$y = 6 - 3k + \dfrac{2(1-k)}{3}$ *(cách 3)*

Ta thấy: - Cách 1 gọn hơn cách 2 vì ở cách 1 hệ số của k trong phân thức bằng 1, do đó sau khi đặt $\dfrac{k-1}{3} = t$ *ta không cần thêm một ẩn phụ nào nữa*

- Trong cách 3, nhờ đặt được thừa số chung mà hệ số của k của phần phân số bằng -1, do đó sau khi đặt $\dfrac{1-k}{3} = t$ *cũng không cần dùng thêm thừa số phụ nào nữa.*

Bài toán 5. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $6x^2 + 5y^2 = 74$

Hướng dẫn giải

Ta có: $6x^2 + 5y^2 = 74 \Leftrightarrow 6(x^2 - 4) = 5(10 - y^2)\ (2)$

Từ (2) suy ra $6(x^2-4) \vdots 5$, mặt khác $(6,5) = 1 \Rightarrow (x^2-4) \vdots 5 \Rightarrow x^2 = 5t + 4\ (t \in N)$

Thay $x^2 - 4 = 5t$ vào (2) ta có: $30t = 5(10 - y^2) \Leftrightarrow y^2 = 10 - 6t$

Ta có: $x^2 > 0, y^2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5t + 4 > 0 \\ 10t - 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > -\dfrac{4}{5} \\ t < \dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{4}{5} < t < \dfrac{5}{3}, t \in N$ .Suy ra: $t \in \{0;1\}$

Với t = 0 không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với t = 1 ta có: $\begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \pm 2 \end{cases}$. Mặt khác x, y nguyên dương nên x = 3, y = 2.

Vậy phương trình có nghiệm (x, y) = (3, 2).

🗁 Dạng 2: Phương pháp đưa về phương trình ước số

*** Cơ sở phương pháp:**

Ta tìm cách đưa phương trình đã cho thành phương trình có một vế là tích các biểu thức có giá trị nguyên, vế phải là hằng số nguyên.

Thực chất là biến đổi phương trình về dạng: $A(x;y).B(x;y) = c$ *trong đó* $A(x;y), B(x;y)$ *là các biểu thức nguyên, c là một số nguyên.*

Xét các trường hợp $A(x;y), B(x;y)$ *theo ước của c.*

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2xy - x + y = 3$

Hướng dẫn giải

$$
\begin{aligned}
&2xy - x + y = 3\\
&\Leftrightarrow 4xy - 2x + 2y = 6\\
&\Leftrightarrow 2x\left(2y-1\right) + \left(2y-1\right) = 6 - 1\\
&\Leftrightarrow \left(2y-1\right)\left(2x+1\right) = 5.
\end{aligned}
$$

Ta gọi phương trình trên là ***phương trình ước số***: vế trái là một tích các thừa số nguyên, vế trái là hằng số. Ta có x và y là các số nguyên nên 2x + 1 và 2y – 1 là các số nguyên và là ước của 5.

(2x + 1) và (2y - 1) là các ước số của 5 nên ta có:

2x + 1	1	-1	5	-5
2y - 1	5	-5	1	-1

Vập phương trình có các nguyện nguyên là (x, y) = (3, 0); (-1, -2); (2, 1); (-3, 0).

Kinh nghiệm giải: *Để đưa vế trái* $2xy - x + y$ *về phương trình dạng tích, ta biến đổi thành* $x\left(2y-1\right) + \frac{1}{2}\left(2y-1\right)$ *bằng cách nhân 2 vế của phương trình với 2 để đưa về phương trình ước số. Luyện tập kinh nghiệm này bằng ví dụ 2 sau đây.*

Bài toán 2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $5x - 3y = 2xy - 11$.

Hướng dẫn giải

$$5x - 3y = 2xy - 11 \Rightarrow x(5-2y) + \frac{3}{2}(5-2y) - \frac{15}{2} + 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(5-2y\right)\left(x+\frac{3}{2}\right) = \frac{-7}{2} \Leftrightarrow \left(2y-5\right).\frac{2x+3}{2} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow \left(2y-5\right)\left(2x+3\right) = 7 \qquad (*)$$

(2x + 3) và (2y - 5) là các ước số của 7 nên ta có:

2x + 3	1	-1	7	-7
2y - 5	7	-7	1	-1

Vập phương trình có các nguyện nguyên là (x, y) = (-1, 6); (-2, -1); (2, 3); (-5, 2).

Nhận xét: *Đối với nhiều phương trình nghiệm nguyên việc đưa về phương trình ước số là rất khó khăn ta có thể áp dụng một số thủ thuật, các bạn xem tiếp ví dụ 3:*

Bài toán 3. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 - 2xy + 3y - 5x + 7 = 0$.

Hướng dẫn giải

$x^2-2xy+3y-5x+7=0 \Leftrightarrow x^2-x(2y+5)+\frac{(2y+5)^2}{4}+\frac{-(2y+5)^2}{4}+3y+7=0$

$\Leftrightarrow\left(x-\frac{2y+5}{2}\right)^2+\frac{-4y^2-20y-25+12y+28}{4}=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{2y+5}{2}\right)^2-\frac{4y^2+8y-3}{4}$

$\Leftrightarrow\left(x-\frac{2y+5}{2}\right)^2-\frac{4(y+1)^2-7}{4}=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{2y+5}{2}\right)^2-(y+1)^2=\frac{-7}{4}$

$\Leftrightarrow\frac{\left(2x-2y-5\right)^2}{4}-(y+1)^2=\frac{-7}{4} \Leftrightarrow \left(2x-2y-5\right)^2-4\left(y+1\right)^2=-7$

$\Leftrightarrow\left(2x-2y-5-2y-2\right)\left(2x-2y-5+2y+2\right)=-7 \Leftrightarrow \left(2x-4y-7\right)\left(2x-3\right)=-7 \quad (*)$

Vì x, y nguyên nên từ PT(*) ta có các trường hợp sau:

1) $\begin{cases}2x-4y-7=1\\2x-3=-7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2\\y=-3\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2x-4y-7=-7\\2x-3=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$

3) $\begin{cases}2x-4y-7=-1\\2x-3=7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=5\\y=1\end{cases}$ 4) $\begin{cases}2x-4y-7=7\\2x-3=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\y=-3\end{cases}$

Vậy các nghiệm nguyên (x; y) của phương trình là: (-2; -3); (2; 1); (5; 1);(1; -3).

Nhận xét: *Trong cách giải trên ta đã sử dụng phương pháp biến đổi tam thức bậc hai* $\left(ax^2+bxy+cy^2, ax^2+bx+c\right)$*): trước hết ta chọn một biến để đưa về hằng đẳng thức (Bình phương của một tổng, hoặc một hiệu) chứa biến đó: ở đây ta chọn biến x là :* $x^2-x(2y+5)+\frac{(2y+5)^2}{4}$*, phần còn lại của đa thức ta lại làm như vậy với biến y:* $\frac{-(2y+5)^2}{4}+3y+7=-\frac{4y^2+8y-3}{4}=-\frac{4(y+1)^2-7}{4}$.

Các bạn có thể tư duy tìm hướng giải như sau:

$x^2-2xy+3y-5x+7=0 \Leftrightarrow x^2-\left(2y+5\right)x+3y+7+a=a \quad \left(*\right)$

Xét phương trình: $x^2-\left(2y+5\right)x+3y+7+a=0 \ \left(**\right)$

Với a là số chưa biết cần thêm vào, xác định a như sau:

$$\begin{aligned}\Delta_{(**)}&=\left(2y+5\right)^2-4\left(3y+7+a\right)\\&=4y^2+20y+25-12y-28-4a\\&=4y^2+8y-3-4a\end{aligned}$$

Chọn a để $\Delta_{(**)}$ là số chính phương nên $-3-4a=4 \Rightarrow a=\frac{-7}{4}$ .khi đó :

$\Delta_{(**)}=4\left(x+1\right)^2 \Rightarrow x_1=\frac{2y+5-2\left(x+1\right)}{2}=\frac{3}{2}, x_2=\frac{2y+5+2\left(x+1\right)}{2}=\frac{4y+7}{2}$

Vậy: $(*) \Leftrightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{4y+7}{2}\right)=-\frac{7}{4} \Leftrightarrow (2x-3)(2x-4y-7)=-7$

Vì x, y nguyên nên ta có các trường hợp sau:

1) $\begin{cases}2x-4y-7=1\\2x-3=-7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2\\y=-3\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2x-4y-7=-7\\2x-3=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$

3) $\begin{cases}2x-4y-7=-1\\2x-3=7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=5\\y=1\end{cases}$ 4) $\begin{cases}2x-4y-7=7\\2x-3=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\y=-3\end{cases}$

Vậy các nghiệm nguyên (x;y) của phương trình là: (-2; -3); (2; 1); (5; 1);(1; -3).

Bài toán 4. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2+12x=y^2$ (1)

Hướng dẫn giải

Phương trình tương đương với :

$x^2+12x=y^2 \Leftrightarrow (x+6)^2-y^2=36 \Leftrightarrow (x+y+6)(x-y+6)=36$

Suy ra (x + y + 6) và (x – y + 6) là ước của 36.

Mà 36 có 18 ước nên: $(x+y+6) \in \{\pm1;\pm2;\pm3;\pm4;\pm6;\pm9;\pm18;\pm36\}$

Kết quả ta tìm được các nghiệm nguyên là: $(0,0);(-12,0);(-16,8);(-16,-8);(4,8);(4,-8)$

Nhận xét: *Phương pháp đưa về phương trình ước số có 2 bước: Phân tích thành ước và xét các trường hợp. Hai bước này có thể không khó nhưng trong trường hợp hằng số phải xét có nhiều ước số chúng ta cần dựa vào tính chất của biến (ví dụ: tính chẵn lẻ, số dư từng vế) để giảm số trường hợp cần xét.*

Trong trường hợp ***ví dụ 4*** *ta có thể nhận xét như sau:*

Do y có số mũ chẵn nên nếu y là nghiệm thì – y cũng là nghiệm nên ta giả sử $y \geq 0$ *. Khi đó* $x+6-y \leq x+6+y$ *ta giảm được 8 trường hợp:*

$\begin{cases}x+6+y=9\\x+6-y=4\end{cases}, \begin{cases}x+6+y=-4\\x+6-y=-9\end{cases}, \begin{cases}x+y+6=-1\\x+y-6=-36\end{cases}$

$\begin{cases}x+6+y=36\\x+6-y=1\end{cases}, \begin{cases}x+6+y=-2\\x+6-y=-18\end{cases}, \begin{cases}x+y+6=18\\x+y-6=2\end{cases}$

$\begin{cases}x+6+y=-3\\x+6-y=-12\end{cases}, \begin{cases}x+6+y=12\\x+6-y=3\end{cases}, \begin{cases}x+y+6=-6\\x+y-6=-6\end{cases}$

$\left\{\begin{cases}x+6+y=6\\x+6-y=6\end{cases}\right.$

Bây giờ có 10 trường hợp, ta lại thấy $(x+6+y)+(x+6-y)=2y$ *nên* $(x+6+y),(x+6-y)$ *có cùng tính chẵn lẻ.Do đó ta còn 4 trường hợp:*

$\begin{cases} x+6+y=-2 \\ x+6-y=-18 \end{cases}, \begin{cases} x+y+6=18 \\ x+y-6=2 \end{cases}, \begin{cases} x+y+6=-6 \\ x+y-6=-6 \end{cases}, \begin{cases} x+y+6=6 \\ x+y-6=6 \end{cases}$

Tiếp tục xét hai phương trình $\begin{cases} x+y+6=-6 \\ x+y-6=-6 \end{cases}, \begin{cases} x+y+6=6 \\ x+y-6=6 \end{cases}$ *hai phương trình này đều có nghiệm y = 0 ta có xét y = 0 ngay từ đầu. Ta có phương trình ban đầu:* $x(x+12)=y^2$ *, xét hai khả năng:*

Nếu y = 0 thì x = 0 hoặc x = - 12

Nếu $y \neq 0$ *thì* $x+6-y<x+6+y$ *áp dụng hai nhận xét trên ta chỉ phải xét 2 trường hợp*

$\begin{cases} x+6+y=-2 \\ x+6-y=-18 \end{cases}, \begin{cases} x+y+6=18 \\ x+y-6=2 \end{cases}$

Giải và kết luận phương trình có 4 nghiệm $(0,0);(-12,0);(-16,8);(-16,-8);(4,8);(4,-8)$

🗁 Dạng 3: Phương pháp tách ra các giá trị nguyên.

*** Cơ sở phương pháp:**

Trong nhiều bài toán phương trình nghiệm nguyên ta tách phương trình ban đầu thành các phần có giá trị nguyên để dễ dàng đánh giá tìm ra nghiệm, đa số các bài toán sử dụng phương pháp này thường rút một ẩn (có bậc nhất) theo ẩn còn lại.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình sau: $xy-2y-3y+1=0$

Hướng dẫn giải

Ta có $xy-2y-3y+1=0 \Rightarrow y(x-3)=2x-1.$

Ta thấy $x=3$ không là nghiệm nên $x \neq 3$ do đó: $y=\dfrac{2x-1}{x-3}$

Tách ra ở phân thức $\dfrac{2x-1}{x-3}$ các giá trị nguyên:

$y=\dfrac{2x-1}{x-3}=\dfrac{2(x-3)+5}{x-3}=2+\dfrac{5}{x-3}$

Do y là số nguyên nên $\dfrac{5}{x-3}$ cũng là số nguyên, do đó (x – 3) là ước của 5.

+) x – 3 = 1 thì x = 4, y = 2 + 5 = 7

+) x - 3 = -1 thì x = 2, y = 2 – 5 = -3 (loại)

+) x – 3 = 5 thì x = 8, y = 2 +1 = 3

+) x – 3 = -5 thì x = -2 (loại)

Vậy nghiệm (x, y) là (4, 7) , (8, 3).

Bài toán 2. Tìm các số nguyên *x* và *y* thoả mãn phương trình: $x^2 + xy - 2y - x - 5 = 0$

Hướng dẫn giải

Nhận xét: trong phương trình này ẩn y có bậc nhất nên rút y theo x.

Ta có: $x^2 + xy - 2y - x - 5 = 0 \Leftrightarrow y(x-2) = -x^2 + x + 5 \quad (*)$

Với x = 2 thì: $(*) \Leftrightarrow 0 = 3$ (vô lý)

Với $x \neq 2$ ta có: $(*) \Leftrightarrow y = \frac{-x^2 + x + 2}{x-2} + \frac{3}{x-2} = -x - 1 + \frac{3}{x-2}$

Để y nguyên thì $3 \vdots (x-2)$. Vậy (x – 2) là ước của 3 do

đó: $(x-2) \in \{-3, -1, 1, 3\} \Rightarrow x \in \{-1, 1, 3, 5\}$

Vậy phương trình có nghiệm: (x, y) = (3; - 1) ; (5; -5); (1; -5); (-1; - 1)

Bài toán 3. Tìm các số nguyên dương x, y sao cho $6x + 5y + 18 = 2xy$ (1)

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$x = \frac{-5y - 18}{6 - 2y} \Leftrightarrow 2x = \frac{-10y - 36}{6 - 2y}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{-66 + 5(6 - 2y)}{6 - 2y} = \frac{-66}{6 - 2y} + 5 \Leftrightarrow 2x = \frac{-33}{3 - y} + 5$$

Như vậy x muốn nguyên dương thì (3 – y) phải là ước của – 33. Hay $(3 - y) \in \{\pm 1; \pm 3; \pm 11; \pm 33\}$. Lại do $y \geq 1 \Rightarrow 3 - y \leq 2 \Rightarrow y \in \{\pm 1; -3; -11; -33\}$. Ta có bảng sau:

3 - y	-1	1	-3	-11	-33
y	4	2	6	14	36
x	19	- 14	8	4	3

Thử lại ta được các cặp thỏa mãn là (19, 4); (8, 6); (4, 14); (3, 36).

Nhận xét: *- Dễ xác định được phương pháp để giải bài toán này, khi biểu diễn x theo y được* $x = \frac{-5y - 18}{6 - 2y}$ *. Ta thấy biểu thức này khó phân tích như 2 ví dụ trên, tuy nhiên để ý ta thấy tử số là – 5y mẫu số là -2y, do đó mạnh dạn nhân 2 vào tử số để xuất hiện 2y giống mẫu.*

- Bài toán có thể giải bằng phương pháp đưa về phương trình ước số. Do ở bài toán trên đã nhân 2 ở x để biến đổi, do đó phải có bước thử lại xem x, y có thỏa mãn phương trình đã cho hay không.

Bài toán 4. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2y^2x + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy$

Hướng dẫn giải

Ta có: $2y^2x + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy \Leftrightarrow 2y^2(x-1) - x(x-1) - y(x-1) + 1 = 0 \quad (1)$

Nhận thấy x = 1 không là nghiệm của phương trình (1).

Chia cả 2 vế của (1) cho (x – 1) ta được: $2y^2 - x - y + \frac{1}{x-1} = 0 \ (2)$

PT có nghiệm x, y nguyên, suy ra $\frac{1}{x-1}$ nguyên nên $x - 1 \in \{1; -1\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 0 \end{array}\right.$

Thay x = 2 và x = 0 vào phương trình và để ý đến y nguyên ta được y = 1.

Vập phương trình đã cho có 2 nghiệm là (2; 1) và (0; 1).

II. PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG TÍNH CHẴN LẺ CỦA ẨN HOẶC XÉT SỐ DƯ TỪNG VẾ

*** Cơ sở phương pháp:** Chúng ta dựa vào tính chẵn lẻ của ẩn hoặc xét số dư hai vế của phương trình nghiệm nguyên với một số nguyên nào đó rồi dùng lập luận để giải bài toán.

*** Ví dụ minh họa:**

🗁 **Dạng 1: Sử dụng tính chẵn lẻ**

Bài toán 1. Tìm x, y nguyên tố thoả mãn $y^2 - 2x^2 = 1$

Hướng dẫn giải

Ta có $y^2 - 2x^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 2x^2 + 1 \Rightarrow y$ là số lẻ

Đặt y = 2k + 1 (với k nguyên).Ta có $(2k + 1)^2 = 2x^2 + 1$

$\Leftrightarrow x^2 = 2k^2 + 2k \Rightarrow$ x chẵn , mà x nguyên tố $\Rightarrow$ x = 2, y = 3

Vậy nghiệm của phương trình là (x, y) = (2, 3).

Bài toán 2. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$(2x + 5y + 1)\left(2^{|x|} + y + x^2 + x\right) = 105$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\left(2x+5y+1\right)\left(2^{|x|}+y+x^2+x\right)=105$

Ta thấy 105 lẻ ⇒ 2x + 5y + 1 lẻ ⇒ 5y chẵn ⇒ y chẵn, $2^{|x|}+y+x^2+x=2^{|x|}+y+x\left(x+1\right)$ lẻ

có x(x + 1) chẵn, y chẵn ⇒ $2^{|x|}$ lẻ ⇒ $2^{|x|}=1$ ⇒ x = 0

Thay x = 0 vào phương trình ta được

(5y + 1) (y + 1) = 105 ⇔ $5y^2 + 6y - 104 = 0$ ⇒ y = 4 hoặc $y = -\dfrac{26}{5}$ (loại)

Thử lại ta có x = 0; y = 4 là nghiệm của phương trình.

Vậy nghiệm của phương trình là (x, y) = (0, 4).

Dạng 2: Xét tính chẵn lẻ và xét số dư từng vế

Bài toán 1. Chứng minh rằng các phương trình sau không có nghiệm nguyên:

a) $x^2-y^2=1998$ b) $x^2+y^2=1999$

Hướng dẫn giải

a) Do x là số nguyên nên $x=2k$ hoặc $x=2k+1\ \left(k\in Z\right)$ do đó $x^2=4k^2 \vee x^2=4k^2+4k+1$

vì thế x^2 chia 4 luôn dư 1 hoặc 0. Tương tự ta cũng có y^2 chia 4 luôn dư 1 hoặc 0

Suy ra: x^2-y^2 chia cho 4 luôn dư 1 hoặc 0 hoặc 3. Mà 1998 chia cho 4 dư 2 do đó phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

b) Như chứng minh câu a ta có: x^2, y^2 chia cho 4 luôn dư 0 hoặc 1 nên x^2+y^2 chia cho 4 luôn dư 0 hoặc 1 hoặc 3. Mà 1999 chia cho 4 dư 3 do đó phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

Chú ý: *Chúng ta cần lưu ý kết quả ở bài toán này:*

*) x^2-y^2 *chia cho 4 không dư 2*

*) x^2+y^2 *chia cho 4 không dư 3*

Bài toán 2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $9x+2=y^2+y$

Hướng dẫn giải

Ta có: $9x+2=y^2+y \Leftrightarrow 9x+2=y\left(y+1\right)$

Ta thấy vế trái phương trình là số chia cho 3 dư 2 nên $y\left(y+1\right)$ chia cho 3 dư 2

Do đó chỉ có thể $y=3k+1$ và $y+1=3k+2\left(k\in Z\right)$

Khi đó: $9x+2=\left(3k+1\right)\left(3k+2\right)\Leftrightarrow 9x=9k^2+9k\Leftrightarrow x=k\left(k+1\right)$

Thử lại: $x=k\left(k+1\right), y=3k+1$ thỏa mãn phương trình đã cho.

Vậy nghiệm của phương trình là $\left(x,y\right)=\left(k\left(k+1\right),3k+1\right)$ với $k\in Z$

Bài toán 3. Tìm x, y là số tự nhiên thoả mãn $x^2+3^y=3026$

Hướng dẫn giải

Xét $y=0\Rightarrow x^2+3^0=3026\Rightarrow x^2=3025$. Mà $x\in N\Rightarrow x=55$

Xét $y>0\Rightarrow$ 3^y chia hết cho 3, x^2 chia cho 3 dư 0 hoặc $1\Rightarrow x^2+3^y$ chia cho 3 dư 0 hoặc 1 mà 3026 chia cho 3 dư 2 (loại)

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất (x,y) = (55,0)

Bài toán 4. Chứng minh rằng phương trình $x^3-7y=51$ không có nghiệm nguyên

Hướng dẫn giải

Xét $x=7k\left(k\in Z\right)$ thì $x^3\,\vdots\,7$.

Xét $x=7k\pm1\left(k\in Z\right)$ thì x^3 chia cho 7 dư 1 hoặc 6.

Xét $x=7k\pm2\left(k\in Z\right)$ thì x^3 chia cho 7 dư 1 hoặc 6.

Xét $x=7k\pm3\left(k\in Z\right)$ thì x^3 chia cho 7 dư 1 hoặc 6.

Do đó vế trái phương trình chia cho 7 dư 0 hoặc 1 hoặc 6 còn vế phải của phương trình chia 7 dư 2. Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 5. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2-5y^2=27$

Hướng dẫn giải

Do x là số nguyên nên ta có thể biểu diễn x dưới dạng: $x=5k$ hoặc $x=5k\pm1$ hoặc $x=5k\pm2$ với $k\in Z$

- Xét x = 5k thì $x^2-5y^2=27\Leftrightarrow\left(5k\right)^2-5y^2=27\Leftrightarrow5\left(5k^2-y^2\right)=27$

Điều này là vô lý vì vế trái chia hết cho 5 với mọi k và y nguyên còn vế phải không chia hết cho 5.

- Xét $x=5k\pm1$ thì $x^2-5y^2=27\Leftrightarrow\left(5k\pm1\right)^2-5y^2=27$

$\Leftrightarrow25k^2\pm10k+1-5y^2=27\Leftrightarrow5\left(5k^2\pm2k-y^2\right)=23$

Điều này là vô lý cũng vì vế trái chia hết cho 5 với mọi k và y nguyên còn vế phải không chia hết cho 5.

- Xét $x = 5k \pm 2$ thì $x^2 - 5y^2 = 27 \Leftrightarrow (5k \pm 2)^2 - 5y^2 = 27$

$\Leftrightarrow 25k^2 \pm 10k + 1 - 5y^2 = 27 \Leftrightarrow 5(5k^2 \pm 4k - y^2) = 23$

Điều này là vô lý cũng vì vế trái chia hết cho 5 với mọi k và y nguyên còn vế phải không chia hết cho 5.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

III. PHƯƠNG PHÁP DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC

Dạng 1: Sử dụng bất đẳng thức cổ điển

*** Cơ sở phương pháp:**

Trong nhiều bài toán ta thường sử dụng bất đẳng thức để chứng minh một vế không nhỏ hơn (hoặc không lớn hơn) vế còn lại. Muốn cho phương trình có nghiệm thì dấu bằng của bất đẳng thức phải xảy ra đó là nghiệm của phương trình.

Một số bất đẳng thức Cổ điển thường được sử dụng như:

1. Bất đẳng thức Cauchy (tên quốc tế là AM – GM)

Nếu $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ *là các số thực không âm thì:* $\dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n} \ge \sqrt{a_1.a_2.a_3 \ldots a_n}$

Đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n$

2. Bất đẳng thức Bunhiacopxki với hai bộ số thực bất kì $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ *và* $(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)$ *ta có* $(a_1^2 + a_2^2 + a_3^3 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots + b_n^2) \ge (a_1b_2 + a_2b_2 + a_3b_3 + \ldots + a_nb_n)^2$

Đẳng thức xảy ra khi tồn tại số thực k $(k \ne 0)$ *sao cho* $a_i = kb_i$ *với i = 1, 2, 3,…, n.*

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn phương trình: $(x^2+1)(x^2+y^2) = 4x^2y$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$x^2 + 1 \ge 2x$ Dấu “=” xảy ra khi x = 1.

$x^2 + y^2 \ge 2xy$ Dấu “=” xảy ra khi x = y.

Do x, y dương nên nhân 2 vế của bất đẳng thức trên ta được $(x^2+1)(x^2+y^2) \ge 4x^2y$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi x = y = 1.

Bài toán 2. Giải phương trình nghiệm nguyên dương sau:

$$x^6 + z^3 - 15x^2z = 3x^2y^2z - (y^2+5)^3 \qquad (1)$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $(1) \Leftrightarrow x^6 + z^3 + \left(y^2+5\right)^3 = 15x^2z + 3x^2y^2z \Leftrightarrow x^6 + z^3 + \left(y^2+5\right)^3 = 3x^2z\left(y^2+5\right)$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có: $x^6 + z^3 + \left(y^2+5\right)^3 \ge 3x^2z\left(y^2+5\right)$

Dấu "=" xảy ra khi $x^2 = y^2 + 5 = z$

Từ $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = 5$ giải ra được nghiệm (x, y, z) = (3, 2, 9).

Bài toán 3. Giải phương trình nghiệm nguyên sau $(x+y+1)^2 = 3\left(x^2+y^2+1\right)$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức ***Bunhiacopxki*** ta có: $(1+1+1)\left(x^2+y^2+1\right) \ge (x+y+1)^2$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} = \frac{1}{1} \Leftrightarrow x = y = 1$

Vậy nguyệm nguyên của phương trình là (x, y) = (1, 1).

Bài toán 4. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$.

Hướng dẫn giải

Với $|x| \ge 2$ và $|y| \ge 2$ ta có:

$$\begin{cases} x^2y^2 \ge 4x^2 \\ x^2y^2 \ge 4y^2 \end{cases} \Rightarrow x^2y^2 \ge 2\left(x^2+y^2\right) = x^2 + y^2 + x^2 + y^2 \overset{\text{AM-GM}}{\ge} x^2 + y^2 + 2|xy| > x^2 + y^2 + xy.$$

Vậy $|x| \le 2$ hoặc $|y| \le 2$

Nếu x = -2 hoặc x = 2 thì phương trình không có nghiệm nguyên.

Thử x = -1, 1, 0 ta thấy phương trình có 3 nghiệm (0;0), (1; - 1), (-1; 1).

🗁 Dạng 2: Sắp xếp thứ tự các ẩn

*** Cơ sở phương pháp:**

Khi phương trình đối xứng với các ẩn $x, y, z, ...$, ta thường giả sử $x \le y \le z \le ...$ để giới hạn miền nghiệm của phương trình và bắt đầu đi tìm từ nghiệm bé nhất trở đi

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $2xyz = x + y + z$

Hướng dẫn giải

Giả sử $x \le y \le z$. Ta có: $2xyz = x + y + z \le 3z$

Chia 2 vế cho z dương ta được $2xy \le 3 \Rightarrow xy \le 1 \Rightarrow xy = 1$

Do đó x = y = 1. Thay vào phương trình ban đầu ta được: 2z = z + 2 hay z = 2.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là (x, y, z) = (1, 1, 2); (1, 2, 1); (2, 1, 1).

Bài toán 2. Giải phương trình nghiệm nguyên dương: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$

Hướng dẫn giải

Do x, y, z có vai trò như nhau nên ta giả sử: $x \le y \le z$

Khi đó: $1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \le \frac{3}{x} \Rightarrow x \le 3 \Rightarrow x \in \{1;2;3\}$ $\left(\text{do } \ x \in Z^+\right)$

Với x = 1 phương trình đã cho vô nghiệm.

Với x = 2 ta có: $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \le \frac{1}{2}+\frac{2}{y} \Rightarrow y \le 4$. Mặt khác $y \ge x = 2 \Rightarrow y \in \{2,3,4\}$

+) y = 2 thì phương trình vô nghiệm.

+) y = 3 thì z = 6

+) y = 4 thì z = 4

Với x = 3 ta có: $1=\frac{1}{3}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \le \frac{1}{3}+\frac{2}{y} \Rightarrow y \le 3$. Mặt khác $y \ge x = 3 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow z = 3$

Vậy phương trình có nghiệm là (x, y, z) = (2, 3, 6); (2, 4, 4); (3, 3, 3).

Bài toán 3. Giải phương trình nghiệm nguyên dương: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=z$.

Hướng dẫn giải

Biến đổi thành: $xyz = x + y$.

Do đối xứng của x và y nên có thể giả thiết rằng $x \le y$. Ta

có $xyz = x + y \le y + y = 2y \Rightarrow xz \le 2$.

Ta lựa chọn nghiệm trong các trường hợp sau: x = 1, z = 1; x = 2, z = 1; x =1, z = 2

Ta suy ra nghiệm (x, y, z) là (1, 1, 2) và (2, 2, 1).

Nhận xét: *Ở bài toán này do vai trò của x, y, z là không bình đẳng nên ta không có thể giải sử* $x \le y \le z$ *ta chỉ có thể giả sử* $x \le y$

Bài toán 4. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$5(x+y+z+t)+10=2xyzt$$

Hướng dẫn giải

Ta giả sử $x \geq y \geq z \geq t \geq 1$

Ta có: $5(x + y + z + t) + 10 = 2xyzt$

$$\Leftrightarrow 2 = \frac{5}{yzt} + \frac{5}{xzt} + \frac{5}{xyt} + \frac{5}{xyz} + \frac{10}{xyzt} \leq \frac{30}{t^3} \Rightarrow t^3 \leq 15 \Rightarrow t = 1 \vee t = 2$$

Với $t = 1$ ta có:

$$5(x+y+z+1)+10 = 2xyz$$

$$\Leftrightarrow 2 = \frac{5}{yz} + \frac{5}{xz} + \frac{5}{xy} + \frac{15}{xyz} \leq \frac{30}{z^2} \Rightarrow z^2 \leq 15 \Rightarrow z = \{1;2;3\}$$

Nếu $z = 1$ ta có $5(x+y)+20 = 2xy \Leftrightarrow (2x-5)(2y-5) = 65 \Rightarrow \begin{cases} x = 35 \\ y = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 9 \\ y = 5 \end{cases}$

Ta được nghiệm (35, 3, 1, 1) ; (9, 5, 1, 1) và các hoán vị của chúng.

Với $z = 2$, $z = 3$ phương trình không có nghiệm nguyên.

Với $t = 2$ ta có:

$$5(x+y+z+1)+20 = 4xyz$$

$$\Leftrightarrow 4 = \frac{5}{yz} + \frac{5}{xz} + \frac{5}{xy} + \frac{20}{xyz} \leq \frac{35}{z^2} \Rightarrow z^2 \leq \frac{35}{4} \leq 9(z \geq t \geq 2) \Rightarrow (8x-5)(8y-5) = 265$$

Do $x \geq y \geq z \geq 2$ nên $8x - 5 \geq 8y - 5 \geq 11$

$\Rightarrow (8x - 5)(8y - 5) = 265$ vô nghiệm

Vậy nghiệm của phương trình là bộ (x, y, z)= (35; 3; 1; 1); (9; 5; 1; 1) và các hoán vị.

🗁 Dạng 3: Chỉ ra nghiệm nguyên

*** Cơ sở phương pháp:** Chúng ta xét từng khoảng giá trị của ẩn còn được thể hiện dưới dạng: chỉ ra một hoặc vài số là nghiệm của phương trình, rồi chứng minh phương trình không còn nghiệm nào khác

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình sau: $3^x + 4^x = 5^x$

Hướng dẫn giải

Chia hai vế của phương trình cho 5^x ta được: $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$

Thử thấy $x = 1$ không là nghiệm của phương trình trên.

Với $x = 2$ thì VT = VP = 1 thỏa mãn bài toán.

Với $x \geq 3 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x \leq \left(\frac{3}{5}\right)^2$ và $\left(\frac{4}{5}\right)^x \leq \left(\frac{4}{5}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$

Vậy x = 2 là nghiệm duy nhất của phương trình.

Bài toán 2. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình sau: $2^x + 3^x = 35$

Hướng dẫn giải

Thử thấy x = 0; x = 1; x = 2 không thỏa mãn $2^x + 3^x = 35$

Với x = 3 thì $2^3 + 3^3 = 35$ (đúng)

Với x ≥ 3 thì $2^3 + 3^3 > 35$

Vậy x = 3 là nghiệm của phương trình.

Dạng 4: Sử dụng điều kiện $\Delta \geq 0$ để phương trình bậc hai có nghiệm

*** Cơ sở phương pháp:**

Ta viết phương trình *f(x, y) = 0* dưới dạng phương trình bậc hai đối với một ẩn, chẳng hạn đối với x khi đó y là tham số. Điều kiện để phương trình có nghiệm nguyên là $\Delta \geq 0$

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 + y^2 - 2x + y = 9$.

Hướng dẫn giải

Ta xem phương trình đã cho là phương trình ẩn x tham số y, ta viết lại như sau:

$x^2 - 2x + (y^2 + y - 9) = 0$

Để phương trình đã cho có nghiệm thì :

$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 1 - (y^2 + y - 9) \geq 0 \Leftrightarrow y^2 + y - 10 \leq 0$

$\Leftrightarrow 4y^2 + 4y - 40 \leq 0 \Leftrightarrow (2y+1)^2 \leq 41$

Do đó: $(2y+1)^2 \in \{1; 9; 25\}$. Ta có:

2y+1	1	-1	3	-3	5	-5
2y	0	-2	2	-4	4	-6
y	0	-1	1	-2	2	-3
x	Loại	Loại	Loại	Loại	3 và -1	3 và -1

Vậy nghiệm của phương trình là (x, y) = (3, 2); (-1, 2); (3, -3); (-1, -3).

Bài toán 2. Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2 + 2y^2 = 2xy + 2x + 3y \quad (*)$

Hướng dẫn giải

Ta xem phương trình đã cho là phương trình ẩn x tham số y, ta viết lại như sau:

$$x^2-2(y+1)x+2y^2-3y=0$$

Ta có: $\Delta'=(y+1)^2-(2y^2-3y)=y^2+2y+1-2y^2+3y=-y^2+5y+1$

Để phương trình có nghiệm nguyên thì:

$$\Delta'\geq 0\Leftrightarrow -y^2+5y+1\geq 0\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{29}}{2}\leq y-\frac{5}{2}\leq\frac{\sqrt{29}}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{5-\sqrt{29}}{2}\leq y\leq\frac{5+\sqrt{29}}{2}\Leftrightarrow\frac{5-6}{2}<y<\frac{5+6}{2}$$

Vì y nguyên nên $y\in\{0,1,2,3,4,5\}$ thay vào phương trình ta tính được giá trị của x.

Giải ra ta được nghiệm của phương trình là (x, y) = (0, 0); (0, 2).

Nhận xét: *Ở ví dụ này mình đã cố tình tính Δ' cho các bạn thấy rằng khi tính Δ hoặc Δ' có dạng tam thức bậc 2 : $f(x)=ay^2+by+c$ với a < 0 ta mới áp dụng phương pháp này, nếu a > 0 thì chúng ta áp dụng phương pháp đưa về phương trình ước số.*

IV. PHƯƠNG PHÁP DÙNG TÍNH CHẤT CỦA SỐ CHÍNH PHƯƠNG

🗁 Dạng 1: Dùng tính chất về chia hết của số chính phương

*** Cơ sở phương pháp:**

- Số chính phương không thể có chữ tận cùng bằng 2, 3, 7, 8;
- Số chính phương chia hết cho số nguyên tố p thì cũng chia hết cho p^2
- Số chính phương chia cho 3 có số dư là 0 hoặc 1;
- Số chính phương chia 4 có số dư là 0 hoặc 1;
- Số chính phương chia cho 8 có số dư là 0, 1 hoặc 4.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $9x+5=y(y+1)$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$9x+5=y(y+1)$$
$$\Leftrightarrow 36x+20=4y^2+4y$$
$$\Leftrightarrow 36x+21=4y^2+4y+1$$
$$\Leftrightarrow 3(12x+7)=(2y+1)^2.$$

Số chính phương chia hết cho 3 nên cũng chia hết cho 9, ta lại có 12x + 7 không chia hết cho 3 nên 3(12x + 7) không chia hết cho 9. Do đó phương trình vô nghiệm.

Cách khác:

$$9x+5=y(y+1)$$
$$\Leftrightarrow y^2+y-9x-5=0$$
$$\Delta=1+4(9x+5)=36x+21=3(12x+7)$$

Ta có Δ chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9 nên không là số chính phương do đó không tồn tại y nguyên. Vậy phương trình vô nghiệm.

🗁 **Dạng 2: Biến đổi phương trình về dạng $a_1A_1^2+a_2A_2^2+...+a_nA_n^2=k$, trong đó $A_i(i=1,...,n)$ là các đa thức hệ số nguyên, a_i là số nguyên dương, k là số tự nhiên**

*** Cơ sở phương pháp:**

Sử dụng hằng đẳng thức đáng nhớ $(a+b)^2$, đưa phương trình về dạng trên. Sau đó dựa vào tính chất các a_i, A_i để phân tích thành $k=a_1k_1^2+a_2k_2^2+...+a_nk_n^2$ (với $k_i\in\mathbb{Z}$), dẫn đến giải hệ phương trình

$$\begin{cases}A_1^2=k_1^2\\A_2^2=k_2^2\\...\\A_n^2=k_n^2\end{cases}$$

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2+y^2-x-y=8$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$x^2+y^2-x-y=8\Leftrightarrow 4x^2+4y^2-4x-4y=32$$
$$\Leftrightarrow (4x^2-4x-1)+(4y^2-4y+1)=34\Leftrightarrow (2x-1)^2+(2y-1)^2=34$$
$$\Leftrightarrow |2x-1|^2+|2y-1|^2=3^2+5^2$$

Ta thấy 34 chỉ có duy nhất một dạng phân tích thành hai số chính phương là 3^2 và 5^2 .

Do đó: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(2x-1)^2=3^2\\(2y-1)^2=5^2\end{cases}\\\begin{cases}(2x-1)^2=5^2\\(2y-1)^2=3^2\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}|2x-1|=3\\|2y-1|=5\end{cases}\\\begin{cases}|2x-1|=5\\|2y-1|=3\end{cases}\end{array}\right.$

Giải ra ta được 4 nghiệm (x, y) = (2, 3); (-1, -2); (-2; -1); (3, 2).

Bài toán 2. Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2 - 4xy + 5y^2 = 2(x - y)$.

Hướng dẫn giải

Ta có $x^2 - 4xy + 5y^2 = 2(x - y) \Leftrightarrow x^2 - 4xy + 5y^2 - 2x + 2y = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x(2y+1) + (2y+1)^2 - (2y+1)^2 + 5y^2 + 2y = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2y - 1)^2 + y^2 - 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 2y - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2(*)$

Xét phương trình (*) ta có: $\left(x - 2y - 1\right)^2 \geq 0 \;\; \forall x, y \Rightarrow \left(y - 1\right)^2 \leq 2$

Mà x nguyên nên $\left(y - 1\right)^2 \in \left\{0, 1\right\}$

* Với $\left(y - 1\right)^2 = 0$ thì $\left(x - 2y - 1\right)^2 = 2$ (loại)

* Với $\left(y - 1\right)^2 = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y - 1 = 1 \\ y - 1 = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2 \\ y = 0 \end{array}\right.$

\- $y = 2 \Rightarrow \left(x - 4 - 1\right)^2 = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x - 5 = 1 \\ x - 5 = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6 \\ x = 4 \end{array}\right.$

\- $y = 0 \Rightarrow \left(x - 0 - 1\right)^2 = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 1 \\ x - 1 = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 0 \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm: $\left(x, y\right) = \left(6, 2\right); \left(4, 2\right); \left(2, 0\right); \left(0, 0\right)$.

Bài toán 3. Giải phương trình nghiệm nguyên $5x^2 - 2xy + y^2 = 17$.

Hướng dẫn giải

Ta có $5x^2 - 2xy + y^2 = 17 \Leftrightarrow \left(x - y\right)^2 + 4x^2 = 17 \Leftrightarrow (x - y)^2 = 17 - 4x^2$ (*)

Xét phương trình (*) ta có $\left(x - y\right)^2 \geq 0, \forall x, y \Rightarrow 17 - 4x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq \dfrac{17}{4}$

Mà x là số nguyên nên $x^2 \in \left\{0; 1; 4\right\}$

\- Với $x^2 = 0 \Rightarrow (x - y)^2 = 17$ (loại).

\- Với $x^2 = 1 \Rightarrow (x - y)^2 = 13$ (loại)

\- Với $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$,

Với $x = 2 \Rightarrow (2 - y)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 - y = 1 \\ 2 - y = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = 3 \end{array}\right.$

Với $x = -2 \Rightarrow (2 + y)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 + y = 1 \\ 2 + y = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -1 \\ y = -3 \end{array}\right.$

Vậy nghiệm nguyên của phương trình là: (2; 1), (2; 3), (-2; -1); (-2; -3).

Bài toán 4. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x + y + xy = x^2 + y^2$

Hướng dẫn giải

Biến đổi: $x + y + xy = x^2 + y^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 = 2.$

Tổng của ba số chính phương bằng 2 nên tồn tại một số bằng 0.

Trường hợp: x – 1 = 0 ta được (1; 0), (1; 2)

Trường hợp: y – 1 = 0 ta được: (0; 1), (2; 1)

Trường hợp x – y = 0 ta được: (0; 0), (2; 2)

Vậy phương trình có nghiệm (x, y) = (1; 0), (1; 2), (0; 1), (2; 1), (0;0), (2; 2).

Bài toán 5. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $2x^2 + 4x = 19 - 3y^2$.

Hướng dẫn giải

$$2x^2 + 4x = 19 - 3y^2$$
$$\Leftrightarrow 2(x+1)^2 = 3(7-y)^2 \quad (*)$$

Ta thấy $3(7-y^2)⋮2 \Rightarrow 7-y^2⋮2 \Rightarrow y$ lẻ

Ta lại có $7 - y^2 \geq 0$ nên chỉ có thể $y^2 = 1$

Khi đó (*) có dạng $2(x+1)^2 = 18$.

Ta được: $x + 1 = \pm 3$ do đó $x_1 = 2; x_2 = -4$.

Các cặp số (2; 1), (2; -1), (-4; 1), (-4; -1) thỏa mãn (2) nên là nghiệm của phương trình đã cho

🗁 **Dạng 3: Xét các số chính phương liên tiếp**

*** Cơ sở phương pháp:**

Phương pháp này dựa trên nhận xét sau:

1. Không tồn tại $n \in Z$ *thỏa mãn:* $a^2 < n^2 < (a+1)^2$ *với* $a \in Z$

2. Nếu $a^2 < n^2 < (a+2)^2$ *với* $a, n \in Z$ *thì n = a + 1. Tương tự với lũy thừa bậc 3*

3. Nếu $x(x+1)...(x+n) < y(y+1)...(y+n) < (x+a)(x+a+1)...(x+a+n)$

Thì $y(y+1)...(y+n) = (x+i)(x+i+1)...(x+i+n)$ *với* $i \in \{1, 2, ..., a-1\}$

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $1 + x + x^2 + x^3 = y^3 \qquad (1)$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0;\ 5x^2+11x+7=5\left(x+\frac{11}{10}\right)^2+\frac{19}{20}>0$$

Nên

$$\left(1+x+x^2+x^3\right)-\left(x^2+x+1\right)<1+x+x^2+x^3<\left(1+x+x^2+x^3\right)+\left(5x^2+11x+7\right).$$

Do đó: $x^3<y^3<(x+2)^3 \Rightarrow y^3=(x+1)^3$.

Kết hợp với (1) ta có: $(x+1)^3=1+x+x^2+x^3 \Rightarrow x(x+1)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Nghiệm của phương trình là: (0;1) và (-1;0).

Bài toán 2. Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^3-y^3-2y^2-3y-1=0 \quad (2)$

Hướng dẫn giải

$(2) \Leftrightarrow x^3=y^3+2y^2+3y+1\ (3)$

Ta có: $y^2 \ge 0; 5y^2+2>0$ nên

$$\left(y^3+2y^2+3y+1\right)-\left(5y^2+2\right)<y^3+2y^2+3y+1 \le \left(y^3+2y^2+3y+1\right)+y^2.$$

Do đó: $(y-1)^3<x^3 \le (y+1)^3 \Rightarrow x^3=y^3$ hoặc $x^3=(y+1)^3$.

Nếu $x^3=y^3$ kết hợp với (3) ta có: $2y^2+3y+1=0 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow x=-1$.

Nếu $x^3=(y+1)^3$. Phối hợp với (3) ta có $y^2=0 \Rightarrow y=0$, lúc đó x = 1.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là (-1; -1) và (1; 0).

Bài toán 3. Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^4+2x^3+2x^2+x+3=y^2$

Hướng dẫn giải

Ta có $\left(x^2+x\right)^2<x^4+2x^3+2x^2+x+3<\left(x^2+x+2\right)^2$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+x\right)^2<y^2<\left(x^2+x+2\right)^2$$

mà $\left(x^2+x\right)^2$ và $\left(x^2+x+2\right)^2$ (là hai số chính phương

$$\Rightarrow y^2=\left(x^2+x+1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 3 = \left(x^2 + x + 1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$$

Thay $x = 1$ ta được $y = \pm 3$

Thay $x = -2$ ta được $y = \pm 3$

Vậy nghiệm của phương trình $(x\,;\,y) \in \left\{(1;-3);(1;3);(-2;3);(-2;-3)\right\}$

Bài toán 4. Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 + (x+1)^2 = y^4 + (y+1)^4$

Hướng dẫn giải

Biến đổi phương trình về dạng

$x^2 + x + 1 = y^2(y+1)^2 + 2y(y+1) + 1 = (y^2 + y + 1)^2 = k^2, k \in Z$ (1)

- Nếu $x > 0 \Rightarrow x^2 < x^2 + x + 1 < (x+1)^2 \Rightarrow x^2 < k^2 < (x+1)^2$ không có số nguyên k thỏa mãn.

- Nếu $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right. \Rightarrow y^2 + y + 1 = \pm 1$

Ta có các nghiệm nguyên của phương trình là (0; 0), (0; -1), (-1; 0); (-1; -1).

- Nếu $x < -1 \Rightarrow (x+1)^2 < x^2 + x + 1 < x^2 \Rightarrow (x+1)^2 < k^2 < x^2$ không có số nguyên k thỏa mãn.

Bài toán 5. Giải phương trình nghiệm nguyên

$$x^4 + x^2 - y^2 + y + 10 = 0 \quad (6)$$

Hướng dẫn giải

$(6) \Leftrightarrow y(y-1) = x^4 + x^2 + 10 \quad (7)$

Ta có: $x^4 + x^2 < x^4 + x^2 + 10 < \left(x^4 + x^2 + 10\right) + \left(6x^2 + 2\right)$.

Do đó: $x^2\left(x^2+1\right) < y\left(y-1\right) < \left(x^2+3\right)\left(x^2+4\right) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y\left(x-1\right) = \left(x^2+1\right)\left(x^2+2\right) \\ y\left(y-1\right) = \left(x^2+2\right)\left(x^2+3\right) \end{array}\right.$

Kết hợp với (7) ta suy ra: $\left[\begin{array}{l} x^2 = 4 \\ x^2 = 1 \end{array}\right.$

Từ đó: $x = \pm 2$, $x = \pm 1$

Do đó ta có thể tìm được nghiệm của phương trình (6)

🗁 **Dạng 4: Sử dụng điều kiện Δ là số chính phương**

*** Cơ sở phương pháp:**

Với phương trình nghiệm nguyên có dạng $f(x,y)=0$ có thể viết dưới dạng phương trình bậc 2 đối với một trong 2 ẩn chẳng hạn ẩn x, ngoài điều kiện $\Delta \ge 0$ để phương trình có nghiệm nguyên thì Δ phải là số chính phương. Vận dụng điều này ta có thể giải được bài toán.

Chú ý: Δ là số chính phương chỉ là điều kiện cần nhưng chưa đủ để phương trình có nghiệm nguyên, do đó sau khi tìm được giá trị cần thử lại vào phương trình ban đầu.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Giải phương trình nghiệm nguyên $3x^2+y^2+4xy+4x+2y+5=0$

Hướng dẫn giải

Ta có: $3x^2+y^2+4xy+4x+2y+5=0$

$\Leftrightarrow y^2+2(2x+1)y+3x^2+4x+5=0 \qquad (1)$

Coi phương trình (1) là phương trình ẩn y tham số x ta có:

$\Delta'=(2x+1)^2-(3x^2+4x+5)=4x^2+4x+1-3x^2-4x-5=x^2-4$

Để phương trình có nguyện nguyên thì Δ' phải là số chính phương hay $\Delta'=x^2-4=n^2$ với $n \in N$

$(x-n)(x+n)=4$ giải ra ta được x = 2 hoặc x = -2.

Với x = 2 thì y = 3

Với x = -2 thì y = -5

Vậy phương trình có 2 nghiệm (x, y) = (2, 3) ; (-2, -5).

Bài toán 2. Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2y^2-xy=x^2+2y^2.\ (1)$

Hướng dẫn giải

Phương trình đã cho viết lại: $(x^2-2)y^2-xy-x^2=0\ \ (2)$

Do x nguyên nên $(x^2-2)\ne 0$ coi phương trình (2) là phương trình ẩn y tham số x ta có:

$$\Delta=x^2+4x^2(x^2-2)=x^2(4x^2-7).$$

Để phương trình có nguyện nguyên thì Δ phải là số chính phương.

-Xét x = 0 thì từ (1) suy ra y = 0.

-Xét $x\ne 0$ thì $(4x^2-7)$ phải là số chính phương do đó $4x^2-7=m^2$ với m là số nguyên, ta có $(2x-m)(2x+m)=7$ ta tìm được x = 2 hoặc x = -2

Với x = 2 thay vào (2) ta được: $y^2 + y - 2 = 0 \Rightarrow y \in \{1; -2\}$.

Với x = -2 thay vào (2) ta được: $y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow y \in \{-1; 2\}$.

Nghiệm nguyên của phương trình là (x, y) = (2, 1); (2, -2); (-2, -1); (-2, 2).

🗁 Dạng 5: Sử dụng tính chất: Nếu hai số nguyên liên tiếp có tích là một số chính phương thì một trong hai số nguyên liên tiếp đó bằng 0

*** Cơ sở phương pháp:**

Giả sử a(a + 1) = k² (1) với $a \in Z, k \in N$.

Giải sử a ≠ 0, a + 1 ≠ 0 thì k² ≠ 0. Do k là số tự nhiên nên k > 0.

Từ (1) suy ra: a² + a = k²

$$\Rightarrow 4a^2 + 4a = 4k^2 \Rightarrow 4a^2 + 4a + 1 = 4k^2 + 1 \Rightarrow (2a+1)^2 = 4k^2 + 1 \qquad (2)$$

Do k > 0 nên $4k^2 < 4k^2 + 1 < 4k^2 + 4k + 1 \qquad (3)$

Từ (2) và (3) suy ra $(2k)^2 < (2a+1)^2 < (2k+1)^2$, vô lý

Vậy nếu a(a + 1) = k² thì tồn tại một trong hai số a, a + 1 bằng 0.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$

Hướng dẫn giải

Thêm xy vào hai vế: $x^2 + 2xy + y^2 = x^2y^2 + xy \Leftrightarrow (x+y)^2 = xy(xy+1) \qquad (*)$

Ta thấy xy và xy + 1 là hai số nguyên liên tiếp, có tích là một số chính phương nên tồn tại một số bằng 0.

Xét xy = 0. Từ (1) có x² + y² = 0 nên x = y = 0

Xét xy + 1 = 0. Ta có xy = -1 nên (x, y) = (1; -1), (-1; 1)

Thử lại ba cặp số (0; 0), (1; -1), (-1; 1) đều là nghiệm của phương trình đã cho.

Bài toán 2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 + 2xy = 5y + 6 \quad (1)$

Hướng dẫn giải

Ta có $(1) \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = y^2 + 5y + 6 \Leftrightarrow (x+1)^2 = (y+3)(y+2)$

Do (y + 3) và (y + 2) là 2 số nguyên liên tiếp mà có tích là một số chính phương nên một trong 2 số phải bằng 0.

Nếu y + 3 = 0 thì y = -3, x = -1.

Nếu y + 2 = 0 thì y = -2, x = -1

Vậy phương trình có nghiệm nguyên là (x, y) = (-3, -1); (-2, -1).

🗁 Dạng 6: Sử dụng tính chất: Nếu hai số nguyên dương nguyên tố cùng nhau có tích là một số chính phương thì mỗi số đều là số chính phương

*** Cơ sở phương pháp:**

Giả sử ab = c^2 (1) với $a, b, c \in N^*, (a, b) = 1$.

Giả sử trong a và b có một số, chẳng hạn a, chứa thừa số nguyên tố p với số mũ lẻ thì số b không chứa thừa số p nên c^2 chứa thừa số p với số mũ lẻ, trái với giả thiết c^2 là số chính phương.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $xy = z^2 \quad (1)$

Hướng dẫn giải

Trước hết ta có thể giả sử (x, y, z) = 1. Thật vậy nếu bộ ba số (x_0, y_0, z_0) thỏa mãn (1) và có ƯCLN bằng d, giả sử $x_0 = dx_1, y_0 = dy_1, z_0 = dz_1$ thì (x_1, y_1, z_1) cũng là nghiệm của phương trình (1).

Với (x, y, z) = 1 thì x, y, z đôi một nguyên tố cùng nhau, vì nếu hai trong ba số x, y, z có ước chung là d thì số còn lại cũng chia hết cho d.

Ta có $z^2 = xy$ mà (x, y) = 1 nên $x = a^2$, $y = b^2$ với $a, b \in N^*$

Suy ra $z^2 = xy = (ab)^2$, do đó z = ab.

Như vậy: $\begin{cases} x = ta^2 \\ y = tb^2 \\ z = tab \end{cases}$ với t là số nguyên dương tùy ý.

Đảo lại, hiển nhiên các số x, y, z có dạng trên thỏa mãn (1).

Công thức trên cho ta công thức nghiệm nguyên dương của (1).

Bài toán 2. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn

$$x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 4y^2 - 32x + 4y + 39 = 0$$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 4y^2 - 32x + 4y + 39 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 32x + 40 = 4y^2 - 4y + 1$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^2(x^2 + 2x + 10) = (2y-1)^2$$

Vì y là số nguyên nên 2y – 1 ≠ 0 ⇒ x ≠ 2

Vì $(2y-1)^2$ và $(x-2)^2$ là số chính phương khác 0 nên $x^2+2x+10$ là số chính phương.

Đặt $x^2+2x+10=m^2\left(m\in N^*\right)$ suy ra $(x+1)^2+9=m^2 \Leftrightarrow (x+1-m)(x+1+m)=-9\,(*)$

Do (x + 1 + m) > (m + 1 – m) nên

$$(*)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+1+m=9\\x+1-m=-1\end{cases}\\\begin{cases}x+1+m=1\\x+1-m=-9\end{cases}\\\begin{cases}x+1+m=3\\x+1-m=-3\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=3\\m=5\end{cases}\\\begin{cases}x=-5\\m=5\end{cases}\\\begin{cases}x=-1\\m=3\end{cases}\end{array}\right.$$

• $x=3\Rightarrow(2y-1)^2=25\Rightarrow y=3$ hoặc $y=-2$

• $x=-5\Rightarrow(2y-1)^2=1225\Rightarrow y=18$ hoặc $y=-17$

• $x=-1\Rightarrow(2y-1)^2=81\Rightarrow y=5$ hoặc $y=-4$

Vậy các bộ (x;y) nguyên thỏa yêu cầu bài toán là (3;3),(3;–2),(–5;18),(–5;–17),(–1;5),(–1;–4)

V. PHƯƠNG PHÁP LÙI VÔ HẠN, NGUYÊN TẮC CỰC HẠN

🗁 Dạng 1: Phương pháp lùi vô hạn

*** Cơ sở phương pháp:**

Dùng để chứng minh phương trình f(x, y, z, ...) ngoài nghiệm tầm thường $x=y=z=0$ thì không còn nghiệm nào khác. Phương pháp này diễn giải như sau:

Giải sử $\left(x_0,y_0,z_0,...\right)$ là nghiệm của phương trình f(x, y, z, ...), nhờ phép biến đổi suy luận ta tìm được bộ nghiệm khác $\left(x_1,y_1,z_1,...\right)$ sao cho các nghiệm này có quan hệ với nghiệm ban đầu tỷ số k nào đó. Ví dụ $x_0=kx_1,y_0=ky_1,z_0=kz_1$;...

Rồi từ bộ $\left(x_2,y_2,z_2,...\right)$ có quan hệ với $\left(x_1,y_1,z_1,...\right)$ bởi tỷ số k nào đó.

Ví dụ $x_1=kx_2,y_1=ky_2,z_1=kz_2$. Quá trình này dẫn đến $x_0,y_0,z_0,..$ chia hết cho k^s vớ s là số tự nhiên tùy ý, điều này xảy ra khi x = y = z = 0. Chúng ta đi đến ví dụ cụ thể như sau:

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Giải phương trình nghiệm nguyên sau $x^2+y^2=3z^2$

Hướng dẫn giải

Gọi $\left(x_0,y_0,z_0\right)$ là nghiệm của phương trình trên. Xét (mod 3) ta chứng minh x_0,y_0 chia hết cho 3. Thật vậy rõ ràng vế phải chia hết cho 3 suy ra $\left(x_0^2+y_0^2\right)\vdots 3$. Ta có $x_0^2\equiv 0;1\left(\text{mod}\,3\right);y_0^2\equiv 0;1\left(\text{mod}\,3\right)$ do đó $\left(x_0^2+y_0^2\right)\vdots 3\Rightarrow x_0^2\vdots 3,y_0^2\vdots 3\Rightarrow x_0\vdots 3,y_0\vdots 3.$

Đặt $x_0 = 3x_1; y_0 = 3y_1$ thế vào rút gọn ta được $3\left(x_1^2 + y_1^2\right) = z_0^2 \Rightarrow z_0 ⋮ 3 \Rightarrow z_0 = 3z_1$.

Thế $z_0 = 3z_1$ vào $3\left(x_1^2 + y_1^2\right) = z_0^2$ và rút gọn ta được: $x_1^2 + y_1^2 = z_1^2$. Do đó nếu $\left(x_0, y_0, z_0\right)$ là nghiệm của phương trình thì $\left(x_1, y_1, z_1\right)$ cũng là nghiệm của phương trình trên. Tiếp tục suy luận như trên dẫn đến $x_0, y_0, z_0 ⋮ 3^k$ điều này xảy ra khi $x_0 = y_0 = z_0 = 0$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất (x, y, z) = (0, 0, 0)

Bài toán 2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^3 - 3y^3 - 9z^3 = 0.$ (1)

Hướng dẫn giải

Giả sử $\left(x_0, y_0, z_0\right)$ là nghiệm nguyên của phương trình khi đó $x_0 ⋮ 3$ đặt $x_0 = 3x_1.$ thay $x_0 = 3x_1.$ vào (1) ta được: $9x_1^3 - y_0^3 - 9z_0^3 = 0 \Rightarrow y_0 ⋮ 3.$ đặt $y_0 = 3y_1 \Rightarrow z_0 ⋮ 3,$ khi đó:

$9x_1^3 - 27y_1^3 - 3z_0^3 = 0 \Rightarrow 3x_1^3 - 9y_1^3 - z_0^3 = 0 \Rightarrow z_0 ⋮ 3.$ đặt $z_0 = 3z_1$ khi đó: $x_1^3 - 3y_1^3 - 9z_1^3 = 0$.

Vậy $\left(\frac{x_0}{3}, \frac{y_0}{3}, \frac{z_0}{3}\right)$ cũng là nghiệm của phương trình.

Quá trình này tiếp tục thì được: $\left(\frac{x_0}{3^k}, \frac{y_0}{3^k}, \frac{z_0}{3^k}\right)$ là các nghiệm nguyên của (1) với mọi k điều này chỉ xảy ra khi $x_0 = y_0 = z_0 = 0.$ Vậy (0, 0, 0) là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Bài toán 3. Giải phương trình nghiệm nguyên sau: $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$

Hướng dẫn giải

Gọi $\left(x_0, y_0, z_0\right)$ là nghiệm của phương trình trên, ta có $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 2x_0y_0z_0$ suy ra $\left(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2\right)$ chẵn (do $2x_0y_0z_0$) nên có 2 trường hợp xảy ra:

Trường hợp 1: Có 2 số lẻ một số chẵn không mất tính tổng quát giả sử x_0, y_0 lẻ, z_0 chẵn. Xét mod 4 ta có: $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \equiv 2\left(\bmod 4\right)$ còn $2x_0y_0z_0 ⋮ 4$ (do z_0 chẵn) $\Rightarrow$ Vô lý

Trường hợp 2: Cả 3 số đề chẵn. Đặt $x_0 = 2x_1, y_0 = 2y_1, z_0 = 2z_1$ thế vào rút gọn ta có: $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 4x_1y_1z_1$ lập luận như trên ta được x_1, y_1, z_1 chẵn.

Quá trình tiếp tục đến $x_0, y_0, z_0 ⋮ 2^k \left(k \in N^*\right)$ điều đó xảy ra khi $x_0 = y_0 = z_0 = 0$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất (x, y, z) = (0, 0, 0)

🗁 Dạng 1: Nguyên tắc cực hạn

*** Cơ sở phương pháp:**

Về hình thức phương pháp này khác với phương pháp lùi vô hạn nhưng về ý tưởng sử dụng thì như nhau, đều chứng minh phương trình ngoài nghiệm tầm thường không còn nghiệm nào khác.

Phương pháp bắt đầu bằng việc giả sử $(x_0, y_0, z_0, ...)$ là nghiệm của phương trình f(x, y, z, ...) với điều kiện rằng buộc với bộ $(x_0, y_0, z_0, ...)$. Ví dụ như x_0 nhỏ nhất hoặc $x_0 + y_0 + z_0 + ...$ nhỏ nhất . Bằng phép biến đổi số học ta tìm được bộ nghiệm khác $(x_1, y_1, z_1, ...)$ trái với điều kiện rằng buộc trên. Ví dụ khi tìm được bộ $(x_0, y_0, z_0, ...)$ với x_0 nhỏ nhất ta lại tìm được bộ $(x_1, y_1, z_1, ...)$ thỏa mãn $x_1 < x_0$ từ đó dẫn tới phương trình đã cho có nghiệm $x_0 = y_0 = z_0 = 0$.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Giải phương trình nghiệm nguyên sau $8x^4 + 4y^4 + 2z^4 = t^4 \quad (1)$

Hướng dẫn giải

Giải sử (x_0, y_0, z_0) là nghiệm của phương trình trên với điều kiện x_0 nhỏ nhất.

Từ phương trình (1) suy ra t là số chẵn. Đặt $t = 2t_1$ thế vào phương trình (1) và rút gọn ta được: $4x_0^4 + 2y_0^4 + z_0^4 = 8t_1^4$ rõ ràng z_0 chẵn. Đặt $z_0 = 2z_1 \Rightarrow 2x_0^4 + y_0^4 + 8z_1^4 = 4t_1^4 \Rightarrow y_0$ chẵn . Đặt $y_0 = 2y_1 \Rightarrow x_0^4 + 8y_1^4 + 4z_1^4 = 2t_1^4 \Rightarrow x_0$ chẵn.

Đặt $x_0 = 2x_1 \Rightarrow 8x_1^4 + 4y_1^4 + 2z_1^4 = t_1^4 \Rightarrow (x_1; y_1; z_1; t_1)$ cũng là nghiệm của phương trình trên và dễ thấy $x_1 < x_0$ (vô lý) do ta chọn x_0 nhỏ nhất. Do đó phương trình trên có nghiệm duy nhất $(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0)$.

Tổng kết: *Một bài toán nghiệm nguyên thường có thể giải bằng nhiều phương pháp, bạn đọc nên tìm nhiều cách giải cho một bài toán để rèn luyện kĩ năng của mình. Sau đây mình sẽ giải một bài toán bằng nhiều phương pháp để tổng kết.*

Bài toán. Tìm nghiệm nguyên của phương trình sau: $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2 \quad (1)$

Lời giải

Cách 1. *Đưa về phương trình ước số*

$$x^2+xy+y^2=x^2y^2$$
$$\Leftrightarrow 4x^2+4xy+4y^2=4x^2y^2$$
$$\Leftrightarrow 4x^2+8xy+y^2=4x^2y^2+4xy$$
$$\Leftrightarrow (2x+2y)^2=(2xy+1)^2-1$$
$$\Leftrightarrow (2xy+1)^2-(2x+2y)^2=1$$
$$\Leftrightarrow (2xy+2x+2y+1)(2xy+1-2x-2y)=1$$

Sau đó giải phương trình ước số

Cách 2. *Dùng tính chất số chính phương và phương trình ước số*

$$4x^2+4xy+4y^2=4x^2y^2$$
$$\Leftrightarrow (2x+y)^2+3y^2=4x^2y^2$$
$$\Leftrightarrow (2x+y)^2=y^2(4x^2-3)$$

Nếu y = 0 thì x = 0 ta có (0, 0) là nghiệm của phương trình.

Nếu $y\neq 0$ thì $4x^2-3$ phải là số chính phương .

Ta có: $4x^2-3=k^2\ (k\in N)$ đưa về $(2x+k)(2x-k)=3$

Ta tìm được x = 1 và x = -1 từ đó tìm được y

Cách 3. *Đưa về phương trình bậc 2 đối với x*

$$(y^2-1)x^2-yx-y^2=0 \qquad (2)$$

Xét y = 1 thì (2) có dạng: -x – 1 = 0 được x = -1.

Xét y = -1 thì (2) có dạng x – 1 = 0 được x = 1.

Xét $y\neq \pm 1$ thì (2) là phương trình bậc hai đối với x có:

$$\Delta=y^2+4y^2(y^2-1)=y^2(4y^2-3).$$

Ta phải có Δ là số chính phương .

Nếu y = 0 thì từ (2) suy ra x = 0

Nếu $y\neq 0$ thì $4y^2-3$ phải là số chính phương.

Ta có $4y^2-3=k^2\ (k\in N)\Rightarrow (2y+k)(2y-k)=3$,ta được $y=\pm 1$ do đang xét $y=\pm 1$

Cách 4. *Sử dụng bất đẳngthức*

Không mất tính tổng quát giả sử $|x|\le |y|$, thế thì $x^2\le y^2, xy\le |xy|\le y^2$

Do đó: $x^2y^2=x^2+xy+y^2\le y^2+y^2+y^2\le 3y^2$

Nếu y = 0 thì x = 0.

Nếu $y\neq 0$ chia hai vế cho y^2 ta được $x^2\le 3$. Do đó $x^2=1\Rightarrow x=\pm 1$

Vậy phương trình có ba nghiệm (1, -1) , (-1, 1), (0, 0)

Cách 5. Sử dụng tính chất số chính phương

Thêm xy vào hai vế $x^2+2xy+y^2=x^2y^2+xy \Leftrightarrow (x+y)^2=xy(xy+1)$

Ta thấy xy và (xy + 1) là hai số nguyên liên tiếp có tích là một số chính phương nên tồn tại một số bằng 0

Xét xy = 0 từ (1) có $x^2+y^2=0 \Rightarrow x=y=0$

Xét xy = -1 nên x = 1 , y = -1 hoặc x = -1, y = 1

Thử lại thấy phương trình có ba nghiệm (0, 0); (1, -1); (-1, 1).

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $2xy-x-y=1$.

Bài 2: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2+x+2009=y^2$.

Bài 3: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2+5y^2+6z^2+2xy-4xz=10$.

Bài 4: Giải phương trình nghiệm nguyên $3x^2-2xy+y-5x+2=0$.

Bài 5: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $(x^2+y)(x+y^2)=(x-y)^3$.

Bài 6: Giải phương trình nghiệm nguyên $x^3-y^3=2xy+8$.

Bài 7: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $5(x+y+z)+3=2xyz$.

Bài 8: Tìm nghiệm nguyên của mỗi phương trình

a) $1+x+x^2+x^3+x^4=y^4$;

b) $1+x+x^2+x^3=y^3$.

Bài 9: Giải phương trình nghiệm nguyên $4x+9y=48$.

Bài 10: Tìm những số tự nhiên lẻ n để $26n+17$ là số chính phương.

Bài 11: Tìm các số nguyên x, y, z sao cho $x^4+y^4+z^4=2012$.

Bài 12: Tìm nghiệm nguyên dương của hệ phương trình $\begin{cases} x^2+13y^2=z^2 \\ 13x^2+y^2=t^2. \end{cases}$

Bài 13: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^3-3y^3-9z^3=0$.

Bài 14: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-4z=-4.$$

Bài 15: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$(x^2+1)(y^2+4)(z^2+9)=48xyz.$$

Bài 16: Tìm nghiệm nguyên của hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+z^2=9 \\ y^2+t^2=16 \\ xt+yz=12. \end{cases}$$

Bài 17: Tìm nghiệm của phương trình: $x^3+y^3-x^2y-xy^2=5$

Bài 18: Tìm các nghiệm nguyên của phương trình : $x(x+1)(x+2)(x+3)=y^2$ (1)

Bài 19: Tìm tất cả nghiệm nguyên của phương trình: $(x^2-y)(y^2-x)=(x-y)^3$

Bài 20: Tìm tất cả các số x, y nguyên dương thỏa mãn phương trình: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{617}$

Bài 21: Giải phương trình nghiệm nguyên dương $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{p}$ trong đó p là số nguyên tố.

Bài 22: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{6xy}=\frac{1}{6}$

Bài 23: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $6x+15+10z=3$

Bài 24: Chứng minh rằng phương trình sau không có nghiệm nguyên:

$$x^2+y^2+z^2=1999 \quad (1)$$

Bài 25: Tìm nghiệm dương của phương trình $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{50}$.

Bài 26: Giải phương trình nghiệm nguyên: $y=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$

Bài 27: Giải phương trình trên tập số nguyên $x^{2015}=\sqrt{y(y+1)(y+2)(y+3)}+1$

(Chuyên Quảng Trung – Bình Phước 2015)

Bài 28: Tìm số tự nhiên x và số nguyên y sao cho $2^x+3=y^2$

Bài 29: Tìm các số tự nhiên x, y thỏa mãn: $(2^x+1)(2^x+2)(2^x+3)(2^x+4)-5^y=11879$.

Bài 30: Tìm tất cả các cặp (x, y, z) là các số nguyên thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^3+y^3+z^3=3 \end{cases}$$

Bài 31: Tìm số nguyên x, y, z thỏa mãn các đẳng thức: $\begin{cases} x-y+z=2 & (1) \\ 2x^2-xy+x-2z=1 & (2) \end{cases}$

Bài 32: Tìm số thực a để các nghiệm của phương trình sau đều là số nguyên:

$$x^2-ax+(a+2)=0 \qquad (1)$$

Bài 33: Tìm các số nguyên dương *x* và *y* thoả mãn phương trình:

$$\left(x^2+4y^2+28\right)^2-17\left(x^4+y^4\right)=238y^2+833.$$

(Chuyên Nguyễn Trãi – Hải Dương 2016 – 2017)

Bài 34: Tìm tất cả các cặp số tự nhiên x, y thỏa mãn: $2^x.x^2=9y^2+6y+16$

(Chuyên Hà Nội 2016 – 2017)

Bài 35: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2y^2(x+y)+x+y=3+xy$

(Trích đề vào lớp 10 chuyên ĐHKHTN, ĐHQGHN năm 2014)

Bài 36: Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x;\ y)$ thỏa mãn $(x+y)^3=(x-y-6)^2$.

(Trích đề thi vào lớp 10 Chuyên Lê Hồng Phong- Nam Định 2014-2015)

Bài 37: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 - y^2 = xy + 8$

(Trích đề vào Chuyên Bình Dương 2017)

Bài 38: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^3 + 1 = 4y^2$.

(Trích đề vào Chuyên Lê Hồng Phong – Nam Định)

Bài 39: Tìm nghiệm nguyên của phương trình sau $x^2 + y^2 + 5x^2y^2 + 60 = 37xy$

(Trích đề vào Chuyên Bạc Liêu 2017)

Bài 40: Giải phương trình nghiệm nguyên $y^3 - 2x - 2 = x(x+1)^2$. $\quad (1)$

(Trích đề vào Chuyên Hưng Yên 2017)

Bài 41: Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2 + 2y^2 - 2xy - 4x + 8y + 7 = 0 \quad (1)$

(Chuyên Lương Thế Vinh – Đồng Nai 2017)

Bài 42: Tìm x, y nguyên sao cho $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{18}$

(Chuyên Bình Định 2015)

Bài 43: Tìm các số nguyên *x* và *y* thoả mãn phương trình $9x + 2 = y^2 + y$

(Chuyên Phan Bội Châu – Nghệ An 2014)

Bài 44: Tìm cặp số nguyên (x;y) thỏa mãn phương trình: $2015(x^2 + y^2) - 2014(2xy + 1) = 25$

(Chuyên TP. Hồ Chí Minh 2014)

Bài 45: Tìm nghiệm của phương trình: $x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 = 5$

(Chuyên Lam Sơn 2014)

Bài 46: 1) Tìm tất cả các số nguyên tố p và các số nguyên dương x,y thỏa mãn

$$\begin{cases} p - 1 = 2x(x+2) \\ p^2 - 1 = 2y(y+2) \end{cases}$$

2) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho tồn tại các số nguyên dương x, y, z thoả mãn $x^3 + y^3 + z^3 = nx^2y^2z^2$

(Chuyên Hà Nội Amsterdam 2014)

Bài 47: Tìm nghiệm nguyên dương của hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = z \\ x^3 + y^3 = z^2 \end{cases}$

(Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình 2015)

Bài 48: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 - 2y(x - y) = 2(x+1)$

(Chuyên Hùng Vương Phú Thọ 2015)

Bài 49: Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^4 + x^2 - y^2 - y + 20 = 0$.

(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2015)

Bài 50: a) Chứng minh không tồn tại các bộ số nguyên (x, y, z) thỏa mãn $x^4+y^4=7z^4+5$

b) Tìm tất cả các nguyện nguyên thỏa mãn đẳng thức $(x+1)^4-(x-1)^4=y^3$

(Chuyên KHTN Hà Nội 2011)

Bài 51: Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $2x^2+5y^2=41+2xy.$

(Chuyên Nam Định 2018-2019)

Bài 52: Tính tất cả các cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn: $x^{2019}=y^{2019}-y^{1346}-y^{673}+2$

(Chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa 2018-2019)

Bài 53: Cho phương trình $x^3+2y^3+4z^3=9!(1)$ với $x;y;z$ là ẩn và 9! Là tích các số nguyên dương liên tiếp từ 1 đến 9

a) Chứng minh rằng nếu có các số nguyên $x;y;z$ thỏa mãn (1) thì x,y,z đều chia hết cho 4

b) Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên x,y,z thỏa mãn (1).

(Chuyên Vĩnh Phúc 2018-2019)

Bài 54: Tìm các nghiệm nguyên của phương trình $x^3-xy+2=x+y$

(Chuyên Bến Tre 2018-2019)

Bài 55: Tìm các số nguyên x,y,z thỏa mãn đồng thời: $x^2+4y^2+z^2+2xz+4(x+z)=396$ và $x^2+y^2=3z$.

(Chuyên Đăk Lăk 2018-2019)

Bài 56: Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện $2x^2-4y^2-2xy-3x-3=0$

(Chuyên Đồng Nai 2018-2019)

Bài 57: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $3x^2-2xy+y-5x+2=0$

(Chuyên Tuyên Quang 2018-2019)

Bài 58: Tìm x,y nguyên dương thỏa mãn: $16(x^3-y^3)=15xy+371$

(Chuyên Thái Nguyên 2018-2019)

Bài 59: Tìm cặp số nguyên x,y thỏa mãn $x^2-2y^2=1$

(Chuyên Bắc Ninh 2018-2019)

Bài 60: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2-xy+y^2=2x-3y-2$

(Chuyên Vĩnh Long 2018-2019)

Bài 61: Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn đẳng thức $x^2y^2-x^2-6y^2=2xy.$

(Chuyên Quảng Nam 2018-2019)

Bài 62: Tìm tất cả cặp số nguyên x,y thỏa mãn $y^2+2xy-3x-2=0$

(Chuyên Lào Cai 2018-2019)

Bài 63: Tìm tất cả bộ số nguyên $(a;b)$ thỏa mãn $3(a^2+b^2)-7(a+b)=-4$

(Chuyên Bình Phước 2018-2019)

Bài 64: Tìm tất cả các cặp số nguyên (x ; y) thỏa mãn $y^2+y=x^4+x^3+x^2+x$.

(Chuyên Toán Lam Sơn – Thanh Hóa 2019-2020)

Bài 65: Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 - xy - 5x + 5y + 2 = 0$

(Chuyên Tin Lam Sơn – Thanh Hóa 2019-2020)

Bài 66: Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình

$$xy^2 - (y-45)^2 + 2xy + x - 220y + 2024 = 0.$$

(Chuyên Hưng Yên 2019-2020)

Bài 67: Tìm tất cả các số tự nhiên n để phương trình $x^2 - n^2x + n + 1 = 0$ (ẩn số x) có các nghiệm là số nguyên.

(Chuyên Bình Thuận 2019-2020)

Bài 68: Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $\dfrac{x^2+y^2}{x+y} = \dfrac{85}{13}$

(Chuyên Phú Yên 2019-2020)

Bài 69: Tìm các số nguyên không âm a, b, n thỏa mãn: $\begin{cases} n^2 = a + b \\ n^3 + 2 = a^2 + b^2 \end{cases}$.

(Chuyên Quảng Nam 2019-2020)

Bài 70: Tìm tất cả cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn $2020(x^2 + y^2) - 2019(2xy + 1) = 5$

(Chuyên Cần Thơ 2019-2020)

Bài 71: Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình $2x^2y - 1 = x^2 + 3y$.

(Chuyên Đăk Nông 2019-2020)

Bài 72: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $\sqrt{x+y+3} + 1 = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

(Chuyên Quảng Ngãi 2019-2020)

Bài 73: Giải phương trình nghiệm nguyên $4y^2 = 2 + \sqrt{199 - x^2 - 2x}$

(Chuyên Bình Phước 2019-2020)

Bài 74: Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn: $(xy + x + y)(x^2 + y^2 + 1) = 30$.

(Chuyên Bắc Ninh 2019-2020)

Bài 75: Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn

$$(2x + 5y + 1)\left(2^{|x|-1} + y + x^2 + x\right) = 65$$

(Chuyên Tiền Giang 2019-2020)

Bài 76: Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (m;n) thỏa mãn phương trình

$$2^m.m^2 = 9n^2 - 12n + 19.$$

(Chuyên Bà Rịa Vũng Tàu 2019-2020)

Bài 77: Tìm tất cả các cặp số nguyên thỏa mãn $(x^2 - x + 1)(y^2 + xy) = 3x - 1$

(Chuyên Hà Nội 2019-2020)

Bài 78: Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^2y^2 - 4x^2y + y^3 + 4x^2 - 3y^2 + 1 = 0$.

(Chuyên Sư phạm Hà Nội 2019-2020)

Bài 79: Tìm x, y thỏa mãn: $\sqrt{2\left(\sqrt{x}+y-2\right)}=\sqrt{\sqrt{x}.y}$

(HSG Lớp 9 An Giang năm 2015-2016)

Bài 80: Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $x^2+xy+y^2=x^2y^2$

(HSG Lớp 9 Thanh Hóa năm 2015-2016)

Bài 81: Tìm tất cả các cặp số nguyên (x;y) thoả mãn $x^5+y^2=xy^2+1$

(HSG Lớp 9 TP. Bắc Giang năm 2016-2017)

Bài 82: Tìm các số nguyên dương *x, y, z* thỏa mãn: $3x^2-18y^2+2z^2+3y^2z^2-18x=27$.

(HSG Lớp 9 Hải Dương năm 2014-2015)

Bài 83: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2y^2\left(x+y\right)+x=2+y\left(x-1\right)$.

(HSG Lớp 9 Thanh Hóa 2018-2019)

Bài 84: Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$xy^2+2xy-243y+x=0$$

Bài 84: Tìm số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức $x^2=y^2+\sqrt{y+1}$

Bài 85: Giải phương trình nghiệm nguyên $y^2=1+\sqrt{9-x^2-4x}$

Bài 86: Tìm số nguyên a để phương trình sau có nghiệm nguyên dương $\left|4-3a\right|=5-a$

Bài 87: Tìm tất cả các cặp $\left(x;y\right)$ nguyên thỏa mãn $x^2y^2+\left(x-2\right)^2+\left(2y-2\right)^2-2xy\left(x+2y-4\right)=5$.

(HSG Lớp 9 Lạng Sơn năm 2018-2019)

Bài 88: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình : $4y^4+6y^2-1=x$.

(HSG Lớp 9 Bình Phước năm 2018-2019)

Bài 89: Tìm tất cả các cặp số nguyên $\left(x;\ y\right)$ thỏa mãn phương trình

$$\left(x-y-1\right)\left(x+1-y\right)+6xy+y^2\left(2-x-y\right)=2\left(x+1\right)\left(y+1\right).$$

(HSG Lớp 9 Nam Định năm 2018-2019)

Bài 89: Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn: $\left(x-2018\right)^2=y^4-6y^3+11y^2-6y$

(HSG Lớp 9 Hưng Yên năm 2017-2018)

Bài 90:Tìm nghiệm nguyên của phương trình $y^2-5y+62=(y-2)x^2+(y^2-6y+8)x.$

(HSG Lớp 9 Thanh Hóa năm 2017-2018)

Bài 91: Tìm các cặp số nguyên $\left(x;y\right)$ thỏa mãn: $2x^2+2y^2+3x-6y=5xy-7.$

(HSG Lớp 9 Hải Dương năm 2016-2017)

Bài 92: Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $3x-16y-24=\sqrt{9x^2+16x+32}$.

(HSG Lớp 9 Hưng Yên năm 2016-2017)

Bài 93: Tìm các số nguyên x, y thoả mãn phương trình $(x+y)(x+2y)=x+5$

(HSG Lớp 9 TP. Hồ Chí Minh năm 2016-2017)

Bài 94: Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn: $x(x^2+x+1)=4^y-1$.

(HSG Lớp 9 Vĩnh Phúc năm 2015-2016)

Bài 95: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $3^x+171=y^2$.

(HSG Lớp 9 Nghệ An năm 2015-2016)

Bài 96: Tìm các nghiệm nguyên $(x;y)$ của phương trình: $54x^3+1=y^3$.

(HSG Lớp 9 Thanh Hóa năm 2015-2016)

Bài 97: Tìm các nghiệm nguyên (x; y) của phương trình: $5(x^2+xy+y^2)=7(x+2y)$

(HSG Lớp 9 Thanh Hóa năm 2014-2015)

Bài 98: Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn: $x(1+x+x^2)=4y(y-1)$.

(HSG Lớp 9 Vĩnh Phúc năm 2014-2015)

Bài 99: Tìm các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $x^2=2x+\overline{yzz4}$.

(HSG Lớp 9 Khánh Hòa năm 2014-2015)

Bài 100: Tìm $x,y,z\in N$ thỏa mãn $\sqrt{x+2\sqrt{3}}=\sqrt{y}+\sqrt{z}$.

(HSG Lớp 9 Thanh Hóa năm 2012-2013)

Bài 101: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2xy^2+x+y+1=x^2+2y^2+xy$

(HSG Lớp 9 Bình Định năm 2018-2019)

Bài 102: Tìm các số nguyên $x,\ y$ thỏa mãn $4^x=1+3^y$.

(HSG Lớp 9 Quảng Trị năm 2018-2019)

Một số bài toán từ đề thi học sinh giỏi toán lớp 10!

Bài 103. Tìm tất cả các số tự nhiên x, y thỏa mãn phương trình:

$$\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^4=3361-\sqrt{11296320}$$

(Đề đề nghị THPT TP. Cao Lãnh – Đồng Tháp)

Bài 104. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $\dfrac{|4x-6y|+|9x-6y|}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{313}\qquad(1)$

(Đề đề nghị THPT Bạc Lưu)

Bài 105. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2+x+1=2xy+y$

(Đề đề nghị Chuyên Lê Khiết – Quảng Ngãi)

Bài 106. Chứng tỏ rằng số: $444444+303030\sqrt{3}$ không viết dưới dạng $\left(x+y\sqrt{3}\right)^2$ với $x,y\in Z$

(Đề đề nghị Chuyên Quang Trung – Bình Phước)

Bài 107. Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thỏa mãn phương trình:

$$9\left(x^2+y^2+2\right)+2\left(3xy-1\right)=2008$$

(Đề đề nghị THPT Hùng Vương – Lê Lai)

Bài 108. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^3+x^2y+xy^2+y^3=8\left(x^2+xy+y^2+1\right)$

(Đề đề nghị Chuyên Lương Văn Chánh – Phú Yên)

Bài 109. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^2+17y^2+34xy+51\left(x+y\right)=1740$$

Bài 110. Tìm tất cả các cặp (x, y, z) là các số nguyên thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^3+y^3+z^3=3 \end{cases}$$

Bài 111. Tìm tất cả các số nguyên x, y, z thỏa mãn phương trình:

$$3x^2+6y^2+2z^2+3x^2y^2-18x-6=0.$$

Bài 112. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a,b) thỏa mãn đẳng thức:

$$a^3-b^3+3(a^2-b^2)+3(a-b)=(a+1)(b+1)+25.$$

Bài 113. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $\left(x;y\right)$ thoả mãn phương trình:

$$\left(x^2+4y^2+28\right)^2=17\left(x^4+y^4+14y^2+49\right)$$

Một số bài toán phương trình nghiệm nguyên trong tạp trí toán học tuổi trẻ

Bài 114. Tìm mọi nghiệm nguyên của phương trình $x^2\left(y-5\right)-xy=x-y+1$.

Bài 115. Tìm các bộ số nguyên $\left(a.b,c,d\right)$ thỏa mãn hệ $\begin{cases} ac-3bd=4 \\ ad+bc=3 \end{cases}$

Bài 116. Một tam giác có số đo 3 cạnh là các số nguyên x, y, z thỏa mãn

$$2x^2+3y^2+2z^2-4xy+2xz-20=0.$$

Chứng minh tam giác đó là tam giác đều

Bài 117. Chứng minh rằng phương trình sau không có nghiệm nguyên dương

$$x^2+y^3=\left(x+y\right)^2+\left(xy\right)^2$$

Bài 118. Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình

$$x^2y^3-4xy^3+y^2+x^2-2y-3=0.$$

Bài 119. Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa phương trình $2x^2+y^2+xy=2(x+y)$

(Trích đề học sinh giỏi lớp 9 tỉnh An Giang 2017-2018)

Bài 120. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $\frac{x-y}{x^2-xy+y^2}=\frac{3}{7}$

Bài 121. Tìm các số x, y nguyên dương thỏa mãn phương trình: $16(x^3-y^3)=15xy+371$

(Trích đề học sinh giỏi lớp 9 tỉnh Bến Tre 2017-2018)

Bài 122. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $(x-y)(2x+y+1)+9(y-1)=13$

(Trích đề học sinh giỏi lớp 9 tỉnh Bình Định 2017-2018)

Bài 123. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn phương trình

$$\frac{x-y}{x^2+xy+y^2}=\frac{7}{13}$$

(Trích đề học sinh giỏi lớp 9 TP. Hà Nội 2017-2018)

Bài 124. Tìm các số nguyên dương a, b, c, $(b>c)$ thỏa mãn $\begin{cases} b^2+c^2=a^2 \\ 2(a+b+c)=bc \end{cases}$.

(Trích đề học sinh giỏi lớp 9 Hà Tĩnh 2017-2018)

Bài 125. Tìm các số thực x sao cho $x+\sqrt{2018}$ và $\frac{7}{x}-\sqrt{2018}$ đều là số nguyên.

(Trích đề học sinh giỏi lớp 9 Hải Dương 2017-2018)

Bài 126. Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $(x-2018)^2=y^4-6y^3+11y^2-6y$

(Trích đề học sinh giỏi lớp 9 Hưng Yên 2017-2018)

Bài 127. Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=91$ và $b^2=ca$.

(Trích đề học sinh giỏi lớp 9 Phú Thọ 2017-2018)

Bài 128. Chứng minh rằng với mọi số nguyên n cho trước, không tồn tại số nguyên dương x sao cho $x(x+1)=n(n+2)$

(Trích đề học sinh giỏi lớp 9 huyện Ba Vì 2019-2020)

Bài 129. Tìm số thực x để biểu thức $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$ là số nguyên.

(Trích đề học sinh giỏi lớp 9 quận Ba Đình 2016-2017)

Bài 130. Tìm các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn: $3x^2-18y^2+2z^2+3y^2z^2-18x=27$.

(Trích đề học sinh giỏi lớp 9 tỉnh Hải Dương 2014-2015)

Bài 131. a) Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn $x^3-y^3=95(x^2+y^2)$

b) Tìm các số thực x, y thỏa mãn $\frac{x^2-4}{x}+\frac{y^2-4}{y}+8=4\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\right)$

(Trích đề vào 10 Chuyên Sư Phạm 2016-2017)

Bài 132. Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $(x+y)(3x+2y)^2=2x+y-1$.

(Trích đề vào 10 Chuyên Khoa học tự nhiên Hà Nội 2018-2019)

Bài 133. Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức

$$12x^2+26xy+15y^2=4617$$

(Trích đề vào 10 Chuyên Khoa học tự nhiên Hà Nội 2017-2018)

Bài 134. Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn đẳng thức sau $x^4+2x^2=y^3$.

(Trích đề vào 10 Chuyên Khoa học tự nhiên Hà Nội 2016-2017)

Bài 135. Tìm các cặp số nguyên $(x;\ y)$ thỏa mãn: $5x^2+8y^2=20412$.

(Trích đề vào 10 Chuyên Khoa học tự nhiên Hà Nội 2013-2014)

Bài 136. Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;\ y)$ thỏa mãn đẳng thức

$$(x+y+1)(xy+x+y)=5+2(x+y).$$

(Trích đề vào 10 Chuyên Khoa học tự nhiên Hà Nội 2012-2013)

Bài 137. Tìm tất cả các số nguyên không âm (x, y) thoả mãn đẳng thức

$$(1+x^2)(1+y^2)+4xy+2(x+y)(1+xy)=25.$$

(Trích đề vào 10 Chuyên Khoa học tự nhiên Hà Nội 2010-2011)

Bài 138. Tìm các số nguyên a để các phương trình sau có nghiệm nguyên:

a) $x^2-(a+5)x+5a+2=0$ (1)

b) $x^2+ax+198=a$ (2)

Bài 139. Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn phương trình: $x^3+y^3+1=3xy$.

Bài 140. Tìm các nghiệm nguyên không âm của phương trình :

$$(y+1)^4+y^4=(x+1)^2+x^2 \qquad (1)$$

(Vòng 2,THPT Chuyên – Đại học Sư phạm Hà Nội, năm học 2006 – 2007)

Bài 141. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $7(x+y)=3(x^2-xy+y^2)$ (1)

Bài 142. Tìm nghiêm nguyên của phương trình: $x^2+17y^2+34xy+51(x+y)=1740$

(Vòng 1, THPT Chuyên - Đại học Quốc gia Hà Nội, năm học 2005 - 2006)

Bài 143. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $7(x^2y+x+xy^2+2y)=38xy+38$

Bài 144. Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn điều kiện: $(x+y+1)(xy+x+y)=5+2(x+y)$

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 trường THPT chuyên KHTN – ĐHQG Hà Nội , 2014)

Bài 145. Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn điều kiện: $4x^2+8xy+3y^2+2x+y+2=0$

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên toán tin Amsterdam , 2018)

Bài 146. Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn điều kiện: $x^3-y^3=91$

Bài 147. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^3-xy+1=2y-x$.

Bài 148. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^3-y^3=xy+8(*)$

Bài 149. Tìm các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn: $x^2-2=(xy+2)z$.

Bài 150. Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện: $(x+2)^2(y-2)+xy^2+26=0$.

Bài 151. Tìm các số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn: $x^3-y^3=95(x^2+y^2)$.

(Trích Đề tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐHSP Hà Nội, năm 2016)

Bài 152. Tìm các số nguyên tố x, y thỏa mãn điều kiện: $(x^2+2)^2=2y^4+11y^2+x^2y^2+9$

Bài 153. Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn: $x^3-y^3=13(x^2+y^2)$.

Bài 154. Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình:

$$\frac{16x^4+y^4+14y^2+49}{(x^2+y^2+7)}=\frac{16}{17}$$

Bài 155. Tìm các cặp nghiệm số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^2-xy+y^2=x^2y^2-5$.

(Đề tuyển sinh vào lớp 10 Trường THPT chuyên KHTN – ĐHQG Hà Nội, 2015).

Bài 156 Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $x+y-z=2$ và $3x^2+2y^2-z^2=13$.

(Đề tuyển sinh Chuyên Tin Amsterdam, 2017)

Bài 157. Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn điều kiện: $x^2(x+y)=y^2(x-y)^2$.

(Trích Đề tuyển sinh vào lớp 10 Trường THPT chuyên KHTN – ĐHQG Hà Nội, 2016)

Bài 158. Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^2-xy+y^2=x^2y^2-5$

(Đề tuyển sinh lớp 10 Trường THPT chuyên KHKT – ĐHQG Hà Nội, 2015)

Bài 159. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2y^2(x+y)+x+y=3+xy$.

Bài 160. Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình: $8^x-37=y^3$

Bài 161. : Tìm nghiệm nguyên không âm của phương trình: $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+...+\sqrt{x}}}}=y$

Trong đó vế trái có n dấu căn

CHỦ ĐỀ 7

PHẦN NGUYÊN TRONG SỐ HỌC

A. Kiến thức cần nhớ

1. Định nghĩa

Ta biết rằng, mọi số thực x đều có thể biểu diễn được dưới dạng: $x = n + t$ với $n \in Z$ và $0 \le t < 1$.

Ví dụ: $6,7 = 6 + 0,7$; $-6,7 = -7 + 0,3$

Sự biểu diễn trên là duy nhất. Ta gọi số nguyên n là phần nguyên của x ; còn t được gọi là phần lẻ của *x*. Từ đây ta đi đến định nghĩa.

Phần nguyên của số thực x là số nguyên lớn nhất không vượt quá x, kí hiệu là $[x]$. Ta có $[x] \le x < [x] + 1$.

Thí dụ: $\left[2\frac{1}{2}\right] = 2; \left[\frac{3}{5}\right] = 0; [-7,2] = -8; \left[\sqrt{2}\right] = 1; .....$

Phần lẻ của số thực x là hiệu của x với phần nguyên của nó, kí hiệu là $\{x\}$.

Ta có $\{a\} = a - [a], 0 \le \{a\} \le 1$.

Thí dụ $\{2,1\} = 0,1; \left\{\frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}; \{-7,2\} = 0,8; ....$

2. Tính chất

1) $a \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow [a] = a$ hoặc $\{a\} = 0$.

2) $n \in \mathbb{Z}$ và $n \le a < n + 1 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow [a] = n$.

3) $[\{a\}] = \{[a]\} = 0$.

4) Nếu $n \in \mathbb{Z}$ thì $[n + a] = n + [a]; \{n + a\} = \{a\}$.

5) Nếu $[n + a] = n$ thì $n \in \mathbb{Z}$ và $0 \le a \le 1$.

6) $a \ge b \Rightarrow [a] \ge [b]$.

7) $[a] + [b] \le [a + b]$.

Tổng quát $[a_1] + [a_2] + ... + [a_n] \le [a_1 + a_2 + ... + a_n]$,

8) $[a] - [b] \ge [a - b]$.

9) $\{a\} + \{b\} \ge \{a + b\}; \{a\} - \{b\} \le \{a - b\}$.

10) Nếu $[a] = [b]$ thì $|a - b| < 1$.

11) $[a] + \left[a + \frac{1}{2}\right] = [2a]$.

12) Nếu $n \in \mathbb{N}^*$ thì $[na] \ge n[a]; \left[\dfrac{[a]}{n}\right] = \left[\dfrac{a}{n}\right]$.

13) Nếu a là số nguyên thì $[-a] = -[a]$;

Nếu a không là số nguyên thì $[-a] = -[a] - 1$;

Chứng minh các tính chất:

Các tính chất 1) đến 5) có thể chứng minh dễ dàng trên dựa vào định nghĩa phần nguyên.

6) Vì $a \ge b$ nên tồn tại số $c \ge 0$ sao cho $a = b + c$. Do đó. $a = [b] + \{b\} + c$, suy ra

$$[a] = [b] + \left[\{b\} + c\right]. \text{ Mà } \left[\{b\} + c\right] \ge 0 \text{ nên } [a] \ge [b].$$

7) Viết $a = [a] + \{a\}, b = [b] + \{b\}$. Khi đó

$$[a+b] = \left[[a] + \{a\} + [b] + \{b\}\right] = [a] + [b] + \left[\{a\} + \{b\}\right].$$

Mà $\left[\{a\} + \{b\}\right] \ge 0$ nên

$$[a+b] \ge [a] + [b].$$

8) Áp dụng tính chất 7 ta có

$[a-b] + [b] \le [a-b+b] = [a]$ nên $[a] - [b] \ge [a-b]$.

9) $\{a\} + \{b\} = a - [a] + b - [b] = (a+b) - \left([a] + [b]\right) \ge a + b - [a+b] = \{a+b\}. \Rightarrow \{a\} + \{b\} \ge \{a+b\}$

Vậy $\{a\} + \{b\} \ge \{a+b\}$.

$\{a\} - \{b\} = a - [a] + [b] - b = (a-b) - \left([a] - [b]\right) \le (a-b) - [a-b] = \{a-b\}. \Rightarrow \{a\} - \{b\} \le \{a-b\}$

Vậy $\{a\} - \{b\} \le \{a-b\}$.

10) $[a] = [b]$ suy ra $a - \{a\} = b - \{b\}$. Không giảm tính tổng quát, giả sử $a \ge b$

Nếu $a = b$ thì $|a-b| = 0$;

Nếu $a > b$ thì từ $a - b = \{a\} - \{b\} \le \{a-b\}$

Suy ra $|a-b| = a - b \le \{a-b\} < 1$

Vậy $|a-b| < 1$.

11) Đặt $\{a\} = d$ thì $0 \le d \le 1$.

- Nếu $0 \le d < \dfrac{1}{2}$ thì $\left[a + \dfrac{1}{2}\right] = \left[[a] + d + \dfrac{1}{2}\right] = [a] + \left[d + \dfrac{1}{2}\right] = [a]$;

$[2a] = \left[2\left([a] + d\right)\right] = 2[a] + [2d] = 2[a]$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

- Nếu $\dfrac{1}{2} \le d < 1$ thì $\left[a + \dfrac{1}{2}\right] = \left[[a] + d + \dfrac{1}{2}\right] = [a] + \left[d + \dfrac{1}{2}\right] = [a] + 1$;

$[2a] = \left[2\left([a] + d\right)\right] = 2[a] + [2d] = 2[a] + 1$. Suy ra điều phải chứng minh.

12) Ta có $[na] = \left[n\left([a] + \{a\}\right)\right] = n[a] + \left[n\{a\}\right]$, mà $\left[n\{a\}\right] \ge 0$ nên $[na] \ge n[a]$.

$$\left[\frac{a}{n}\right] \le \frac{a}{n} < \left[\frac{a}{n}\right] + 1 \Rightarrow n\left[\frac{a}{n}\right] \le a < n\left(\left[\frac{a}{n}\right] + 1\right)$$

$\Rightarrow n\left[\frac{a}{n}\right] \le [a] < n\left(\left[\frac{a}{n}\right]+1\right) \Rightarrow \left[\frac{a}{n}\right] \le \frac{[a]}{n} < \left[\frac{a}{n}\right]+1$

Vậy $\left[\frac{[a]}{n}\right] = \left[\frac{a}{n}\right]$.

13) Nếu a là số nguyên thì $[-a] = -a = -[a]$.

Nếu a không nguyên thì $0 < \{a\} < 1$, nên $-1 < -\{a\} < 0$, suy ra $[-\{a\}] = -1$.

Ta có $[-a] = [-([a]+\{a\})] = [-[a]] + [-\{a\}] = -[a] - 1$.

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

🗁 Dạng 1: Tìm phần nguyên của một số hoặc một biểu thức

*** Cơ sở phương pháp:** Để tính giá trị một biểu thức chứa phần nguyên, ta cần sử dụng các tính chất của phần nguyên, kết hợp với các kĩ thuật tính toán khác đặc biệt là **Phương pháp "kẹp"**

Đánh giá số hạng để "kẹp" số cần tính phần nguyên giữa hai số nguyên liên tiếp: Đưa biểu thức về dạng $z \le A < z+1$ và kết luận $[A] = z$;

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm $[x]$ biết: $x = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n.(n+1)}$

Hướng dẫn giải

Ta cần chỉ ra số nguyên y sao cho: $y < x < y+1$ để: $[x]$ = y

Để ý $x = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$

Suy ra $0 < x < 1 \Rightarrow [x] = 0$

Bài toán 2. Tìm phần nguyên của số: $\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}$ (có 100 dấu căn).

(Nâng cao và phát triển lớp 9 tập 1 – Vũ Hữu Bình)

Hướng dẫn giải

Kí hiệu $a_n = \sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}$ (có n dấu căn).

Ta có $a_1 = \sqrt{6} < 3$

$a_2 = \sqrt{6 + a_1} < \sqrt{6+3} = 3$

$a_3 = \sqrt{6 + a_2} < \sqrt{6+6} = 3$

…

$a_{100} = \sqrt{6 + a_{99}} < \sqrt{6+3} < 3$.

Hiển nhiên $a_{100} > \sqrt{6} > 2$ $a_{100} > \sqrt{6} > 2$. Như vậy $2 < a_{100} < 3$, do đó $[a_{100}] = 2$..

Bài toán 3. Tính phần nguyên của: $A = \sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)}$. với n là số tự nhiên.

Hướng dẫn giải

Ta có: $A = \sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)}. = \sqrt{(n^2+3n)(n^2+3n+2)} = \sqrt{(n^2+3n)^2 + 2(n^2+3n)}.$

Để ý rằng:

$\sqrt{(n^2+3n)^2} < \sqrt{(n^2+3n)^2 + 2(n^2+3n)} < \sqrt{(n^2+3n)^2 + 2(n^2+3n) + 1}$

Suy ra $n^2 + 3n < A < n^2 + 3n + 1$. Vậy $[A] = n^2 + 3n,\ n \in N$.

Bài toán 4. Tìm $[x]$ biết: $x = \sqrt{4n^2 + \sqrt{16n^2 + 8n + 3}}$ với n là số tự nhiên

Hướng dẫn giải

Thật vậy ta có: $(4n+1)^2 < 16n^2 + 8n + 3 < (4n+2)^2$

$\Rightarrow 4n + 1 < \sqrt{16n^2 + 8n + 3} < 4n + 2$

$\Rightarrow 4n^2 + 4n + 1 < 4n^2 + \sqrt{16n^2 + 8n + 3} < 4n^2 + 4n + 2 < 4n^2 + 8n + 4$

$\Rightarrow 2n + 1 < \sqrt{4n^2 + \sqrt{16n^2 + 8n + 3}} < 2n + 2$

$\Rightarrow [x] = 2n + 1$

Bài toán 5. Tính tổng sau:

$$S = [\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \ldots + [\sqrt{24}]$$

Hướng dẫn giải

$S=\left(\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+\left[\sqrt{3}\right]\right)+\left(\left[\sqrt{4}\right]+...+\left[\sqrt{8}\right]\right)+\left(\left[\sqrt{9}\right]+...+\left[\sqrt{15}\right]\right)+\left(\left[\sqrt{16}\right]+...+\left[\sqrt{24}\right]\right).$

Theo cách chia nhóm như trên, nhóm 1 có ba số, nhóm 2 có năm số, nhóm 3 có bảy số, nhóm 4 có chín số.

Các số thuộc nhóm 1 bằng 1, các số thuộc nhóm 2 bằng 2, các số thuộc nhóm 3 bằng 3, các số thuộc nhóm 4 bằng 4.

Vậy $A = 1.3 + 2.4 + 3.7 + 4.9 = 70$.

Dạng 2: Chứng minh một đẳng thức chứa phần nguyên

* **Cơ sở phương pháp:** Chứng minh các hệ thức chứa phần nguyên thực chất có thể coi là chứng minh các tính chất của phần nguyên. Để chứng minh các hệ thức chứa phần nguyên ta phải sử dụng các tính chất đã được nêu trong phần lý thuyết, kết hợp với các kĩ thuật đại số và số học.

* **Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta luôn có:

$$\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n+2}{2}\right]=n$$

Hướng dẫn giải

Nếu n chẵn, tức là $n = 2k$ thì $\left[\frac{2k}{2}\right]+\left[\frac{2k+1}{2}\right]=\left[k\right]+\left[k+\frac{1}{2}\right]=k+k=2k=n$

Nếu n lẻ, tức $n = 2k + 1$ thì: $\left[\frac{2k+1}{2}\right]+\left[\frac{2k+1+1}{2}\right]=\left[k+\frac{1}{2}\right]+\left[k+1\right]=k+k+1=2k+1=n.$

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài toán 2. Cho n là số tự nhiên, chứng minh:

$$\left[\sqrt{4n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+2}\right]$$

Hướng dẫn giải

Đặt $k=\left[\sqrt{4n+2}\right]$; $m=\left[\sqrt{4n+1}\right]$.

Ta có: $k \ge m$

Do $k=\left[\sqrt{4n+2}\right]$ nên $k \le \sqrt{4n+2} \Rightarrow k^2 \le 4n+2$.

Giả sử $k^2 = 4n+2$, điều này vô lý vì số chính phương chia cho 4 không thể dư 2. Từ đó suy ra: $k^2 < 4n+2 \Rightarrow k^2 \le 4n+1 \Rightarrow k \le \sqrt{4n+1} \Rightarrow k \le \left[\sqrt{4n+1}\right] = m.$

Vậy $k = m$.

Bài toán 3. Chứng minh rằng với n là số nguyên dương bất kì, ta có:

$$\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]=\left[\sqrt{n-\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}\right].$$

Hướng dẫn giải

Đặt $k=\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]; \quad m=\left[\sqrt{n-\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}\right].$

Khi đó: $k \le \sqrt{n}+\frac{1}{2}<k+1 \Leftrightarrow k-\frac{1}{2} \le \sqrt{n}<k+\frac{1}{2} \Leftrightarrow k^2-k+\frac{1}{4} \le n<k^2+k+\frac{1}{4}.$

Vì n nguyên dương nên phải có $k^2-k+1 \le n \le k^2+k.$

Chứng minh tương tự:

$$m \le \sqrt{n-\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}<m+1 \Leftrightarrow m^2-m+\frac{1}{4} \le n-\frac{3}{4}<m^2+m+\frac{1}{4} \Leftrightarrow m^2-m+1 \le n \le m^2+m$$

Vậy phải có $k=m.$

🗁 **Dạng 3: Phương trình chứa phần nguyên**

1) Phương trình có dạng: $\left[f(x)\right]=a \quad (a \in \mathbb{Z})$

*** Cơ sở phương pháp:** $\left[f(x)\right]=a \ (a \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow a \le f(x)<a+1.$

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Giải phương trình $3[x]^2+5[x]-2=0.$

Hướng dẫn giải

Đặt $[x]=y, y \in Z$. Phương trình trở thành: $3y^2+5y-2=0.$

Suy ra $y=-2$ hoặc $y=-\frac{1}{3}$ ($y=-\frac{1}{3}$ loại do $y \in Z$)

Do đó $[x]=y=-2$. Suy ra $-2 \le x<-1.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $[-2;-1)$

Bài toán 2. Giải phương trình $\left[x^2+5\right]^2-9\left[x^2+7\right]=-26.$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\left[x^2+7\right]=\left[x^2+5\right]+2$

Do đó: $$\left[x^2+5\right]^2-9\left[x^2+7\right]=-26$$

$$\Leftrightarrow \left[x^2+5\right]^2 - 9\left(\left[x^2+5\right]+2\right) = -26$$

$$\Leftrightarrow \left[x^2+5\right]^2 - 9\left[x^2+5\right] + 8 = 0$$

Đặt $\left[x^2+5\right] = y \Rightarrow y \geq 5, y \in Z$. Phương trình trở thành: $y^2 - 9y + 8 = 0.$

Suy ra $y = 8$ hoặc $y = 1$ ($y = 1$ loại do $y < 5$)

Do đó $\left[x^2+5\right] = y = 8$. Suy ra $8 \leq x^2 + 5 < 9 \Leftrightarrow 3 \leq x^2 < 4 \Leftrightarrow \sqrt{3} \leq x < 2$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left[\sqrt{3}; 2\right)$

Bài toán 3. Giải phương trình $\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] = 17$

Hướng dẫn giải

Trước hết ta ước lượng giá trị của x .

Do $[x] \leq x$ nên $17 \leq \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = \frac{5x}{6}$, suy ra $x \geq 20,4.$. (1)

Do $[x] \geq x - 1$ nên $17 > \left(\frac{x}{2} - 1\right) + \left(\frac{x}{3} - 1\right) = \frac{5}{6}x - 2$, suy ra $x \leq 22,8$ (2)

Do x là số nguyên nên từ (1) và (2) suy ra $x \in \{21; 22\}$.

Thử vào phương trình đã cho, ta được $x = 21$

2) Phương trình có dạng: $\left[f(x)\right] = g(x)$

*** Cơ sở phương pháp:** Đặt $g(x) = t$ (t nguyên), biểu diễn $f(x) = h(t)$ đưa về phương trình $\left[h(t)\right] = t \Leftrightarrow t \leq h(t) < t + 1$ hay $0 \leq h(t) - t < 1.$

Tìm $t,$ sau đó từ $g(x) = t$ tìm ra x .

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Giải phương trình $\left[\frac{4-3x}{5}\right] = \frac{5x-5}{7}.$

Hướng dẫn giải

Đặt $\frac{5x-5}{7} = t\left(t \in \mathbb{Z}\right)$ thì $x = \frac{7t+5}{5}; \frac{4-3x}{5} = \frac{5-21t}{25}.$

Ta có $\left[\frac{5-21t}{25}\right] = t \Leftrightarrow t \leq \frac{5-21t}{25} < t + 1$

$\Leftrightarrow 25t \le 5-21t \le 25t+25 \Leftrightarrow \frac{-20}{46} < t \le \frac{5}{46}.$

Do t nguyên nên $t=0$. Suy ra $x=1$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 2. Giải phương trình $x^2-9[x]+8=0.$

Hướng dẫn giải

Biến đổi phương trình về dạng $[x]=\frac{x^2+8}{9}.$

Đặt $\frac{x^2+8}{9}=t$ $(t\in\mathbb{N}^*)$ thì $x=\sqrt{9t-8}$ (do $x>0$). Ta có

$\left[\sqrt{9t-8}\right]=t \Leftrightarrow t\le\sqrt{9t-8}<t+1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2-9t+8\le 0 \\ t^2-7t+9\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1\le t\le 8t \\ \left[\begin{array}{l} t\le \frac{7-\sqrt{13}}{2} \\ t\ge\frac{7+\sqrt{13}}{2}. \end{array}\right. \end{cases}$$

Do t là số tự nhiên nên $t\in\{1;6;7;8\}$. Do đó $x\in\left\{1;\sqrt{46};\sqrt{55};8\right\}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{1;\sqrt{46};\sqrt{55};8\right\}$.

Bài toán 3. Giải phương trình $\left[\frac{2x-1}{3}\right]+\left[\frac{4x+1}{6}\right]=\frac{5x-4}{3}.$

Hướng dẫn giải

Áp dụng tính chất: $[a]+\left[a+\frac{1}{2}\right]=[2a],$ ta có

$$\left[\frac{2x-1}{3}\right]+\left[\frac{4x+1}{6}\right]=\left[\frac{2x-1}{3}\right]+\left[\frac{2x-1}{3}+\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{4x-2}{3}\right]$$

Nên phương trình đã cho trở thành

$$\left[\frac{4x-2}{3}\right]=\frac{5x-4}{3}.$$

Đặt $\frac{5x-4}{3}=t\,(t\in\mathbb{Z})$ thì $x=\frac{3t+4}{5};\frac{4x-2}{3}=\frac{4t+2}{5}$. Suy ra

$$\left[\frac{4t+2}{5}\right]=t\Leftrightarrow 0\le\frac{4t+2}{5}-t<1\Leftrightarrow -3<t\le 2\Leftrightarrow t\in\{-2;-1;0;1;2\}$$

(do t nguyên), tương ứng tìm được $x\in\left\{\frac{-2}{5};\frac{1}{5};\frac{4}{5};\frac{7}{5};2\right\}.$

3) Phương trình có dạng: $\left[f(x)\right]=\left[g(x)\right]$

*** Cơ sở phương pháp:**

Đặt $\left[f(x)\right]=\left[g(x)\right]=t$ suy ra $\left|f(x)-g(x)\right|<1$, dẫn đến $a<x<b$.

Với $a<x<b$ suy ra $\begin{cases} a_1<f(x)<b_1 \\ a_2<f(x)<b_2 \end{cases}$, từ đó tìm được t.

Ứng với mỗi giá trị của t nguyên, giải hệ $\begin{cases} \left[f(x)\right]=t \\ \left[g(x)\right]=t \end{cases}$ để tìm x.

Tập hợp các giá trị x tìm được từ hệ trên sẽ là nghiệm của phương trình.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Giải phương trình $\left[\dfrac{2x-1}{3}\right]=\left[\dfrac{x+1}{2}\right]$.

Hướng dẫn giải

Theo tính chất 10 thì nếu $[a]=[b]$ thì $|a-b|<1$

Đặt $\left[\dfrac{2x-1}{3}\right]=\left[\dfrac{x+1}{2}\right]=t\,(t\in\mathbb{Z})$. Theo tính chất chứng minh trên ta có

$\left|\dfrac{2x-1}{3}-\dfrac{x+1}{2}\right|<1\Leftrightarrow -1<\dfrac{x-5}{6}<1\Leftrightarrow -1<x<11$. Khi đó

$\begin{cases} 0<\dfrac{x+1}{2}<6 \\ -1<\dfrac{2x-1}{3}<7 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 0\le\left[\dfrac{x+1}{2}\right]\le 5 \\ -1\le\left[\dfrac{2x-1}{3}\right]\le 6 \end{cases}$. Suy ra $t\in\{0;1;2;3;4;5\}$.

Với $t=0$ thì $\left[\dfrac{2x-1}{3}\right]=\left[\dfrac{x+1}{2}\right]=0\Leftrightarrow\begin{cases} 0\le\dfrac{2x-1}{3}<1 \\ 0\le\dfrac{x+1}{2}<1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \dfrac{1}{2}\le x<2 \\ -1\le x<1 \end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\le x<1.$

Với $t=1$ thì $\left[\dfrac{2x-1}{3}\right]=\left[\dfrac{x+1}{2}\right]=1\Leftrightarrow\begin{cases} 1\le\dfrac{2x-1}{3}<2 \\ 1\le\dfrac{x+1}{2}<2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2\le x<\dfrac{7}{2} \\ 1\le x<3 \end{cases}\Leftrightarrow 2\le x<3.$

Với $t=2$ thì $\left[\dfrac{2x-1}{3}\right]=\left[\dfrac{x+1}{2}\right]=2\Leftrightarrow\begin{cases} 2\le\dfrac{2x-1}{3}<3 \\ 2\le\dfrac{x+1}{2}<3 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \dfrac{7}{2}\le x<5 \\ 3\le x<5 \end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{7}{2}\le x<5.$

Với $t=3$ thì $\left[\dfrac{2x-1}{3}\right]=\left[\dfrac{x+1}{2}\right]=3\Leftrightarrow\begin{cases} 3\le\dfrac{2x-1}{3}<4 \\ 3\le\dfrac{x+1}{2}<4 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 5\le x<\dfrac{11}{2} \\ 5\le x<7 \end{cases}\Leftrightarrow 5\le x<\dfrac{11}{2}.$

Với $t=4$ thì $\left[\frac{2x-1}{3}\right]=\left[\frac{x+1}{2}\right]=4 \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \le \frac{2x-1}{3} < 5 \\ 4 \le \frac{x+1}{2} < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{13}{2} \le x < 8 \\ 7 \le x < 9 \end{cases} \Leftrightarrow 7 \le x < 8.$

Với $t=5$ thì $\left[\frac{2x-1}{3}\right]=\left[\frac{x+1}{2}\right]=5 \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \le \frac{2x-1}{3} < 6 \\ 5 \le \frac{x+1}{2} < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 \le x < \frac{19}{2} \\ 9 \le x < 11 \end{cases} \Leftrightarrow 9 \le x < \frac{19}{2}.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $[0,5;1) \cup [2;3) \cup [3,5;5,5] \cup [7;8) \cup [9;9,5)$.

Bài toán 2. Giải phương trình $[x-2,3]=[4-x]$.

Hướng dẫn giải

Theo tính chất 10 thì nếu $[a]=[b]$ thì $|a-b|<1$ suy ra:

$$[x-2,3]=[4-x] \Rightarrow -1 < (x-2,3)-(4-x) < 1$$
$$\Leftrightarrow -1 < 2x-6,3 < 1 \Leftrightarrow 2,65 < x < 3,65.$$

Suy ra $0,35 < x-2,3 < 1,35$. Do đó $[x-2,3]=0$ hoặc $[x-2,3]=1$.

Vì $2,65 < x < 3,65$ nên $0,35 < 4-x < 1,35$ suy ra $[4-x]=0$ hoặc $[4-x]=1$.

Trường hợp 1: $[x-2,3]=[4-x]=0$

Ta có $[4-x]=0 \Leftrightarrow 0 \le x-2,3 < 1 \Rightarrow 2,3 < x < 3,3$

Kết hợp hai điều kiện ta được: $3 < x < 3,3$.

Trường hợp 2: $[x-2,3]=[4-x]=1$.

Ta có: $[x-2,3]=1 \Leftrightarrow 1 \le x-2,3 < 2 \Leftrightarrow 3,3 \le x < 4,3$;

$[4-x]=1 \Leftrightarrow 1 \le 4-x < 2 \Leftrightarrow 2 < x \le 3$.

Không có x nào thỏa mãn hai điều kiện trên.

Từ hai trường hợp ta có nghiệm của phương trình là $3 < x < 3,3$

4) Phương trình chứa nhiều dấu phần nguyên

*** Cơ sở phương pháp:**

Sử dụng tính chất của phần nguyên, phân tích đa thức thành nhân tử, đặt ẩn phụ (nếu cần) để đưa về phương trình ít phần nguyên hơn.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Giải phương trình: $\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x}{3}\right]=x$.

Hướng dẫn giải

Ta thấy x là số nguyên. Đặt $x=6a+r$ trong đó $a,r \in Z$ và $0 \le r < 6$.

$$\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x}{3}\right]=x \Leftrightarrow \left[\frac{6a+r}{2}\right]+\left[\frac{6a+r}{3}\right]=6a+r$$

$$\Leftrightarrow 5a+\left[\frac{r}{2}\right]+\left[\frac{r}{3}\right]=6a+r \Leftrightarrow a=-r+\left[\frac{r}{2}\right]+\left[\frac{r}{3}\right].$$

Lần lượt cho r bằng $0,1,2,3,4,5$ ta được.

r	0	1	2	3	4	5
a	0	-1	-1	-1	-1	-2
x	0	-5	-4	-3	-2	-7

Cách khác:

Ta dễ dàng chứng minh được tính chất $[x]+[y]=\begin{cases}[x+y] & khi \quad 0\le \{x\}+\{y\}<1;\\ [x+y]-1 & khi \quad 1\le \{x\}+\{y\}<2\end{cases}$

Áp dụng tính chất trên ta được:

$\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x}{3}\right]=\left[\frac{x}{2}+\frac{x}{3}\right]=\left[\frac{5x}{6}\right]$ hoặc $\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x}{3}\right]=\left[\frac{x}{2}+\frac{x}{3}\right]-1=\left[\frac{5x}{6}\right]-1$

Vậy nếu x là nghiệm của phương trình $\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x}{3}\right]=x.$ thì $\left[\frac{5x}{6}\right]=x$ hoặc $\left[\frac{5x}{6}\right]-1=x.$

Tức là $\begin{cases}0\le \frac{5x}{6}-x<1\\ x\in Z\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}0\le \frac{5x}{6}-(x+1)<1\\ x\in Z\end{cases}$

hay $-6<x\le 0$ hoặc $-12<x\le -6$. Vậy $-12<x\le 0.$

Do x nguyên nên x chỉ có thể là $-11;-10;-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1;0.$

Thay vào phương trình và thử lại, ta được: $x=-7;-5;-4;-3;-2;0.$

Bài toán 2. Giải phương trình $\left[\frac{x}{1!}\right]+\left[\frac{x}{2!}\right]+\left[\frac{x}{3!}\right]=224$

Hướng dẫn giải

Ta có $\qquad [x]+\left[\frac{x}{4}\right]+\left[\frac{x}{6}\right]=224.$

Trước hết ta ước lượng giá trị của x.

Do $[x]\le x$ nên $224\le x+\frac{x}{2}+\frac{x}{6}=\frac{5}{3}x$, suy ra $x\ge 134,4..$ $\qquad$ (1)

Do $[x] \ge x-1$ nên $224 > (x-1)+\left(\frac{x}{2}-1\right)+\left(\frac{x}{6}-1\right)=\frac{5}{3}x-3$, suy ra $x \le 136,2 \quad (2)$

Do x là số nguyên nên từ (1) và (2) suy ra $x \in \{135;136\}$.

Thử vào phương trình đã cho, ta được $x=135$.

Bài toán 3. Giải phương trình $[x]+[2x]+[3x]+...+[2009x]=4036082.$

Hướng dẫn giải

Nhận xét rằng

$[x] \le x < [x+1]$ suy ra $k[x] \le kx < k[x]+k$ nên $k[x] \le [kx] \le k[x]+k-1\left(k \in Z^{+}\right)$.

Do đó thay $k=1,2,...,2009$ rồi cộng theo vế ta có

$$2019045[x] \le [x]+[2x]+...+[2009x] \le 2019045[x]+2017036.$$

$$2019045[x] \le 4036082 \le 2019045[x]+2017036.$$

Lại có $4036082=2019045+2017037.$ Do đó phương trình vô nghiệm.

Bài toán 4. Giải phương trình $\left[\frac{2x-1}{3}\right]-\left[x^2\right]=\left[-x^2\right]$.

Hướng dẫn giải

Nếu a là số nguyên thì $[-a]=-a=-[a]$.

Nếu a không nguyên thì $0<\{a\}<1,$ nên $-1<-\{a\}<0,$ suy ra $[-\{a\}]=-1.$

Ta có $[-a]=[-([a]+\{a\})]=[-[a]]+[-\{a\}]=-[a]+1.$

Do đó: $\left[-x^2\right]=\begin{cases}-\left[x^2\right], x^2 \in \mathbb{Z} \\ -\left[x^2\right]-1, x^2 \notin \mathbb{Z}.\end{cases}$

- Nếu x^2 là số nguyên thì phương trình đã cho trở thành

$$\left[\frac{2x-1}{3}\right]=0 \Leftrightarrow 0 \le \frac{2x-1}{3}<1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le x<2.$$

Mà x^2 là số nguyên nên $x \in \left\{1;\sqrt{2};\sqrt{3}\right\}$.

- Nếu x^2 không là số nguyên thì phương trình đã cho trở thành

$$\left[\frac{2x-1}{3}\right]=-1 \Leftrightarrow 0 \le \frac{2x-1}{3}+1<1 \Leftrightarrow -1 \le x<\frac{1}{2}.$$

Mà x^2 không nguyên nên phải loại $x=-1, x=0 \Rightarrow x \in (-1;0) \cup \left(0;\frac{1}{2}\right)$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $(-1;0) \cup \left(0;\frac{1}{2}\right) \cup \left\{1;\sqrt{2};\sqrt{3}\right\}$.

5) Phương trình dạng hỗi hợp

*** Cơ sở phương pháp:**

Có những phương trình chứa của phần nguyên và phần dư, hoặc phần nguyên với các phép toán khác (lũy thừa, căn thức,…) ta xếp chúng vào dạng *phương trình hỗn hợp*. Giải chúng nói chung là khó, cần kết hợp nhiều suy luận và kĩ thuật khác nhau, như dùng định nghĩa, chia khoảng, sử dụng tính chất số nguyên của $[x]$ hoặc tính chất $0 \le \{x\} < 1$, các tính chất x nguyên khi và chỉ khi $\{x\} = 0$ hoặc $x = [x]$, các phương pháp của đại số như đặt ẩn phụ, biến đổi tương đương hệ phương trình,...

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Giải phương trình trên tập số dương: $\left[x^2\right] = [x]^2$

Hướng dẫn giải

Xét $n \le x < n+1$ hay $[x] = n$, trong đó n là số tự nhiên (có thể bằng 0). Ta có $n^2 \le x^2 < n^2 + 2n + 1$. Do đó $\left[x^2\right]$ chỉ có thể nhận các giá trị

$$n^2; n^2+1; n^2+2; ...; n^2+2n.$$

Nhưng $[x]^2 = n^2$ nên phương trình đã cho đúng khi và chỉ khi

$\left[x^2\right] = [x]^2 = n^2$, tức là $\begin{cases} n^2 \le x^2 < n^2+1 \\ n \le x < n+1 \end{cases}$ hay $n \le x < \sqrt{n^2+1}$..

Vì $x > 0$ nên ta có $0 < x < 1$ hoặc $n \le x < \sqrt{n^2+1}, n = 1, 2, 3, 4, ...$

Bài toán 2. Giải phương trình: $\left[x^2\right] + [x] = \{x\} + 2$.

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết ta suy ra $\{x\} = \left[x^2\right] + [x] - 2$. Vế phải là một số nguyên, mà vế trái $0 \le \{x\} < 1$ nên $\{x\} = 0$. Vậy x là một số nguyên. Do đó x^2 cũng là một số nguyên. Suy ra $\left[x^2\right] = x^2$ và $[x] = x$. Phương trình đã cho trở thành $x^2 + x - 2 = 0$.

Phương trình này có nghiệm x = -2 hoặc x = 1.

Bài toán 3. Tìm các số x, y, z thoả mãn cả ba phương trình sau

$$x + [y] + \{z\} = 1{,}1\ ;\ y + [z] + \{x\} = 2{,}2\ ;\ z + [x] + \{y\} = 3{,}3\,.$$

Hướng dẫn giải

CHUYÊN ĐỀ SỐ HỌC

Cộng từng vế các phương trình đã cho được $x+y+z=3,3$.

Cộng từng vế hai phương trình đầu được

$$x+y+[z]+\{z\}+[y]+\{x\}=3,3.$$

Suy ra $[y]+\{x\}=0$ (chú ý rằng $[z]+\{z\}=z$).

Do đó $\{x\}$ là số nguyên, suy ra $\{x\}=0$. Vậy $[y]=0$ và $x=[x]$.

Từ $x+[y]+\{z\}=1,1$ và $[y]=0$ suy ra $x+\{z\}=1,1$.

Do $0\le\{z\}<1$ và $x=[x]$ nên $x=1$, do đó $\{z\}=0,1$.

Từ $y+[z]+\{x\}=2,2$ và $\{x\}=0$ suy ra $y+[z]=2,2$.

Ta lại có $[y]=0$ nên $0\le y<1$, do đó $y=0,2,[z]=2$.

Vậy $z=[z]+\{z\}=2,1$.

🗁 Dạng 4: Bất phương trình chứa phần nguyên

*** Cơ sở phương pháp:** Khi giải bất phương trình có chứa dấu phần nguyên, ta thường đặt biểu thức $[f(x)]=t$ (t nguyên) để chuyển về giải bất phương trình không còn chứa dấu phần nguyên, rồi vận dụng định nghĩa và tính chất của phần nguyên để tìm ra nghiệm của bất phương trình.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Giải bất phương trình $[x+2]>5$.

Hướng dẫn giải

Cách 1. Nhận xét rằng $[a]>b$ (b nguyên) khi và chỉ khi $a\ge b+1$.

Ta có $[x+2]>5$ khi và chỉ khi $x+2\ge 6$. Do đó $x\ge 4$.

Cách 2. Đặt $[x+2]=t$ (t là số nguyên) thì có $t>5$. Do vậy $t\in\{6;7;8;...\}$.

Từ $[x+2]=t$ suy ra $t\le x+2<t+1$. suy ra $t-2\le x<t-1, t\in\{6;7;8;...\}$.

Vậy $x\ge 4$. Bất phương trình có vô số nghiệm $x\ge 4$.

Bài toán 2. Giải bất phương trình $2[x]^2-9[x+1]+16<0$.

Hướng dẫn giải

Ta có $[x+1]=[x]+1$. Biến đổi bất phương trình thành

$$2[x]^2-9[x]+7<0.$$

Đặt $\left[x\right]=t$ (t là số nguyên) thì có $2t^2-9t+7<0$ suy ra $1<t<3,5$ mà t nguyên nên $t\in\{2;3\}$.

Với $t=2$ thì $\left[x\right]=2$ suy ra $2\le x<3$.

Với $t=3$ thì $\left[x\right]=3$ suy ra $3\le x<4$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\left[2;4\right)$.

Bài toán 3. Giải bất phương trình $\left[2x\right]>\left[x\right]$.

Hướng dẫn giải

Cách 1. Đặt $\left[x\right]=t$ (t là số nguyên) thì $t\le x<t+1$ suy ra $2t\le 2x<2t+2$. Do đó $\left[2x\right]=2t$ hoặc $2t+1$.

- Với $\left[2x\right]=2t$ thì $0\le\{x\}<0,5$ và $2t>t\Leftrightarrow t>0$, mà t nguyên nên t là số nguyên dương. Dẫn đến $x\ge 1$.
- Với $\left[2x\right]=2t+1$ thì $0,5\le\{x\}<1$ và $2t+1>t\Leftrightarrow t>-1$, mà t nguyên nên t là số nguyên dương. Dẫn đến $x\ge 0$.

Kết hợp với $0,5\le\{x\}<1$ dẫn đến $x\ge 0,5$.

Cách 2. Nhận xét rằng $\left[a\right]>\left[b\right]$ khi và chỉ khi $a>b$ và $\left[a\right]\ne\left[b\right]$.

Ta có $\left[2x\right]>\left[x\right]\Leftrightarrow 2x>x$ và $\left[2x\right]\ne\left[x\right]\Leftrightarrow x>0$ và $\left[2x\right]\ne\left[x\right]$.

Trước hết ta tìm x sao cho $\left[2x\right]=\left[x\right]$.

Đặt $\left[2x\right]=\left[x\right]=t$ (t nguyên) ta có

$$|2x-x|<1\Leftrightarrow |x|<1 \text{ suy ra } 0<x<1 \text{ nên } \left[x\right]=0.$$

Với $t=0$ thì $\left[x\right]=\left[2x\right]=0$ suy ra $0\le 2x<1$ nên $0\le x<0,5$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x\ge 0,5$.

Bài toán 4. Giải bất phương trình $\left[x\right].\{x\}<x-1$

Hướng dẫn giải

Bất phương trình $\left[x\right].\{x\}<x-1$ tương đương với $\left[x\right].\{x\}<\left[x\right]+\{x\}-1$ hay

$$\left[x\right].\left(\{x\}-1\right)<\{x\}-1\Leftrightarrow\left(\left[x\right]-1\right)\left(\{x\}-1\right)<0.$$

Do $\{x\}-1<0$ nên $\left[x\right]>1$ hay $x\ge 2$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x\ge 2$

🗁 **Dạng 5: Phần nguyên trong chứng minh một số dạng toán số học**

*** Cơ sở phương pháp:** Phần nguyên được ứng dụng khá nhiều trong giải các bài toán số học về số tận cùng, chia hết, số nguyên tố….chúng ta cùng đến với các ví dụ cụ thể.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Cho $a>0$ và số n nguyên dương. Chứng minh rằng số các số nguyên dương là bội số của n và không vượt quá a là $\left[\frac{a}{n}\right]$.

Hướng dẫn giải

Ta viết $a=nq+r,$ trong đó q là số tự nhiên, $0\le r<n.$

Rõ ràng các bội số của n không vượt quá a là $n,2n,...,qn.$ tổng cộng có q số.

Mặt khác $\left[\frac{a}{n}\right]=q.$ Từ đó suy ra kết luận của bài toán.

Bài toán 2. Số $2012!$ có tận cùng bao nhiêu số 0?

Hướng dẫn giải

Vì $10=2.5$ nên để biết $2012!$ có tận cùng bằng bao nhêu chữ số 0, ta cần phải tính số mũ của 5 khi phân tích $2012!$ ra thừa số nguyên tố.

Theo **Ví dụ 1**, Số mũ của 5 khi phân tích $2012!$ ra thừa số nguyên tố bằng

$$\left[\frac{2012}{5}\right]+\left[\frac{2012}{5^2}\right]+\left[\frac{2012}{5^3}\right]+\left[\frac{2012}{5^4}\right]=402+80+16+3=501.\text{ (Do }2012<5^5\text{)}$$

Do mũ của 2 khi phân tích $2012!$ ra thừa số nguyên tố nhiều hơn 501.

Vậy $2012!$ Có tận cùng là 501 chữ số 0.

Nhận xét. Nếu $5^k\le n<5^{k+1}$ thì số chữ số 0 tận cùng về bên phải của số $n!$ bằng

$$\left[\frac{n}{5}\right]+\left[\frac{n}{5^2}\right]+...+\left[\frac{n}{5^k}\right].$$

Bài toán 2. Tìm số tự nhiên k lớn nhất sao cho $\left(2011!\right)^{2012}$ chia hết cho 2012^k.

Hướng dẫn giải

Ta có $2012=2^2.503.$

Số mũ cao nhất của 503 có trong 2011! Là

$$\left[\frac{2011}{503}\right]=3\text{ (do }2011<503^2\text{)}.$$

Vậy 2011! chia hết cho 503^3 và không chia hết cho 503^4, hiển nhiên 2011! chia hết cho 4^3. Do vậy 2011! chia hết cho 2012^3 và không chia hết cho 2012^4.

Muốn $\left(2011!\right)^{2012}$ chia hết cho 2012^k thì $k\le 3.2012=6036.$

Vậy $\max k=6036.$

Bài toán 3. Tìm số tự nhiên n sao cho

$$\left[\frac{n}{2010}\right]=\left[\frac{n}{2011}\right]=\left[\frac{n}{2012}\right].\ (1)$$

Hướng dẫn giải

Viết $n=2010k+r(0\le r\le 2009,k,r$ là có số tự nhiên). Thay vào (1) ta có

$$\left[\frac{2010k+r}{2010}\right]=\left[\frac{2011k+r-k}{2011}\right]=\left[\frac{2012k+r-2k}{2012}\right]$$

$$\Leftrightarrow k=k+\left[\frac{r-k}{2011}\right]=k+\left[\frac{r-2k}{2012}\right]\Leftrightarrow\left[\frac{r-k}{2011}\right]=\left[\frac{r-2k}{2012}\right]=0.$$

Suy ra $0\le r-2k$ nên $2k\le r\le 2009, 0\le k\le 1004.$

Vậy $n=2010k+r(0\le k\le 1004; 2k\le r\le 2009).$

Do có 105 giá trị của k (từ 0 đến 1004). Với một k thì r nhận các giá trị từ $2k$ đến 2009. Vậy sô nghiệm tự nhiên n của (1) là

$$\sum_{k=0}^{1004}\left(2010-2k\right)=1011030.$$

Bài toán 4. Tìm tất cả các số nguyên tố x sao cho

$$\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+...+\left[\sqrt{x^2-1}\right] \text{ là số nguyên tố.}$$

Hướng dẫn giải

Nhận xét

$$\left[\sqrt{n^2}\right]=\left[\sqrt{n^2+1}\right]=...=\left[\sqrt{(n+1)^2-1}\right]=n, n\in\mathbb{N}.$$

Đặt $S_n=\left[\sqrt{n^2}\right]+\left[\sqrt{n^2+1}\right]+...+\left[\sqrt{(n+1)^2-1}\right]=(2n+1)n=2n^2+n.$

Do đó $y=\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+...+\left[\sqrt{x^2-1}\right]=S_1+S_2+...+S_{x-1}=\dfrac{x\left(4x^2-3x-1\right)}{6}.$

Nên $6y=x\left(4x^2-3x-1\right)$, suy ra $6y\,\vdots\, x,$ mà x,y là các số nguyên tố suy ra $x\in\{2;3;y\}.$

Nếu $x=2$ thì $y=3$ (thỏa mãn); nếu $x=3$ thì $y=13$ (thỏa mãn); nếu $x=y$ thì $y=-1$ hoặc $y=\dfrac{7}{4}$ (loại).

Vậy bài toán có hai nghiệm $x=2$ và $x=3.$

Bài toán 5. Cho $a=2+\sqrt{3}.$

a) Tính $\left[a^2\right]$

b) Tính $\left[a^3\right]$

c) * Chứng minh rằng $\left[a^n\right]$ là số tự nhiên lẻ với mọi số n nguyên dương.

(Nâng cao phát triển lớp 9 tập 1 – Vũ Hữu Bình)

Hướng dẫn giải

a) *Cách 1* (tính trực tiếp)

$$a^2 = \left(2+\sqrt{3}\right)^2 = 7+4\sqrt{3}.$$

Ta có $6 < 4\sqrt{3} < 7$ nên $13 < a^2 < 14$. Vậy $\left[a^2\right] = 13$

Cách 2 (tính gián tiếp).

Ta có $a^2 = 7+4\sqrt{3}$. Đặt $b = 2-\sqrt{3}$ thì $b^2 = 7-4\sqrt{3}$. Suy ra

$$a^2 + b^2 = 14 \qquad (1)$$

Ta có $0 < b < 1$ nên $0 < b^2 < 1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $13 < a^2 < 14$. Vậy $\left[a^2\right] = 13$.

b) *Cách 1* (tính trực tiếp)

$$a^3 = \left(2+\sqrt{3}\right)^3 = 8+12\sqrt{3}+18+3\sqrt{3} = 26+15\sqrt{3}$$

Ta có $25 < 15\sqrt{3} < 26$ nên $51 < a^3 < 52$. Vậy $\left[a^3\right] = 51$

Cách 2 (tính gián tiếp).

Ta có $a^3 = 26+15\sqrt{3}$. Đặt $b = 2-\sqrt{3}$ thì $b^3 = 8-12\sqrt{3}+18-3\sqrt{3} = 26-15\sqrt{3}$ Suy ra

$$a^3 + b^3 = 52 \qquad (1)$$

Ta có $0 < b < 1$ nên $0 < b^3 < 1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $51 < a^3 < 52$. Vậy $\left[a^3\right] = 51$

c) Đặt $b = 2-\sqrt{3}$. Theo khai triển $\left(x+y\right)^n$, ta được

$a^n = \left(2+\sqrt{3}\right)^n = A + B\sqrt{3}$ với A, B là số tự nhiên

$b^n = \left(2-\sqrt{3}\right)^n = A - B\sqrt{3}.$

Suy ra $a^n + b^n = 2A$ (3)

Ta có $0 < b < 1$ nên $0 < b^n < 1$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $2A - 1 < a^n < 2A$. Vậy $\left[a^n\right] = 2A-1$, tức là $\left[a^n\right]$ là số lẻ.

Chú ý: Trong cách tính gián tiếp, để chứng tỏ $\left[a^n\right]$ là số nguyên m, ta chứng minh rằng $a^n + b^n = m+1$ và $0 < b^n < 1$, thế thì $m < a^n < m+1$, do đó $\left[a^m\right] = m.$

Cách khác:

Đặt $\begin{cases} x_1 = 2-\sqrt{3} \\ x_2 = 2+\sqrt{3} \end{cases}$, khi đó $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x_1, x_2$ là nghiệm của phương trình $x^2 - 4x + 1 = 0.$

Đặt $S_n = x_1^n + x_2^n$ Ta có:

$$x_1^2 - 4x_1 + 1 = 0 \Rightarrow x_1^{n+2} - 4x_1^{n+1} + x_1^n = 0 \qquad (1)$$
$$x_2^2 - 4x_2 + 1 = 0 \Rightarrow x_2^{n+2} - 4x_2^{n+1} + x_2^n = 0 \qquad (2)$$

Cộng (1) và (2) ta được: $S_{n+2} + 4S_{n+1} + S_n = 0 \qquad (3)$

Ta có $S_0 = 2, S_1 = 4$ nên từ (3) suy ra S_n là số nguyên chẵn với mọi $n \in N$. Ta có

$0 < 2-\sqrt{3} < 1$ nên $0 < x_1^n < 1 \Rightarrow x_2^n + \left(x_1^n - 1\right) < x_2^n < x_2^n + x_1^n \Rightarrow S_n - 1 < \left(2+\sqrt{3}\right)^n < S_n$

$\Rightarrow \left[\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right] = S_n - 1$ là số lẻ với mọi $n \in N$

🗁 Dạng 6: Chứng minh bất đẳng thức có chứa phần nguyên

*** Cơ sở phương pháp:** Để chứng minh các bất đẳng thức phần nguyên ta phải sử dụng linh hoạt các tính chất đã được nêu trong phần lý thuyết.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Chứng minh rằng

$$[x] + [y] \le [x+y].$$

(Nâng cao phát triển lớp 9 tập 1 – Vũ Hữu Bình)

Hướng dẫn giải

Cách 1. Ta có $[x] \le x$; $[y] \le y$ nên $[x] + [y] \le x + y$.

Suy ra $[x] + [y]$ là số nguyên không vượt quá $x + y \qquad (1)$

Theo định nghĩa phần nguyên, $[x+y]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá $x + y \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $[x] + [y] \le [x+y]$.

Cách 2. Theo định nghĩa phần nguyên, ta có

$$0 \le x - [x] < 1$$
$$0 \le y - [y] < 1$$

Suy ra $$0 \le (x+y) - ([x] + [y]) < 2.$$

Xét hai trường hợp:

- Nếu $0 \le (x+y) - ([x] + [y]) < 21$ thì
$$[x] + [y] = [x+y] \qquad (1)$$
- Nếu $1 \le (x+y) - ([x] + [y]) < 2$ thì $0 \le (x+y) - ([x] + [y] + 1) < 1$ nên
$$[x+y] = [x] + [y] + 1 \qquad (2)$$

Trong cả hai trường hợp ta đều có $[x] + [y] \le [x+y]$.

Bài toán 1. Cho $x, y \in R$ Chứng minh rằng

$$[2x]+[2y] \geq [x]+[y]+[x+y].$$

(Chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi toán THCS Số học – Nguyễn Vũ Thanh)

Hướng dẫn giải

Ta có: $[2x]=[2[x]+2\{x\}]=2[x]+[2\{x\}]$;

$[2y]=[2[y]+2\{y\}]=2[y]+[2\{y\}]$;

$[x+y]=[x]+[y]+[\{x\}+\{y\}]$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$[2\{x\}]+[2\{y\}] \geq [\{x\}+\{y\}] \qquad (1)$$

Vì $0 \leq \{x\}+\{y\} < 2$ nên ta có hai trường hợp sau:

● Nếu $0 \leq \{x\}+\{y\} < 1$ thì (1) luôn đúng đúng vì vế trai lớn hơn bằng 0, vế phải bằng 0.

● Nếu $1 \leq \{x\}+\{y\} < 2$ thì $[\{x\}+\{y\}]=1$ khi đó $\{x\} \geq \frac{1}{2}$ hoặc $\{y\} \geq \frac{1}{2}$. Giả sử

$\{x\} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow 2\{x\} \geq 1 \Rightarrow [2\{x\}]+[2\{y\}] \geq 1$ (đpcm)

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Tìm $[x]$ biết: $x-\frac{1}{3}<-2<x$

Bài 2: Tìm $[x]$ biết : $x<-5<x+0,5$

Bài 3: Tìm $[x]$ biết: $x=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+..+\frac{1}{\sqrt{10^6}}$.

Bài 4: Tìm phần nguyên của biểu thức :

$\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$, (với n dấu căn)

Bài 5 : Tìm phần nguyên của biểu thức :

$\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+.....+\sqrt[3]{6}}}$ (với n dấu căn)

Bài 6: Tính tổng sau:

$$S=\left[\sqrt{1.2.3.4}\right]+\left[\sqrt{2.3.4.5}\right]+\left[\sqrt{3.4.5.6}\right]+...+\left[\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)}\right]$$

Bài 7: Chứng minh rằng, với mọi số nguyên n ta có:

$$[n+x]=n+[x]$$

Bài 8: Chứng minh rằng, với mọi x,y ta có:

$[x] + [y] \leq [x+y] \leq [x] + [y] + 1$

Bài 9: Cho n là số nguyên dương, chứng minh:

$$\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n+1}{2}\right] = n$$

Bài 10: Cho n là số tự nhiên, chứng minh: $\left[\sqrt{4n+1}\right] = \left[\sqrt{4n+2}\right]$

Bài 11: Cho n là số tự nhiên, chứng minh: $\left[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right] = \left[\sqrt{4n+2}\right]$

Bài 12: Chứng minh rằng: $[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x]$, (với x là số thực bất kỳ)

Bài 13: Tính tổng: $S = \left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{2^2}\right] + \left[\frac{n+4}{2^3}\right] + \left[\frac{n+8}{2^4}\right] + \ldots + \left[\frac{n+1}{2^{2020}}\right]$

Bài 14: Chứng minh rằng: $m[x] \leq [mx] \leq m[x] + m - 1$ (với mọi giá trị m nguyên dương)

Bài 15: Chứng minh rằng : Không tồn tại x thoả mãn:

$$[x] + [2x] + [3x] + \ldots + [100x] = 313096$$

Bài 16: Giải phương trình: $[x + 0{,}7] = -4$

Bài 17: Giải phương trình: $[x+1] + [x+2] + [x+3] = 4$

Bài 18: Giải phương trình $4[x] = 3x$

Bài 19: Giải phương trình: $\left[\frac{5+6x}{8}\right] = \frac{15x-7}{5}$

Bài 20: Giải phương trình: $\left[\frac{2x-1}{3}\right] + \left[\frac{4x+1}{6}\right] = \frac{5x-4}{3}$

Bài 21: Giải phương trình: $[x].\{x\} = x - 1$

Bài 22: Giải phương trình: $x - 3\left[\frac{x}{2}\right] = 2$

Bài 23: Giải phương trình: $[x-1] = \left[\frac{x}{2} + 1\right]$

Bài 24: Giải phương trình: $x^4 = 2x^2 + [x]$

Bài 25: Giải phương trình: $x^3 - [x] = 3$

Bài 26: Giải phương trình: $\left[-x^2 + 3x\right] = \left[x^2 + \frac{1}{2}\right]$

Bài 27: Với k > 3, Chứng minh rằng $\left[\frac{2n}{k}\right] \geq \left[\frac{n}{k}\right] + \left[\frac{n+2}{k}\right]$.

Bài 28: Cho $n, k_1, k_2, \ldots, k_n \in N^*$. Chứng minh rằng:

$$\left[\frac{k_1 + k_2 + \ldots + k_n}{n}\right] + (n-1) \leq k_1 + k_2 + \ldots + k_n.$$

Bài 29 : Chứng minh rằng nếu r là số dư trong phép chia a cho số nguyên dương b thì

$$r = a - b\left[\frac{a}{b}\right]$$

Bài 30: Cho $n \in N$, chứng minh $[na] \geq n[a]$. Đặt biệt khi $\{a\} < \frac{1}{n}$ thì $[na] = n[a]$

Bài 30: Cho $n \in N^*$, chứng minh $[na] \geq n[a]$. Đặt biệt khi $\{a\} < \frac{1}{n}$ thì $[na] = n[a]$

Bài 31: a) Tính tổng sau: $S = \left[\sqrt{1}\right] + \left[\sqrt{2}\right] + \left[\sqrt{3}\right] + ... + \left[\sqrt{24}\right]$

b) Cho $n \in N^*$ và $n \geq 2$. Tính tổng : $A = \left[\sqrt{1}\right] + \left[\sqrt{2}\right] + ... + \left[\sqrt{n^2 - 1}\right]$.

Bài 32: Tính phần nguyên của $T = \sqrt{2} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \sqrt[4]{\frac{4}{3}} + ... + \sqrt[n+1]{\frac{n+1}{n}}$

Bài 33: Với $n \in N^*$, chứng minh rằng:

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + ... + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx].$$

Bài 34 : Tính tổng : $A = \left\{\frac{0.a + b}{m}\right\} + \left\{\frac{1.a + b}{m}\right\} + ... + \left\{\frac{(m-1).a + b}{m}\right\}$

Trong đó $a, m \in N^*$ và $(a, m) = 1, b \in Z$.

Bài 35 : Cho m, n là hai số tự nhiên lẻ và nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng :

$$\left[\frac{m}{n}\right] + \left[\frac{2m}{n}\right] + ... + \left[\frac{(n-1)m}{n}\right] + \left[\frac{n}{m}\right] + \left[\frac{2n}{m}\right] + ... + \left[\frac{(m-1)n}{m}\right] = \frac{(m-1)(n-1)}{2}.$$

Bài 36 : Tìm hai chữ số tận cùng của số $\left[\left(\sqrt{29} + \sqrt{21}\right)^{2000}\right]$

Bài 37 : Tính đúng $S = \left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{2^2}\right] + ... + \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] + ...$

(Thi toán Quốc tế năm 1968)

Bài 38 : Chứng minh rằng không tồn tại số thực *x* thỏa mãn :

$$[x] + [2x] + [4x] + [8x] + [16x] + [32x] = 12345.$$

Bài 39 : Tìm $n \in N^*$ thỏa mãn $[n]$ là ước của n.

Bài 40 : Giải phương trình : $1 - |x+1| = \frac{[x] - x}{|x-1|}$

Bài 41 : Với mỗi số thực a ta gọi phần nguyên của a là số nguyên lớn nhất không vượt quá a và ký hiệu là $[a]$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, biểu thức $n+\left[\sqrt[3]{n-\frac{1}{27}}+\frac{1}{3}\right]^2$ không biểu diễn được dưới dạng lập phương của một số nguyên dương.

(Trích đề vào 10 Chuyên Khoa Học tự nhiên Hà Nội năm 2011-2012)

Bài 42: Với mỗi số thực a, ta gọi phần nguyên của số a là số nguyên lớn nhất không vượt quá a và ký hiệu là [a]. Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương ta luôn có.

$$\left[\frac{3}{1.2}+\frac{7}{2.3}+...\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}\right]=n$$

(Trích đề vào 10 Chuyên Khoa Học tự nhiên Hà Nội năm 2010-2011)

CHỦ ĐỀ 8

NGUYÊN LÝ DIRICHLET TRONG SỐ HỌC

A. Kiến thức cần nhớ

1. Giới thiệu nguyên lý Dirichlet

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet

Dirichlet (Đi-rích-lê) (1805 – 1859) là nhà toán học người Đức, được cho là người đưa ra định nghĩa hiện đại về hàm số. Trên cơ sở quan sát thực tế, ông đã phát biểu thành một nguyên lí mang tên ông – nguyên lí Dirichlet: *Không thể nhốt 7 con thỏ vào 3 cái lồng mà mỗi cái lồng có không quá 2 con thỏ*. Nói cách khác, *nếu nhốt 7 con thỏ vào 3 cái lồng thì tồn tại ít nhất một lồng có từ 3 con trở lên*. Một cách tổng quát hơn, **nếu có k lồng để nhốt m con thỏ (với $k = kn + r\ (0 < r \le k-1)$) thì tồn tại ít nhất một lồng có chứa từ n + 1 con thỏ trở lên.**

Ta cũng có thể dễ dàng chứ minh nguyên lí Dirichet bằng phương pháp phản chứng như sau: Giả sử không có một lồng nào chứ n + 1 con thỏ trở lên, tức là mỗi lồng chứa nhiều nhất n con thỏ, thì số con thỏ chứa trong k lồng nhiều nhất chỉ có thể là kn con. Điều này mâu thuẫn với giả thiết có m con thỏ với $m = kn + r\ (0 < r \le k-1)$.

Nguyên lí Dirichlet thật đơn giản, dễ hiểu nhưng được vận dụng vào giải rất nhiều bài toán trong số học, đại số, hình học về việc chỉ ra sự tồn tại của một hay nhiều đối tượng thỏa mãn một điều kiện đặt ra.

Khi sử dụng nguyên lí Dirichlet vào bài toán cụ thể, điều quan trọng là phải nhận ra (hay tạo ra) *Lồng* hoặc *Thỏ* hoặc cả *Lồng* và *Thỏ*.

2. Một số dạng áp dụng của nguyên lý Dirichlet

• **Nguyên lý Dirichlet cơ bản:** Nếu nhốt $n+1$ con thỏ vào n cái chuồng thì bao giờ cũng có một chuồng chứa ít nhất hai con thỏ.

• **Nguyên lý Dirichlet tổng quát:** Nếu có N đồ vật được đặt vào trong k hộp thì sẽ tồn tại một hộp chứa ít nhất $\left[\frac{N}{k}\right]$ đồ vật. (Ở đây $\left[x\right]$ là số nguyên nhỏ nhất có giá trị nhỏ hơn hoặc bằng x)

• **Nguyên lí Dirichlet mở rộng:** Nếu nhốt n con thỏ vào $m \ge 2$ cái chuồng thì tồn tại một chuồng có ít nhất $\left[\frac{n+m-1}{m}\right]$ con thỏ.

• **Nguyên lí Dirichlet dạng tập hợp:** Cho A và B là hai tập hợp khác rỗng có số phần tử hữu hạn, mà số lượng phần tử của A lớn hơn số lượng phần tử của B. Nếu với một quy tắc nào đó, mỗi phần tử của A cho tương ứng với một phần tử của B, thì tồn tại ít nhất hai phần tử khác nhau của A mà chúng tương ứng với một phần tử của B.

3. Phương pháp ứng dụng.

Nguyên lí Dirichlet tưởng chừng như đơn giản như vậy, nhưng nó là một công cụ hết sức có hiệu quả dùng để chứng minh nhiều kết quả hết sức sâu sắc của toán học. Nguyên lí Dirichlet cũng được áp dụng cho các bài toán của hình học, điều đó được thể hiện qua hệ thống bài tập sau:

Để sử dụng nguyên lý Dirichlet ta phải làm xuất hiện tình huống nhốt "thỏ" vào "chuồng" và thoả mãn các điều kiện:

+ Số 'thỏ" phải nhiều hơn số chuồng.

+ "Thỏ" phải được nhốt hết vào các "chuồng", nhưng không bắt buộc chuồng nào cũng phải có thỏ.

Thường thì phương pháp Dirichlet được áp dụng kèm theo phương pháp phản chứng. Ngoài ra nó còn có thể áp dụng với các nguyên lý khác. Một số bài toán cơ bản thường gặp như sau:

1) Trong $n+1$ số tự nhiên bất kì luôn tìm được hai số chia cho n có cùng số dư (hoặc hiệu của chúng chia hết cho n).
2) Nếu trên một đoạn thẳng độ dài 1 đặt một số đoạn thẳng có tổng độ dài lớn hơn 1 thì có ít nhất hai trong số các đoạn thẳng đó có điểm chung.
3) Nếu trên đường tròn có bán kính 1 đặt một số cung có tổng độ dài lớn hơn 2π thì có ít nhất hai trong số các cung đó có điểm chung.
4) Trong một hình có diện tích S đặt một số hình có tổng diện tích lớn hơn S thì có ít nhất hai trong số các hình đó có điểm chung.

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

🗁 **Dạng 1: Chứng minh sự tồn tại chia hết**

*** Cơ sở phương pháp:**

Thông thường ta coi m số tự nhiên đã cho là m "con thỏ", các số dư trong phép chia các số tự nhiên đó cho n là những "lồng"; như vậy sẽ có n cái lồng: lồng i $(0 \le i \le b)$ gồm những số tự nhiên đã cho chia cho n dư i.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Chứng minh rằng:

a) Trong 2012 số tự nhiên bất kì luôn tìm được hai số chia cho 2011 có cùng số dư (hay hiệu của chúng chia hết cho 2011).

b) Trong 2012 sô tự nhiên bất kì luôn tìm được một số chia hết cho 2012 hoặc luôn tìm được hai số chia cho 2012 có cùng số dư.

Hướng dẫn giải

a) Ta coi 2012 số tự nhiên đã cho là 2012 "con thỏ"; "lồng i" gồm các số chia cho 2011 dư i $(0 \le i \le 2011)$ nên có 2011 lồng: lồng 0, lồng 1, …, lồng 2010. Như vậy có 2011 lồng chứa 2012 con thỏ nên theo nguyên lí Dirchlet tồn tại ít nhất một lồng chứa không ít hơn hai con thỏ, tức là có ít nhất hai số chia cho 2011 có cùng số dư.

b) Nếu trong 2012 số đã cho có ít nhất một số chia hết cho 2012 thì ta chọn luôn số này. Nếu không có số nào chia hết cho 2012 thì khi chia cho 2012 nhận nhiều nhất 2012 số dư khác nhau là 1, 2, …, 2011. Theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại ít nhất hai số chia cho 2012 có cùng số dư.

Nhận xét. Ta có thể tổng quát bài toán trên như sau:

1) Trong n + 1 số tự nhiên bất kì luôn tìm được hai số chia cho n có cùng số dư (hay hiệu của chúng chia hết cho n).

2) Trong n số tự nhiên bất kì luôn tìm được một số chia hết cho n hoặc luôn tìm được hai số chia cho n có cùng số dư.

Bài toán 2. Chứng minh rằng luôn tìm được số có dạng 20122012…2012 (gồm các số 2012 viết liên tiếp nhau) chia hết cho 2013.

Hướng dẫn giải

Xét 2014 số sau: 2012, 20122012, ..., 2012...2012 (gồm 2014 bộ số 2102).

Đem 2014 số này lần lượt chia cho 2013, có 2014 số mà chỉ có 2013 số dư trong phép chia cho 2013 (là 0, 1, 2, ..., 2012) nên luôn tồn tại hai số chia cho 2013 có cùng số dư, chẳng hạn đó là a = 2012...2012 (gồm i bộ 2012) và b = 2012...2012 (gồm j bộ 2012) với $1 \le i \le j \le 2014$. Khi đó

$b - a = 2012...2012.10^{4i}$ (gồm j – i bộ 2012) sẽ chia hết cho 2013.

Lại có ƯCLN$(10^{4i}, 2013) = 1$ nên số 2012...2012 (gồm j – i bộ 2012 sẽ chia hết cho 2013. Bài toán được chứng minh.

(Ở đây "thỏ" là số có dạng 2012...2012, "lồng" là số dư trong phép chia cho 2013).

Nhận xét. Mấu chốt của bài toán là chọn ra 2014 (= 2013 + 1) số tự nhiên có dạng đã cho. Từ đó ta có thể phát biểu nhiều bài toán tương tự, chẳng hạn như: Chứng minh rằng luôn tìm được số có dạng 111...1 chia hết cho 29.

Bài toán 3. Cho sáu số tự nhiên a,b,c,d,e,g. Chứng minh rằng trong sáu số ấy, tồn tại một số chia hết cho 6 hoặc tồn tại một vài số có tổng chia hết cho 6.

Hướng dẫn giải

Trường hợp có một số bằng 0 thì ta chọn số 0 thỏa mãn yêu cầu đề ra.

Trường hợp sáu số đều lớn hơn 0. Xét 6 số sau

$$S_1 = a$$
$$S_2 = a+b$$
$$S_3 = a+b+c$$
$$S_4 = a+b+c+d$$
$$S_5 = a+b+c+d+e$$
$$S_6 = a+b+c+d+e+g.$$

Đem mỗi số này chia cho 6 ta nhận được số dư thuộc tập $\{0,1,2,3,4,5\}$.

Nếu tồn tại $S_i (i=1,2,...,6)$ chia hết cho 6 thì bài toán đã được chứng minh.

Nếu không có S_i nào chia hết cho 6 thì ta có 6 số chia hết cho 6 chỉ nhận 5 loại số dư khác nhau $(1,2,3,4,5)$; theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai số chia cho 6 có cùng số dư, chẳng hạn S_2 và S_5 do đó hiệu của hai số này sẽ chia hết cho 6, tức là $c+d+e$ chia hết cho 6. Bài toán đã được chứng minh.

(Ở đây "thỏ" là các số S_i, "lồng" là số dư trong phép chia cho 6).

Nhận xét. Ta có thể phát biểu bài toán tổng quát sau:

Cho n số tự nhiên $a_1, a_2, ..., a_n$. Chứng minh rằng tồn tại một số chia hết cho n hoặc tồn tại một vài số có tổng chia hết cho n.

Bài toán 4. Chứng minh rằng:

a) Trong n số tự nhiên liên tiếp luôn tìm được một số chia hết cho n.

b) Trong 39 số tự nhiên liên tiếp luôn tìm được một số mà tổng các chữ số của nó chia hết cho 11.

Hướng dẫn giải

a) Giả sử không tìm được số nào trong n số tự nhiên liên tiếp đã cho mà chia hết cho n. Khi đó n số này chia cho n chỉ nhận được nhiều nhất là n – 1 số dư khác nhau $(1,2,3,...,n-1)$, theo nguyên lí Dirichlet tồn tại hai số chia hết cho n có cùng số dư, chẳng hạn là a và b với $a>b$, khi đó a – b chia hết cho n, điều này mâu thuẫn với $0<a-b<n$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

b) Lấy 20 số tự nhiên liên tiếp đầu của dãy, ta luôn tìm được một số có chữ số hàng đơn vị là 0 và có chữ số hàng chục khác 9.Giả sử đó là N và tổng các chữ số của N là s. Khi đó 11 số $N, N+1, N+2, N+3, ...N+9, N+19$ sẽ nằm trong 39 số đã cho. Vì N tận cùng bằng 0 nên tổng các chữ số của $N, N+1, N+2, ..., N+9$ lần lượt bằng $s, s+1, s+2, ..., s+9$. Vì N tận cùng bằng 0 và có chữ số hàng chục khác 9 nên tổng các chữ số của N + 10 bằng s + 1, tổng các chữ số của N + 19 bằng s + 10.

Trong 11 số tự nhiên liên tiếp $s, s+1, s+2, s+3, ..., s+9, s+10$ luôn tìm được một số chia hết cho 11. Chẳng hạn số đó là $s+i(0 \le i \le 10)$: Nếu $0 \le i \le 9$ thì ta chọn được số $N+i$ thỏa mãn yêu cầu bài toán; nếu i = 10 thì ta chọn được số N + 19 thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nhận xét. Mấu chốt để giải bài toán câu b) là phải tìm ra 11 số trong 39 số đã cho có tổng các chữ số thứ tự là 11 số tự nhiên liên tiếp, đồng thời sử dụng kết quả câu a).

Bài toán 5. Cho các số tự nhiên từ 1 đến 2012. Hỏi có thể chọn ra được nhiều nhất bao nhiêu số sao cho tổng của hai số bất kì trong chúng không chia hết cho hiệu của nó?

Hướng dẫn giải

Nhận thấy, nếu hai số chia cho 3 cùng dư 2 thì hiệu của chúng chia hết cho 3, còn tổng của chúng chia cho 3 dư 1; nên tổng của chúng không chia hết cho hiệu của chúng.

Trong các số tự nhiên từ 1 đến 2012, sẽ có 671 số chia cho 3 dư 2 là các số có dạng $3k+2$ $(k = 0, 1, 2, ..., 670)$. Khi đó hai số bất kì trong 671 số này có tổng chia 3 dư 1, hiệu chia hết cho 3, nên tổng không chia hết cho hiệu của chúng. Ta sẽ chứng minh rằng chọn được nhiều nhất $672(=671+1)$ số trong các số từ 1 đến 2012, thì trong 672 số này luôn tìm được $a, b(a > b)$ sao cho $a - b \le 2$ (Thật vậy, giả sử ngược lại thì hiệu giữa số nhỏ nhất và số lớn nhất trong các số đã chọn sẽ không nhỏ hơn $3.671 = 2013$. Điều này mâu thuẫn giả thiết với hiệu giữa số lớn nhất và số nhỏ nhất không vượt quá $2012 - 1 = 2011$), nghĩa là a – b bằng 1 hoặc 2.

- Nếu a – b = 1 thì hiển nhiên a + b chia hết cho a – b (= 1)
- Nếu a – b = 2 thì a + b là số chẵn nên a + b chia hết cho a – b (= 2).

Như vậy từ 2012 số đã cho không thể chọn được hơn 671 số thỏa mãn điều kiện bài toán. Suy ra số lượng lớn nhất các số phải tìm là 671.

🗁 Dạng 2: Bài toán về tính chất các phần tử trong tập hợp

*** Cở sở phương pháp:** Thông thường ta phải lập ra những tập hợp có tính chất cần thiết rồi sử dụng nguyên lí Dirichlet để chứng tỏ có hai phần tử thuộc hai tập hợp bằng nhau.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Cho sáu số nguyên dương đôi một khác nhau và đều nhỏ hơn 10. Chứng minh rằng luôn tìm được 3 số trong đó có một số bằng tổng hai số còn lại.

Hướng dẫn giải

Gọi sáu số nguyên dương đã cho là $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ với $0 < a_1 < a_2 < ... < a_6 < 10$.

Đặt $A = \{a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ gồm 5 phần tử có dạng a_m với $m \in \{2,3,4,5,6\}$.

Đặt $B = \{a_2 - a_1, a_3 - a_1, a_4 - a_1, a_5 - a_1, a_6 - a_1\}$ gồm 5 phần tử có dạng $a_n - a_1$ với $n \in \{2,3,4,5,6\}$.

Ta thấy các phần tử của hai tập hợp A và B đều thuộc tập hợp gồm 9 phần tử $\{1,2,3,...,9\}$ trong khi tổng số phần tử của hai tập hợp A và B là $5+5=10$.

Theo nguyên lí Dirichlet tồn tại hai số bằng nhau mà chúng không thể thuộc cùng một tập hợp, nên có một số thuộc tập hợp A bằng một số thuộc tập hợp B, tức là $a_m = a_n - a_1$, do đó $a_n = a_m + a_1$.

Ba số a_m, a_n, a_1 đôi một khác nhau. Thật vậy, $a_m \neq a_n$ vì nếu $a_m = a_n$ thì $a_1 = 0$ trái với giả thiết của bài toán.

Vậy tồn tại ba số a_m, a_n, a_1 trong các số đã cho mà $a_n = a_m + a_1$ (đpcm).

(Ở đây, có 10 "thỏ" là 10 số $a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_2 - a_1, a_3 - a_1, a_4 - a_1, a_5 - a_1, a_6 - a_1$ và có 9 "lồng" là 9 số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).

Nhận xét. Để giải bài toán này, ta cần tạo ra hai tập hợp gồm các phần tử nhỏ hơn 10 và tổng số phần tử của hai tập hợp phải không nhỏ hơn 10. Từ đó suy ra tồn tại hai phần tử của hai tập hợp bằng nhau.

Bài toán 2. Cho X là tập hợp gồm 700 số nguyên dương khác nhau, mỗi số không lớn hơn 2006. Chứng minh rằng trong tập hợp X luôn tìm được hai phần tử x, y sao cho x – y thuộc tập hợp $E = \{3; 6; 9\}$.

Hướng dẫn giải

Giả sử 700 số nguyên dương đã cho là $a_1, a_2, ..., a_{700}$. Ta xét các tập hợp sau:

$A = \{a_1, a_2, ...a_{700}\}$;

$B = \{a_1 + 6, a_2 + 6, ...a_{700} + 6\}$;

$C = \{a_1 + 9, a_2 + 9, ...a_{700} + 9\}$;

Tổng số phần tử của ba tập hợp A, B, C là 700.3 = 2100, trong đó mỗi phần tử đều không vượt quá 2006 + 9 = 2015, mà 2100 > 2015 nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại hai phần tử bằng nhau. Vì mỗi tập hợp A, B, C có các phần tử đôi một khác nhau nên hai phần tử bằng nhau đó phải thuộc hai tập hợp: A và B, hoặc A và C, hoặc B và C.

- Nếu hai phần tử thuộc A và B, chẳng hạn $a_i = a_j + 6$ suy ra $a_i - a_j = 6$.
- Nếu hai phần tử thuộc A và C, chẳng hạn $a_i = a_j + 9$ suy ra $a_i - a_j = 9$.
- Nếu hai phần tử thuộc B và C, chẳng hạn $a_i + 3 = a_j + 6$ suy ra $a_i - a_j = 3$.

Như vậy luôn tồn lại hai số thuộc tập hợp A có hiệu là 3, 6, 9. Ta được điều phải chứng minh.

(Ở đây 2100 "thỏ" là 2010 phần tử của ba tập hợp A, B, C; 2015 "lồng" là các số từ 1 đến 2015)

Nhận xét. Ta còn có kết quả mạnh hơn như sau:

Cho X là tập hợp gồm 505 số nguyên dương khác nhau, mỗi số không lớn hơn 2006. Trong tập hợp X luôn tìm được hai phần tử x, y sao cho x – y thuộc tập hợp $E = \{3; 6; 9\}$.

Chứng minh.

Gọi A là tập hợp các số thuộc X mà chia hết cho 3, gọi B là tập hợp các số thuộc X mà chia cho 3 dư 1, gọi C là tập hợp các số thuộc X mà chia cho3 dư 2.

Có 505 số xếp vào ba tập hợp, mà 505 = 3.168 + 1 nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại một tập hợp có chứa từ 169 số trở lên.

Trong tập hợp này, hai số bất kì có hiệu là một bội của 3. Tồn tại hai số x, y có hiệu nhỏ hơn 12. Thật vậy, nếu mọi số trong tập hợp này đều có hiệu không nhỏ hơn 12 thì số lớn nhất trong tập hợp không nhỏ hơn 12.168 = 2016 > 2006, trái với đề bài.

Vậy trong tập hợp X tồn tại hai phần tử x, y mà $x - y \in E$.

Bài toán 3. Cho hai tập hợp số nguyên dương phân biệt mà mỗi số đều nhỏ hơn n. Chứng minh rằng nếu tổng số phần tử của hai tập hợp không nhỏ hơn n thì có thể chọn được trong mỗi tập hợp một phần tử sao cho tổng của chúng bằng n.

Hướng dẫn giải

Giả sử hai tập hợp số nguyên dương đã cho là

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_m\} \text{ và } B = \{b_1, b_2, ..., b_k\}$$

với $a < n$ $(i = 1, 2, ..., m)$, $b_j < n$ $(j = 1, 2, ..., k)$ và $m + l \ge n$.

Xét tập hợp $C = \{n - b_1, n - b_2, ..., n - b_k\}$.

Nhận thấy, có tất cả n – 1 số nguyên dương phân biệt nhỏ hơn n, các phần tử của A và C đều nhỏ hơn n và tổng số các phần tử của A và C không nhỏ hơn n. Theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại ít nhất hai phần tử bằng nhau, chúng không cùng thuộc A và C, do đó một phần tử thuộc A và một phần tử thuộc C, tức là tồn tại hai số a_p và $n - b_q$ mà $a_p = n - b_q \Leftrightarrow a_p + b_q = n$ (điều phải chứng minh).

(Ở đây coi m + k "thỏ" là các số nguyên dương thuộc tập hợp A hoặc C, n – 1 "lồng" là các số nguyên dương từ 1 đến n – 1).

Dạng 3: Bài toán liên quan đến bảng ô vuông

*** Cở sở phương pháp:** Một bảng vuông kích thước n x n gồm n dòng, n cột và 2 đường chéo. Mỗi dòng, mỗi cột, mỗi đường chéo đều có n ô vuông.

Một bảng các ô vuông kích thước m x n gồm m dòng và n cột.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Cho một mảng ô vuông kích thước 5 x 5. Người ta viết vào mỗi ô của bảng một trong các số -1, 0, 1; sau đó tính tổng của các số theo từng cột, theo từng dòng và theo từng đường chéo. Chứng minh rằng trong tất cả các tổng đó luôn tồn tại hai tổng có giá trị bằng nhau.

Hướng dẫn giải

Bảng ô vuông kích thước 5 x 5 có 5 dòng, 5 cột, 2 đường chéo nên sẽ có 12 tổng của các số được tính theo dòng, theo cột và theo đường chéo. Mỗi dòng, cột và đường chéo đều có ghi 5 số thuộc tập {–1; 0; 1}. Vì vậy giá trị mỗi tổng thuộc tập hợp {–5; –4; –3; –2; –1; 0; 1; 2; 3; 4; 5} có 11 phần tử. Có 12 tổng nhận trong tập 11 các giá trị khác nhau nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất hai tổng nhận cùng một giá trị. Bài toán được chứng minh.
(Ở đây "thỏ" là tổng nên có 12 "thỏ", "lồng" là giá trị của tổng nên có 11 "lồng").

Nhận xét. Với cách giải tương tự, ta có bài toán tổng quát sau:
Cho một bảng ô vuông kích thước n x n. Người ta viết vào mỗi ô của bảng một trong các số –1, 0, 1; sau đó tính tổng của các số theo từng cột, theo từng dòng và theo từng đường chéo. Chứng minh rằng trong tất cả các tổng đó luôn tồn tại hai tổng có giá trị bằng nhau.

Bài toán 2. Trên bảng ô vuông kích thước 8 x 8, ta viết các số tự nhiên từ 1 đến 64, mỗi số viết vào một ô một cách tùy ý. Chứng minh rằng luôn tồn tại hai ô vuông chung cạnh mà hiệu các số ghi trong chúng không nhỏ hơn 5.

Hướng dẫn giải

Ta xét hàng có ô ghi số 1 và cột có ô ghi số 64. Hiệu giữa hai ô này là 63.
Số cặp ô kề nhau từ ô ghi số 1 đến ô ghi số 64 nhiều nhất là 14 (gồm 7 cặp ô chung cạnh tính theo hàng và 7 cặp ô chung cạnh tính theo cột).
Ta có 64 = 14.4 + 7 nên theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại ít nhất hai ô kề nhau mà hai số ghi trên đó có hiệu không nhỏ hơn 4 + 1 = 5. Bài toán được chứng minh.
(Ở đây, "thỏ" là hiệu của hai số trong 64 số (từ 1 đến 64) nên có 63 thỏ; "lồng" là số cặp ô vuông kề nhau từ ô ghi số 1 đến ô ghi số 64 nên có nhiều nhất là 14 lồng).

Nhận xét.

- Mấu chốt của bài toán là quan tâm đến hai ô vuông ghi số nhỏ nhất (số 1) và số lớn nhất (số 64) sẽ có hiện lớn nhất là 63; đồng thời xét từ ô ghi số 1 đến ô ghi số 64 chỉ cần tối đa là (8 – 1) + (8 – 1) = 14 ô. Ở đây ta đã vận dụng nguyên lí Dirichlet tổng quát: Có m thỏ, nhốt vào k lồng mà m = kn + r $(1 \le r \le k-1)$ thì tồn tại ít nhất một lồng chứa không ít hơn n + 1 con thỏ.
- Nếu thay bởi bảng chữ nhật gồm 8 x 10 ô vuông, trên đó ghi các số từ 1 đến 80 không lặp một cách tùy ý thì kết quả cầu bài toán còn đúng hay không? Hãy chứng minh.

🗁 **Dạng 4: Bài toán liên quan đến thực tế**

Cở sở phương pháp: Khi chứng minh sự tồn tại một số đối tượng thỏa mãn điều kiện nào đó, ta thường sử dụng nguyên lí Dirichlet.
Điều quan trọng nhất là phải xác định được "thỏ" và "lồng".

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Một tổ học tập có 10 học sinh. Khi viết chính tả, cả tổ đều mắc lỗi, trong đó bạn Bình mắc nhiều lỗi nhất (mắc 5 lỗi). Chứng minh rằng trong tổ ấy có ít nhất 3 bạn đã mắc một số lỗi bằng nhau.

Hướng dẫn giải

Ta coi "thỏ" là học sinh (trừ bạn Bình) nên có 9 thỏ; "lồng" là số lỗi chính tả học sinh mắc phải nên có 4 lồng: lồng i gồm những học sinh mắc i lỗi (i = 1, 2, 3, 4). Có 9 thỏ nhốt vào 4 lồng, mà 9 = 4.2 + 1, nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất một lồng chứa không ít hơn 2 + 1 = 3 thỏ, tức là có ít nhất 3 bạn mắc một số lỗi bằng nhau.

Bài toán 2. Ở một vòng chung kết cờ vua có 8 đấu thủ tham gia. Mỗi đấu thủ đều phải gặp đủ 7 đấu thủ còn lại, mỗi người một trận. Chứng minh rằng, trong mọi thời điểm giữa các cuộc đấu, bao giờ cũng có hai đấu thủ đã đấu một số trận như nhau.

Hướng dẫn giải

Ta coi "thỏ" là đấu thủ nên có 8 thỏ; "lồng" là số trận đấu của đấu thủ nên có 8 lồng: "lồng i" gồm các đấu thủ đã thi đấu i trận (với i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7).

Ta thấy lồng 0 và lồng 7 không đồng thời tồn tại, vì nếu có một đấu thủ chưa đấu trận nào thì sẽ không có đấu thủ nào đã đấu đủ 7 trận, cũng như nếu có đấu thủ đã đấu đủ 7 trận thì không có ai chưa đấu trận nào.

Như vậy, có 7 lồng chứa 8 con thỏ nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại một lồng chứa không ít hơn 2 con thỏ, tức là trong mọi thời điểm giữa các cược đấu luôn tìm được 2 đấu thủ đã đấu dùng một số trận.

Bài toán 3. Có 6 nhà khoa học viết thư trao đổi với nhau về một trong hai đề tài: bảo vệ môi trường và chương trình dân số. Chứng minh rằng có ít nhất ba nhà khoa học cùng trao đổi về một đề tài.

Hướng dẫn giải

Gọi 6 nhà khoa học là A, B, C, D, E, F.

Nhà khoa học A sẽ viết thư trao đổi với 5 nhà khoa học còn lại về 2 đề tài, có $5 = 2.2 + 1$ nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất 3 nhà khoa học (chẳng hạn B, C, D) được nhà khoa học A trao đổi về cùng một đề tài (chẳng hạn đề tài môi trường).

Trong ba nhà khoa học B, C, D nếu có hai người nào cũng trao đổi về đề bài môi trường (chẳng hạn B, C) thì ta chọn được A, B, C cùng trao đổi về một đề tài.

Nếu trong ba nhà khoa học B, C, D không có hai người nào trao đổi về đề tài môi trường thì họ sẽ trao đổi với nhau về đề tài dân số, ta sẽ chọn được B, C, D cùng trao đổi một đề tài.

(Ở đây coi nhà khoa học (trừ A) là "thỏ" nên có 5 thỏ, coi đề tài là "lồng" nên có 2 lồng và vận dụng nguyên lí Dirichlet tổng quát).

🗁 Dạng 5: Bài toán liên quan đến sự sắp xếp

*** Cơ sở phương pháp:** Các bài toán về sắp xếp chỗ, phân công việc không đòi hỏi nhiều về kiến thức và kĩ năng tính toán, chúng chủ yếu kết hợp suy luận lôgic để xét các khả năng có thể xảy ra với nguyên lí Dirichlet.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Có 20 người quyết định đi bơi thuyền bằng 10 chiếc thuyền đôi. Biết rằng nếu hai người A và B mà không quen nhau thì tổng số những người quen của A và những người quen của B không nhỏ hơn 19. Chứng minh rằng có thể phân công vào các thuyền đôi sao cho mỗi thuyền đều là hai người quen nhau.

Hướng dẫn giải

Nếu trong 20 người không có hai người nào quen nhau thì tổng số người quen của hai người bất kì là 0. Điều này mâu thuẫn với giả thiết là tổng số người quen của hai người không nhỏ hơn 19. Vậy tồn tại một số cặp quen nhau.

Ta xếp mỗi cặp quen nhau đó vào một thuyền đôi. Gọi k là số lượng thuyền lớn nhất mà trong đó ta có thể xếp được những cặp quen nhau vào một thuyền và kí hiệu thuyền thứ i xếp hai người A_i và B_i quen nhau $(1 \le i \le k)$.

Giả sử $k \le 9$, kí hiệu tập hợp M gồm những người chưa được xếp vào thuyền nào, tức là gồm những người đôi một không quen nhau. Chọn hai người A và B trong tập hợp M. Theo bài ra thì tổng số người quen của A và số người quen của B không nhỏ hơn 19 và những người quen A hoặc quen B đã được xếp vào thuyền rồi. Như vậy có 19 người quen hệ quen A hoặc B được xếp vào nhiều nhất là 9 thuyền đôi (trừ 1 thuyền vì A, B chưa được xếp), mà 19 = 9.2 + 1 nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất một thuyền chở 2 người quen cả A và B. Nhưng khi đó ta có thể xếp lại như sau: trong k – 1 thuyền đầu tiên vẫn giữ nguyên, còn thuyền thứ k xếp A_k và B, còn thuyền thứ k + 1 xếp A và B_k. Điều này mâu thuẫn với giả sử.

Theo cách xếp này ta tiếp tục xếp đến hết 10 thuyền sao cho mỗi thuyền hai người đều quen nhau.

Bài toán 2. Kì thi tuyển sinh vào trường THPT chuyên Long An năm nay có 529 học sinh đến từ 16 địa phương khác nhau tham dự. Giả sử điểm bài thi môn Toán của mỗi học sinh đều là số nguyên lớn hơn 4 và bé hơn hoặc bằng 10. Chứng minh rằng luôn tìm được 6 học sinh có điểm môn Toán giống nhau và cùng đến từ một địa phương.

Hướng dẫn giải

Ta có 529 học sinh có điểm bài thi từ 5 điểm đến 10 điểm. Theo nguyên lý Dirichlet ta có 89 học sinh có điểm bài thi như nhau (từ 5 điểm đến 10 điểm).

Ta có 89 học sinh có điểm bài thi như nhau và đến từ 16 địa phương. Theo nguyên lý Dirichlet tìm được 6 em có cùng điểm thi môn toán và đến từ cùng một địa phương.

🗁 **Dạng 6: Vận dụng nguyên lí Dirichlet vào các bài toán hình học**

*** Cơ sở phương pháp:** Một số các dạng toán hình học thường gặp:

1) Nếu trên một đoạn thẳng độ dài 1 đặt một số đoạn thẳng có tổng độ dài lớn hơn 1 thì có ít nhất hai trong số các đoạn thẳng đó có điểm chung.
2) Nếu trên đường tròn có bán kính 1 đặt một số cung có tổng độ dài lớn hơn 2π thì có ít nhất hai trong số các cung đó có điểm chung.
3) Trong một hình có diện tích S đặt một số hình có tổng diện tích lớn hơn S thì có ít nhất hai trong số các hình đó có điểm chung.
4) *** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Trong hình vuông mà độ dài mỗi cạnh là 4 cho trước 33 điểm phân biệt, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng, Người ta vẽ các đường tròn có bán kính đều bằng $\sqrt{2}$, có tâm là các điểm đã cho.

Hỏi có hay không 3 điểm trong số các điểm nói trên sao cho chúng đều thuộc vào phần chung của 3 hình tròn có các tâm cũng chính là 3 điểm đó?

(Thi chọn HSG lớp 9 Quốc Gia năm 1995-1996- Bảng A)

Hướng dẫn giải

Chia hình vuông đã cho thành 16 hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh là 1; vì có 33 điểm chứa trong 16 hình vuông, do đó theo nguyên tắc Dirichlet ắt phải có ít nhất là một hình vuông chứa không ít hơn 3 điểm.

Khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ trong hình vuông đơn vị đã cho không thể vượt qua độ dài đường chéo của nó bằng $\sqrt{2}$.

Gọi O_1, O_2, O_3 là 3 điểm cùng nằm trong một hình vuông đơn vị nào đó .

Vẽ ba đường tròn tâm O_1, O_2, O_3 cùng bán kính là $\sqrt{2}$. Chắc chắn cả ba điểm O_1, O_2, O_3 đều nằm trong cả ba đương tròn này, nghĩa là chúng nằm trong phần chung của 3 hình tròn có tâm tại chính các điểm O_1, O_2, O_3.

Bài toán 2. Trên mặt phẳng cho 25 điểm sao cho từ ba điểm bất kỳ trong số chúng đều tìm được hai điểm có khoảng cách nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn có bán kính bằng 1 chứa không ít hơn 13 điểm.

Hướng dẫn giải

Xét điểm A và hình tròn (C_1) có tâm A và bán kính là 1. Nếu tất cả 24 điểm còn lại đều nằm trong (C_1) thì hiển nhiên bài toán được chứng minh.

Xét trường hợp có điểm B nằm ngoài (C_1). Ta có $AB > 1$ xét hình tròn (C_2) tâm B và bán kính là 1.

Giả sử C là một điểm bất kỳ khác A và B . Ta chứng minh C phải thuộc một trong hai hình tròn (C_1)hoặc (C_2).

Thật vậy: giả sử ngược lại điểm C không thuộc cả (C_1), cả $(C_2) \Rightarrow AC > 1$ và $BC > 1$; theo trên , $AB > 1$ như vậy có bộ ba điểm A, B, C trong đó không có bất kỳ 2 điểm nào có khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 1. Vô Lý, vì trái với giả thiết.

Điều vô lý đó chứng tỏ rằng hoặc là C thuộc vào (C_1) hoặc là C thuộc vào (C_2).

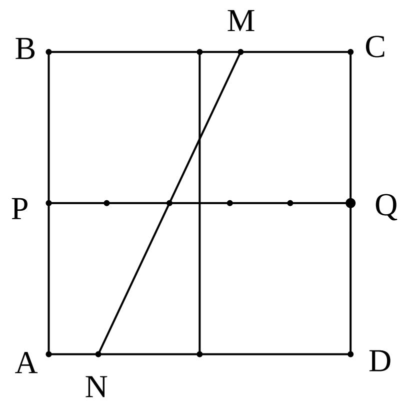
Như vậy cả 25 điểm đã cho đều thuộc vào (C_1) và (C_2).

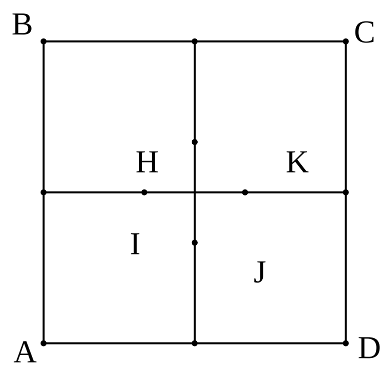
Theo nguyên tắc Dirichlet, ắt phải có ít nhất là một hình tròn chứa không ít hơn 13 điểm.

Bài toán 3. Cho hình vuông $ABCD$ và chín đường thẳng phân biệt thỏa mãn mỗi một đường thẳng đều chia hình vuông thành hai tứ giác có diện tích tỷ lệ với 2 và 3.

Chứng minh rằng tồn tại ít nhất là ba đường thẳng đồng qui tại một điểm.

Hướng dẫn giải





Nhận xét: các đường thẳng đã cho không thể đi qua trung điểm các cạnh hình vuông $ABCD$ bởi vì ngược lại thì hình vuông sẽ bị phân thành hai phần tam giác và ngũ giác.
Giả sử một đường thẳng trong số đó cắt cạnh BC tại M và cắt cạnh AD tại N .

Các hình thang $ABMN$ và $CDNM$ có chiều cao bằng nhau nên từ giả thiết suy ra MN chia đoạn thẳng nối trung điểm P ,Q của AB và CD theo tỷ lệ $\frac{2}{3}$.

Dễ thấy chỉ có 4 điểm chia 2 đường trung bình của hing vuông ABCD theo tỷ lệ $\frac{2}{3}$ là I, J, K, H . Có 9 đường thẳng đia qua 4 điểm này; theo nguyên tắc Dirichlet, phải có ít nhất là 3 đường thẳng cùng đi qua một điểm.

Bài toán 4. Cho đa giác đều gồm 1999 cạnh. Người ta sơn các đỉnh của đa giác bằng 2 màu xanh và đỏ. Chứng minh rằng ắt phải tồn tại 3 đỉnh được sơn cùng một màu tạo thành một tam giác cân.

Hướng dẫn giải

Ta có đa giác 1999 cạnh nên có 1999 đỉnh. Do đó ắt phải tồn tại 2 đỉnh kề nhau là P và Q được sơn bởi cùng 1 màu (chẳng hạn màu đỏ).

Vì đa giác đã cho là đa giác đều có một số lẻ đỉnh, cho nên phải tồn tại một đỉnh nào đó nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng PQ . Giả sử đỉnh đó là A .

Nếu A tô màu đỏ thì ta có ΔAPQ là tam giác cân có 3 đỉnh A, P, Q được tô cùng màu đỏ.

Nếu A tô màu xanh. Lúc đó gọi B và C là các đỉnh khác của đa giác kề với P và Q .

Nếu cả 2 đỉnh B và C được tô màu xanh thì ΔABC cân và có 3 đỉnh cùng tô màu xanh.

Nếu ngược lại một ttrong hai đỉnh B hoặc C mà tô màu đỏ thì tam giác BPQ hoặc tam giác CPQ là các tam giác cân có 3 đỉnh được tô màu đỏ.

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Một đồi thông có 800 000 cây thông. Trên mỗi cây thông có không quá 500 000 chiếc lá. Chứng minh rằng ít nhất cũng có 2 cây thông có cùng số lá như nhau ở trên cây.

Bài 2. Một lớp học có 40 học sinh. Chứng minh rằng có ít nhất 4 học sinh có tháng sinh giống nhau.

Bài 3. Cho dãy số gồm 5 số tự nhiên bất kì a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Chứng minh rằng tồn tại một số chia hết cho 5 hoặc tổng của một số số liên tiếp trong dãy đã cho chia hết cho 5.

Bài 4. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 5. chứng minh rằng tồn tại một số có dạng 111...11 mà chia hết cho p.

Bài 5. Với 39 số tự nhiên liên tiếp, hỏi rằng ta có thể tìm được một số mà tổng các chữ số của nó chia hết cho 11 hay không?

Bài 6. Chứng minh rằng trong 52 số tự nhiên tùy ý, chí ít cũng có một cặp gồm hai số sao cho hoặc tổng hoặc hiệu của chúng chia hết cho 100.

Bài 7. Chứng minh rằng tồn tại lũy thừa của 29 mà các chữ số tận cùng của nó là 00001.

Bài 8. (Bài toán áp dụng 2 lần nguyên tắc Dirichlet)

Có 17 nhà toán học viết thư cho nhau trao đổi về 3 vấn đề khoa học, mỗi người viết thư cho một người về một vấn đề. Chứng minh rằng ít nhất cũng có 3 nhà toán học trao đổi với nhau về cùng một vấn đề.

Bài 9. Một lớp học có 30 học sinh. Khi viết chính tả, em A phạm 14 lỗi, các em khác phạm ít lỗi hơn. Chứng minh rằng có ít nhất là 3 học sinh không mắc lỗi hoặc mắc số lỗi bằng nhau.

Bài 10. Cho 5 người tùy ý. Chứng minh rằng trong số đó có ít nhất là hai người có số người quen bằng nhau (chú ý là A quen B thì B quen A).

Bài 11. Trong một giải bóng đá có 10 đội tham gia, bất cứ hai đội nào trong số đó cũng phải đấu với nhau một trận. Chứng minh rằng tại bất cứ thời điểm nào của lịch thi đấu cũng có hai đội đã đấu được một số trận như nhau.

Bài 12. Chứng minh rằng đối với một số n nguyên dương bất kì bao giờ ta cũng tìm được một số tự nhiên mà các chữ số của nó bao gồm chỉ có chữ số 5 và chữ số 0 và chia hết cho n.

Bài 13. Chứng minh rằng luôn tồn tại số được viết bởi toàn chữ số 8 chia hết cho 2011.

Bài 14. Chứng minh rằng nếu (n, 2010) = 1 thì luôn tồn tại một số k nguyên dương sao cho $n^k - 1$ chia hết cho 2010.

Bài 15. Chứng minh rằng trong 1007 số tự nhiên bất kỳ luôn tồn tại hai số sao cho tổng hoặc hiệu của chúng chia hết cho 2011.

Bài 16. Cho n + 1 số nguyên dương khác nhau nhỏ hơn 2n (n > 1). Chứng minh rằng có thể chọn ra 3 số nào đó mà một số bằng tổng hai số kia.

Bài 17. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 1. Đánh dấu 5 điểm phân biệt bất kỳ trong ΔABC. Chứng minh rằng ắt tồn tại ít nhất là 2 điểm trong số đó mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn $0,5$.

Bài 18. Bên trong hình vuông có cạnh bằng 1, lấy bất kỳ 51 điểm phân biệt. Chứng minh rằng phải tồn tại ít nhất là 3 điểm trong số 51 điểm này nằm trong một hình tròn có bán kính bằng $\frac{1}{7}$.

Bài 19. Bên trong hình tròn (O,R) có diện tích bằng 8, người ta lấy 17 điểm phân biệt bất kỳ. Chứng minh rằng bao giờ cũng tìm được ít nhất là 3 điểm tạo thành một tam giác có diện tích bé hơn 1.

Bài 20.Bên trong một cái sân hình chữ nhật có chiều dài 4m và chiều rộng là 3m có 6 con chim đang ăn. Chứng minh rằng phải có ít nhất là hai con chim mà khoảng cách đậu giữa chúng nhỏ hơn là $\sqrt{5}m$.

Bài 21. Các điểm trên mặt phẳng được tô bằng một trong ba màu: xanh, đỏ, vàng. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất là 2 điểm được tô bởi cùng một màu và khoảng các giữa chúng bằng 1.

Bài 22. Trên mặt phẳng cho 100 điểm bất kỳ. Nối mỗi điểm với ít nhất là 66 điểm trong số 99 điểm còn lại bằng một đoạn thẳng. Chứng minh rằng có thể xãy ra trường hợp có 2 điểm trong số 4 điểm bất kỳ của 100 điểm đã cho không được nối với nhau.

Bài 23. Cho 5 điểm phân biệt nằm bên trong hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $35+\sqrt{3}$. Chứng minh rằng ắt tìm được ít nhất là một điểm trong hình vuông đã cho sao cho, khoảng cách từ nó đến ểm đã cho lớn hơn 10.

Bài 24. Mỗi điểm cửa mặt phẳng được tô bằng một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng ắt tìm được ít nhất là ba điểm được tô bởi cùng một màu tạo thành một tam giác đều có cạnh là 1 hoặc $\sqrt{3}$.

Bài 25. Mỗi điểm của mặt phẳng được tô bằng một trong hai màu đen và đỏ. Chứng tỏ rằng tồn tại một tam giác đều mà các đỉnh của nó chỉ được tô bằng một màu.

Bài 26. Trên mặt phẳng cho 2000 đường thẳng phân biệt, đôi một cắt nhau. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất là 2 đường thẳng mà góc tạo bởi chúng không lớn hơn $\frac{180^\circ}{2000}$

Bài 27. Bên trong đường tròn có bán kính 2000 có 8000 đoạn thẳng có độ dài là 1. Chứng minh rằng có thể dựng được một đường thẳng d hoặc là song song hoặc là vuông góc với một đường thẳng l cho trước, sao d cắt ít nhất là hai đoạn thẳng đã cho.

Bài 28. Cho bảng ô vuông kích thước 10.10 gồm 100 ô vuông đơn vị. Điền vào mỗi ô vuông của bảng này một số nguyên dương không vượt quá 10 sao cho hai số ở hai ô vuông chung cạnh hoặc chung đỉnh nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng trong bảng ô vuông đã cho có một số xuất hiện ít nhất 17 lần.

Bài 29. Trong hình chữ nhật kích thước 1.2 ta lấy $6n^2+1$ điểm với n là số nguyên dương. Chứng minh rằng tồn tại 1 hình tròn có bán kính $\frac{1}{n}$ chứa không ít hơn 4 trong số các điểm đã cho.

Bài 30. Cho mỗi điểm trên mặt phẳng được tô bằng một trong hai màu xanh, đỏ. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác mà ba đỉnh và trọng tâm cùng màu.

CHỦ ĐỀ 9

CÁC BÀI TOÁN SỬ DỤNG NGUYÊN LÝ CỰC HẠN

A. Kiến thức cần nhớ

1. Nguyên lý cực hạn.

Nguyên lí cực hạn được phát biểu đơn giản như sau:

Nguyên lí 1: Trong một tập hữu hạn và khác rỗng các số thực luôn luôn có thể chọn được số bé nhất và số lớn nhất.

Nguyên lí 2: Trong một tập khác rỗng các số tự nhiên luôn luôn có thể chọn được số bé nhất.

Nhờ nguyên lý này ta có thể xét các phần tử mà một đại lượng nào đó có giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất, chẳng hạn :

- Xét đoạn thẳng lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) trong một số hữu hạn đoạn thẳng
- Xét góc lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) trong một số hữu hạn góc.
- Xét đa giác có diện tích hoặc chu vi nhỏ nhất (hoặc lớn nhất) trong một số hữu hạn đa giác
- Xét khoảng cách lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) trong một số hữu hạn khoảng cách giữa hai điểm hoặc khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng
- Xét các điểm là đầu mút của một đoạn thẳng, xét các điểm ở phía trái nhất hoặc phải nhất của một đoạn thẳng(giả thiết là đoạn thẳng nằm ngang).

Nguyên lí cực hạn thường được sử dụng kết hợp với các phương pháp khác, đặc biệt là phương pháp phản chứng, được vận dụng trong trong trường hợp tập các giá trị cần khảo sát chỉ tập hợp hữu hạn(nguyên lí 1) hoặc có thể có vô hạn nhưng tồn tại một phần tử lớn nhất hoặc nhỏ nhất (nguyên lí 2).

2. Các bước áp dụng nguyên lý cực hạn khi giải toán

Khi vận dụng nguyên lí này, ta phải tiến hành các bước sau:

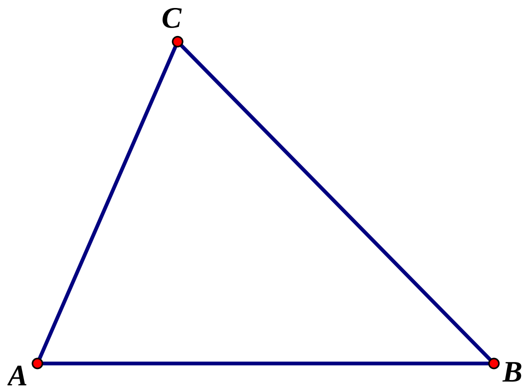
- **Bước 1.** Chứng minh rằng trong tất cả các giá trị cần khảo sát luôn tồn tại giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất.
- **Bước 2.** Xét bài toán trong trường hợp riêng khi nó nhận giá trị này (nhỏ nhất hoặc lớn nhất)
- **Bước 3.** Chỉ ra một mâu thuẫn, chỉ ra một giá trị còn nhỏ hơn (hay lớn hơn) giá trị ta đang khảo sát .

Theo nguyên lí của phương pháp phản chứng, ta sẽ suy ra điều phải chứng minh.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài toán 1. Tồn tại hay không tồn tại 100 điểm sao cho với bất kì hai điểm A; B nào trong 100 điểm đó cũng tồn tại một điểm C trong các điểm còn lại mà góc $\widehat{ACB} < 60^0$

Hướng dẫn giải



Giả sử tồn tại 100 điểm có tính chất như đề bài. Gọi A; B là hai điểm có khoảng cách lớn nhất trong 100 điểm này và tồn tại điểm C mà góc $\widehat{ACB} < 60^0$

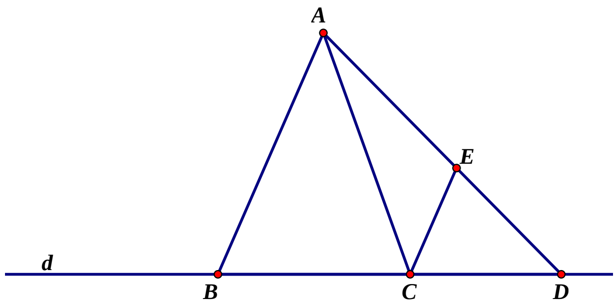
Điểm C không thể thuộc đường thẳng AB

Xét tam giác ABC có cạnh AB lớn nhất nên góc C là lớn nhất, mà góc $\widehat{ACB} < 60^0$ nên góc A và B cũng $< 60^0$

Do đó $\widehat{A+\hat{B}} + \hat{C} < 180^0$ vô lý nên không tồn tại 100 điểm trên

Bài toán 2. Cho 10 đường thẳng trong đó không có hai đường nào song song. Biết qua giao điểm của 2 đường thẳng bất kì trong 10 đường thẳng đó có ít nhất một đường thẳng trong các đường thẳng còn lại đi qua. Chứng minh 10 đường thẳng đó đồng qui.

Hướng dẫn giải



Giả sử 10 đường này không đồng qui. Xét đường thẳng d, có 1 hoặc nhiều giao điểm của 2 đường thẳng đã cho nằm ngoài d, ta gọi A là điểm nằm gần d nhất

Theo giả thiết có ít nhất 3 đường thẳng qua A.

do không có hai đường thẳng nào // nên ba đường thẳng này cắt d tại 3 điểm khác nhau B; C; D và giả sử C nằm giữa B và D

Cũng theo giả thiết qua C còn có một đường thẳng nữa, đường thẳng này cắt đoạn AB, AD tại E; F , chẳng hạn cắt AB tại E nằm giữa A và D, khi đó dễ thấy khoảng cách từ E đến d < khoảng cách từ A đến d, điều này trái với cách chọn điểm A và đường thẳng d

Vậy 10 đường thẳng này đồng qui.

Bài toán 3. Cho một đa giác lồi n cạnh (n > 3). Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có đỉnh lấy từ đỉnh đa giác đã cho mà đường tròn ngoại tiếp tam giác chứa tất cả các đỉnh còn lại của đa giác

Hướng dẫn giải

Với đa giác $A_1A_2...A_n$, xét tất cả các góc $A_1A_iA_2$ (Với i từ 3 đến n) ta chọn góc có số đo nhỏ nhất $\widehat{A_1A_kA_2}$ đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1A_kA_2$ chứa tất cả các đỉnh khác của đa giác.

Thật vậy nếu có đỉnh A_j (j từ 3 đến n) mà ở ngoài đường tròn thì $\widehat{A_1A_jA_2} < \widehat{A_1A_kA_2}$

Mâu thuẫn, vậy bài toán được chứng minh.

Bài toán 4. Một nước có 80 sân bay, mà khoảng cách giữa hai sân bay nào cũng khác nhau. Mỗi máy bay cất cánh từ một sân bay và bay đến sân bay nào gần nhất. chứng minh rằng, trên bất kỳ sân bay nào cũng không thể có quá 5 máy bay bay đến.

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết suy ra nếu các máy bay bay từ các sân bay M và N đến sân bay O thì khoảng cách MN là lớn nhất trong các cạnh của tam giác MON, do đó $\widehat{MON} > 60^0$.

Giả sử rằng các máy bay bay từ các sân bay $M_1, M_2, ..., M_n$ đến sân bay O thì một trong các góc $\widehat{M_iOM_j}$ không lớn hơn $\frac{360^0}{n} (i, j, n = 1, 2, 3, ...80)$ vì tổng các góc đã cho bằng 360^0. Vậy: $\frac{360^0}{n} > 60^0 \Rightarrow n < 6$; suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 5. Trong tam giác ABC có ba góc nhọn. lấy một điểm P bất kỳ; chứng minh khoảng cách lớn nhất trong các khoảng cách từ điểm P đến các đỉnh A, B, C của tam giác không nhỏ hơn 2 lần khoảng cách bé nhất trong các khoảng cách từ điểm P đến các cạnh của tam giác đó.

Hướng dẫn giải

Dựng PA_1, PB_1, PC_1 tương ứng vuông góc với các cạnh BC, CA, AB. Vì tam giác ABC có ba góc nhọn nên các điểm A_1, B_1, C_1 tương ứng nằm trong đoạn BC, CA và AB. Nối PA, PB, PC ta có:

$\widehat{APC_1} + \widehat{C_1PB} + \widehat{BPA_1} + \widehat{A_1PC} + \widehat{CPB_1} + \widehat{B_1PA} = 360^0$. Suy ra góc lớn nhất trong 6 góc này không thể nhỏ hơn 60^0. Không mất tính tổng quát, ta giả sử góc APC_1 là lớn nhất, khi đó $\widehat{APC_1} \geq 60^0$. Xét ΔAPC_1 vuông tại C_1, ta có: $\frac{PC_1}{AP} = \cos\widehat{APC_1} \leq 60^0 = \frac{1}{2}$. Từ đó ta có: $AP \geq 2PC_1$. Nếu thay PA bằng khoảng cách lớn nhất trong các khoảng cách từ P đến các đỉnh và thay PC_1 bằng khoảng cách ngắn nhất trong các khoảng cách từ P đến các cạnh thì bất đẳng thức càng được thỏa mãn.

Bài toán 6. Chứng minh rằng: Nếu tất cả các cạnh của tam giác đều nhỏ hơn 1 thì diện tích tam giác nhỏ hơn $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Hướng dẫn giải

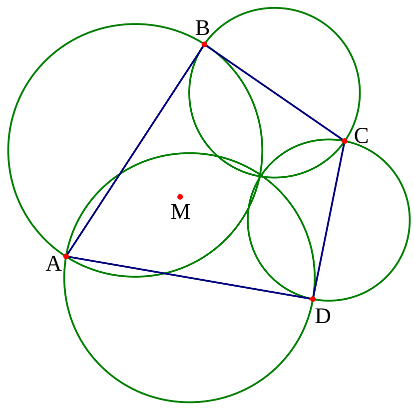
Gọi A là góc nhỏ nhất của tam giác ABC, suy ra: $\widehat{A} \leq 60^0$. Ta có:

$S_{ABC} = \frac{1}{2}BH.AC = \frac{1}{2}AB.\sin A.AC$. Do đó: $S_{ABC} < \frac{1}{2}AB.AC.\sin 60^0 < \frac{1}{2}.1.1.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Bài toán 7. Chứng minh rằng bốn hình tròn đường kính là bốn cạnh của một tự giác lồi thì phủ kín miền tứ giác ABCD.

Hướng dẫn giải

Lấy M là một điểm tùy ý của tứ giác lồi ABCD. Có hai khả năng xảy ra:



- Nếu M nằm trên biên của đa giác (tức M nằm trên một cạnh của tứ giác ABCD). Khi đó M nằm trong hình tròn có đường kính là cạnh ấy. Trong trường hợp này kết luận của bài toán hiển nhiên đúng.

- Nếu M nằm bên trong tứ giác lồi ABCD .

Khi đó ta có $\widehat{AMB}+\widehat{BMC}+\widehat{CMD}+\widehat{DMA}=360^0$

Theo nguyên lí cực hạn thì trong các góc $\widehat{AMB},\widehat{BMC},\widehat{CMD},\widehat{DMA}$ luôn tồn tại một góc có số đo lớn nhất.

Giả sử $\mathrm{Max}\widehat{BMC}=\left\{\widehat{AMB},\widehat{BMC},\widehat{CMD},\widehat{DMA}\right\}$. Khi đó $\widehat{BMC}\ge 90^0$

Từ đó suy ra M nằm trong (hoặc cùng lắm là nằm trên) đường tròn đường kính BC. Vậy dĩ nhiên M bị phủ bởi đường tròn này. Như thế do M là điểm tùy ý của tứ giác ABCD, ta suy ra bốn hình tròn nói trên phủ kín tứ giác lồi đã cho. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 8. Trên mặt phẳng cho 2×2000 điểm; trong đó không có bất kỳ 3 điểm nào thẳng hàng. Người ta tô 2000 điểm bằng màu đỏ và tô 2000 điểm còn lại bằng màu xanh. Chứng minh răng; bao giờ cũng tồn tại một cách nối tất cả các điểm màu đỏ với tất cả các điểm màu xanh bởi 2000 đoạn thẳng không có điểm nào chung.

Hướng dẫn giải

Xem tất cả các cách nối 2000 cặp điểm (đỏ với xanh) bằng 2000 đoạn thẳng. Các cách nối như vậy luôn luôn tồn tại và do chỉ có 2000 cặp điểm nên số tất cả các cạnh nối như vậy là hưỡ hạn.

Do đó, ắt tìm được một cách nối có tổng độ dài các đoạn thẳng là ngắn nhất. Ta chứng minh rằng đây là cách nối phải tìm.

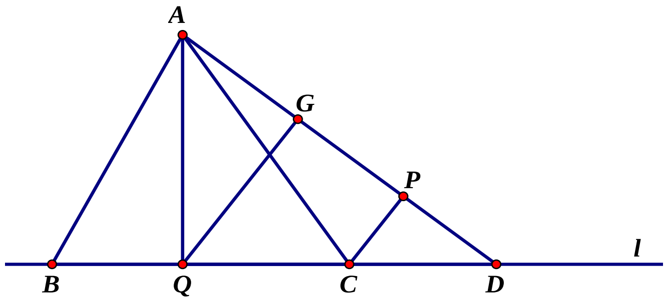
Thật vậy; giả sử ngược lại ta có hai đoạn thẳng AX và BY mà cắt nhau tại điểm O (Giả sử A và B tô màu đỏ, còn X và Y tô màu xanh). Khi đó, nếu ta thay đoạn thẳng AX và BY bằng hai đoạn thẳng AY và BX, các đoạn khác giữ nguyên thì ta có cách nối này có tính chất:

$AY+BX<(AO+OY)+(BO+\mathrm{OX})=(AO+\mathrm{OX})+(BO+OY)\Rightarrow AY+BX<\mathrm{AX}+\mathrm{BY}$

Như vậy; việc thay hai đoạn thẳng AX và BY bằng hai đoạn thẳng AY và BX, ta nhận được một cách nối mới có tổng độ dài các đoạn thẳng là nhỏ hơn. Vô lý, vì trái với giả thiết là đã chọn một cách nối có tổng các độ dài là bé nhất. Điều vô lý đó chứng tỏ: Cách nối có tổng độ dài các đoạn thẳng là nắng nhất là không có điểm chung.

Bài toán 9. Cho 2000 đường thẳng phân biệt, trong đó ba đường thẳng bất kỳ trong số chúng đồng qui. Chứng minh rằng: cả 2000 đường thẳng đã cho đồng qui tại một điểm.

Hướng dẫn giải



Bằng phương pháp phản chứng: Giả sử ngược lại các đường thẳng đã cho không đi qua một điểm. Xét các giao điểm tạo nên bởi 2000 đường thẳng đã cho. Xét tất cả các khoảng cách khác 0 hạ từ các giao điểm này đến các đường thẳng đã cho

Giả sử A là một giao điểm trong số đó Và gọi AQ là khoảng cách nhỏ nhất trong số đó vẽ từ A đến đường thẳng l trong số 2000 đường thẳng. Qua A theo giả thiết, phải có ít nhất ba đường thẳng này cắt l lần lượt tại B, C và D.

Vẽ $AQ \perp l$, thì hai trong ba điểm B, C, D phải nằm về cùng một phía của điểm Q, chẳng hạn là C và D.

Giả sử $QC < QD$; vẽ $CP \perp AD, QK \perp AD \Rightarrow CP < QK < AQ$. Vô lí, vì trái với giả sử AQ là khoảng cách bé nhất. Điều vô lí đó chứng tỏ 2000 đường thẳng đã cho đồng qui tại một điểm.

Bài toán 10. Trên mặt phẳng đã cho 2000 điểm, khoảng cách giữa chúng đôi một khác nhau. Nối mỗi điểm trong số 2000 điểm này với điểm ở gần nhất. Chứng minh rằng, với cách nối đó không thể nhận được một đường gấp khúc khép kín.

Hướng dẫn giải

Giả sử ngược lại, chúng ta nhận được một đường gấp khúc khép kín. Gọi AB là mắt lớn nhất của đường gấp khúc khép kín này.

Giả sử AC và BD là hai mắt kề với mắt AB, ta có:

- $AC < AB$ nên B không là điểm ngắn nhất của A.
- $BD < AB$ nên A không là điểm ngắn nhất của B. Chứng tỏ rằng Ava B không được nối với nhau. Vô lí! Điều vô lí này chứng tỏ không nhận được một đường gấp khúc khép kín với cách nối như vậy.

Cách khác: Nếu có đoạn nối AB thì B là điểm ngắn nhất của A (các khoảng cách khác nhau) Vậy không tồn tại đoạn nối A với 1998 điểm còn lại. như thế các đoạn nối không thể tạo thành đường gấp khúc (đường ấp khúc khôn tồn tại kể cả khi có hai đoạn).

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1:Bên trong đườn tròn tâm O bán kinh R = 1 có 8 điểm phân biệt, chứng minh rằng: Tồn tại ít nhất hai điểm tron số chúng mà khoảng cách giữa hai điểm này nhỏ hơn 1.

Bài 2. Trên các cạnh của tam giác ABC lấy điểm C_1, A_1, B_1 lần lượt thuộc AB, BC, CA. Biết rằng, độ dài các đoạn thẳng AA_1, BB_1, CC_1 không lớn hơn 1. Chứng minh rằng: $S_{ABC} \le \frac{1}{\sqrt{3}}$ (đơn vị diện tích).

Bài 3: Trong hình vuông mà độ dài mỗi cạnh là 4 cho trước 33 điểm phân biệt, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Người ta vẽ các đường tròn có bán kính đều bằng $\sqrt{2}$, có tâm là các điểm đã cho. Hỏi có hay không ba điểm trong số các điểm nói trên sao chúng đều thuộc vào phần chung của ba hình tròn có các tâm cũng chính là ba điểm đó?

Bài 4. Trên mặt phẳng cho 2000 điểm không thẳng hàng. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn đi qua ba trong số 2000 điểm đã cho mà đường tròn này không chứa bất kì điểm nào trong số 1997 điểm còn lại.

Bài 5. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn tâm O. Chứng minh rằng các đường chéo AC, BD giao nhau tại O thì tứ giác $ABCD$ là hình thoi.

Bài 6. Cho 19 điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng, nằm trong một hình lục giác đều có cạnh bằng 1. Chứng minh rằng luôn tồn tại một tam giác mà đỉnh là ba trong 19 điểm trên có ít nhất một góc không lớn hơn 45^0 và nằm trong đường tròn bán kính nhỏ hơn $\frac{3}{5}$.

Bài 7. Cho tứ giác $ABCD$ thỏa mãn: bán kinh các đường tròn nội tiếp bốn tam giác ABC, BCD, CDA và DAB bằng nhau. Chứng minh rằng: $ABCD$ là hình chữ nhật.

Bài 8. Cho 2000 đường thẳng phân biệt; trong đó có ba đường thẳng bất kì trong số chúng thì đồng quy. Chứng minh rằng cả 2000 đường thẳng đã cho đồng quy tại một điểm.

Bài 9. Trên mặt phẳng đã cho 2000 điểm, khoảng cách giữa chúng đôi một khác nhau. Nối mỗi điểm trong số 2000 điểm này với điểm ở gần nhất. Chứng minh rằng với cách nối đó không thể nhận được một đường gấp khúc khép kín.

Bài 10. Trên mặt phẳng cho 2000 điểm thoả mãn ba điểm bất kì trong số chúng đều thẳng hàng. Chứng minh rằng 2000 điểm đã cho thẳng hàng.

Bài 11. Cho tứ giác lồi $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại E. Chứng minh rằng nếu các bán kính của 4 đường tròn nội tiếp các ram giác EAB, EBC, ECD, EDA mà bằng nhau thì tứ giác $ABCD$ là hình thoi.

(Đề thi học sinh giỏi quốc gia lớp 9 năm 1986 – 1987 Bảng A)

Bài 12. Trong tam giác ABC có ba góc nhọn. Lấy một điểm P bất kì, chứng minh rằng khoảng cách lớn nhất trong các khoảng cách từ điểm P đến các đỉnh A, B, C của tam giác không nhỏ hơn 2 lần khoảng cách bé nhất trong các khoảng cách từ điểm P đến các cạnh của tam giác đó.

(Thi chọ học sinh giỏi lớp 9 quốc gia năm 1991 – 1993 bảng B)

Bài 13. Chứng minh rằng bốn hình tròn đường kính là bốn cạnh của một tứ giác thì phủ kín miền tứ giác $ABCD$.

Bài 14. Gọi O là giao điểm của tứ giác lồi $ABCD$. Chứng minh rằng nếu các tam giác AOB, BOC, COD, DOA có chu vi bằng nhau thì tứ giác $ABCD$ là hình thoi.

Bài 15. Bên trong hình vuông cạnh 1 cho n điểm. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có đỉnh tại các điểm đã cho hoặc đỉnh của hình vuông sao cho diện tích S của nó thỏa mãn bất đẳng thức $S \le \frac{1}{2(n+1)}$

Bài 16. Trong mặt phẳng cho n đường thẳng mà đôi một không song song với nhau, sao cho qua giao điểm của mỗi cặp đường thẳng thì có một đường thẳng thứ ba. Chứng minh rằng tất cả n đường thẳng đã cho đồng quy.

Bài 17. Trên mặt phẳng cho n điểm phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại một đường gấp khúc với các đỉnh là n điểm đã cho mà chúng không tự cắt nhau.

Bài 18. Trong dãy số gồm 6 số nguyên dương sắp theo thứ tự tăng dần thỏa mãn số đứng sau là bội của số đứng trước nó và tổng của sáu số đó là 79. Tìm dãy số mà số thứ sáu có giá trị lớn nhất.

Bài 19. Cho 21 số nguyên đôi một khác nhau thỏa mãn điều kiện tổng của 11 số nguyên tùy ý trong chúng lớn hơn tổng của 10 số nguyên còn lại. Biết rằng trong 21 số đó có một số là 101 và số lớn nhất là 2014. Tìm 19 số còn lại.

Bài 20. Chọn 100 số tự nhiên khác nhau bất kì sao cho mỗi số đều không vượt qua 2015 và mỗi số đều chia 17 dư 10. Chứng minh rằng trong 100 số trên luôn chọn được ba số có tổng không lớn hơn 999.

CHỦ ĐỀ 10

NGUYÊN LÝ BẤT BIẾN TRONG GIẢI TOÁN

A. Kiến thức cần nhớ

1. Nguyên lý bất biến.

Cho a, b, c là những số thực ta xét tổng $S = a + b + c$. Nếu ta đổi chỗ a cho b, b cho c, c cho a, thì tổng S luôn luôn chỉ là một (không đổi). Tổng này không thay đổi đối với thứ tự phép cộng. Dù a, b, c có thay đổi thứ tự như thế nào chăng nữa S vẫn không thay đổi, nghĩa là S bất biến đối với việc thay đổi các biến khác. Trong thực tế cũng như trong toán học, rất nhiều vấn đề liên quan đến một số đối tượng nghiên cứu lại bất biến đối với sự thay đổi của nhiều đối tượng khác.

2. Các bước áp dụng nguyên lý bất biến khi giải toán

Để giải toán được bằng đại lượng bất biến ta thực hiện theo các bước sau:

+ **Bước 1:** Ta phải phát hiện ra những đại lượng bất biến trong bài toán. Bước này tương đối khó nếu ta không luyện tập thường xuyên.

+ **Bước 2:** Xử lý tiếp đại lượng bất biến để tìm ra các điểm mâu thuẫn.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài toán 1. Trên bảng ta viết 10 dấu cộng và 15 dấu trừ tại các vị trí bất kỳ. Ta thực hiện xóa 2 dấu bất kỳ trong đó và viết vào đó 1 dấu cộng nếu xóa 2 dấu giống nhau và 1 dấu trừ nếu xóa 2 dấu khác nhau. Hỏi trên bảng còn lại dấu gì nếu ta thực hiện thao tác trên 24 lần?

Hướng dẫn giải

Ta thay mỗi dấu cộng là số 1 và mỗi dấu trừ là -1. Ta thấy tích của các số trên bảng là -1. Mà theo cách thực hiện của bài thì ta xóa đi 2 số và viết vào đó tích của 2 số đó, đồng thời ta chỉ thực hiện 24 lần nên suy ra tích của tất cả các số trên bảng sẽ không đổi như vậy tích các số trên bảng luôn bằng -1. Do đó, khi thực hiện thao tác 24 lần thì trên bảng còn lại dấu - .

Bài toán 2. Giả sử n là 1 số lẻ ta viết lên bảng các số từ 1 đến 2n, sau đó chọn ra 2 số bất kỳ a và b và viết lại 1 số bằng $|a-b|$. Chứng minh rằng số cuối cùng còn lại trên bảng là 1 số lẻ.

Hướng dẫn giải

Tổng của các số trên bảng ban đầu là: S = 1 + 2 +….+ 2n = n(2n + 1). Ta thấy n lẻ nên S lẻ. Mà với các thao tác trong bài thì tổng sẽ giảm đi 2.min$\{a;b\}$ do đó tính chẵn lẻ của tổng không đổi. Vì ban đầu S là số lẻ nên số cuối cùng còn lại trên bảng là số lẻ.

Bài toán 3. Cho các số 2,8,1,0,1,9,9,5 được viết trên 1 vòng tròn. Cứ 2 số cạnh nhau ta cộng thêm 1 vào 2 số đó. Hỏi sau 1 số lần thực hiện thao tác trên các số trên vòng tròn có thể đều bằng nhau được không?

Hướng dẫn giải

Ta nhận thấy tổng các số trong vòng tròn là 1 số lẻ nên khi thực hiện các thao tác trên thì tổng tăng lên 2 nên tính chẵn lẻ của tổng không đổi. Mặt khác số các số trên vòng tròn là chẵn nên nếu các số đều bằng nhau thì tổng của nó bây giờ là số lẻ suy ra mâu thuẫn.

Bài toán 4. Một tờ giấy bị cắt nhỏ thành 6 mảnh hoặc 11 mảnh. Các mảnh nhận được lại có thể chọn để cắt (thành 6 mảnh hoặc 11 mảnh nhỏ hơn) ... Cứ như vậy ta có thể nhận được 2005 mảnh cắt không ?

Hướng dẫn giải

Sau mỗi lần cắt một mảnh giấy thành 6 mảnh hoặc 11 mảnh thì số mảnh giấy tăng lên là 5 hoặc 10. Như vậy tính bất biến của bài toán là "số mảnh giấy luôn tăng lên một bội số của 5". Vậy số mảnh giấy sau các lần cắt có dạng 1 + 5k, mặt khác 2005 có dạng 5k nên với cách cắt như trên, từ một tờ giấy ban đầu, ta không thể cắt được thành 2005 mảnh.

Bài toán 5. Mỗi số trong dãy $2^1, 2^2, 2^3, ..., 2^{2005}$

đều được thay thế bởi tổng các chữ số của nó. Tiếp tục làm như vậy với các số nhận được cho tới khi tất cả các số đều có 1 chữ số. Chứng minh trong dãy này : số các số 2 nhiều hơn số các số 1.

Hướng dẫn giải

Ta thấy : "Số tự nhiên A và tổng các chữ số của A luôn cùng số dư trong phép chia cho 9".

Mặt khác ta có : 2^1 chia cho 9 dư 2 ;

2^2 chia cho 9 dư 4 ; 2^3 chia cho 9 dư 8 ;

2^4 chia cho 9 dư 7 ; 2^5 chia cho 9 dư 5 ;

2^6 chia cho 9 dư 1 ; 2^7 chia cho 9 dư 2 ; ...

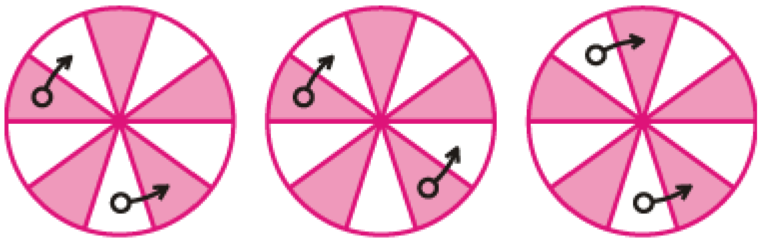
Do đó 2^{6k+r} lần lượt nhận các số dư trong phép chia cho 9 là 2, 4, 8, 7, 5, 1 tương ứng với các giá trị của r là 1, 2, 3, 4, 5, 0. Dãy cuối cùng nhận được gồm 2005 số thuộc tập hợp {2 ; 4 ; 8 ; 7 ; 5 ; 1}.

Ta có 2005 = 334 x 6 + 1 nên dãy cuối cùng có 335 số 2 (nhiều hơn số các số khác 1 số). Vậy số các số 2 nhiều hơn số các số 1 đúng 1 số.

Bài toán 6. Một hình tròn được chia thành 10 ô hình quạt, trên mỗi ô người ta đặt 1 viên bi. Nếu ta cứ di chuyển các viên bi theo quy luật : mỗi lần lấy ở 2 ô bất kì mỗi ô 1 viên bi, chuyển sang ô liền kề theo chiều ngược nhau thì có thể chuyển tất cả các viên bi về cùng 1 ô hay không ?

Hướng dẫn giải

Trước tiên, ta tô màu xen kẽ các ô hình quạt, như vậy sẽ có 5 ô được tô màu (ô màu) và 5 ô không được tô màu (ô trắng). Ta có nhận xét :



Nếu di chuyển 1 bi ở ô màu và 1 bi ở ô trắng thì tổng số bi ở 5 ô màu không đổi.

Nếu di chuyển ở 2 ô màu, mỗi ô 1 bi thì tổng số bi ở 5 ô màu giảm đi 2. Nếu di chuyển ở 2 ô trắng, mỗi ô 1 bi thì tổng số bi ở 5 ô màu tăng lên 2.

Vậy tổng số bi ở 5 ô màu hoặc không đổi, hoặc giảm đi 2 hoặc tăng lên 2. Nói cách khác, tổng số bi ở 5 ô màu sẽ không thay đổi tính chẵn lẻ so với ban đầu.

Ban đầu tổng số bi ở 5 ô màu là 5 viên (là số lẻ) nên sau hữu hạn lần di chuyển bi theo quy luật trên thì tổng số bi ở 5 ô màu luôn khác 0 và khác 10, do đó không thể chuyển tất cả các viên bi về cùng 1 ô.

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1:Một tờ giấy được xe thành 6 mảnh, lại xé 1 trong 6 mảnh nhỏ đó thành 6 mảnh nhỏ khác. Cứ tiếp tục như vậy hỏi có khi nào được 1995 hoặc 2011 mảnh nhỏ hay không?

Bài 2: Trong một bảng ô vuông 100x100 ô được điền dấu(+)và dấu (-) . Một bước thực hiện bằng cách đổi toàn bộ những dấu ở 1 hàng hoặc 1 cột nào đó sang dấu ngược lại hỏi sau hữu hạn bước làm như trên bảng ô vuông nhận được đúng 1970 dấu (–) không.

Bài 3: Trên bảng có các số $\frac{1}{96};\frac{2}{96};...;\frac{96}{96}$. Mỗi 1 lần thực hiện cho phép xóa đi 2 số a;b bất kỳ trên bảng và thay bằng a + b - 2ab hỏi sau 95 lần thực hiện phép xóa thì số còn lại trên bảng là số nào?

Bài 4: Hai người chơi 1 trò chơi với 2 đống kẹo. Đống thứ nhất có 12 cái và đống thứ 2 có 13 cái mỗi người chơi được lấy 2 cái kẹo từ 1 trong 2 đống kẹo hoặc chuyển 1 cái kẹo từ đống thứ nhất sang đống thứ 2. Người chơi nào không thể thực hiện các thao tác trên là như thua. Hãy chứng minh rằng người chơi thứ 2 không thể thua, người đó có thể thắng không?

Bài 5. Trên bảng ghi một số nguyên dương có hai chữ số trở lên. Người ta thiết lập số mới bằng cách xóa đi chữ số hàng đơn vị của số đã cho, sau đó cộng vào số còn lại 7 lần số vừa bị xóa. Ban đầu trên bảng ghi số 6^{100}. Hỏi sau một số bước thực hiện như trên ta có thể thu được 100^6 hay không ? Tại sao ?

Bài 6. Giả sử rằng n là một số lẻ. Đầu tiên ta viết các số từ 1 tới 2n trên một bảng đen. Sau đó ta chọn ra hai số bất kì a, b và xoá chúng, rồi thay thế chúng bởi $|a-b|$. Chứng minh rằng số còn lại cuối cùng là một số lẻ

Bài 7. Người ta viết trên bảng dãy các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 100. Thực hiện trò chơi như sau: Tiến hành xóa hai số a, b bất kì trong dãy số trên và viết lại một số là a^3+b^3. Thực hiện trò chơi như trên cho đến khi trên bảng còn lại một số. Hỏi số còn lại trên bảng có thể là 9876543212016 không.

Bài 8. Có 2010 viên sỏi. Hai người chơi thay phiên nhau bốc sỏi, mỗi lượt đi người chơi được quền bốc một số lượng viên sỏi là luỹ thừa với số mũ tự nhiên bất kì của 2(1, 2, 4, ...). Ai bốc được viên sỏi cuối cùng là thắng cuộc. Giả sử cả hai người chơi đều là người thông minh. Hỏi ai là người thắng cuộc?

Bài 9. Trong một hộp có 2010 viên sỏi. Có hai người tham gia trò chơi, mỗi người lần lượt phải bốc ít nhất là 11 viên sỏi và nhiều nhất là 20 viên sỏi. Người nào bốc viên sỏi cuối cùng sẽ thua cuộc. Hãy tìm thuật chơi để đảm bảo người bốc đầu tiên luôn là người thắng cuộc.

Bài 10. Trên bảng có ghi 2013 số $\frac{1}{1};\frac{1}{2};\frac{1}{3};...;\frac{1}{2013}$. Mỗi lần xóa đi hai số bất kì trên bảng thì ta thay bằng số $z=\frac{xy}{x+y+1}$ và giữ nguyên các số còn lại. Sau 2012 lần thực hiện thì trên bảng còn lại một số. Tìm số còn lại đó.

Bài 11. Cho một hình tròn được cia thành 10 ô hình quạt. Trêm mỗi ô hình quạt ta đặt một hòn bi. Thực hiện trò chơi như sau: Mỗi lần lấy ở hai ô bất kì mỗi ô một hòn bi và chuyển sang ô liền kề theo chiều ngược nhau. Hỏi sau một số lần thực hiện trò chơi có thể chuyển tất cỏ các viên bi về cùng một ô được không.

Bài 12. Cho một bảng ô vuông chứa số như hình 4a. Ta thực hiện một thuật toán T như sau: Chọn ra 2 số bất kì nằm ở hai ô vuông cạnh nhau và cộng 2 số đó với một số nguyên nào đó. Hỏi rằng sau một số lần thực hiện thuật toán T thì bảng hình vuông chứa các số như hình 4a có thể thành bảng hình vuông như hình 4b hay không ?

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Hình a

7	8	9
6	2	4
3	5	1

Hình b

Bài 13. Cho một bàn cờ quốc tế 8.8 . Hỏi rằng quân mã có thể đi nước đầu tiên từ ô dưới cùng bên trái và kết thúc ở ô trên cùng bên phải hay không. Với điều kiện nó phải đi qua tất cả các ô trên bàn cờ và mỗi ô chỉ đi qua đúng một lần

Bài 14. Mỗi số trong các số $a_1;a_2;a_3;...;a_n$ nhận một trong hai giá trị là -1 hoặc 1.

Biết rằng $S=a_1.a_2.a_3.a_4+a_2.a_3.a_4.a_5+\ldots+a_n.a_1.a_2.a_3=0$. Chứng minh rằng n chia hết cho 4

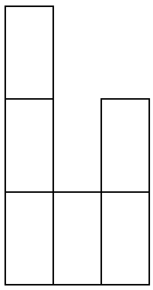
Bài 15. Trên mặt phẳng cho 2011 điểm sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Xét tất cả các đoạn thẳng nối các cặp điểm trong 2011 điểm này. Vẽ đường thẳng d không đi qua điểm nào trong số 2011 điểm nói trên. Chứng minh rằng nếu đường thẳng d cắt một số đoạn thẳng xét ở trên thì số đoạn thẳng bị đường thẳng d cắt là một số chẵn.

Bài 16. Cho trước số nguyên dương n lẻ. Tại mỗi ô vuông của bàn cờ kích thước $n \times n$ người ta viết một số $+1$ hoặc -1. Gọi a_k là tích của tất cả những số ghi trên hàng thứ k (tính từ trên xuống) và b_k là tích của tất cả những số ghi trên cột thứ k (tính từ trái sang).

Chứng minh rằng với mọi cách điền số như trên, đều có:

$$a_1 + a_2 \cdots + a_n + b_1 + b_2 + \cdots + b_n \neq 0 .$$

Bài 17. Ta định nghĩa viên gạch hình móc câu là hình gồm 6 ô vuông đơn vị như hình vẽ dưới đây hoặc hình nhận được do lật hình đó(sanh trái, sang phải,...) hoặc hình nhận được do xoay hình đó đi một góc. Xác định các hình chữ nhật kích thức m.n với m, n là các số nguyên dương sao cho có thể lát được bằng các viên gạnh hình móc câu



Bài 18. Cho các bảng ô vuông 6x6 dưới đây:

+	+	−	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+

Bảng 1

+	+	−	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	−	+	+

Bảng 2

+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	−	−	+	+

Bảng 3

Thực hiện thao tác biến đổi như sau: Mỗi bước biến đổi cho phép đảo ngược dấu tất cả các ô trên cùng một hàng hoặc một cột hoặc một đường chéo hoặc dọc theo một đường bất kì song song với một trong hai đường chéo. Hỏi sau một số bước biến đổi có thể đưa một trong các bảng trên về bảng không có dấu trừ được không.

Bài 19. Trên bảng đen viết ba số $\sqrt{2}$; 2; $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ta bắt đầu thực hiện trò chơi như sau: Mỗi lần chơi ta xoá hai số nào đó trong ba số trên bảng, giả sử là a và b rồi viết vào 2 vị trí vừa xoá hai số mới $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ và $\frac{|a-b|}{\sqrt{2}}$ đồng thời giữ nguyên số còn lại. Như vậy sau mỗi lần chơi trên bảng luôn có ba số. Chứng minh rằng dù ta có chơi bao nhiêu lần đi chăng nữa thì trên bảng không đồng thời có ba số $\frac{1}{2\sqrt{2}}$; $\sqrt{2}$; $1+\sqrt{2}$.

Bài 20. Trên bảng cho 2014 số tự nhiên từ 1 đến 2014. Thực hiện liên tiếp phép biến đổi sau: Mỗi lần xoá đi hai số bất kỳ a, b có trên bảng rồi viết thêm số $a+b-\frac{1}{2}ab$ vào bảng. Khi trên bảng chỉ còn lại đúng một số thì dừng lại. Tìm số còn lại đó.

Bài 21. Trên bảng viết các số $\frac{1}{2015}, \frac{2}{2015}, ..., \frac{2014}{2015}, \frac{2015}{2016}$. Mỗi lần biến đổi, xóa đi hai số a, b bất kỳ và thay bằng số $a+b-5ab$. Hỏi sau 2014 lần thực hiện phép biến đổi trên bảng còn lại số nào?

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

CHỦ ĐỀ 1. CÁC BÀI TOÁN VỀ ƯỚC VÀ BỘI

Câu 1.

Gọi x là số chia, a là thương, ta có $145 = ax + 12\left(x > 12\right)$. Như vậy x là ước của $145 - 12 = 133$

Phân tích ra thừa số nguyên tố : $133 = 7.19$

Ước của 133 mà lơn hơn 12 là 19 và 133

Nếu số chia bằng 19 thì thương bằng 7. Nếu số chia bằng 133 thì thương bằng 1, trái với đề bài.

Vậy số chia bằng 19, thương bằng 7.

Câu 2. Giả sử số 108 viết dưới dạng tổng của k số tự nhiên liên tiếp là $n+1, n+2, ..., n+k$ với $k, n \in \mathbb{N}, k \geq 2, n+1 \geq 1$. Ta có:

$$\left(n+1\right)+\left(n+2\right)+...+\left(n+k\right)=108$$

$$\frac{\left(2n+k+1\right).k}{2}=108$$

$$\left(2n+k+1\right).k = 216$$

Bài toán đưa đến việc tìm các ước của 216. Ta đưa ra hai nhận xét sau để giảm bót số trường hợp phải xét:

1) $2n + k + 1 > k \geq 2$

2) Hiệu $\left(2n + k + 1\right) - k = 2n + 1$ là số lẻ nên trong hai số $2n + k + 1$ và k có một số chẵn, một số lẻ.

Do đó ta chỉ cần tìm ước lẻ của 216, đồng thời trong hai số $2n + k + 1$ và k có tích bằng 216, chọn k là số nhỏ hơn.

Phân tích ra thừa số nguyên tố: $216 = 2^3.3^3$. Ước lẻ của 216 lớn hơn 1 là 3, 9, 27

Với $k = 3$ thì $2n + k + 1 = 72$ ta được $n = 34$, do đó $108 = 35 + 36 + 37$

Với $k = 9$ thì $2n + k + 1 = 24$ ta được $n = 7$, do đó $108 = 8 + 9 + ... + 16$

Với $2n + k + 1 = 27$ thì $k = 8$, ta được $n = 9$, do đó $108 = 10 + 11 + ... + 17$

Câu 3. Để $3n+4 \vdots n-1 \Leftrightarrow \left[1.(3n+4)-3.(n-1)\right] \vdots n-1 \Leftrightarrow 7 \vdots n-1$ hay $n - 1 \in Ư(7)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n-1=1 \\ n-1=7 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n=2 \\ n=8 \end{array}\right.$$

Vậy với n = 2 hoặc n = 8 thì 3n + 4 $\vdots$ n – 1

Câu 4. Để a + 1 là bội của a - 1 nên thì $\frac{a+1}{a-1}$ là số nguyên $\frac{a+1}{a-1} = 1 + \frac{2}{a-1}$

=> a – 1 ∈ Ư(2) = {-1,1,2}

=> a = {0,2,3} (thỏa mãn a ∈ N)

Câu 5. Ta có 4n - 5 = 2(2n - 1) - 3

Để 4n - 5 chia hết cho 2n - 1 thì 3 chia hết cho 2n - 1

Với 2n – 1 = 1 => n = 1

Với 2n – 1 = 3 => n = 2

Vậy n = 1; 2

Câu 6. Ta có $5+n^2-2n$ = 5 + n(n – 2)

=> $5+n^2-2n$ ⋮ (n – 2) khi 5 ⋮ (n – 2)

=> n – 2 ∈ Ư(5) = {-5, -1, 1, 5}

=> n ∈ {- 3, 1, 3, 7}

Câu 7. $n^2+4 \vdots n+2 \Rightarrow n(n+2)-2(n+2)+8 \vdots n+2 \Rightarrow 8 \vdots n+2$.

Tìm được: $n=0,\ 2;\ 6$.

Câu 8. Ta có $\dfrac{n+1}{n-2}$ là số nguyên khi $(n+1) \vdots n-2$

Ta có : $n+1=[(n-2)+3]$

Vậy $(n+1) \vdots n-2$ khi $3 \vdots n-2 \Rightarrow n-2 \in U(3)=\{\pm 1;\pm 3\} \Rightarrow n \in \{-1;1;3;5\}$

Câu 9. Gọi số phải tìm là $\overline{abc}$, ta có $\overline{abc}+1001+10n+n=\overline{abc}.n$ Suy ra $\overline{abc} \vdots n$.

Đặt $\overline{abc}=n.k\ \ (k \in \mathbb{N})$ thì $nk+111n=nkn$.

Chia hai vế cho $n \neq 0$ ta được $k+111=nk$ tức là $111=k(n-1)$. Như vậy k và $n-1$ là ước của 111.

Bài toán có 4 đáp số:

k	$n-1$	n	$\overline{abc}$
1	111	112	112
3	37	38	114
37	3	4	148
111	1	2	222

Câu 10.

Số 264 chia cho a dư 24 nên a là ước của $264-24=240$, $a>24$

Số 363 chia cho a dư 43 nên a là ức của $363-43=320$, $a>43$

Do a là ước chung của 240 và 320, đồng thời $a>43$.

ƯCLN $(240,320)=80$ ước chung lớn hơn 43 là 80.

Vậy $a = 80$

Câu 11. Ta thấy : $398 - 38 = 360 \vdots a$; $a > 38$.

$450 - 18 = 432 \vdots a$; $a > 18$.

Vậy a là ước chung của 360 và 420, đồng thời $a > 38$.

Phân tích ra thừa số nguyên tố: $360 = 2^3.3^2.5$; $432 = 2^4.3^3$.

ƯCLN$(360, 432) = 2^3.3^2 = 72$.

Ước chung của 360 và 432 mà lớn hơn 38 là 72.

Vậy $a = 72$.

Câu 12. Số học sinh là ước chung của $100 - 4 = 96$ và $90 - 18 = 72$, đồng thời lớn hơn 18.

Tìm được: 24 học sinh.

Câu 13. Số phần thưởng lớn nhất là ƯCLN$(128, 48, 192)$.

Đáp số: Chia được nhiều nhất thành 16 phần thưởng, mỗi phần gồm 8 vở, 3 bút chì, 12 nhãn vở.

Câu 14. $a = 3m + 2\ (m \in N) \Rightarrow 2a = 6m + 4$, chia cho 3 dư 1

$a = 5n + 3\ (n \in N) \Rightarrow 2a = 10n + 6$ chia cho 5 dư 1

$a = 7p + 4\ (p \in N) \Rightarrow 2a = 14p + 8$, chia cho 7 dư 1

Do đó: $2a - 1 \in BC(3,5,7)$. Để a nhỏ nhất thì $2a - 1$ là $BCNN(3,5,7)$

$BCNN(3,5,7) = 1$

$2a - 1 = 105$

$2a = 106$

$a = 53$

Câu 15. Chiều dài ngắn nhất của đường chạy tính bằng mét là BCNN$(330, 75) = 1650$ gồm $1650 : 75 = 22$ chặng.

Câu 16. Gọi số phải tìm là n.

$n + 9 \in BC(17, 25)$. Từ đó $b = 425k - 9$.

Đáp số: 416 và 841.

Câu 17. $n + 1 \vdots 8 \Rightarrow n + 1 + 64 \vdots 8 \Rightarrow n + 65 \vdots 8\ (1)$.

$n + 3 \vdots 31 \Rightarrow n + 3 + 62 \vdots 31 \Rightarrow n + 65 \vdots 31\ (2)$.

Từ (1) và (2): $n + 65 \vdots \text{BCNN}(8, 31)$

$\Rightarrow n + 65 \vdots 248$

$\Rightarrow n = 248k - 65\ (k \in \mathbb{N}^*)$.

Với $k = 3$ thì $n = 679$;

Với $k = 4$ thì $n = 927$;

Với $k = 5$ thì $n = 1175$.

Để n là số lớn nhất có ba chữ số, ta chọn $n = 927$.

Câu 18. Gọi số sách là x thì $x + 10 \in \text{BC}(10,12,18)$ và $715 < x < 1000$.

Đáp số: $x = 890$.

Câu 19. Gọi số giấy mỗi lớp thu được là x (kg) thì $x - 26 ⋮ 11$; $x - 25 ⋮ 10$ do đó $x - 15 \in \text{BC}(11,10)$ ngoài ra $200 < x < 300$. Ta tìm được $x = 235$, do đó lớp $6A$ có 20 học sinh, lớp $6B$ có 22 học sinh.

Câu 20. Đồng hồ thứ nhất lấy lại giờ chính xác khi nó chạy nhanh được 12 giờ, tức là 720 phút, như vậy nó lại chỉ đúng giờ sau: $720 : 2 = 360$ (ngày).

Đồng hồ thứ hai lấy lại giờ chính xác khi nó chạy chậm được 12 giờ, tức là 720 phút, như vậy nó lại chỉ đúng giờ sau: $720 : 3 = 240$ (ngày).

Số ngày ít nhất để cả hai đồng hồ cùng chỉ giờ đúng là $\text{BCNN}(360, 240) = 720$.

Đáp số: 720 ngày.

Câu 21. a) Gọi hai số phải tìm là a và b, ta có: $a - b = 84, a = 28a', b = 28b'$ trong đó $(a', b' = 1)$, suy ra $a' - b' = 3$.

Do $300 \le b < a \le 400$ nên $11 \le b' < a' \le 15$.

Trường hợp $a' = 15, b' = 12$ loại vì trái với $(a', b') = 1$.

Trường hợp $a' = 14, b' = 11$ cho $a = 392, b = 308$.

b) Có vô số đáp số: $a = 12a', b = 12b'$ với $a' = 2n + 5, b' = 2n + 1$ $(n \in \mathbb{N})$

Câu 22.

Gọi hai số tự nhiên cần tìm là a và b, ta có:

Vì UCLN(a; b) = 36 nên $\begin{cases} a = 36a_1 \\ b = 36b_1 \end{cases}$ và (a_1:b_1) = 1, Mà:

$a + b = 432 \Rightarrow 36a_1 + 36b_1 = 432 \Rightarrow 36(a_1 + b_1) = 432$ Nên $a_1 + b_1 = 12$ Mà (a_1:b_1) = 1 Nên ta có bảng sau:

a_1	1	5	7	11
a	36	180	252	396
b_1	11	7	5	1
b	396	252	180	36

Vậy các cặp số tự nhiên (a ; b) cần tìm là : (36 ; 396), (180 ; 252), (252 ; 180), và (396 ; 36)

Câu 23. Gọi hai số tự nhiên cần tìm là a và b, ta có:

Vì UCLN(a; b) = 6 nên $\begin{cases} a = 6a_1 \\ b = 6b_1 \end{cases}$ và (a_1:b_1) = 1, Mà:

$a.b = 864 => 6a_1.6b_1 = 864 => 36.a_1.b_1 = 864$ Nên $a_1.b_1 = 24$ Mà (a_1:b_1) = 1 Nên ta có bẳng sau:

a_1	1	3	8	24
a	6	18	48	144
b_1	24	8	3	1
b	144	48	18	6

Câu 24. Gọi d = ƯCLN(14n + 3 ; 21n + 4) => d $\in N^*$

Khi đó ta có :

$$\begin{cases} 14n+3 \vdots d \\ 21n+4 \vdots d \end{cases} => \begin{cases} 3(14n+3) \vdots d \\ 2(21n+4) \vdots d \end{cases} => \begin{cases} 42n+9 \vdots d \\ 42n+8 \vdots d \end{cases} => (42n+9)-(42n+8) \vdots d => 1 \vdots d$$

Vậy hai số 14n + 3 và 21n + 4 là hai số nguyên tố cùng nhau

Câu 25. Gọi d = ƯCLN(2n + 1 ; 6n + 5), => d $\in N^*$

Khi đó ta có :

$$\begin{cases} 2n+1 \vdots d \\ 6n+5 \vdots d \end{cases} => \begin{cases} 3(2n+1) \vdots d \\ 6n+5 \vdots d \end{cases} => \begin{cases} 6n+3 \vdots d \\ 6n+5 \vdots d \end{cases} => (6n+5)-(6n+3) \vdots d => 2 \vdots d => d \in U(2) = \{1;2\}$$

Do 2n + 1 $\vdots$ d, mà 2n + 1 lại là số lẻ nên d=2 loại, do đó d=1

Vậy hai số 14n + 3 và 21n + 4 là hai số nguyên tố cùng nhau

Câu 26. Gọi số phải tìm x, thì $[14, x] = 770$.

Ta có: $770 = x.k\ (k \in \mathbb{N}), 770 = 14.55,\ \ (k, 55) = 1,$ do đó k là ước của 14.

Vậy k bằng: $1, 2, 7, 14,$ tương ứng x bằng $770, 385, 110, 55.$

Câu 27. a) Gọi $d \in ƯC(b, b-a)$ thì $a-b \vdots d, b \vdots d$, do đó $a \vdots d$. Ta có $(a,b)=1$ nên $d=1$.

b) Giả sử a^2+b^2 và ab cùng chia hết cho số nguyên tố d thì vô lí.

Câu 28. Giả sử ab và c cùng chia hết cho số nguyên tố d thì vô lí.

Câu 29. a) $4n-5 \ \vdots\ 13$

$\Rightarrow 4n-5+13 \ \vdots\ 13$

$\Rightarrow 4n+8 \ \vdots\ 13$

$\Rightarrow 4(n+2) \ \vdots\ 13$

Do $(4,13)=1$ nên $n+2 \ \vdots\ 13$

Đáp số: $n = 13k-2\left(k \in \mathbb{N}^*\right)$.

b) *Đáp số:* $n = 7k - 3\left(k \in \mathbb{N}^*\right)$

c) $\left(25n+3\right) \vdots 53 \Rightarrow \left(25n+3-53\right) \vdots 53.$

Đáp số: $n = 53k + 2\left(k \in \mathbb{N}\right)$

Câu 30.

a) n không chia hết cho 3.

b) n là số chẵn.

c) n là số lẻ.

d) Giả sử $18n+3$ và $21n+7$ cùng chia hết cho số nguyên tố d thì
$6\left(21n+7\right)-7\left(18n+3\right) \vdots d \Rightarrow 21 \vdots d$.

Vậy $d \in \left\{3;7\right\}$.

Hiển nhiên $d \neq 3$ vì $21n+7$ không chia hết cho 3. Như vậy $\left(18n+3, 21n+7\right) \neq 1$

$\Leftrightarrow \left(18n+3\right) \vdots 7$ (còn $21n+7$ luôn chia hết cho 7)

$\Leftrightarrow \left(18n+3-21\right) \vdots 7 \Leftrightarrow 18\left(n-1\right) \vdots 7 \Leftrightarrow \left(n-1\right) \vdots 7$.

Vậy nếu $n \neq 7k+1\left(k \in \mathbb{N}\right)$ thì $\left(18n+3, 21n+7\right) = 1$.

Câu 31. Bài toán không yêu cầu tìm mọi giá trị của n mà chỉ cần chỉ ra vô số giá trị của n để $\left(n+5, n+72\right) = 1$. Do đó ngoài cách giải như ở bài trên, có thể giải như sau:

Gọi $d \in$ ƯC $\left(n+5, n+72\right)$ thì $57 \vdots d$. Do $\left(n+15\right) \vdots d$, $57 \vdots d$ nên nếu tồn tại n sao cho $n+15 = 57k+1$ thì $d = 1$. Nếu ta chọn $n = 57k - 14$ $\left(k = 1, 2, 3, ...\right)$ thì $\left(n+15, n+72\right) = 1$, rõ ràng có vô số giá trị của n .

Câu 32. a) ƯCLN$\left(a+b, a-b\right)$ bằng 2 nếu a và b cùng lẻ, bằng 1 nếu trong a và b có một số chẵn và một số lẻ.

b) 1 hoặc 29.

Câu 33.

a) Gọi $a = da'$, $b = db'$, $(a', b') = 1$. Ta có:

$\left[a, b\right] = \dfrac{ab}{d} = da'b'$. Theo đề bài, ta có: $da'b' + d = 55$ hay $d\left(a'b' + d\right) = 55$. Như vậy $a'b'+1$ là ước của 55, mặt khác $a'b'+1 \geq 2$.

Ta có lần lượt

d	$a'b'+1$	$a'b'$	a'	b'	a	b
11	5	$4 = 2^2$	1	4	11	44
5	11	$10 = 2.5$	1 2	10 5	5 10	50 25

1	55	$54 = 2.3^3$	1 2	54 27	1 2	54 27

b) Giải tương tự câu a) ta được: $d\left(a'b'-1\right)=5$. Từ đó:

d	$a'b'-1$	$a'b'$	a'	b'	a	b
1	5	6	6	1	6	1
			3	2	3	2
5	1	2	2	1	10	5

c) Có 6 cặp số (1, 36), (4, 9), (5, 40), (7, 42), (14, 21), (35, 70).

Câu 34. a) 1; b) 1111

Câu 35.

Đặt $A=\left[\text{n},n+1\right]$ và $B=\left[A,n+2\right]$. Áp dụng tính chất $\left[a,b,c\right]=\left[\left[a,b\right],c\right]$, ta có $B=\left[n,n+1,n+2\right]$.

Dễ thấy $\left(n,n+1\right)=1$, suy ra $\left[n,n+1\right]=n\left(n+1\right)$. $\left(do\ \left[a,b\right].\left(a,b\right)=ab\right)$

Lại áp dụng tính chất $\left[a;b\right]=\dfrac{a.b}{\left(a;b\right)}$ thế thì $\left[n,n+1,n+2\right]=\dfrac{n\left(n+1\right)\left(n+2\right)}{\left(n\left(n+1\right),n+2\right)}$

Gọi $d=\left(n\left(n+1\right),n+2\right)$. Do $\left(n+1,n+2\right)=1$nên $d=\left(n,n+2\right)=\left(n,2\right)$

Xét hai trường hợp:

- Nếu n chẵn thì d = 2, suy ra $\left[n,n+1,n+2\right]=\dfrac{n\left(n+1\right)\left(n+2\right)}{2}$
- Nếu n lẻ thì d = 1, suy ra $\left[n,n+1,n+2\right]=n\left(n+1\right)\left(n+2\right)$.

Câu 36. Gọi d là một ước chung của $3n+4$ và $5n+1$ $(d\in\mathbb{N}^*)$

Ta có $3n+4\,\vdots\,d$ và $5n+1\,\vdots\,d$ nên $5\left(3n+4\right)-3\left(5n+1\right)\vdots\,d\Leftrightarrow 17\,\vdots\,d\Rightarrow d\in\left\{1;17\right\}$

Để $3n+4$ và $5n+1$ có ước chung lớn hơn 1, ta phải có $3n+4\,\vdots\,17$

hay $3\left(n-10\right)\vdots\,17$ mà $UCLN\left(3\ ;\ 17\right)=1$ nên $\left(n-10\right)\vdots\,17$

$n-10=17k$ $(k\in\mathbb{N})$. Vì $n\in\mathbb{N},\ n<30\Rightarrow -10\le n-10<20$ nên $k\in\left\{0\ ;\ 1\right\}$.

Với $k=0\Rightarrow n=10$, khi đó $3.10+4\,\vdots\,17$ và $5.10+1\,\vdots\,17$ (thỏa mãn)

Với $k=1\Rightarrow n=27$, khi đó $3.27+4\,\vdots\,17$ và $5.27+1\,\vdots\,17$ (thỏa mãn)

Vậy $n\in\left\{10\ ;\ 27\right\}$.

Câu 37. Để $\dfrac{2n+1}{n+2}$ có giá trị là số nguyên thì $2n+1\,\vdots\,n+2$ (1)

Vì $n+2\,\vdots\,n+2$ nên $2\left(n+2\right)\vdots\,n+2$ (2)

Từ (1) và (2) $\left[2(n+2)-(2n+1)\right] \vdots n+2$

$\Rightarrow 3 \vdots n+2$

Vì $n+2$ nguyên nên $n+2 \in \{-1;-3;1;3\}$ $\Rightarrow n \in \{-3;-5;-1;1\}$

Vậy với $\Rightarrow n \in \{-3;-5;-1;1\}$ thì phân số $\dfrac{2n+1}{n+2}$ là số nguyên.

Câu 38. Giả sử sau a phút (kể từ lúc 6h) thì 3 xe lại cùng xuất phát tại bến lần thứ 2.

Lập luận để suy ra a là BCNN $(75,60,50)$.

Tìm được $\text{BCNN}(75,60,50) = 300$ (phút) = 5 giờ.

Sau 5h thì 3 xe lại cùng xuất phát, lúc đó là 11h cùng ngày.

Câu 39. Giả sử $d \in UCLN(2n+1, 6n+5) \Rightarrow \begin{cases} 2n+1 \vdots d \\ 6n+5 \vdots d \end{cases} \Rightarrow 6n+5-3(2n+1) \vdots d \Rightarrow 2 \vdots d \Rightarrow d \in \{1;2\}$

Vì n là số nguyên dương nên $2n+1 \not\vdots\, 2 \Rightarrow d \neq 2 \quad \Rightarrow \quad d=1$

Vậy với mọi số nguyên dương n thì phân số $\dfrac{2n+1}{6n+5}$ luôn tối giản.

Câu 40. Cho phân số: $P = \dfrac{6n+5}{3n+2}\ (n \in \mathbb{N})$.

a) Chứng tỏ rằng phân số P là phân số tối giản.

Gọi $d = \text{ƯC}(6n+5, 3n+2)$ (với $d \in \mathbb{N}^*$)

$\Rightarrow 6n+5 \vdots d$ và $3n+2 \vdots d$

$\Rightarrow (6n+5)-(3n+2).2 \vdots d \Leftrightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d=1$

Vậy phân số P là phân số tối giản.

b) Với giá trị nào của n thì phân số P có giá trị lớn nhất?

Ta có: $P = \dfrac{6n+5}{3n+2} = \dfrac{2(3n+2)+1}{3n+2} = 2 + \dfrac{1}{3n+2}$

Với $n \in \mathbb{N}$ thì $3n+2 \geq 2 \Rightarrow \dfrac{1}{3n+2} \leq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2 + \dfrac{1}{3n+2} \leq \dfrac{5}{2} \Rightarrow P \leq \dfrac{5}{2}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow n=0$

Vậy $n=0$ thì phân số P có giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{5}{2}$.

Câu 41. Gọi $UCLN(a;b) = d \Rightarrow \begin{cases} a = d.a_1 \\ b = d.b_1 \end{cases} (a_1;b_1) = 1$

Mà : $a+2b = 48 \Rightarrow da_1 + 2db_1 = 48 \Rightarrow d(a_1+2b_1) = 48 \Rightarrow d \in U(48)$ (1)

Ta lại có: 3.BCNN(a; b) + ƯCLN(a; b) = 114

$\Rightarrow d + 3.a_1.b_1.d = 114 \Rightarrow d(1+3a_1.b_1) = 114 \Rightarrow d \in U(114)$ (2)

Từ (1) và (2) => $d \in UC(48;114) = \{1;2;3;6\}$

Mà : $d\left(1+3a_1.b_1\right)=114=3.38 \Rightarrow d\,\vdots\,3 \Rightarrow$ d = 3 hoặc d = 6

TH1 : d = 3=> $\begin{cases} a_1+2b_1=16 \\ 1+3a_1.b_1=38 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1+2b_1=16 \\ 3a_1.b_1=37 \end{cases}$ (loại)

TH2 : $d=6 \Rightarrow \begin{cases} a_1+2b_1=8 \\ 1+3a_1.b_1=19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1+2b_1=8 \\ a_1.b_1=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1=2 \Rightarrow a=12 \\ b_1=3 \Rightarrow b=18 \end{cases}$

Vậy a = 12 và b = 18

Câu 42. Đặt (11a + 2b, 18a + 5b) = d

$$\Rightarrow \begin{cases} 55a+10b\,\vdots\,d \\ 36a+10b\,\vdots\,d \end{cases} \Rightarrow 19a\,\vdots\,d$$

Và $\begin{cases} 198a+36b\,\vdots\,d \\ 198a+55b\,\vdots\,d \end{cases} \Rightarrow 19b\,\vdots\,d$

Do đó $\begin{cases} 19a\,\vdots\,d \\ 19b\,\vdots\,d \end{cases} \Rightarrow 19\,\vdots\,d$ (vì (a, b) = 1)

Vậy $d \in \{1;9\}$

Câu 43. Ta có

$$\begin{aligned}
(a,b) &= (a,a+b) \\
&= (a+a+b,a+b) = (2a+b,a+b) \\
&= (2a+b,3a+2b) = (5a+3b,3a+2b) \\
&= (5a+3b,2(5a+3b)+3a+2b) \\
&= (5a+3b,13a+8b)
\end{aligned}$$

Câu 44. Giả sử tồn tại số nguyên tố p sao cho $\begin{cases} (ab+bc+ca)\,\vdots\,p \\ abc\,\vdots\,p \end{cases}$

Từ $abc\,\vdots\,p \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a\,\vdots\,p \\ b\,\vdots\,p \\ c\,\vdots\,p \end{array}\right.$

Giả sử $a\,\vdots\,p \Rightarrow ab+ac\,\vdots\,p \Rightarrow bc\,\vdots\,p \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b\,\vdots\,p \\ c\,\vdots\,p \end{array}\right.$

Điều này mâu thuẫn với (a, b) = 1 hoặc (a, c) = 1.

Câu 45. Ta có $\left(a+b,a^2-ab+b^2\right)=\left(a+b,\left(a+b\right)^2-\left(a^2-ab+b^2\right)\right)=\left(a+b,3ab\right)$

Do (a, b) = 1 nên (a + b, ab) = 1

Vì vậy $\left(a+b,a^2-ab+b^2\right)=\left(a+b,3ab\right)=\left(a+b,3\right)\Rightarrow d\in\{1;3\}$

* Xét d = 1

Khi đó $\dfrac{a+b}{a^2-ab+b^2}=\dfrac{8}{73}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=8\\a^2-ab+b^2=73\end{cases}\Leftrightarrow 3ab=-9$

Điều này không xảy ra vì $a,b\in N$

* Xét d = 3

Khi đó $\dfrac{a+b}{a^2-ab+b^2}=\dfrac{8}{73}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=24\\a^2-ab+b^2=219\end{cases}\Leftrightarrow 3ab=-9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(a;b\right)=\left(17;7\right)\\\left(a;b\right)=\left(7;17\right)\end{array}\right.$

Thử lại ta được hai cặp số trên thỏa mãn điều kiện bài toán.

Câu 46. Đặt $d=\left(2^{2^n}+1,\ 2^{2^n}+1\right)\Rightarrow d$ lẻ.

Ta có

$$\begin{aligned}2^{2^n}-1&=\left(2^{2^{n-1}}+1\right)\left(2^{2^{n-1}}-1\right)\\&=\left(2^{2^{n-1}}+1\right)\left(2^{2^{n-2}}+1\right)\left(2^{2^{n-2}}-1\right)\\&=\left(2^{2^{n-1}}+1\right)\left(2^{2^{n-2}}+1\right)...\left(2^{2^m}+1\right)\left(2^{2^m}-1\right)\,\vdots\, d\end{aligned}$$

Do đó $\left(2^{2^n}+1\right)-\left(2^{2^n}-1\right)=2\,\vdots\, d\Rightarrow d=1$ (vì d lẻ)

Vậy $\left(2^{2^n}+1,\ 2^{2^n}+1\right)=1$

Câu 47. Đặt d = (m, n). Khi đó tồn tại các số tự nhiên r, s sao cho rn - sm = d.

Đặt $d_1=\left(2^m-1,\ 2^n-1\right)\Rightarrow d_1$ lẻ.

Ta có:

$2^n-1\,\vdots\, 2^d-1$ (vì $n\,\vdots\, d$)

$2^m-1\,\vdots\, 2^d-1$ (vì $m\,\vdots\, d$)

Do đó $d_1 \vdots 2^d - 1$

Mặt khác: $\begin{cases} 2^n - 1 \vdots d_1 \Rightarrow 2^{rn} - 1 \vdots d_1 \\ 2^m - 1 \vdots d_1 \Rightarrow 2^{sm} - 1 \vdots d_1 \end{cases} \Rightarrow 2^{rn} - 2^{sm} = 2^{sm}\left(2^{rn-sm} - 1\right) = 2^{sm}\left(2^d - 1\right) \vdots d_1$

Mà $\left(2, d_1\right) = 1 \Rightarrow 2^d - 1 \vdots d_1$

Từ đó suy ra $d_1 = 2^d - 1$

Vậy $\left(2^m - 1,\ 2^n - 1\right) = 2^{(m,n)} - 1$

Câu 48. Giả sử $a \le b$

Do ƯCLN (a, b) = 15 $\Rightarrow \begin{cases} a = 15.m \\ b = 15.n \end{cases}$ $(m \le n), (m, n) = 1,$

Khi đó BCNN(a; b) = 15.*m.n.*

Do đó:

ƯCLN(a; b).BCNN(a; b) $= (15.m.n).15 = (15m).(15n) = a.b \Rightarrow ab = 300.15 = 4500$

$$\Rightarrow 15m.15n = 4500 \Rightarrow \begin{cases} mn = 20 \\ m \le n \end{cases}$$

Ta có bảng:

m	n	a	b
1	20	15	300
4	5	60	75

Vậy các cặp số (a ; b) cần tìm là : (15 ;60), (300 ; 75) và đảo ngược lại.

Câu 49. Giả sử $d = (a, a+2) \Rightarrow d \mid a$ và $d \mid a + 2 \Rightarrow d \mid a + 2 - a \Rightarrow d = 1$ hoặc d = 2.

Với a lẻ thì (a, a + 2) = 1.

Với a chẵn thì (a, a + 2) = 2.

Câu 50. Giả sử $d \mid \left(1 + a + ... + a^{m-1}\right)$ và $d \mid (a - 1)$,suy ra :

$d \mid \left(a^{m-1} - 1\right) + \left(a^{m-2} - 1\right) + ... + (a - 1) + m \Rightarrow d \mid m.$

Vậy $d \mid \text{m}$ và $d \mid a - 1.$

Ngược lại, nếu $d \mid a$ và $d \mid a - 1$ thì $d\left(m^{m-1} + ... + a + 1\right)$

Vậy $\left(1 + a + ... + a^{m-1}, a - 1\right) = (m, a - 1)$

Câu 51. Giả sử $d \mid a, b \mid d, c \mid d$ thì d lẻ.

Ta có $a+b \vdots d$ và $a+b \vdots 2 \Rightarrow a+b \vdots 2d \left(do \ (2,d)=1\right) \Rightarrow \frac{a+b}{2} \vdots d.$

Tương tự: $\frac{b+c}{2} \vdots d$ và $\frac{c+d}{2} \vdots d$

Vậy d là ước của $\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}.$

Ngược lại, giả sử d là ước của $\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}$ thì d là ước của $\frac{a+b}{2}+\frac{a+c}{2}-\frac{b+c}{2}=a.$

Tương tự $d \mid$ b và $d \mid c.$

Vậy: $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}\right)=(a,b,c).$

Câu 52. Giả sử $d=\left(a_1, a_2, \ldots, a_{49}\right)$, khi đó $a_1+a_2+\ldots+a_{49}=999 \vdots d$, suy ra d là ước của $999=3^3.37$

Vì $d \mid a_k \left(k=1,2,\ldots,49\right)$ nên $a_k \geq d, \forall k \Rightarrow 999=a_1+a_2+\ldots+a_{49} \geq 49d$

$\Rightarrow d \leq \frac{99}{29}<21.$ Vậy d chỉ có thể nhận các giá trị 1,3, 9.

Giá trị d lớn nhất bằng 9 khi $a_1=a_2=\ldots=a_{48}=9; a_{49}=567$ (vì $9.48+567=999$)

Câu 53. Giả sử $d=(11a+2b, 18a+5b)$, khi đó $d \mid 18a+5b$ và $d \mid 11a+2b$, suy ra $d \mid 11(18a+5b)-18(11a+2b)=19b \Rightarrow d \mid 19$ hoặc $d \mid b.$

- Nếu $d \mid b$ thì từ $d \mid 5(11a+2b)-3(18a+5b)=a-5b \Rightarrow d \mid a \Rightarrow d \mid (a,b)=1 \Rightarrow d=1.$

- Nếu $d \mid 19$ thì d = 1 hoặc d = 19.

Vậy (11a + 2b, 18a + 5b) bằng 1 hoặc bằng 19.

Câu 54. Giả sử $d=\left(m+n, m^2+n^2\right)$ khi đó $d \mid m+n$ và $d \mid \mathrm{m}^2+n^2$ suy ra $d \mid (m+n)^2-\left(m^2-n^2\right)=2mn.$

$d \mid m+n$ và $d \mid 2\mathrm{mn}$ suy ra $d \mid 2m(m+n)-2mn=2m^2$ và $d \mid 2n(m+n)-2mn=2n^2.$

Do đó $d \mid \left(2m^2, 2n^2\right)=2\left(m^2, n^2\right)=2 \Rightarrow d=1$ hoặc d = 2.

Nếu m, n cùng lẻ thì d = 2.

Nếu m, n khác tính chẵn lẻ thì d = 1.

Câu 55. a) Giả sử $d=(21n+4,14n+3)$, khi đó $d\mid 21n+4$ và $d\mid 14n+3$ suy ra $d\mid 2(21n+4)$ và $d\mid 3(14n+3)\Rightarrow d\mid 3(14n+3)-2(21n+4)=1\Rightarrow d=1.$

Vậy $\frac{21n+4}{14n+3}$ là phân số tối giản.

b) Giả sử $d=(2n+1,2n^2+2n)$ suy ra $d\mid 2n^2+2n-n(2n+1)=n.$

Từ $d\mid 2n+1$ và $d\mid n$ suy ra $d\mid 2n+1-2n=1\Rightarrow d=1.$

Vậy $\frac{2n+1}{2n^2+2n}$ là phân số tối giản.

Câu 56. a) Ta có: $\frac{18n+3}{21n+7}=\frac{3(6n+1)}{7(3n+1)}$. Mà $(3,7)=(3,3n+1)=(6n+1,3n+1)=1$ nên để là phân số $\frac{18n+3}{21n+7}$ tối giản ta phải có $(6n+1,7)=1.$

Mặt khác, 6n + 1 = 7n – (n – 1), do đó :

$$(6n+1,7)=1.\Leftrightarrow(n-1,7)=1\Leftrightarrow n\neq 7k+1(k\in Z).$$

Vậy, với n chia cho 7 không dư 1 thì $\frac{18n+3}{21n+7}$ là phân số tối giản.

b) Ta có $\frac{2n+3}{n+7}=2-\frac{11}{n+7}$ tối giản $\Leftrightarrow(n+7,11)=1\Leftrightarrow n\neq 11k-7\,(k\in Z),$

Câu 57. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $a\le b.$

Vì $(a,b)=16$ nên $a=16a_1,b=16b_1$ với $(a_1,b_1)=1.$

Từ $a+b=128$ suy ra $16(a_1+b_1)=128\Leftrightarrow a_1+b_1=8$. Với điều kiện $a_1\le b_1$ và $(a_1,b_1)=1$ ta có $a_1=1,b_18$ hoặc $a_1=3,b_1=5$. Từ đó ta có $a=16,b=112$ hoặc $a=48,b=80.$

Câu 58. Ta có $\overline{ab}+\overline{ba}=10a+b+10b+a=11(a+b);33=11.3$. Vì (a + b) không chia hết cho 3 nên $(\overline{ab}+\overline{ba},33)=11$

Câu 59. Số có 3 chữ số tận cùng là 136 chia hết cho 8 nên có ít nhất 4 ước số dương là 1, 2, 4, 8.

Câu 60. $d \mid a, d \mid b$ thì $d \mid ma+nb, d \mid ka+lb$;

$$d \mid \mathrm{ma+nb}, d \mid \mathrm{ka+lb} \text{ thì } d \mid \mathrm{k}(ma+nb)-\mathrm{m}(ka+lb)=\pm b \Rightarrow d \mid b.$$

Tương tự : $d \mid a$.

Câu 61. Ta có 123456798 – 123456789 = 9 nên ƯCLN phải tìm chỉ có thể là 1, 3 hoặc 9, mà tất cả các số đã cho đều chia hết cho 9 nên ƯCLN phải tìm là 9.

Câu 62.

$$d=\left(2a-b,a^2+ab\right)\Rightarrow\begin{cases} d \mid a(2a+b)-\left(a^2+ab\right)=a^2 \\ d \mid b(2a+b)-2\left(a^2+ab\right)=b^2-2a\end{cases}\Rightarrow d \mid \left(a^2,b^2\right)=1\Rightarrow d=1$$

Câu 63.

$a)d=(12n+1,30n+2)\Rightarrow d \mid 5(12n+1)-2(30n+2)=1\Rightarrow d=1$

Vậy phân số $\dfrac{12n+1}{30n+2}$ là phân số tối giản.

b)$d=\left(15n^2+8\mathrm{n}+6,30n^2+21n+13\right)\Rightarrow d \mid 2\left(15n^2+8\mathrm{n}+6\right)-\left(30n^2+21n+13\right)=1\Rightarrow d \mid 5n+1$

$\Rightarrow d \mid 3n(5n+1)-\left(15n^2+8n+6\right)\Rightarrow d \mid 5n+6\Rightarrow d \mid (5n+6)-(5n+1)\Rightarrow d \mid 5$

$\begin{cases} d \mid 5n+6 \\ d \mid 5\end{cases}\Rightarrow d \mid 1\Rightarrow d=1.$

Vậy phân số $\dfrac{15n^2+8n+6}{30n^2+21n+13}$ là phân số tối giản.

Câu 64. $\dfrac{n+13}{n-2}=1+\dfrac{15}{n-2}$ tối giản $(15,n-2)=1.$

Do đó n – 2 không chia hết cho 3 và 5.

Do đó để phân số $\dfrac{n+13}{n-2}$ tối giản thì $n\neq 3k+2, n\neq 5l+2$

Câu 65. Chứng minh n lẻ là không chia hết cho 3.

Câu 66. Các số đã cho có dạng $\dfrac{k}{k+(n+2)}(k=7,8,..,31)$. Mà $\dfrac{k+(n+2)}{k}=1+\dfrac{n+2}{k}$ tối giản $\Leftrightarrow (n+2,k)=1\Leftrightarrow n+2$ nguyên tố cùng nhau với $7,8,\ldots,31$ và $n+2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow n+2=37\Leftrightarrow n=35.$

Câu 67. a) a = 6, b = 60 hoặc a = 12, b = 30 $(a\leq b)$;

b) Các cặp số (a, b) với $a \le b$ cần tìm là $(1;54),(2;27),(5;50),(10;25)$ và $(11;44)$

Câu 68. $n+1 \vdots [2,3,4,5,6,7,8,9] = 5.7.8.9 = 2520$. Vậy $n = 2519$.

Câu 69. Ta có: $N = ab(ab+1)(2ab+1)$ chia hết cho các số: $1; a$
$; b(ab+1)(2ab+1); b; a(ab+1)(2ab+1); ab+1; ab(2ab+1); 2ab+1$;
$ab(ab+1); N; ab; (ab+1)(2ab+1)$; $b(ab+1); a(2ab+1)$; $a(ab+1)$; $b(2ab+1)$ có 16 ước dương Nên để N chỉ có đúng 16 ước dương thì a; b; $ab+1$; $2ab+1$ là số nguyên tố . Do $a,\ b > 1 \Rightarrow ab+1 > 2$

Nếu $a;b$ cùng lẻ thì $ab+1$ chia hết cho 2 nên là hợp số (vô lý). Do đó không mất tính tổng quát, giả sử a chẵn b lẻ $\Rightarrow a = 2$.

Ta cũng có nếu b không chia hết cho 3 thì $2ab+1 = 4b+1$ và $ab+1 = 2b+1$ chia hết cho 3 là hợp số (vô lý)$\Rightarrow b = 3$.

Vậy $a = 2;\ b = 3$.

Câu 70. Đặt A = $p^2 - pq + 2q^2$ và B = $2p^2 + pq + q^2$. Xét các trường hợp:

+) $p = q = 2$, không thoả mãn.

+) $p = 2, q \ge 3,$ khi đó

$$(A,B) = \left(4 - 2q + 2q^2, 8 + 2q + q^2\right)$$
$$= \left(2 - q + q^2, 8 + 2p + q^2\right) \qquad (\text{vì } 8 + 2p + q^2 \vdots 2)$$
$$= \left(6 + 3q, 8 + 2q + q^2\right)$$
$$= \left(2 + q, 8 + (2 + q)q\right), \qquad (\text{vì } 8 + 2p + q^2 \vdots 3)$$
$$= d.$$

Suy ra d lẻ và $d \mid 8$. Do đó $d = 1$.

+) $q = 2, p \ge 3,$ khi đó

$$(A,B) = \left(\mathrm{p}^2 - 2\mathrm{p} + 8, 2\mathrm{p}^2 + 2p + 4\right)$$
$$= \left(\mathrm{p}^2 - 2\mathrm{p} + 8, \mathrm{p}^2 + p + 2\right), \quad (\text{vì } p^2 - 2p + 8 \vdots 2)$$
$$= \left(3p - 6, p^2 + p + 2\right)$$
$$= \left(p - 2, p^2 + p + 2\right), \qquad (\text{vì } p^2 + p + 2 \vdots 3)$$
$$= \left(p - 2, p^2 + 4\right)$$
$$= \left(p - 2, (p - 2)^2 + 4p\right)$$
$$= d.$$

Suy ra $d\,|\,4p$, d lẻ và $d < p$. Do đó $d = 1$.

+) $p,q \ge 3$,. Vì p,q đều là số lẻ nên $p+q$ và $p-q$ là các số chẵn. Suy ra $A = p(p-q)+2q^2 \vdots 2$ và $B = 2p^2 + q(q+p) \vdots 2$. Vậy A và B không nguyên tố cùng nhau.

Tóm lại: $p = 2, q \ge 3$, q nguyên tố hoặc $q = 2, p \ge 3$, p nguyên tố.

Câu 71. Gọi $(a+b, a^2+b^2) = d \Rightarrow a+b \vdots d$ và $a^2+b^2 \vdots d$

$\Rightarrow a^2+2ab+b^2 \vdots d \Rightarrow 2ab \vdots d$ vì $(a,b)=1$

$\Rightarrow (ab, a+b) = 1 \Rightarrow (2ab, a+b) = (2, a+b)$

$\Rightarrow d$ là ước số của $(2ab, a+b) \Rightarrow d$ là ước số của $(2, a+b)$

$\Rightarrow d$ là ước số của 2 $\Rightarrow d = 1$ hoặc $d = 2$.

Nếu $d = 1 \Rightarrow \begin{cases} a+b=7 \\ a^2+b^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=7 \\ ab=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=4 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a=4 \\ b=3 \end{cases}$.

Nếu $d = 2 \Rightarrow \begin{cases} a+b=14 \\ a^2+b^2=50 \end{cases}$ vô nghiệm.

Tóm lại $(a,b) = (3,4), (4,3)$

Câu 72. Đặt $A = m+n$ và $B = m^2+n^2$. Gọi d là ước chung lớn nhất của A và B với $d \ge 1$.

Khi đó ta có $A \vdots d; B \vdots d$ hay ta được $m+n \vdots d; m^2+n^2 \vdots d$.

Ta lại có $A^2 - B = (m+n)^2 - (m^2+n^2) = 2mn$. Mà $(A^2 - B) \vdots d$ nên suy ra $2mn \vdots d$.

Lại có $m+n \vdots d$ nên $2n(m+n) \vdots d \Rightarrow 2mn + 2n^2 \vdots d$

Kết hợp với $2mn \vdots d$ ta được $2n^2 \vdots d$. Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được $2m^2 \vdots d$.

Theo bài ra thì m và n nguyên tố cùng nhau nên m và n không cùng tính chẵn. Ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Trong hai số m và n có một số chẵn và một số lẻ, khi đó $m+n$ là số lẻ nên từ $m+n$ chia hết cho d ta suy ra được d là số lẻ. Từ đó ta được m^2 và n^2 cùng chia hế cho d. Mà ta lại có m và n nguyên tố cùng nhau nên suy ra $d = 1$.
- Trường hợp 2: Cả hai số m và n đều là số lẻ, khi đó từ $m+n$ là số chẵn nên từ $m+n$ chia hết cho d với d lớn nhất ta suy ra được d là số chẵn.

Đặt $d = 2d'$, khi đó từ $2m^2 \vdots d$ và $2n^2 \vdots d$ ta được $m^2 \vdots d'$ và $n^2 \vdots d'$.

Do m và n nguyên tố cùng nhau nên suy ra $d' = 1$, do đó $d = 2$.

Vậy ta có hai kết quả như sau:

+ Nếu trong hai số m và n có một số chẵn và một số lẻ thì $\left(m+n, m^2+n^2\right) = 1$

+ Nếu cả hai số m và n cùng lẻ thì $\left(m+n, m^2+n^2\right) = 2$.

Câu 73. Giả sử các số nguyên dương a, b thỏa mãn yêu cầu bài toán, khi đó ta có $\left(4a+1, 4b-1\right) = 1$ và $16ab+1 \vdots \left(a+b\right)$.

Ta có $\left(4a+1\right)\left(4b+1\right) = 16ab+1+4\left(a+b\right) \vdots \left(a+b\right)$.

Lại có $4a+1+4b-1 = 4\left(a+b\right) \vdots \left(a+b\right)$. Mà $\left(4a+1, 4b-1\right) = 1$.

Nếu cả hai số $4a+1$ và $a+b$ cùng chia hết cho một số nguyên tố p nào đó, thì từ $4a+1+4b-1$ chia hết cho $\left(a+b\right)$ ta suy ra được $4b-1 \vdots p$, điều này mâu thuẫn với giả thiết $\left(4a+1, 4b-1\right) = 1$. Từ đó suy ra $\left(4a+1, a+b\right) = 1$.

Ta có $\left(4a+1\right)\left(4b+1\right) \vdots \left(a+b\right)$ và $\left(4a+1, a+b\right) = 1$ nên suy ra $4b+1 \vdots \left(a+b\right)$.

Ngược lại giả sử a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $4b+1 \vdots \left(a+b\right)$

Khi đó từ $\left(4a+1\right)\left(4b+1\right) \vdots \left(a+b\right)$ ta suy được $16ab \vdots \left(a+b\right)$.

Nếu hai số $4a+1$ và $4b-1$ cùng chia hết cho p thì p là số nguyên tố lẻ.

Ta lại có $4a+1+4b-1 = 4\left(a+b\right) \vdots \left(a+b\right)$, suy ra $4b+1 \vdots p$.

Do đó ta được $4b+1-\left(4b-1\right) = 2 \vdots p$, điều này mâu thuẫn với p là số nguyên tố lẻ.

Từ đó ta được $\left(4a+1, 4b-1\right) = 1$.

Như vậy hai số nguyên dương a, b thỏa mãn $\left(4a+1, 4b-1\right) = 1$ và $16ab \vdots \left(a+b\right)$ tương đương với hai số nguyên dương a, b thỏa mãn $4b+1 \vdots \left(a+b\right)$.

Chú ý là $4b+1$ là số lẻ và $4b+1 < 4\left(a+b\right)$ nên từ $4b+1 \vdots \left(a+b\right)$ ta suy ra được

$$\left[\begin{array}{l} 4b+1 = a+b \\ 4b+1 = 3\left(a+b\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3b+1 \\ b = 3a-1 \end{array}\right.$$

Như vậy cặp số nguyên dương $\left(a;b\right)$ là $\left(c;3c-1\right), \left(3c+1;c\right)$ với $c \in N^*$.

Câu 74. Ta có: $N = ab\left(ab+1\right)\left(2ab+1\right)$ chia hết cho các số:

$1; a; b\left(ab+1\right)\left(2ab+1\right); b; a\left(ab+1\right)\left(2ab+1\right); ab+1; ab\left(2ab+1\right); 2ab+1$;

$ab(ab+1); N; ab; (ab+1)(2ab+1); b(ab+1); a(2ab+1); a(ab+1); b(2ab+1)$ có 16 ước dương Nên để N chỉ có đúng 16 ước dương thì a; b; $ab+1$; $2ab+1$ là số nguyên tố. Do $a,\ b>1 \Rightarrow ab+1>2$

Nếu $a;b$ cùng lẻ thì $ab+1$ chia hết cho 2 nên là hợp số (vô lý). Do đó không mất tính tổng quát, giả sử a chẵn b lẻ $\Rightarrow a=2$.
Ta cũng có nếu b không chia hết cho 3 thì $2ab+1=4b+1$ và $ab+1=2b+1$ chia hết cho 3 là hợp số (vô lý) $\Rightarrow b=3$.

Vậy $a=2;\ b=3$.

Câu 75. Gọi d là ƯCLN(m, n) suy ra m^2, n^2, mn cùng chia hết cho d^2.

Do $\frac{m+1}{n}+\frac{n+1}{m}=\frac{m^2+n^2+m+n}{mn}$ là số nguyên nên m^2+n^2+m+n cũng chia hết cho d^2.

Suy ra m + n chia hết cho $d^2 \Rightarrow m+n \ge d^2 \Rightarrow \sqrt{m+n} \ge d$.

Câu 76. a) Dễ thấy bộ số $(a,b,c)=(1,3,7)$ thỏa mãn đề bài

b) Đặt $S=a+b+c+ab+bc+ac$.

Từ giả thiết suy ra S chia hết cho a,b,c.

Vì a,b,c đôi một khác nhau, do đó a,b,c đồng thời là các số nguyên tố thì $S \vdots abc$ hay

$$S=kabc(k\in\mathbb{N})$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a<b<c$.
Nếu $a=2$ thì b,c đều lẻ $\Rightarrow b+c+bc$ lẻ nên không chia hết cho 2.
Do đó $a\ge 3$ nên $b\ge 5, c\ge 7$. Từ $S=kabc(k\in\mathbb{N})$ suy ra

$0<k=\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<1 \Rightarrow k\notin\mathbb{N}$

Vậy a,b,c không thể đồng thời là các số nguyên tố.

Câu 77. Thay $x=2n+1 \Rightarrow A=4n(n+3)=4n(n+1+2)=4n(n+1)+8n$

Câu 78. Ta cần tìm $\overline{ab}$; cho biết $\overline{ab} \vdots ab$ với $1\le a,b\le 9$.

$\Leftrightarrow \overline{ab}=nab$ với n là số tự nhiên khác 0.

$\Leftrightarrow 10a+b=nab \Leftrightarrow 10a=b(na-1) \Rightarrow 10a \vdots (na-1)$

Nếu $a=1 \Rightarrow b(n-1)=10 \Rightarrow$ có thể lập bảng để chọn:

b	1	2	5
$n-1$	10	5	2
n	11	6	3

Nếu $a \neq 1 \Rightarrow (an-1) = 1 \Rightarrow an-1$ là ước số của 10.

$\Rightarrow an-1 \in \{1;2;5\} \Rightarrow an \in \{2;3;6\}$

$\Rightarrow (an-1,n) = (2;1),(3;1),(2;3),(3;2)$

Thay (a,n) vào ta tính được b.

Ta có: $(a;b) = (2;4),(3;6)$

Đáp số: $\overline{ab} \in \{11;12;15;24;36\}$

CHỦ ĐỀ 2. QUAN HỆ CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ

Câu 1. Ta có:

$$a^5 - a = a\left(a^4 - 1\right) = a\left(a^2 - 1\right)\left(a^2 + 1\right) = a\left(a+1\right)\left(a-1\right)\left[\left(a-4\right)^2 + 5\right]$$

$$= a\left(a+1\right)\left(a-1\right)\left(a-2\right)\left(a+2\right) + 5a\left(a+1\right)\left(a-1\right)$$

Do tích của số nguyên liên tiếp thì chia hết cho 5 và trong 5 số nguyên liên tiếp luôn có ba số nguyên liên tiếp mà tích của chúng chia hết cho 6 và $\left(6,5\right) = 1$

Suy ra $a\left(a+1\right)\left(a-1\right)\left(a-2\right)\left(a+2\right) \vdots 30$ và $5a\left(a+1\right)\left(a-1\right) \vdots 30$.

Vậy $a^5 - a \vdots 30$

Câu 2. a) Ta có:

$$A = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 = \left(n+1\right)^3 + 2\left(n+1\right) = ...$$

$$= n\left(n+1\right)\left(n+2\right) + 3\left(n+1\right)$$

Khi đó: $3\left(n+1\right) \vdots 3$; $n\left(n+1\right)\left(n+2\right)$ là tích của 3 số nguyên dương liên tiếp nên chia hết cho $3 \Rightarrow A \vdots 3$

b) Ta có:

$$a = 13k + 2, b = 13n + 3$$

$$a^2 + b^2 = \left(13k+2\right)^2 + \left(13n+3\right)^2 = ... = 13\left(13k^2 + 4k + 13n^2 + 4n + 1\right) \vdots 13$$

Câu 3. Ta có: $A = \left[n^3\left(n^2 - 7\right)^2 - 36n\right]$

$$= n\left[n\left(n^2-7\right) - 6\right]\left[n\left(n^2-7\right) + 6\right] = n\left(n^3 - 7n - 6\right)\left(n^3 - 7n + 6\right)$$

$$= n\left(n^3 - n - 6n - 6\right)\left(n^3 - n - 6n + 6\right) = n\left[\left(n^2-1\right) - 6\left(n+1\right)\right]\left[n\left(n^2-1\right) - 6\left(n-1\right)\right]$$

$$= n\left(n+1\right)\left(n^2 - n - 6\right)\left(n-1\right)\left(n^2 + n - 6\right) = n\left(n+1\right)\left(n+2\right)\left(n-3\right)\left(n-1\right)\left(n-2\right)\left(n+3\right)$$

Do đó A là tích của 7 số nguyên liên tiếp $\Rightarrow A \vdots 7\ \forall n \in \mathbb{Z}$

Câu 4. Ta có: $n = 2k$, với k là số nguyên; $n^3 - 28n = \left(2k\right)^3 - 28\left(2k\right) = 8k^3 - 56k$

$$= 8k\left(k^2 - 7\right) = 8k\left(k^2 - 1 - 6\right)$$

$$= 8k\left(k^2 - 1\right) - 48k = 8k\left(k-1\right)\left(k+1\right) - 48k$$

$k\left(k-1\right)\left(k+1\right)$ là tích ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 6 nên

$8k\left(k-1\right)\left(k+1\right) - 48k$ chia hết cho 48

Câu 5. Ta có: $n^3 - n = n\left(n-1\right)\left(n+1\right)$

Vì $n-1; n; n+1$ là ba số tự nhiên liên tiếp nên có một trong ba số đó chia hết cho 3.

Do đó n lẻ nên n có dạng $n = 2k + 1\ \left(k \in N\right)$

Ta có: $n^3 - n = n(n-1)(n+1) = (2k+1).2k.(2k+2) = 4.k.(k+1)(2k+1)$

Vì k và (k + 1) là 2 số tự nhiên liên tiếp suy ra: $k(k+1) \vdots 2 \Rightarrow 4k(k+1)(2k+1) \vdots 8 \Rightarrow (n^3 - n) \vdots 8$

Vì 3 và 8 là hai số nguyên tố cùng nhau nên kết hợp với $(1);(2)$ suy ra

$(n^3 - n) \vdots 24 \quad (\text{dpcm})$

Câu 6. Ta có:

$$n^3 + 17n = n^3 - n + 18n = n(n-1)(n+1) + 18n$$

Vì $n(n-1)(n+1)$ là tích ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2 và 3, $(2,3) = 1$ nên chia hết cho 6

$18n \vdots 6$, suy ra điều phải chứng minh

Câu 7. Ta có:

$Q = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$

$= n^3 + (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + (n^3 + 6n^2 + 12n + 8)$

$= 3(n^3 + 3n^2 + 5n + 3)$

Đặt $C = n^3 + 3n^2 + 5n + 3 = n^3 + n^2 + 2n^2 + 2n + 3n + 3$

$= n^2(n+1) + 2n(n+1) + 3(n+1)$

$= n(n+1)(n+2) + 3(n+1)$

Ta thấy $n(n+1)(n+2)$ chia hết cho 3(vì tích 3 số tự nhiên liên tiếp)

Và $3(n+1) \vdots 3 \Rightarrow C$ chia hết cho 3

Nên $Q = 3C$ chia hết cho 9

Câu 8. Ta có: $2019^{2021} + 2021^{2019} = (2019^{2021} + 1) + (2021^{2019} - 1)$

Vì $(2019^{2021} + 1) \vdots (2019 + 1) \Leftrightarrow (2019^{2021} + 1) \vdots 2020.$ (1)

$(2021^{2019} - 1) \vdots (2021 - 1) \Leftrightarrow (2021^{2019} - 1) \vdots 2020. \qquad (2)$

Từ (1) và (2) ta có đpcm.

Câu 9.

a) Ta có: $8^5 + 2^{11} = (2^3)^5 + 2^{11} = 2^{15} + 2^{11} = 2^{11}.(2^4 + 1) = 2^{11}.17$ chia hết cho 17

b) Ta có: $19^{19} + 69^{19} \vdots (19 + 69) \Leftrightarrow 19^{19} + 69^{19} \vdots 88 \Rightarrow 19^{19} + 69^{19} \vdots 44$

Câu 10.

Nếu $n = 3k(k \in \mathbb{Z})$ thì $A = 9k^2 + 3k + 2$ không chia hết cho 3.

Nếu $n = 3k + 1(k \in \mathbb{Z})$ thì $A = 9k^2 + 9k + 4$ không chia hết cho 3.

Nếu $n = 3k + 2(k \in \mathbb{Z})$ thì $A = 9k^2 + 15k + 8$ không chia hết cho 3.

Do đó *A* không chia hết cho 3 với mọi số nguyên *n*.

Vậy A không chia hết cho 15 với mọi số nguyên n.

Câu 11. Ta có : $n^4+6n^3+11n^2+30n-24$

$=\left(n^4+6n^3+11n^2+6n\right)+\left(24n-24\right)=n\left(n^3+6n^2+11n+6\right)+24\left(n-1\right)$

$=n\left[\left(n^3+n^2\right)+\left(5n^2+5n\right)+\left(6n+6\right)\right]+24\left(n-1\right)=n\left(n+1\right)\left(n^2+5n+6\right)+24\left(n-1\right)$

$=n\left(n+1\right)\left(n+2\right)\left(n+3\right)+24\left(n-1\right)$

Vì n; n + 1; n + 2; n + 3; là bốn số tự nhiên liên tiếp nên tích của chúng chia hết cho 3.

Mặt khác trong 4 số tự nhiên liên tiếp luôn tồn tại 2 số chẵn liên tiếp nên có một số chia hết cho 2, một số chia hết cho 4 . Vậy $n\left(n+1\right)\left(n+2\right)\left(n+3\right)$ chia hết 2.3.4 = 24 và 24 (n - 1) chia hết cho 24 nên $n^4+6n^3+11n^2+30n-24$ chia hết cho 24.

Câu 12. Ta có: $2a^2+3ab+2b^2 \vdots 7$

$\Rightarrow 2(a^2+b^2-2ab)+7ab \vdots 7 \Rightarrow 2\left(a-b\right)^2+7ab \vdots 7$

Do $7ab \vdots 7$ $\left(a,b\in Z\right)\Rightarrow 2\left(a-b\right)^2 \vdots 7$ $do\left(2,7\right)=1$

Từ đó ta có $a^2-b^2=(a-b)(a+b) \vdots 7$

Vậy $(a^2-b^2) \vdots 7$

Câu 13. Vì n là số tự nhiên không chia hết cho 3 nên $n=3k+1$ hoặc $n=3k+2$ $\left(k\in Z\right)$.

- Xét $n=3k+1$ ta có: $3^{2n}=3^{2(3k+1)}=3^{6k}.3^2=\left(3^3\right)^{2k}.9=27^{2k}.9\equiv 9\ \left(\text{mod } 13\right)$

$$3^n=3^{3k+1}=3^{3k}.3=\left(3^3\right)^k.3=27^k.3\equiv 3.$$

Suy ra: $P=3^{2n}+3^n+1\equiv 9+3+1=13\equiv 0\ \left(\text{mod } 13\right)$.

- Xét $n=3k+2$ ta có: $3^{2n}=3^{2(3k+2)}=3^{6k}.3^4=\left(3^3\right)^{2k}.81=27^{2k}.81\equiv 81\equiv 3\ \left(\text{mod } 13\right)$

$$3^n=3^{3k+2}=3^{3k}.3^2=\left(3^3\right)^k.9=27^k.9\equiv 9.$$

Suy ra: $P=3^{2n}+3^n+1\equiv 3+9+1=13\equiv 0\ \left(\text{mod } 13\right)$

Vậy , với n là số tự nhiên không chia hết cho 3 thì $P=3^{2n}+3^n+1$ chia hết cho 13.

Câu 14. Xét x là số nguyên dương, ta thấy

$x^5-x=x\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x^2+1\right) \vdots 6$ $\left(1\right)$ (vì chứa tích của ba số nguyên liên tiếp)

Với $x=5q$ $\left(q\in\mathbb{Z}_+\right)$ thì $x^5-x \vdots 5$

Với $x=5q\pm 1$ $\left(q\in\mathbb{Z}_+\right)$ thì $x^5-x \vdots 5$

Với $x=5q\pm 2$ $\left(q\in\mathbb{Z}_+\right)$ thì $x^5-x \vdots 5$

Suy ra $x^5-x \vdots 5$ $\left(2\right)$ mà $\left(5,6\right)=1$ $\left(3\right)$

Từ $\left(1\right),\left(2\right),\left(3\right)$ suy ra $x^5-x \vdots 30$

Xét hiệu $Q-P=\left(a_1^5-a_1\right)+\left(a_2^5-a_2\right)+\left(a_3^5-a_3\right)+...+\left(a_{2019}^5-a_{2019}\right)$

Vì $x^5-x \vdots 30$ nên $Q-P \vdots 30$

Mà theo bài ra $P \vdots 30$ nên $Q \vdots 30$

Câu 15. Vì a là số tự nhiên chẵn nên a = 2k $(k \in N)$

Do đó $M = \dfrac{8k^3}{24}+\dfrac{4k^2}{8}+\dfrac{2k}{12}=\dfrac{k^3}{3}+\dfrac{k^2}{2}+\dfrac{k}{6}$

$$=\frac{2k^3+3k^2+k}{6}=\frac{k\left(k+1\right)\left(2k+1\right)}{6}$$

Ta có : $k\left(k+1\right) \vdots 2 \Rightarrow k\left(k+1\right)\left(2k+1\right) \vdots 2$

Ta cần chứng minh $k\left(k+1\right)\left(2k+1\right) \vdots 3$

+ Nếu k = 3n (với $n \in N$) thì $k\left(k+1\right)\left(2k+1\right) \vdots 3$

+ Nếu k = 3n + 1 (với $n \in N$) thì $2k+1 \vdots 3$

+ Nếu k = 3n + 2 (với $n \in N$) thì $k+1 \vdots 3$

Như vậy $\forall\ k \in N$ ta có $k\left(k+1\right)\left(2k+1\right)$ luôn chia hết cho 2 và cho 3. Mà (2, 3) = 1 $\Rightarrow$ $k\left(k+1\right)\left(2k+1\right) \vdots 6$

Vậy A có giá trị nguyên.

Câu 16. Với n = 0 ta có A(0) = 19 $\vdots$ 19

Giả sử A chia hết cho 19 với n = k nghĩa là: $A\left(k\right)=7.5^{2k}+12.6^k \vdots 19$

Ta phải chứng minh A chia hết cho 19 với n = k + 1 nghĩa là phải chứng minh:

$A\left(k+1\right)=7.5^{2(k+1)}+12.6^{k+1} \vdots 19$

Ta có: $A\left(k+1\right)=7.5^{2(k+1)}+12.6^{k+1} \vdots 19$

$$7.5^{2k}.5^2+12.6^n.6$$
$$=7.5^{2k}.6+7.5^{2k}.19+12.6^n.6$$
$$=8.A\left(k\right)+7.5^{2k}.19 \vdots 19$$

Vậy theo nguyên lý quy nạp thì A = $7.5^{2n}+12.6^n$ chia hết cho 19 với mọi số tự nhiên n

Câu 17. Ta có:

$5^{n+2}+26.5^n+8^{2n+1}=25.5^n+26.5^n+8.8^{2n}$

$=5^n\left(59-8\right)+8.64^n=59.5^n+8\left(64^n-5^n\right)$

$59.5^n \vdots 59$ và $8.\left(64^n-5^n\right) \vdots \left(64-5\right)=59$

Vậy $5^{n+2}+26.5^n+8^{2n+1} \vdots 59$

Câu 18. Dễ thấy $a^3-a=a\left(a-1\right)\left(a+1\right)$ là tích của 3 số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 3

Xét hiệu:

$A-(a_1+a_2+.....+a_{2016})=(a_1^3+a_2^3+......+a_{2016}^3)-(a_1+a_2+.....+a_{2016})$
$=(a_1^3-a_1)+(a_2^3-a_2)+......+(a_{2016}^3-a_{2016})$

Các hiệu trên chia hết cho 3 , do vậy A chia hết cho 3

Câu 19. a) Gọi 2 số phải tìm là a và b, ta có $a+b$ chia hết cho 3

Ta có: $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)\left[(a+b)^2-3ab\right]$

Vì $a+b$ chia hết cho 3 nên $(a+b)^2-3ab$ chia hết cho 3.

Do vậy, $(a+b)\left[(a+b)^2-3ab\right]$ chia hết cho 9

b) $n^5+1 \vdots (n^3+1) \Leftrightarrow (n^5+n^2-n^2+1) \vdots (n^3+1)$

$\Leftrightarrow n^2(n^3+1)-(n^2-1) \vdots (n^3+1)$
$\Leftrightarrow (n-1)(n+1) \vdots (n+1)(n^2-n+1)$
$\Leftrightarrow n-1 \vdots n^2-n+1$
$\Rightarrow n(n-1) \vdots n^2-n+1$

Hay $n^2-n \vdots n^2-n+1 \Rightarrow (n^2-n+1)-1 \vdots (n^2-n+1)$
$\Rightarrow 1 \vdots n^2-n+1$

Xét hai trường hợp:

+) $n^2-n+1=1 \Leftrightarrow n^2-n=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=0 \\ n=1 \end{array}\right.$

+) $n^2-n+1=-1 \Leftrightarrow n^2-n+2=0$, không có giá trị của n thỏa mãn

Câu 20. Từ giả thiết ta có

$a^2+b^2+2ab-c^2=2ab \Leftrightarrow (a+b)^2-c^2=2ab \Leftrightarrow (a+b+c)(a+b-c)=2ab$ (*).

Nếu a lẻ, b chẵn thì suy ra c lẻ dẫn tới $a+b-c$ chẵn.
Nếu a, b lẻ thì c chẵn suy ra $a+b-c$ chẵn.
Nếu a, b cũng chẵn thì c chẵn suy ra $a+b-c$ chẵn.
Như vậy trong mọi trường hợp ta luôn có $a+b-c$ chẵn $\Rightarrow a+b-c=2k$ $(k \in \mathbb{Z})$.
Từ (*) ta cũng suy ra $2k(a+b+c)=2ab \Leftrightarrow k(a+b+c)=ab \Leftrightarrow ab \vdots a+b+c$.

Câu 21. Ta có: $F = n^3 + 4n^2 - 20n - 48 = (n-4)(n+2)(n+6)$.

Thử với $n = 1; 2; 3$ thì F đều không chia hết cho 125.

Thử với $n = 4$ thì $F = 0$ chia hết cho 125.

Vậy số nguyên dương bé nhất cần tìm là: $n = 4$.

Câu 22. Theo đề bài có: $a+b^2=k(a^2b-1)$ $(k \in N^*)$

$\Leftrightarrow a+k=b(ka^2-b) \Leftrightarrow a+k=mb$ (1)

Với $ka^2-b=m$ $(m \in N^*) \Rightarrow m+b=ka^2$ (2)

Từ (1) và (2) có $(m-1)(b-1)=mb-b-m+1$

$= a + k - ka^2 + 1 = (a + 1)(k + 1 - ka)$ (3)

Vì m > 0 theo (1) nên $(m - 1)(b - 1) \geq 0$. Từ (3)

=> $k + 1 - ka \geq 0$ => $k + 1 \geq ka$ => $1 \geq k(a - 1)$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} k(a-1)=0 \\ k(a-1)=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=2, k=1 \end{array}\right.$$

* Nếu a = 1 từ (3) => (m – 1)(b – 1) = 2 => b = 2 hoặc b = 3

=> (a; b) = (1; 2) và (1; 3)

* Nếu a = 2, k = 1 => (m -1)(b – 1) = 0

Khi m = 1 từ (1) => (a; b) = (2; 3)

Khi b = 1 => (a; b) = (2; 1)

Thử lại ta có đáp số (a,b) = (1,2),(1,3), (2,3),(2,1)

Câu 23. - Xét phép chia của xy cho 3

Nếu xy không chia hết cho 3 thì

$$\begin{cases} x \equiv \pm 1 \pmod 3 \\ y \equiv \pm 1 \pmod 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 \equiv \pm 1 \pmod 3 \\ y^2 \equiv \pm 1 \pmod 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z^2 = x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod 3 \quad \text{(Vô lí)}$$

Vậy xy chia hết cho 3 (1)

- Xét phép chia của xy cho 4

Nếu xy không chia hết cho 4 thì

TH1: $\begin{cases} x \equiv \pm 1 (\text{mod}\, 4) \\ y \equiv \pm 1 (\text{mod}\, 4) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 \equiv 1 (\text{mod}\, 4) \\ y^2 \equiv 1 (\text{mod}\, 4) \end{cases}$$

$$\Rightarrow z^2 = x^2 + y^2 \equiv 2 (\text{mod}\, 4) \text{ (vô lí)}$$

TH2: Trong hai số x,y một số chia 4 dư 2, một số chia 4 dư 1 hoặc -1. Không mất tính tổng quát giả sử

$$\begin{cases} x \equiv \pm 1 (\text{mod}\, 4) \\ y \equiv 2 (\text{mod}\, 4) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 \equiv 1 (\text{mod}\, 8) \\ y^2 \equiv 4 (\text{mod}\, 8) \end{cases}$$

$$\Rightarrow z^2 = x^2 + y^2 \equiv 5 (\text{mod}\, 8) \text{ (vô lí)}$$

- Vậy xy chia hết cho 4 (2)

- Từ (1) và (2): Vậy xy chia hết cho 12

Câu 24. Ta có

$B=1.2.3.....n.\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right)$ $(*)$ là số tự nhiên. Thật vậy:

Với $n=1$ thì $B=1\in\mathbb{N}$ suy ra $(*)$ đúng.

Với $n=2$ thì $B=3\in\mathbb{N}$ suy ra $(*)$ đúng.

Giả sử $(*)$ đúng khi $n=k$, nghĩa là $B=1.2.3.....k.\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{k}\right)\in\mathbb{N}$.

Cần chứng minh $(*)$ đúng khi $n=k+1$, nghĩa là

$B=1.2.3.....(k+1).\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{(k+1)}\right)\in\mathbb{N}$.

Ta có: $B=1.2.3.....(k+1).\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{(k+1)}\right)=1.2.3.....\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{k}\right)(k+1)+1.2.3.....k$

Có $\begin{cases}1.2.3.....\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{k}\right)\in\mathbb{N}\\ k+1\in\mathbb{N}\\ 1.2.3.....k\in\mathbb{N}\end{cases}\Rightarrow B\in\mathbb{N}$.

Vậy $1.2.3.....n.\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right)$ là số tự nhiên.

Suy ra, với $n=2k$ thì $1.2.3.....2k\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2k}\right)$ và $1.2.3.....k\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{k}\right)$ là các số tự nhiên.

Suy ra $\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+...+\frac{1}{2k}\right)(k+1)(k+2).....2k$ cũng là các số tự nhiên.

Áp dụng các chứng minh ta có: $1.2.....1009.\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{1009}\right)$ và

$\left(\frac{1}{1010}+\frac{1}{1011}+...+\frac{1}{2018}\right).1010.1011.....2018$ cũng là các số tự nhiên.

Ta có $\begin{cases}1011\,\vdots\,3\\ 1342\,\vdots\,673\end{cases}\Rightarrow 1010.1011.....1342.....2018\,\vdots\,2019$

$\Rightarrow 1.2.....1009.\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{1009}\right).1010.1011....1342.....2018\,\vdots\,2019$.

Và $\begin{cases}3\,\vdots\,3\\ 673\,\vdots\,673\end{cases}\Rightarrow 1.2.3....673.....1009\,\vdots\,2019$

$\Rightarrow 1.2.....1009.\left(\frac{1}{1010}+\frac{1}{1011}+...+\frac{1}{2018}\right).1010.1011.....2018 \vdots 2019$.

Vậy số tự nhiên $A=1.2.3....2017.2018.\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2017}+\frac{1}{2018}\right)$ chia hết cho 2019.

Câu 25. Ta có:

$$P(x)=(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)+2010$$
$$=(x^2+10x+16)(x^2+10x+24)+2010$$

Đặt $t=x^2+10x+21$, biểu thức $P(x)$ được viết lại:

$$P(x)=(t-5)(t+3)+2010=t^2-2t+1995$$

Do đó khi chia $t^2-2t+1995$ cho t ta có số dư là 1995

Câu 26. Ta có: $g(x)=x^2+x-2=(x-1)(x+2)$

Vì $f(x)=ax^3+bx^2+10x-4$ chia hết cho đa thức $g(x)=x^2+x-2$

Nên tồn tại một đa thức $q(x)$ sao cho $f(x)=g(x).q(x)$

$\Rightarrow ax^3+bx^2+10x-4=(x+2).(x-1).q(x)$

Với $x=1 \Rightarrow a+b+6=0 \Rightarrow b=-a-6$ (1)

Với $x=-2 \Rightarrow 2a-b+6=0$ (2)

Thay (1) vào (2), ta có: $a=2; b=4$

Câu 27. Chia $f(x)$ cho x^2+2 được thương là $x-3$ dư $x+2$

Để $f(x)$ chia hết cho x^2+2 thì $x+2$ chia hết cho x^2+2

$\Rightarrow (x+2)(x-2)$ chia hết cho x^2+2

$\Rightarrow x^2-4$ chia hết cho x^2+2

$\Rightarrow x^2+2-6$ chia hết cho x^2+2

$\Rightarrow 6$ chia hết cho x^2+2 mà $x^2+2 \ge 2 \Rightarrow x^2+2 \in \{3;6\} \Rightarrow x \in \{\pm1;\pm2\}$

Thử lại ta thấy $x=1; x=-2$ thỏa mãn

Vậy với $x=1; x=-2$ thì $f(x)$ chia hết cho x^2+2

Câu 28. Giả sử $f(x)=ax^4+bx^3+cx^3+dx+e$

Do $f(0)=e$ nên $e \vdots 7$

Mặt khác: $\begin{cases} f(1)=a+b+c+d+e \vdots 7 \\ f(-1)=a-b+c-d+e \vdots 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+c \vdots 7 \\ b+d \vdots 7 \end{cases}$

$$\begin{cases} f(2)=16a+8b+4c+2d+e \vdots 7 \\ f(-1)=16a-8b+4c-2d+e \vdots 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a+c \vdots 7 \\ 4b+d \vdots 7 \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} a+c \vdots 7 \\ 4a+c \vdots 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a \vdots 7 \\ c \vdots 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \vdots 7 \\ c \vdots 7 \end{cases}$ và $\begin{cases} b+d \vdots 7 \\ 4b+d \vdots 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3b \vdots 7 \\ d \vdots 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b \vdots 7 \\ d \vdots 7 \end{cases}$

Vậy các hệ số của f(x) đều chia hết cho 7.

Câu 29. Ta có: $(x+3)(x+5)(x+7)(x+9)+2033 = ... = (x^2+12x+27)(x^2+12x+35)+2033$

Đặt $x^2+12x+30=t$, ta có: $(x+3)(x+5)(x+7)(x+9)+2033=(t-3)(t+5)+2033$

$=t^2+2t-15+2033=t(t+2)+2018$

Vậy ta có $(x+3)(x+5)(x+7)(x+9)+2033=(x^2+12x+30)(x^2+12x+32)+2018$

Vậy số dư trong phép chia $(x+3)(x+5)(x+7)(x+9)+2033$ cho $x^2+12x+30$ là 2018.

Câu 30. Giả sử $f(x)$ chia cho x^2-4 được thương là $-5x$ và còn dư là $ax+b$. Khi đó

$f(x)=(x^2-4).(-5x)+ax+b$

Theo đề bài, ta có:

$\begin{cases} f(2)=26 \\ f(-2)=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b=26 \\ -2a+b=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=18 \end{cases}$

Do đó $f(x)=(x^2-4).(-5x)+4x+18$

Vậy đa thức $f(x)$ cần tìm là $f(x)=(x^2-4).(-5x)+4x+18$

Câu 31. Ta có: P(0) = d ⋮ 5

P(1) = a + b + c + d ⋮ 5 => a + b + c ⋮ 5 (1)

P(-1) = -a + b – c + d ⋮ 5 => -a + b – c ⋮ 5 (2)

Từ (1) và (2) suy ra 2b ⋮ 5 => b ⋮ 5 vì (2,5) = 1, suy ra a + c ⋮ 5

P(2) = 8a + 4b + 2c + d ⋮ 5 => 8a + 2c ⋮ 5 => a ⋮ 5 => c⋮ 5

Câu 32. Ta có $p^{20}-1=(p^4-1)(p^{16}+p^{12}+p^8+p^4+1)$.

Do p là số nguyên tố lớn hơn 5 nên p là một số lẻ.

$\Rightarrow p^2+1$ và p^2-1 là các số chẵn

$\Rightarrow p^4-1$ chia hết cho 4

$\Rightarrow p^{20}-1$ chia hết cho 4

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 5 $\Rightarrow p$ là một số không chia hết cho 5.

Lập luận ta được p^4-1 chia hết cho 5.

Lập luận ta được $p^{16}+p^{12}+p^8+p^4+1$ chia hết cho 5.

Suy ra $p^{20}-1$ chia hết cho 25.

Mà $(4;25)=1$ nên $p^{20}-1$. (đpcm)

Câu 33. Giả sử tồn tại số tự nhiên n sao cho $n^2+3n+11$ chia hết cho 49. Khi đó, ta có

$4(n^2+3n+11)=(2n+3)^2+35$ chia hết cho 49

Mà 35 và 49 cùng chia hết cho 7 nên $(2n+3)^2$ chia hết cho 7. Suy ra 2n + 3 chia hết cho 7.

Từ đó $(2n+3)^2$ chia hết cho 49. Kết hợp với (1) ta được 35 chia hết cho 49, mâu thuẫn.

Vậy, với mọi số tự nhiên n thì $n^2+3n+11$ không chia hết cho 49.

Câu 34. Ta có : $N = k^4 + 2k^3 - 16k^2 - 2k + 15 = (k^4 - k^2) + (2k^3 - 2k) - (15k^2 - 15)$

$= (k^2 - 1)(k^2 + 2k - 15) = (k - 1)(k + 1)(k - 3)(k + 5)$

Ta thấy rằng với k là số nguyên lẻ thì N là tích của 4 thừa số (nhân tử) chẵn. Do đó N chắc chắn chia hết cho 16.

Vậy k phải là số nguyên lẻ.

Câu 35. Vì số thứ nhất chia cho 5 dư 1 nên có dạng $5a+1$, số thứ hai chia cho 5 dư 2 nên có dạng $5b+2\ (a, b \in \mathbb{Z})$

Ta có tổng bình phương hai số đó là:

$$(5a+1)^2+(5b+1)^2=25a^2+10a+1+25b^2+10b+4=5(5a^2+5b^2+2a+2b+1)\vdots 5$$

Vậy tổng bình phương của hai số chia hết cho 5

Câu 36. Ta có: $A=5^n(5^n+1)-6^n(3^n+2^n)=25^n+5^n-18^n-12^n$

$A=(25^n-18^n)-(12^n-5^n)$.A chia hết cho 7

$A=(25^n-12^n)-(18^n-5^n)$.A chia hết cho 13

Do $(13,7)=1$ nên A chia hết cho 91

Câu 37. Ta có: $A = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + ...+ 3^{11}$

$= (1 + 3 + 3^2+ 3^3) + (3^4 + 3^5 +3^6 + 3^7)+ (3^8 + 3^9+ 3^{10} + 3^{11})$

$= (1 + 3 + 3^2+ 3^3) + 3^4. (1 + 3 + 3^2+ 3^3) + 3^8(1 + 3 + 3^2+ 3^3)$

$= 40 + 3^4. 40 + 3^8. 40$

$= 40. (1 + 3^4 + 3^8) \vdots 40$

Vậy $A \vdots 40$

Câu 38. Gọi dư trong phép chia $f(x)$ cho x^2-1 là $ax+b$

Ta có: $f(x)=(x-2)(x-3)(x^2-1)+ax+b$

Theo bài ra : $f(2)=5$ nên ta có: $2a+b=5$; $f(3)=7$ nên $3a+b=7$

$\Rightarrow a=2; b=1$

Vậy đa thức cần tìm là $f(x)=(x-2)(x-3)(x^2-1)+2x+1$

Câu 39. Ta có: $2^n=10a+b \Rightarrow b\vdots 2 \Rightarrow ab\vdots 2$ (1)

Ta chứng minh $ab\vdots 3$ (2)

Thật vậy , từ đẳng thức $2^n=10a+b \Rightarrow 2^n$ có chữ số tận cùng là b

Đặt $n=4k+r\,(k, r\in\mathbb{N}, 0\le r\le 3)$ ta có: $2^n=16^k.2^r$

Nếu $r=0$ thì $2^n-2^r=2^r.\left(16^k-1\right)\vdots 10 \Rightarrow 2^n$ tận cùng là 2^r

Suy ra $b=2^r \Rightarrow 10a=2^n-2^r=2^r.\left(16^k-1\right)\vdots 3 \Rightarrow a\vdots 3 \Rightarrow ab\vdots 3$

Từ (1) và (2) suy ra $ab\vdots 6$

Câu 40. Theo giả thiết $p-5$ chia hết cho 8 nên đặt $p=8k+5$ (*k* là số tự nhiên)

Ta có $\left[\left(ax^2\right)^{4k+2}-\left(by^2\right)^{4k+2}\right]\vdots\left(ax^2-by^2\right) \Rightarrow a^{4k+2}.x^{8k+4}-b^{4k+2}.y^{8k+4}\vdots p$

$\Rightarrow\left(a^{4k+2}+b^{4k+2}\right)x^{8k+4}-b^{4k+2}\left(x^{8k+4}+y^{8k+4}\right)\vdots p$

Mà $a^{4k+2}+b^{4k+2}=\left(a^2\right)^{2k+1}+\left(b^2\right)^{2k+1}\vdots a^2+b^2=p$ và $b<p \Rightarrow x^{8k+4}+y^{8k+4}\vdots p$ $(*)$

Nếu trong hai số x, y có một số chia hết cho *p* thì từ (*) ta suy ra số thứ hai cũng chia hết cho *p*.

Nếu cả hai không chia hết cho *p* , theo định lý Fec-ma ta có

$x^{8k+4}\equiv y^{8k+4}\equiv 1\left(\bmod p\right) \Rightarrow x^{8k+4}+y^{8k+4}\equiv 2\left(\bmod p\right)$ mâu thuẫn với (*)

Vậy cả hai số *x, y* cùng chia hết cho *p*.

Câu 41. Do $a^3+b^3+c^3$ chẵn nên trong các số a, b, c có ít nhất một số chẵn. Từ đó suy ra tích abc chia hết cho 2. (1)

Giả sử trong ba số a, b, c không có số nào chia hết cho 7. Ta thấy rằng, với mọi x nguyên không chia hết cho 7 thì $x\equiv \pm 1, \pm 2, \pm 3\left(\bmod 7\right)$, suy ra $x^3\equiv \pm 1\left(\bmod 7\right)$.

Do đó $a^3\equiv \pm 1\left(\bmod 7\right)$, $b^3\equiv \pm 1\left(\bmod 7\right)$, $c^3\equiv \pm 1\left(\bmod 7\right)$.

Suy ra $a^3+b^3+c^3\equiv -3, -1, 1, 3\left(\bmod 7\right)$, tức $a^3+b^3+c^3$ không chia hết cho 7, mâu thuẫn. Vậy trong ba số a, b, c phải có ít nhất một số chia hết cho 7.

Từ đó suy ra tích abc chia hết cho 7. (2)

Từ (1) và (2) với chú ý $(2;7)=1$, ta có abc chia hết cho 14.

Câu 42.

a) $n=3k$ suy ra $2^n+1=8^k+1\equiv(-1)^k+1\left(\bmod 9\right)$. Suy ra k lẻ, $k=2t+1$.

Suy ra $n=3\left(2t+1\right)=6t+3$.

Nếu $n=3k+1$ ta có $2^n+1=3.8^k+1\equiv(-1)^k.3+1\left(\bmod 9\right)$ suy ra 2^n+1 không chia hết cho 9.

Vậy với $n=6t+2$, với t là số tự nhiên là các số cần tìm.

b) **Cách 1**: Ta có $2^{km}-1\vdots 2^m-1$. Từ $2^{2n}=\left(2^n+1\right)\left(2^n-1\right)$.

Đặt $2n=km+q\ \left(0\le q<m\right)$.

Khi đó $2^{2n}-1=2^{km+q}-2^q+2^q-1=2^q\left(2^{km}-1\right)+2^q-1$ chia hết cho 2^m-1, suy ra 2^q-1 chia hết cho m mà $0\le 2^q-1<2^m-1$, suy ra $q=0$.

Do đó $2^n=km$.

Trường hợp 1: Nếu m lẻ, suy ra k chẵn, $k=2k'$, suy ra $n=k'm$, $2^n+1=2^{k'm}+1=2^{k'm}-1+2$ chia hết cho 2^m-1, suy ra 2 chia hết cho 2^m-1 vô lý.

Trường hợp 2: Nếu m chẵn $m=2m'$ nên $n=km'$, suy ra $2^{km'}+1$ chia hết cho 2^m-1, mà 2^m-1 chia hết cho $2^{m'}-1$ nên $2^{km'}+1$ chia hết cho $2^{m'}-1$, suy ra 2 chia hết cho $2^{m'}-1$ vô lý vì $m'>1$.

Cách 2: Ta có $2^{n-m}\left(2^m-1\right)\vdots 2^m-1$, suy ra $2^n-2^{n-m}\vdots 2^m-1$, mà $2^n+1\vdots 2^m-1$ suy ra $2^{n-m}+1$ chia hết cho 2^m-1.

Lý luận tương tự ta có $2^{n-km}+1$ chia hết cho 2^m-1.

Giả sử $n=km+q,\ 0\le q<m$.

Chọn k như trên, ta có 2^q+1 chia hết cho 2^m-1. Mà $q<m$ nên $2^q+1=2^m-1$, giải ra $q=1,\ m=2$ (vô lý).

Câu 43. $M=9.3^{4n}-8.2^{4n}+2019=9.81^n-8.16^n+2019$

Ta có:

$81\equiv 1(\text{mod}\,4)\Rightarrow 81^n\equiv 1(\text{mod}\,4)\Rightarrow 9.81^n\equiv 9\equiv 1(\text{mod}\,4)$

$8.16^n\equiv 0(\text{mod}\,4)$

$\Rightarrow M\equiv 1-0+2019\equiv 2020\equiv 0(\text{mod}\,4)$

hay $M\vdots 4$ (1)

Lại có:

$81\equiv 1(\text{mod}\,5)\Rightarrow 81^n\equiv 1(\text{mod}\,5)\Rightarrow 9.81^n\equiv 9\equiv 4(\text{mod}\,5)$

$16\equiv 1(\text{mod}\,5)\Rightarrow 16^n\equiv 1(\text{mod}\,5)\Rightarrow 8.16^n\equiv 8\equiv 3(\text{mod}\,5)$

$\Rightarrow M\equiv 4-3+2019\equiv 2020\equiv 0(\text{mod}\,5)$

hay $M\vdots 5$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow M\vdots BCNN(4,5)$ hay $M\vdots 20$ (đpcm)

Câu 44. Đặt $n=6q+r,\ r\in\{0,1,2,3,4,5\}$. Khi đó n^3+2019 chia hết cho 6 khi r^3+3 chia hết cho 6.

Nếu r chẵn thì r^3+3 lẻ, do đó r^3+3 không chia hết cho 6. Suy ra $r\in\{1,3,5\}$.

Với $r=1\Rightarrow r^3+3=4$ không chia hết cho 6.

Với $r=3\Rightarrow r^3+3=30\vdots 6$.

Với $r=5\Rightarrow r^3+3=128$ không chia hết cho 6.

Suy ra $n=6q+3$. Mà $0\le n\le 2019\Rightarrow 0\le q\le 336$.

Vậy có tất cả 337 số tự nhiên n thỏa mãn đề bài.

Câu 45. Ta có:

$\left(x^2-2xy-y\right)+\left(xy-2y^2-x\right)=x^2-xy-2y^2-x$

$=x^2+xy-\left(2xy+y^2\right)-\left(x+y\right)=\left(x+y\right)\left(x-2y-1\right)$

Lại có: $x^2-2xy-y, xy-2y^2-x$ chia hết cho 5

$\Rightarrow\left(x+y\right)\left(x-2y-1\right)$ chia hết cho 5

TH1: Nếu $x+y$ chia hết cho5 thì $y\equiv -x\left(\text{mod}\,5\right)$

$\Rightarrow 0\equiv x^2-2xy-y\equiv x^2+2x^2+x=x\left(3x+1\right)(\text{mod}\,5)$, do vậy x chia hết cho 5 hoặc chia 5 dư 3.

+) Nếu x chia hết cho 5 thì y cũng vậy, bài toán được chứng minh

+) Nếu x chia cho 5 dư 3 thì y chia 5 dư 2, thì

$2x^2+y^2+2x+y\equiv 2.9+4+2.3=30\equiv 0(\text{mod}\,5)$

Ta cũng có điều phải chứng minh.

TH2: Nếu $x-2y-1$ chia hết cho 5 thì $x\equiv 2y+1\left(\text{mod}\,5\right)$

$\Rightarrow 0\equiv x^2-2xy-y\equiv\left(2y+1\right)^2-2y(y+1)-y=y+1\left(\text{mod}\,5\right)$

Do đó y chia 5 dư 4 và x cũng chia 5 dư 4 nên:

$2x^2+y^2+2x+y=2.16+16+2.4+4=60\equiv 0\left(\text{mod}\,5\right)$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Câu 46. Giả sử $a;b;c$ là các số nguyên không âm thỏa mãn đề bài, ta có:

$\left(a-b\right)^2+\left(b-c\right)^2+\left(c-a\right)^2=6abc\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=3abc\quad(1)$

Phân tích $a^3+b^3+c^3-3abc=\left(a+b+c\right)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)\qquad(2)$

Từ (1) và (2) $a^3+b^3+c^3-3abc=3abc\left(a+b+c\right)$ hay $a^3+b^3+c^3=3abc\left(a+b+c+1\right)$.

Do $a^3+b^3+c^3+1$ chia hết cho $a+b+c+1$ nên ta được 1 chia hết cho $a+b+c+1$

Suy ra $a=b=c=0$.

Thử lại: $a=b=c=0$ thỏa mãn. Vậy có duy nhất bộ số $\left(a;b;c\right)=\left(0;0;0\right)$ thỏa mãn đề bài.

Câu 47. Ta có:

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+...+ab^{n-2}+b^{n-1})\Rightarrow a^n-b^n=m(a-b)\ (a,\ b,\ n, m\in\mathbb{N})\ (*)$

Vì n là số tự nhiên chẵn nên n = 2k ($k\in\mathbb{N}$) $\Rightarrow$ $A=20^n-3^n+16^n-1=400^k-9^k+256^k-1$

Áp dụng (*), có: $A=(400^k-1^k)+(256^k-9^k)=399x+247y=19\cdot 21x+19.13y\ (x,\ y\in\mathbb{N})$

$\Rightarrow A\,\vdots\,19$ với mọi số tự nhiên n chẵn (1)

và có: $A=(400^k-9^k)+(256^k-1^k)=391p+255q=17\cdot 23p+17\cdot 15q\ (p,q\in\mathbb{N})$

$\Rightarrow A\,\vdots\,17$ với mọi số tự nhiên n chẵn (2) mà 17 và 19 là hai số nguyên tố cùng nhau nên từ (1) và (2) suy ra: $A \vdots 17 \cdot 19$ với mọi số tự nhiên n chẵn

Vậy $20^n - 3^n + 16^n - 1 \vdots 323$ với mọi số tự nhiên n chẵn

Câu 48. Cách 1. Ta có $a^2 + b^2 = a^2 - 4b^2 + 5b^2 = (a - 2b)(a + 2b) + 5b^2$

Do $a^2 + b^2$ là bội số của 5 nên suy ra $(a - 2b)(a + 2b) \vdots 5$.

Do 5 là số nguyên tố nên từ $(a - 2b)(a + 2b) \vdots 5$ suy ra $a - 2b \vdots 5$ hoặc $a + 2b \vdots 5$. Đến đây ta xét các trương hợp sau:

- Nếu $a - 2b \vdots 5$, khi đó $B = 2b - a$ chia hết cho 5.

Mặt khác ta lại có $2b - a = (2b + 4a) - 5a$ nên $2b + 4a \vdots 5 \Rightarrow 2(2a + b) \vdots 5 \Rightarrow A = 2a + b \vdots 5$, do 2 và 5 nguyên tố cùng nhau.

- Nếu $a + 2b \vdots 5$, khi đó $B' = a + 2b$ chia hết cho 5. Do đó ta được $-a - 2b \vdots 5$.

Mà ta lại có $-a - 2b = -5a - (2b - 4a)$ nên suy ra $2b - 4a \vdots 5 \Rightarrow 2(b - 2a) \vdots 5 \Rightarrow A' = 2a - b \vdots 5$ do 2 và 5 nguyên tố cùng nhau.

- Nếu $a - 2b \vdots 5$ và $a + 2b \vdots 5$ khi đó cả A, B, A′, B′ cùng chia hết cho 5.

Cách 2. Với mọi số nguyên a và b ta luôn viết được dưới dạng $a = 5k; a = 5k \pm 1; a = 5k \pm 2$ và $b = 5m; b = 5m \pm 1; b = 5m \pm 2$ trong đó k và m là các số nguyên.

Theo bài ra thì $a^2 + b^2$ là bội số của 5 nên ta có các trương hợp sau:

- Nếu $a = 5k$ và $b = 5m$, khi đó ta có A, B, A′, B′ cùng chia hết cho 5.
- Nếu $a = 5k + 1$ và $b = 5m + 2$, khi đó ta có A′, B′ cùng chia hết cho 5.
- Nếu $a = 5k + 1$ và $b = 5m - 2$, khi đó ta có A, B cùng chia hết cho 5.
- Nếu $a = 5k - 1$ và $b = 5m + 2$, khi đó ta có A, B chia hết cho 5 hoặc A′, B′ chia hết cho 5.
- Nếu $a = 5k - 1$ và $b = 5m - 2$, khi đó ta có A, B chia hết cho 5 hoặc A′, B′ chia hết cho 5.

Câu 49. a) Chứng minh rằng…..

Ta có: $9! = 1.2.3.4.5.6.7.8.9$ là số chẵn $\Rightarrow x^3 \vdots 2 \Rightarrow x \vdots 2 \Rightarrow x = 2m \quad (m \in \mathbb{Z})$

$\Rightarrow 8m^3 + 2y^3 + 4z^3 = 9! \Leftrightarrow 4m^3 + y^3 + 2z^3 = 1.3.4.5.6.7.8.9$ là số chẵn

$\Rightarrow y^3 \vdots 2 \Rightarrow y \vdots 2 \Rightarrow y = 2n \quad (n \in \mathbb{Z})$

$\Rightarrow 4m^3 + 8n^3 + 2z^3 = 1.3.4.5.6.7.8.9$

$\Leftrightarrow 2m^3 + 4n^3 + z^3 = 1.2.3.5.6.7.8.9$ là số chẵn

$\Rightarrow z^3 \vdots 2 \Rightarrow z \vdots 2 \Rightarrow z = 2p\,(p \in \mathbb{Z})$

$\Rightarrow 2m^3+4n^3+8p^3=1.2.3.5.6.7.8.9$

$\Leftrightarrow m^3+2n^3+4p^3=1.3.5.6.7.8.9$

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta cũng có $\begin{cases} m\,\vdots\,2 \\ n\,\vdots\,2\ (m;n;p\in\mathbb{Z}) \\ p\,\vdots\,2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2m\,\vdots\,4 \\ y=2n\,\vdots\,4 \\ z=2p\,\vdots\,4 \end{cases}$

Vậy ta có điều phải chứng minh

b) Chứng minh rằng không tồn tại…..

Theo ý a) ta có thể đặt $x=4a; y=4b; z=4c \qquad (a;b;c\in\mathbb{Z})$

$\Rightarrow a^3+2b^3+4c^3=\frac{9!}{4^3}=\frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9}{4^3}=1.3.5.6.7.9$ là số chẵn $\Rightarrow a\,\vdots\,2 \Rightarrow a=2u \qquad (u\in\mathbb{Z})$

$\Rightarrow 8u^3+2b^3+4c^3=1.3.5.6.7.9 \Leftrightarrow 4u^3+b^3+2c^3=1.3.3.5.7.9=1.5.7.3^4$

Lại có:

$\begin{cases} (1.5.7.3^4)\,\vdots\,3^4 \Rightarrow (1.5.7.3^4)\,\vdots\,9 \\ x^3\equiv 0;\pm1 \quad (\text{mod}\,9)\,(x\in Z) \end{cases}$

$\Rightarrow a;b;c\,\vdots\,9 \Rightarrow (4u^3+b^3+2c^3)\,\vdots\,9^3$

Nhưng do $1.5.7.3^4$ không thể chia hết cho 9^3 nên ta có điều vô lý

Vậy ta có điều phải chứng minh

Câu 50. Ta có nhận xét sau: Nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì $p^2\equiv 1(\text{mod}\,24)$ (1)

Lại có: $-1\equiv 23(\text{mod}\,24)$ (2)

Cộng vế theo vế của $(1);(2)$ ta được : $p^2-1\equiv 24(\text{mod}\,24)\equiv 0(\text{mod}\,24)$

Vậy p^2-1 chia hết cho 24 với p là số nguyên tố lớn hơn 3.

Câu 51. Ta có: $n^3-1=(n-1).(n^2+n+1)\,\vdots\,p$

$(p-1)\,\vdots\,n \Rightarrow p-1\geq n \Rightarrow p\geq n+1$

Vì $p\geq n+1 \Rightarrow (n-1)$ không chia hết cho p

Do đó: $(n-1)(n^2+n+1)\,\vdots\,p \Leftrightarrow (n^2+n+1)\,\vdots\,p$

Đặt : $p-1=kn, \quad k\geq 1 \Rightarrow p=kn+1 \quad (*)$

$\Rightarrow (n^2+n+1)\,\vdots\,(kn+1) \Rightarrow kn+1\leq n^2+n+1$

$\Leftrightarrow kn\leq n^2+n \Leftrightarrow k\leq n+1$

$k(n^2+n+1)-n(kn+1)\,\vdots\,(kn+1)$

$\Rightarrow [(k-1)n+k]\,\vdots\,(kn+1)$

$k\geq 1 \Rightarrow (k-1)n+k>0$

$\Rightarrow (k-1)n+k\geq kn+1$

$\Rightarrow k \geq n+1$

$\Rightarrow k = n+1 \Rightarrow p = kn+1 = n^2+n+1$

$\Rightarrow n+p = n^2+2n+1 = (n+1)^2$

Vậy $n+p$ là một số chính phương.

Câu 52. +) Chứng minh hằng đẳng thức

$(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+......+a^2b^{n-3}+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)$

$= a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+.....+a^3b^{n-3}+a^2b^{n-2}+ab^{n-1}-\left(a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+....+a^2b^{n-2}+ab^{n-1}+b^n\right)$

$= a^n-b^n$

+) Vì n là số chẵn, đặt $n=2k, k\in\mathbb{N}$ ta có:

$20^n+16^n-3^n-1 = 20^{2k}+16^{2k}-3^{2k}-1 = 400^k+256^k-9^k-1$

Để chứng minh $\left(20^n+16^n-3^n-1\right)\vdots 323$, ta cần chứng minh $\left(20^n+16^n-3^n-1\right)$ chia hết cho 19 và 17

Ta có:

$400^k-1^k = (400-1)\left(400^{k-1}+400^{k-2}.1+400^{k-3}.1^2+.....+400.1^{k-2}+1^{k-1}\right)$

$= 399.\left(400^{k-1}+400^{k-2}.1+400^{k-3}.1^2+.....+400.1^{k-2}+1^{k-1}\right)$

$= 19.21.\left(400^{k-1}+400^{k-2}.1+400^{k-3}.1^2+.....+400.1^{k-2}+1^{k-1}\right)\vdots 19$

$256^k-9^k = (256-9)\left(256^{k-1}+256^{k-2}.9+.......+9^{k-2}.256+9^{k-1}\right)$

$= 247.\left(256^{k-1}+256^{k-2}.9+.......+9^{k-2}.256+9^{k-1}\right)$

$= 13.19\left(256^{k-1}+256^{k-2}.9+.......+9^{k-2}.256+9^{k-1}\right)\vdots 19$

$\Rightarrow \left(400^k-1^k+256^k-9^k \vdots 19\right)$

Tương tự ta cũng có:

$400^k-9^k = (400-9)\left(400^{k-1}+400^{k-2}.9+.....+9^{k-2}.400+9^{k-1}\right)$

$= 17.23\left(400^{k-1}+400^{k-2}.9+.....+9^{k-2}.400+9^{k-1}\right)\vdots 17$

$256^k-1 = (256-1)\left(256^{k-1}+256^{k-2}.1+......+256.1^{k-2}+1^{k-1}\right)$

$= 17.15\left(256^{k-1}+256^{k-2}.1+......+256.1^{k-2}+1^{k-1}\right)\vdots 17$

$\Rightarrow 400^k-9^k+256^k-1 \vdots 17$

Như vậy ta có:

$$\begin{cases} 20^n+16^n-3^n-1 = \left(400^k+256^k-9^k-1\right)\vdots 19 \\ 20^n+16^n-3^n-1 = \left(400^k+256^k-9^k-1\right)\vdots 17 \end{cases} \Rightarrow \left(20^n+16^n-3^n-1\right)\vdots (19.17)$$

$\Rightarrow \left(20^n+16^n-3^n-1\right)\vdots 323$

Như vậy ta có điều cần chứng minh.

Câu 53. Ta có : $N = a_1 + a_2 + ... + a_{2018}; M = a_1^5 + a_2^5 + ... + a_{2018}^5 \left(a_1; a_2 ...... a_{2018} \in \mathbb{Z}^+\right)$

Xét hiệu

$M - N = a_1^5 + a_2^5 + ... + a_{2018}^5 - a_1 - a_2 - ..... - a_{2018}$

$= \left(a_1^5 - a_1\right) + \left(a_2^5 - a_2\right) + ... + \left(a_{2018}^5 - a_{2018}\right)$

Ta có $a^5 - a = a\left(a^4 - 1\right) = a\left(a^2 + 1\right)\left(a^2 - 1\right) = a\left(a^2 + 1\right)(a-1)(a+1)$

$30 = 2.3.5$ với $2, 3, 5$ đều là các số nguyên tố

Ta có: $a\left(a^2 + 1\right)(a-1)(a+1)$ có tích của 3 số tự nhiên liên tiếp $a-1; a; a+1$ nên

$a(a-1)(a+1)$ sẽ chia hết cho 2 và 3

Nếu a chia cho 5 dư 0,1 hoặc 4 thì lần lượt $a, a-1, a+1$ sẽ chia hết cho 5

Nếu a chi 5 dư 2 hoặc 3 thì $a+1$ sẽ chia hết cho 5

Vậy $a\left(a^2 + 1\right)(a-1)(a+1)$ sẽ chia hết cho cả 2;3;5 nên sẽ chia hết cho 30

Do vậy $M - N$ chia hết cho 30 do đó M cũng chia hết cho 30

Ta có diều phải chứng minh

Câu 54. Ta có:

$$a^{2018} + b^{2019} + c^{2020} - \left(a^{2016} + b^{2017} + c^{2018}\right)$$
$$= a^{2016}\left(a^2 - 1\right) + b^{2017}\left(b^2 - 1\right) + c^{2018}\left(c^2 - 1\right)$$
$$= a^{2015}.a(a-1)(a+1) + b^{2016}.(b-1)(b+1) + c^{2017}.c(c-1)(c+1)$$

Ta có tích 3 số tự nhiên liên tiếp sẽ chia hết cho 6, do có 1 số chẵn và 1 số chia hêt cho 3. Do vậy: $a(a-1)(a+1); b(b-1)(b+1); c(c-1)(c+1)$ đều chia hết cho 6 nên

$\left[a^{2018} + b^{2019} + c^{2020} - \left(a^{2016} + b^{2017} + c^{2018}\right)\right] \vdots 6$

Vậy ta có điều phải chứng minh

Câu 55. +) $n = 2k$ (k nguyên dương): $M = 2k.4^{2k} + 3^{2k} = 2k.16^k + 9^k$. Ta có: 16^k và 9^k cùng dư với 2^k chia 7.

$\Rightarrow$ M cùng dư với $(2k.2^k + 2^k) = 2^k.(2k + 1)$ chia 7 $\Rightarrow (2k + 1)$ chia hết cho 7 $\Rightarrow k$ chia 7 dư 3, hay $k = 7q + 3 \Rightarrow n = 14q + 6$ $(q \in \mathbb{N})$.

+) $n = 2k + 1$ (k nguyên dương): $M = (2k + 1).4^{2k+1} + 3^{2k+1} = 4(2k+1).16^k + 3.9^k$

$\Rightarrow M$ cùng dư với $(k + 4).2^k + 3.2^k = (k + 7).2^k$ chia 7.

$\Rightarrow k$ chia hết cho 7 $\Rightarrow k = 7p$ $(p \in \mathbb{N})$.

Vậy $n = 14q + 6$ hoặc $n = 14p + 1$, với p và q là các số tự nhiên.

Câu 56. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $n^3 - 9n + 27$ không chia hết cho 81.

Giả sử tồn tại số tự nhiên n để $n^3 - 9n + 27 \vdots 81$,

suy ra $n^3 - 9n + 27 \vdots 3$ hay $n \vdots 3$

=> n = 3k khi đó $n^3 - 9n + 27 = 27(k^3 - k + 1)$

mà $n^3 - 9n + 27 \vdots 81$ nên $k^3 - k + 1 \vdots 3$

Nhưng $k^3 - k + 1 = (k-1).k.(k+1) + 1$ không chia hết cho 3 với mọi k.

Vậy với mọi số tự nhiên n thì $n^3 - 9n + 27$ không chia hết cho 81.

Câu 57. Đặt $A = 4(m+n)^2 - mn$

$$\Rightarrow 4A = 16(m+n)^2 - 4mn = 16(m+n)^2 - \left[(m+n)^2 - (m-n)^2\right]$$

$$= 15(m+n)^2 + (m-n)^2$$

$$A \vdots 225 = 15^2 \Rightarrow \begin{cases}(m-n)\vdots 3\\(m-n)\vdots 5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(m-n)^2\vdots 9\\(m-n)^2\vdots 25\end{cases} \Rightarrow (m-n)^2 \vdots 225$$

$$\Rightarrow (m+n)^2 \vdots 15 \Rightarrow \begin{cases}(m+n)\vdots 3\\(m+n)\vdots 5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(m-n)\vdots 15\\(m+n)\vdots 15\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}m\vdots 15\\n\vdots 15\end{cases} \Rightarrow mn \vdots 225$$

Vậy $4(m+n)^2 - mn$ chia hết cho 225 thì mn cũng chia hết cho 225

Câu 58. Ta có $S_1 = 1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Để chứng minh bài toán ta chỉ cần chứng tỏ $2S_{2019} \vdots n(n+1)$.

Ta có nhận xét sau: Với a, b nguyên dương bất kì thì $\left(a^{2019} + b^{2019}\right) \vdots (a+b)$.

Thật vậy : $a^{2019} + b^{2019} = (a+b)(a^{2018} - a^{2017}b + ... - ab^{2017} + b^{2018}) \vdots (a+b)$.

Xét hai trường hợp:

+) Nếu n lẻ: Từ nhận xét trên ta có $2S_{2019} = 2n^{2019} + 2\left[1^{2019} + (n-1)^{2019}\right] + 2\left[2^{2019} + (n-2)^{2019}\right] +$

$$... + 2\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)^{2019} + \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2019}\right] \vdots n$$

$$2S_{2019} = 2(1^{2019} + n^{2019}) + 2\left[2^{2019} + (n-1)^{2019}\right] +$$

$$... + 2\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)^{2019} + \left(\frac{n+3}{2}\right)^{2019}\right] + \left[\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2019} + \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2019}\right] \vdots (n+1)$$

Mặt khác n và $n+1$ nguyên tố cùng nhau nên $2S_{2019} \vdots n(n+1)$.

+) Nếu n chẵn: Ta có

$$2S_{2019} = 2n^{2019} + 2\left[1^{2019} + (n-1)^{2019}\right] + 2\left[2^{2019} + (n-2)^{2019}\right] +$$

$$... + 2\left[\left(\frac{n-2}{2}\right)^{2019} + \left(\frac{n+2}{2}\right)^{2019}\right] + \left[\left(\frac{n}{2}\right)^{2019} + \left(\frac{n}{2}\right)^{2019}\right] \vdots n$$

$$2S_{2019} = 2(1^{2019} + n^{2019}) + 2\left[2^{2019} + (n-1)^{2019}\right] +$$

$$...+2\left[\left(\frac{n-2}{2}\right)^{2019}+\left(\frac{n+4}{2}\right)^{2019}\right]+2\left[\left(\frac{n}{2}\right)^{2019}+\left(\frac{n+2}{2}\right)^{2019}\right]\vdots(n+1)$$

Suy ra $2S_{2019}\vdots n(n+1)$.

Vậy $S_{2019}\vdots S_1$.

Câu 59. Ta có: p + (p + 2) = 2(p + 1)

Vì p lẻ nên $(p+1)\vdots 2 \Rightarrow 2(p+1)\vdots 4$ (1)

Vì p, (p+1), (p+2) là 3 số tự nhiên liên tiếp nên có ít nhất một số chia hết cho 3, mà p và (p+2) nguyên tố nên $(p+1)\vdots 3$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $[p+(p+2)]\vdots 12$ (đpcm)

Câu 60. Ta có với mọi số nguyên m thì m^2 chia cho 5 dư 0 , 1 hoặc 4.

+ Nếu n^2 chia cho 5 dư 1 thì $n^2=5k+1 \Rightarrow n^2+4=5k+5\vdots 5; k\in N^*$.

Nên n^2+4 không là số nguyên tố

Nếu n^2 chia cho 5 dư 4 thì $n^2=5k+4 \Rightarrow n^2+16=5k+20\vdots 5; k\in N^*$.

Nên n^2+16 không là số nguyên tố.

Vậy $n^2 \vdots 5$ hay $n \vdots 5$

Câu 61. Ta có

$S=n\left(n^4+5n^3+5n^2-5n-6\right)$

$=n\left[\left(n^2-1\right)\left(n^2+6\right)+5n\left(n^2-1\right)\right]$

$=n\left(n^2-1\right)\left(n^2+5n+6\right)$

$=n(n-1)(n+1)(n+2)(n+3)$

$=(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)$

Ta có S là tích của 5 số nguyên tự nhiên liên tiếp chia hết cho $5!$ nên chia hết cho 120.

Câu 62. Với 2 số nguyên dương a, b bất kì ta có:

$a^{2015}+b^{2015}=(a+b)(a^{2014}+a^{2013}b+...+ab^{2013}+b^{2014})\Rightarrow a^{2015}+b^{2015}\vdots(a+b)$

+ Xét trường hợp n là số lẻ

Áp dụng khẳng định trên ta có:

$2\left[1^{2015}+(n-1)^{2015}\right]\vdots n$

$2\left[2^{2015}+(n-2)^{2015}\right]\vdots n$

...

$2\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)^{2015}+\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2015}\right]\vdots n$

Suy ra

$$A = n^{2015} + 2\left[1^{2015} + (n-1)^{2015}\right] + 2\left[2^{2015} + (n-2)^{2015}\right] + ... + 2\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)^{2015} + \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2015}\right] \vdots n$$

Tương tự

$$A = 2(1^{2015} + n^{2015}) + 2\left[2^{2015} + (n-1)^{2015}\right] + ... + 2\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)^{2015} + \left(\frac{n+3}{2}\right)^{2015}\right] + \left[\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2015} + \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2015}\right] \vdots (n+1)$$

Mặt khác n và n + 1 nguyên tố cùng nhau nên A ⋮ n(n + 1)

Tương tự với trường hợp n chẵn ta cũng có A ⋮ n(n + 1)

Câu 63. Ta có:

$Q = a^4 + 2a^3 - 16a^2 - 2a + 15 = (a^4 + 2a^3 - 2a - 1) - (16a^2 - 16)$

$= (a-1)(a+1)^3 - 16(a^2 - 1).$

Với a lẻ, $a = 2k+1,\ k \in Z.$

Khi đó: $(a-1)(a+1)^3 = 2k(2k+2)^3 = 16k(k+1)^3 \vdots 16.$

Mà $16(a^2-1) \vdots 16$ nên Q chia hết cho 16.

Với a chẵn, $a = 2k,\ k \in Z.$

Khi đó: $(a-1)(a+1)^3 = (2k-1)(2k+1)^3$ là số lẻ nên không chia hết cho 16. Do đó Q không chia hết cho 16.

Vậy a là số nguyên lẻ.

Câu 64.

+) Vì một số nguyên bất kỳ phải là số chẵn hoặc là số lẻ. Do đó theo nguyên lý Đirichlet trong 3 số nguyên bất kỳ luôn chọn ra được 2 số có cùng tính chẵn lẻ.

+) Áp dụng ta có trong 3 số chính phương bất kỳ luôn chọn ra được hai số có cùng tính chẵn lẻ. Gọi 2 số chính phương được chọn ra đó là a^2 và b^2. Khi đó ta có

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

+) Vì a^2 và b^2 cùng tính chẵn lẻ nên a, b cũng cùng tính chẵn lẻ. Do đó $a-b$ là số chẵn và $a-b$ cũng là số chẵn $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \vdots 4$, (đpcm).

Chú ý:

Ta có thể giải bài toán này bằng cách vận dụng tính chất sau của số chính phương: "Một số chính phương chia cho 4 thì sẽ có số dư là 0 hặc 1". Khi đó lập luận như cách làm trên ta thu được điều phải chứng minh. Tuy nhiên trong khi làm bài thi nếu vận dụng tính chất này thì học sinh phải chứng minh lại.

Bình luận: Với cách làm trên ngắn gọn, đầy đủ song một số học sinh cảm thấy hơi trừu tượng (do nguyên lí **Đirichlet** học sinh ít ôn tập không nằm trong chương trình SGK mà ở sách tham khảo). bài toán trên có thể trình bày như sau:

Trong ba số nguyên tùy ý luôn tồn tại hai số hoặc chẵn hoặc lẻ

Gọi hai số chính phương chọn ra là a^2 và b^2 (a, b nguyên)

+ TH1: a, b cùng chẵn: suy ra $a^2-b^2=(2k_1)^2-(2k_2)^2=4\left(k_1^2-k_1^2\right)\vdots 4, k_1,k_2\in Z$

+ TH2: a, b cùng lẻ: suy ra $a^2-b^2=(2k_1+1)^2-(2k_2+1)^2=4\left(k_1^2+k_1-k_2^2-k_2\right)\vdots 4, k_1,k_2\in Z$

Vậy trong ba số chính phương tùy ý luôn tồn tại hai số mà hiệu của chúng chia hết cho 4.

Câu 65.

Cách 1: $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Leftrightarrow bc=a(b+c)$ (1)

TH1: Nếu a là số nguyên chẵn, suy ra $a(b+c)\vdots 2$, theo (1)Suy ra: $b.c\vdots 2$

Vậy abc chia hết cho 4

TH2: Nếu a là số nguyên lẻ. Với b và c là hai số cũng lẻ thì: $b+c\vdots 2\Rightarrow a(b+c)\vdots 2$

Mà abc không chia hết cho 2 (vì a, b, c đều lẻ). Suy ra mâu thuẫn.

Vậy trong hai số, b, c tồn tại ít nhất 1 số chẵn.

+ Với b chẵn, mà a lẻ nên c chẵn (vì b.c chẵn nên a(b+c) chẵn suy ra c chẵn, vì a lẻ)

Suy ra abc chia hết cho 4

+ Với c chẵn, tương tự abc chia hết cho 4

Cách 2: $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Leftrightarrow bc=a(b+c)\Leftrightarrow abc=a^2(b+c)$ (2)

Ta thấy a, b, c không thể đều là số lẻ vì nếu vây thì abc là số lẻ, còn b+c là số chẵn.

Vậy trong 3 số tồn tại ít nhất 1 số chẵn.

Nếu a chẵn thì a^2 chia hết cho 4, từ (2) suy ra abc chia hết cho 2.

Nếu b chẵn, do a lẻ nên b + c chẵn (vì abc chẵn) suy ra c chẵn.

Vậy abc chia hết cho 2.

Tương tự cho trường hợp c chẵn.

Câu 66.

Ta có $A=2^{2^n}+4^n+16=\left(2^{2^n}-1\right)+\left(4^n-1\right)+18$

Đặt $2^{2^n}=2^{2k}\ \left(k\in\mathbb{N}^*\right)$ suy ra $2^{2^n}-1=2^{2k}-1=4^k-1\vdots 3$

Do đó với mọi *n* nguyên dương ta có: $2^{2^n}-1\vdots 3;\ 4^n-1\vdots 3;\ 18\vdots 3$

$\Rightarrow A=2^{2^n}+4^n+16\vdots 3$

Câu 67. Ta có $A=4^n+17=\left(4^n-1\right)+18$

Với mọi *n* nguyên dương ta có: $4^n-1\vdots 3;\ 18\vdots 3$

$\Rightarrow A=4^n+17\vdots 3$

Câu 68. Giả sử $2n+1=m^2$, $3n+1=k^2$ $\left(m,k\in N^*\right)\Rightarrow m^2$ là số lẻ $\Rightarrow m$ là số lẻ.

$\Rightarrow 2n = m^2 - 1 = (m-1)(m+1) \vdots 4$, Suy ra : n chẵn, k lẻ

Vì k là số lẻ nên $k-1, k+1$ là hai số chẵn liên tiếp và (3, 8) = 1 nên

Từ $3n+1 = k^2 \Rightarrow 3n = k^2 - 1 = (k-1)(k+1) \vdots 8 \Rightarrow n \vdots 8$ (1)

Khi chia một số chính phương cho 5 thì số dư chỉ có thể là 0 ; 1 ; 4. Ta xét các trường hợp:

Nếu n chia cho 5 dư 1 thì 2n + 1 chia cho 5 dư 3. (vô lí)

Nếu n chia cho 5 dư 2 thì 3n + 1 chia cho 5 dư 2. (vô lí)

Nếu n chia cho 5 dư 3 thì 2n + 1 chia cho 5 dư 2. (vô lí)

Nếu n chia cho 5 dư 4 thì 3n + 1 chia cho 5 dư 3. (vô lí)

Vậy $n \vdots 5$ (2)

Vì (5, 8) = 1 nên từ (1) và (2) suy ra n chia hết cho 40.

Câu 69. Chứng minh rằng với mọi số nguyên n chẵn thì: $n^3 + 20n + 96$ chia hết cho 48.

Ta có n chẵn $\Rightarrow n = 2k, k \in Z$. Suy ra

$n^3 + 20n + 96 = (2k)^3 + 40k + 96 = 8(k^3 + 5k) + 96 = 8[(k^3 - k) + 6k] + 96 = 8(k^3 - k) + 48k + 48.2$

Do $k-1; k; k+1$ là 3 số nguyên liên tiếp nên $(k-1).k.(k+1)$ chia hết cho 6

$\Rightarrow k^3 - k = (k-1).k.(k+1) \vdots 6 \Rightarrow 8(k^3 - k) \vdots 48, \forall k \in Z$.

Vậy với mọi số nguyên n chẵn thì $n^3 + 20n + 96$ chia hết cho 48.

Câu 70. Ta có $p = a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

Vì *a, b* là các số nguyên dương nên, ta có $a^2 + ab + b^2 > 1$.

Do *p* nguyên tố nên $a - b = 1 \Rightarrow a = b + 1 \Rightarrow p = 3b^2 + 3b + 1$

$$\Rightarrow 4p = 3(4b^2 + 4b + 1) + 1 = 3(2b+1)^2 + 1 \text{ (đpcm).}$$

Câu 71. Ta có: $f(x) \vdots (x-1)$; $f(x) \vdots (x+2)$ nên x = 1 và x = -2 là nghiệm của đa thức *f(x)* hay *f(1) = 0* và *f(-2) = 0*. Do đó:

$$\begin{cases} 1^2 - 2(a+1).1 + b - 1 = 0 \\ (-2)^2 - 2(a+1).(-2) + b - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b = -2 \\ 4a + b = -7 \end{cases} \Leftrightarrow a = -\frac{3}{2}; b = -1$$

Câu 72. 1. Ta có :

$p^{2016} - 1 = (p^4)^{504} - 1^{504} = (p^4 - 1).A = (p-1)(p+1)(p^2+1).A$ (1) $(A \in N)$

Vì P là số nguyên tố lớn hơn 5 nên p là số lẻ, suy ra p – 1, p +1 là hai số chẵn liên tiếp

$$\Rightarrow (p-1)(p+1) \vdots 4 \quad (2)$$

Vì p – 1, p, p+1 là ba số tự nhiên liên tiếp nên $(p-1)p(p+1) \vdots 3$. Nhưng p không chia hết cho 3 nên $(p-1)(p+1) \vdots 3$ (3)

Vì p không chia hết cho 5 nên p có một trong các dạng $5k \pm 1; \quad 5k \pm 2$

- Nếu $p = 5k \pm 1$ thì $p^2 = 25k^2 \pm 10k + 1 = 5n + 1$

- Nếu $p = 5k \pm 2$ thì $p^2 = 25k^2 \pm 20k + 4 = 5l - 1$

Cả hai trường hợp trên đều cho ta $p^4 - 1 = 5q \,\vdots\, 5$ (4) ($(n, l, q \in N)$

Vì 3, 4, 5 là các số nguyên tố cùng nhau từng đôi một nên từ (1), (2), (3), (4) suy ra $p^{2016} - 1$ chia hết cho 4.3.5 tức là chia hết cho 60

2. Vì vai trò của x, y, z bình đẳng nhau, khác nhau đôi một nên ta có thể giả sử $x < y < z$.

Khi đó , gọi t là thương của phép chia $x^3 + y^3 + z^3 : x^2y^2z^2$. Suy ra :

$$x^3 + y^3 + z^3 = tx^2y^2z^2 \Leftrightarrow z = tx^2y^2 - \frac{x^3 + y^3}{z^2} > tx^2y^2 - \frac{x^3 + y^3}{x^2y^2} = tx^2y^2 - x - y \quad (1)$$

- Nếu $tx^2y^2 - x - y < 0$ (*) thì $t < \frac{1}{xy^2} + \frac{1}{x^2y} < 2 \Rightarrow t = 1$

Thay t = 1 vào (*), ta được $x^2y^2 - x - y < 0 \Rightarrow xy - x - y < 0 \Rightarrow (x-1)(y-1) < 1$

$\Rightarrow x = 1$

$\Rightarrow y^2 - y < 0 \Leftrightarrow y(y-1) < 0$ (vô lý)

Vậy $tx^2y^2 - x - y \geq 0$ (2)

- Từ (1), (2) suy ra : $z^2 \geq (tx^2y^2 - x - y)^2$ (3)

- Mặt khác vì $x^3 + y^3 + z^3 = tx^2y^2z^2$ nên $x^3 + y^3 \,\vdots\, z^2 \Rightarrow x^3 + y^3 \geq z^2$ (4)

- Từ (3) và (4) suy ra :

$x^3 + y^3 \geq (tx^2y^2 - x - y)^2$

$\Leftrightarrow x^3 + y^3 \geq t^2x^4y^4 - 2tx^2y^2(x+y) + x^2 + 2xy + y^2$

$\Rightarrow x^3 + y^3 + 2tx^2y^2(x+y) > t^2x^4y^4$

$$\Leftrightarrow txy < \frac{x^3 + y^3 + 2tx^2y^2(x+y)}{tx^3y^3}$$

$$\Leftrightarrow txy < 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{1}{tx^3} + \frac{1}{ty^3} \quad (5)$$

- Nếu $x \geq 2$ thì $y \geq 3 \Rightarrow txy \geq 6 > 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{t.2^3} + \frac{1}{t.2^3} > 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{1}{t.x^3} + \frac{1}{t.y^3}$

Điều này mâu thuẫn với (5).

Vậy x = 1. Khi đó (5) trở thành :

$$ty < 2 + \frac{2}{y} + \frac{1}{t} + \frac{1}{ty^3} \quad (6)$$

- Nếu $y \ge 4$ thì $ty \ge 4 > 2+\frac{2}{4}+\frac{1}{t}+\frac{1}{t.4^3} \ge 2+\frac{2}{y}+\frac{1}{t}+\frac{1}{ty^3}$.

Điều này mâu thuẫn với (6).

Vậy $y \in \{2;3\}$ (Vì y > x = 1)

+ Nếu y = 2 thì $\begin{cases} x^3+y^3=9 \vdots z^2 \\ x \le y \le z \\ x=1; y=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=1; y=2; z=3$.

+ Nếu y = 3 thì $\begin{cases} x^3+y^3=28 \vdots z^2 \\ x \le y \le z \\ x=1; y=3 \end{cases}$.(Loại)

- Thử lại ta thấy (x, y, z) = (1, 2, 3) và các hoán vị của nó thỏa mãn.

Vậy thương của phép chia $x^3+y^3+z^3 : x^2y^2z^2$ là t = 1.

Câu 73. Cách 1: $24a^2+1=b^2 \Leftrightarrow 25a^2+1=a^2+b^2 \Rightarrow a^2+b^2 \equiv 1 \pmod 5$ **(1)**

Ta có: $\begin{cases} a \equiv 0, \pm 1, \pm 2 \pmod 5 \\ b \equiv 0, \pm 1, \pm 2 \pmod 5 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a^2 \equiv 0,1,4 \pmod 5 \\ b^2 \equiv 0,1,4 \pmod 5 \end{cases}$ **(2)**

Từ (1) và (2) suy ra: $\begin{cases} a^2 \equiv 0 \pmod 5 \\ b^2 \equiv 1 \pmod 5 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a^2 \equiv 1 \pmod 5 \\ b^2 \equiv 0 \pmod 5 \end{cases}$.

Suy ra chỉ một số a hoặc b chia hết cho 5.

Cách 2: $24a^2+1=b^2 \Leftrightarrow 25a^2+1=a^2+b^2 \Rightarrow a^2+b^2=5.k+1$ **(1)**

$\forall n \in Z \Rightarrow n=5l+r \left(l \in Z, r \in \{0;1;2;3;4\}\right)$

$\Rightarrow n^2=5l_1+r_1^2 \left(l_1 \in Z, r_1^2 \in \{0;1;4\}\right)$ **(2)**

Từ (1) và (2) suy ra: $\begin{cases} a^2=5k_1+1 \\ b^2=5k_2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a^2=5k_1 \\ b^2=5k_2+1 \end{cases}$

Suy ra chỉ một số a hoặc b chia hết cho 5.

Cách 3: $24a^2+1=b^2 \Leftrightarrow 24a^2-b^2=-1$ không chia hết cho 5 nên a và b không đồng thời chia hết cho 5.

+ Giả sử a và b đều không chia hết cho 5.

Theo định lý Fermat ta có $\begin{cases} a^4 \equiv 1 \pmod 5 \\ b^4 \equiv 1 \pmod 5 \end{cases} \Rightarrow (a^2+b^2)(a^2-b^2) \equiv 0 \pmod 5$

Nếu $a^2+b^2 \equiv 0 \pmod 5$ thì $25a^2+1=a^2+b^2 \equiv 0 \pmod 5$ (vô lí).

Suy ra $a^2-b^2 \equiv 0 \pmod 5 \Rightarrow 23a^2+1=b^2-a^2 \equiv 0 \pmod 5$ (*)

Vì a không chia hết cho 5 nên $a \equiv \pm 1, \pm 2 (\bmod 5)$.

Với $a \equiv \pm 1 (\bmod 5) \Rightarrow a^2 \equiv 1 (\bmod 5) \Rightarrow 23a^2 + 1 \equiv -1 (\bmod 5)$ (trái với (*))

Với $a \equiv \pm 2 (\bmod 5) \Rightarrow a^2 \equiv 4 (\bmod 5) \Rightarrow 23a^2 + 1 \equiv 3 (\bmod 5)$ (trái với (*))

Vậy điều giả sử là sai. Từ đó suy ra điều cần chứng minh.

Câu 74. Do q là số nguyên tố lớn hơn 3 nên q có dạng $3k+1$ hoặc $3k+2$ với $k \in N^*$.

+ Nếu $q = 3k+1$, khi đó do $p = q+2$ nên $p = 3k+3$ chia hết cho 3, trường hợp này loại do p không phải là số nguyên tố.

+ Nếu $q = 3k+2$, khi đó do $p = q+2$ nên $p = 3k+4$. Do p là số nguyên tố nên k phải là số tự nhiên lẻ. Khi đó ta được $p+q = 6(k+1) \vdots 12$. Vậy số dư khi chia $p+q$ cho 12 là 0.

Câu 75. Từ giả thiết $a^3 + b^3 = 2(c^3 - 8d^3)$ ta có

$$a^3 + b^3 + 3ab(a+b) + (c^3 + d^3) + 3cd(c+d) = 3ab(a+b) + 3cd(c+d) + 3c^3 - 15d^3$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^3 + (c+d)^3 = 3ab(a+b) + 3cd(c+d) + 3c^3 - 15d^3$$

Dễ thấy $3ab(a+b) + 3cd(c+d) + 3c^3 - 15d^3$ chia hết cho 3 nên ta được $(a+b)^3 + (c+d)^3$ chia hết cho 3.

Mặt khác ta lại có $(a+b)^3 + (c+d)^3 = (a+b+c+d)^3 - 3(a+b)(c+d)(a+b+c+d)$

Mà $3(a+b)(c+d)(a+b+c+d)$ chia hết cho 3 nên suy ra $(a+b+c+d)^3$ chia hết cho 3.

Do vậy $a+b+c+d$ chia hết cho 3.

Chú ý: Bản chất bài toán trên chính là bài toán cơ bản: Nếu $x^3 + y^3$ chia hết cho 3 thì $x+y$ chia hết cho 3.

Câu 76. Ta có: $A = 3n^3 + 15n = 3(n^3 - n + 6n) = 3[(n-1)n(n+1) + 6n]$

Với mọi số nguyên n, $(n-1)n(n+1) + 6n$ chia hết cho 6

Vậy $A = 3[(n-1)n(n+1) + 6n]$ chia hết cho 18

Câu 77. Ta có: $(a^2 + ab + b^2) \vdots 9 \Rightarrow 4(a^2 + ab + b^2) \vdots 9$

$\Rightarrow [(2a-b)^2 + 3b^2] \vdots 9$ (1)

Mà $3b^2 \vdots 3$ nên $(2a-b)^2 \vdots 3$ mà 3 là số nguyên tố nên $(2a-b) \vdots 3$.

$(2a-b) \vdots 3$ nên $(2a-b)^2 \vdots 9$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 3b^2 \vdots 9 \Rightarrow b^2 \vdots 3$ mà 3 là số nguyên tố $\Rightarrow b \vdots 3$.

$(2a-b) \vdots 3$ và $b \vdots 3 \Rightarrow 2a \vdots 3$ mà $(2;3) = 1$ nên $a \vdots 3$.

Vậy cả a và b đều chia hết cho 3.

Câu 78. Vì $2019^{2018} \vdots 3$ nên $(a_1 + a_2 + ... + a_n) \vdots 3$. Xét hiệu:

$(a_1^3 + a_2^3 + ... + a_n^3) - (a_1 + a_2 + ... + a_n) = (a_1 - 1)a_1(a_1 + 1) + (a_2 - 1)a_2(a_2 + 1) + ... + (a_n - 1)a_n(a_n + 1)$

chia hết cho 3. Do đó $a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + ... + a_n^3$ chia hết cho 3 (đpcm).

Câu 79. Ta có: 1947 = 3.11.59

Đặt $A = 46^n + 296.13^n$

* $\begin{cases} 46^n \equiv 1^n = 1 (\bmod 3) \\ 13^n \equiv 1^n = 1 (\bmod 3) \end{cases}$

Suy ra: $A \equiv 1 + 296 \equiv 297 \equiv 0 (\bmod 3) \Rightarrow A \vdots 3$ (1)

* $\begin{cases} 46^n \equiv 2^n = 1 (\bmod 11) \\ 13^n \equiv 2^n = 1 (\bmod 11) \end{cases}$

Suy ra: $A \equiv 2^n + 296.2^n \equiv 297.2^n \equiv 11.27.2^n \equiv 0 (\bmod 11) \Rightarrow A \vdots 11$ (2)

* $46^n \equiv (-13)^n \equiv -13^n (\bmod 13)$

Vì n là số tự nhiên lẻ

$\Rightarrow A \equiv -13^n + 296.13^n \equiv 295.13^n \equiv 5.59.13^n \equiv 0 (\bmod 59)$

$\Rightarrow A \vdots 59$ (3)

Mà 3; 11; 59 đôi một nguyên tố cùng nhau nên từ (1), (2), (3)

$\Rightarrow A \vdots (3.11.59) \Rightarrow A \vdots 1947$

<u>Cách 2:</u> Ta có: 1947 = 33. 59

Đặt $A = 46^n + 296.13^n = 46^n - 13^n + 297.13^n = (46^n - 13^n) + 297.13^n$

$A = (46 - 13).A_1 + 33.9.13^n = 33(A_1 + 9.13^n) \vdots 33$

Lại có: $A = 46^n + 296.13^n = 46^n - (-13^n) + 295.13^n = [46^n - (-13^n)] + +295.13^n$

$A = [46 - (-13)].A_2 + +59.5.13^n$ (vì n lẻ)

$= 59.(A_2 + 5.13^n) \vdots 59$

Mà $(33; 59) = 1$ nên $A \vdots (33.59) = 1947$

Câu 80. Ta có: $2n^3 + 3n^2 + n = n(2n^2 + 3n + 1) = n(n+1)(2n+1)$.

+ $n(n+1)$ là tích của hai số nguyên liên tiếp nên chia hết cho *2*.

+ Xét $2n^3 + 3n^2 + n = n(2n^2 + 3n + 1) = n(n+1)(2n+1)$ tac có:

- Nếu n chia hết cho *3* thì $2n^3 + 3n^2 + n$ chia hết cho *3*
- Nếu *n* chia *3* dư *2* thì $n+1$ chia hết cho *3* nên $2n^3 + 3n^2 + n$ sẽ chia hết cho *3*
- Nếu *n* chia *3* dư *1* thì $2n+1$ chia hết cho *3* nên $2n^3 + 3n^2 + n$ sẽ chia hết cho *3*

Vậy trong mọi trường hợp thì $2n^3 + 3n^2 + n$ sẽ chia hết cho *3.*

Ta có $(2;3)=1$ nên $2n^3+3n^2+n$ chia hết cho 6 *với* mọi số nguyên n.

Câu 81. Ta có $a+b=c^3-2018c \Leftrightarrow a+b+c=(c-1).c.(c+1)-2016c$ chia hết cho 6.

Mặt khác $(a^3+b^3+c^3)-(a+b+c)=(a-1).a.(a+1)+(b-1).b.(b+1)+(c-1).c.(c+1)$ chia hết cho 6

Do đó $A=a^3+b^3+c^3$ chia hết cho 6.

Câu 82. Ta xét 2014 số khác nhau có dạng 20142014…2014 = a_n, có n bộ 2014. $n \in N^*$

Trong 2014 số này có ít nhất hai số khi chia cho 2013 có cùng số dư.

Giả sử 2 số đó là a_i, a_j (j > i). Khi đó $a_j - a_i \vdots 2013$

hay: $\underbrace{20142014...2014}_{\text{j sô 2014}} - \underbrace{20142014...2014}_{\text{i sô 2014}} = \underbrace{20142014....2014}_{\text{j–í sô 2014}}\underbrace{0000...0000}_{\text{4i sô 0}} \vdots 2013$

Số có dạng 20142014…2014 . $10^{4i} \vdots 2013$

Vì UCLN(10, 2013) = 1 nên UCLN(10^n, 2013) = 1 với mọi $n \in N^*$

Vậy: có số dạng 20142014…2014 chia hết cho 2013.

Câu 83. Từ giả thiết suy ra $a \equiv 1 \pmod 3$, $a=3k+1 (k\in\mathbb{N})$; $b\equiv 2 \pmod 3$, $b=3q+2 (q\in\mathbb{N})$.

Suy ra $A=4^a+9^b+a+b\equiv 1+0+1+2 \pmod 3$ hay $A\equiv 4 \pmod 3$. (1)

Lại có: $4^a=4^{3k+1}=4.64^k\equiv 4 \pmod 7$

$9^b=9^{3q+2}\equiv 2^{3q+2} \pmod 7 \Rightarrow 9^b\equiv 4.8^q\equiv 4 \pmod 7$.

Từ giả thiết ta còn suy ra $a\equiv 1 \pmod 7$, $b\equiv 1 \pmod 7$.

Dẫn đến $A=4^a+9^b+a+b\equiv 4+4+1+1 \pmod 7$ hay $A\equiv 10 \pmod 7$.

Từ (1) suy ra $A\equiv 10 \pmod 3$; mà 3 và 7 nguyên tố cùng nhau nên $A\equiv 10 \pmod{21}$.

Vậy A chia cho 21 dư 10.

Câu 84. Ta có : $x^5 - x = x(x^4-1) = x(x^2-1)(x^2+1) = x(x^2-1)\left[(x^2-4)+5\right]$

$=(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)+5(x-1)(x+1)x$

Ta có : $(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)$ chia hết ch 5 và 6

mà (5,6) = 1 nên $(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2) \vdots 30$

lại có $(x-1)x(x+1)$ Chia hết cho 2 và 3 mà (2,3)=1 nên $5(x-1)x(x+1) \vdots 30$

Do đó $x^5 - 1 \vdots 30$

Suy ra $A = (a^{2020}+b^{2020}+c^{2020}) - (a^{2016}+b^{2016}+c^{2016})$

$A = a^{2015}(a^5-a) + b^{2015}(b^5-b) + c^{2015}(c^5-c) \vdots 30$

Vậy $A \vdots 30$

Câu 85. Trước tiên, ta chứng minh $x \vdots 3$.

Đặt $y^5 = a$, $a \in N^*$, ta có $2x^2 - 1 = y^{15} \Leftrightarrow 2x^2 = a^3 + 1 \Leftrightarrow 2x^2 = (a+1)(a^2-a+1)$ (1)

Gọi ƯCLN$(a+1; a^2-a+1) = d$ $(d \in N^*)$, ta có: $a+1$ d, $a^2-a+1 \vdots d$.

Suy ra $(a^2-a+1)-(a+1)(a-2) = 3 \vdots d \Rightarrow d = 1$ hoặc $d = 3$

* Nếu d = 1 thì từ (1), ta có:

$\begin{cases} a+1=2 \\ a^2-a+1=x^2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a+1=x^2 \\ a^2-a+1=2 \end{cases}$ (loại vì $a \notin N^*$)

$\begin{cases} a+1=2 \\ a^2-a+1=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ x^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ x=1 \end{cases}$ (loại vì phải có $x > 1$)

* nếu d = 3 thì từ (1) ta có: $2x^2 \vdots 9$. Vì ƯCLN(2; 9) = 1nên $x^2 \vdots 9 \Rightarrow x \vdots 3$ (*)

Chứng minh $x \vdots 5$.

Đặt $y^3 = b$, $b \in N^*$, ta có: $2x^2 - 1 = b^5 \Leftrightarrow 2x^2 = b^5 + 1$

$\Leftrightarrow 2x^2 = (b + 1)(b^4 - b^3 + b^2 - b + 1)$ (2)

Gọi ƯCLN$(b + 1; b^4 - b^3 + b^2 - b + 1) = k$ $(k \in N^*)$

Ta có: $b + 1 \vdots k$; $b^4 - b^3 + b^2 - b + 1 \vdots k$

$\Rightarrow (b^4 - b^3 + b^2 - b + 1) - (b + 1)(b^3 - 2b^2 + 3b - 4) = 5 \vdots k$

Suy ra k = 1 hoặc k = 5.

* Nếu k = 1 thì từ (2) có

$\begin{cases} b+1=x^2 \\ b^4-b^3+b^2-b+1=2 \end{cases}$ (loại vì $b \notin N^*$) Hoặc: $\begin{cases} b+1=2 \\ b^4-b^3+b^2-b+1=x^2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ x=1 \end{cases}$ (loại vì phải có $x > 1$)

* Nếu k = 5 thì từ (2) suy ra $2x^2 \vdots 25$. Vì ƯCLN(2; 25) = 1 nên $x^2 \vdots 25 \Rightarrow x \vdots 5$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra $x \vdots$ BCNN(3; 5) hay $x \vdots 15$ (đpcm)

Câu 86. Giả sử A là số tự nhiên được tạo thành bằng cách viết 100 số trên theo hàng ngang một các bất kì. Khi đó trong số tự nhiên A có 21 chữ số 1 và 20 chữ số từ 2 đến 9.

Do đó tổng các chữ số của A là $21.1 + 20\left(2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9\right) = 901$ không chia hết cho 9

Mà 2016 chia hết cho 9 do đó A không thể chia hết cho 2016

Câu 87.

Giả sử tồn tại số $k \in \{0;1;2;3\}$ để tồn tại số tự nhiên n sao cho $\left(n^2 - k\right) \vdots 4$. Khi đó ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1: Nếu $n = 4q$ với q là số tự nhiên. Khi đó $n^2 - k = 16q^2 - k$.

Do đó để $\left(n^2 - k\right) \vdots 4$ thì $k \vdots 4$ nên suy ra $k = 0$.

- Trường hợp 2: Nếu $n = 4q \pm 1$ với q là số tự nhiên. Khi đó $n^2 - k = 16q^2 \pm 8q + 1 - k$

Do đó để $\left(n^2 - k\right) \vdots 4$ thì $1 - k \vdots 4$ nên suy ra $k = 1$.

- Trường hợp 3: Nếu $n=4q+2$ với q là số tự nhiên. Khi đó $n^2-k=16q^2+16q+4-k$

Do đó để $\left(n^2-k\right)\vdots 4$ thì $k\vdots 4$ nên suy ra $k=0$.

Vậy với $k=0$ hoặc $k=1$ thì luôn tồn tại số tự nhiên n để $\left(n^2-k\right)\vdots 4$.

Câu 88. Ta có: $(n+1)(n+2)...(2n)=\dfrac{(2n)!}{n!}=\dfrac{(1.3.5....(2n-1))(2.4.6...2n)}{n!}$

$$=1.3.5...(2n-1).2^n.\frac{n!}{n!}=1.3.5...(2n-1).2^n$$

Do đó: $(n+1)(n+2)...(2n)$ chia hết cho 2^n.

Câu 89. Ta có: $Q(x)=x^2-9=(x-3)(x+3)$

Để $P(x)\vdots Q(x)$ thì $P(3)=0; P(-3)=0$

Ta có:

$P(3)=3.3^3+a.3^2+b.3+9=9a+3b+90=0\Rightarrow 3a+b+30=0$

$P(-3)=3.(-3)^3+a.(-3)^2+b.(-3)+9=9a-3b-72=0\Rightarrow 3a-b-24-0$

Xét $\begin{cases}3a+b+30=0\\3a-b-24=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6a=-6\\3a-b=24\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=-27\end{cases}$

Vậy $a=-1; b=-27$ thì $P(x)\vdots Q(x)$

Câu 90. Ta có: $\left(2019^{2019}+1\right)+\left(2021^{2020}-1\right)=2019^{2019}+2021^{2020}$

Mà $2019^{2019}+1=(2019+1)\left(2019^{2018}-2019^{2017}+2019^{2016}-\ldots-1\right)$ (1)

$2021^{2020}-1=(2021-1)\left(2021^{2019}+2021^{2018}+2021^{2017}+\ldots+1\right)$ (2)

Cộng vế (1) và (2) ta được:

$2020.\left[\left(2019^{2018}-2019^{2017}+2019^{2016}-\ldots-1\right)+\left(2021^{2019}+2021^{2018}+2021^{2017}+\ldots+1\right)\right]\vdots 2020$

Câu 91. $\begin{cases}m+n^2\vdots m^2-n\\n+m^2\vdots n^2-m\end{cases}$ (1)

$\Leftrightarrow\begin{cases}m+n^2\geq m^2-n\\n+m^2\geq n^2-m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m-n+1)(m+n)\geq 0\\(n-m+1)(m+n)\geq 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m-n+1\geq 0\\n-m+1\geq 0\end{cases}$ (do m, n nguyên dương)

$\Leftrightarrow -1\leq m-n\leq 1$

*) TH1: $m-n=-1\Leftrightarrow m=n-1$

+) $m+n^2\vdots m^2-n$

$\Rightarrow\dfrac{m+n^2}{m^2-n}\in Z\Rightarrow\dfrac{n-1+n^2}{(n-1)^2-n}\in Z\Rightarrow\dfrac{\left(n^2-3n+1\right)+4n-2}{n^2-3n+1}\in Z$

$\Rightarrow \dfrac{4n-2}{n^2-3n+1} \in Z \Rightarrow n^2-3n+1 \le 4n-2 \Rightarrow n^2-7n+3 \le 0 \Rightarrow \dfrac{7-\sqrt{37}}{2} \le n \le \dfrac{7+\sqrt{37}}{2}$

vì $n \in N^* \Rightarrow n \in \{1;2;3;4;5;6\}$

$\Rightarrow m \in \{1;2;3;4;5\}$

Thử lại vào (1) ta tìm được các cặp $(m;n)$ thỏa mãn là: $(2;3)$.

*) TH2: $m-n=0 \Leftrightarrow m=n$

$m+n^2 \vdots m^2-n$

$\Rightarrow \dfrac{m+n^2}{m^2-n} \in Z \Rightarrow \dfrac{n+n^2}{n^2-n} \in Z \Rightarrow \dfrac{(n^2-n)+2n}{n^2-n} \in Z \Rightarrow \dfrac{2}{n-1} \in Z \Rightarrow n-1 \le 2 \Rightarrow n \le 3$

Vì $n \in N^* \Rightarrow n \in \{1;2;3\} \Rightarrow m \in \{1;2;3\}$

Thử lại vào (1) ta tìm được các cặp số $(m;n)$ thỏa mãn là: $(2;2)$, $(3;3)$.

*) TH3: $m-n=1 \Leftrightarrow m=n+1$

$n+m^2 \vdots n^2-m$

$\Rightarrow \dfrac{n+m^2}{n^2-m} \in Z \Rightarrow \dfrac{n+(n+1)^2}{n^2-n-1} \in Z \Rightarrow \dfrac{n^2+3n+1}{n^2-n-1} \in Z$

$\Rightarrow \dfrac{4n+2}{n^2-n-1} \in Z \Rightarrow n^2-n-1 \le 4n+2 \Rightarrow n^2-5n-3 \le 0$

$\Rightarrow \dfrac{5-\sqrt{37}}{2} \le n \le \dfrac{5+\sqrt{37}}{2}$

Vì $n \in N^* \Rightarrow n \in \{1;2;3;4;5\} \Rightarrow m \in \{2;3;4;5;6\}$

Thử lại vào (1) ta được các cặp số $(m;n)$ thỏa mãn là: $(3;2)$

Câu 92. Ta có: $n^6-2n^4+n^2 = n^6-n^4-n^4+n^2 = n^4(n^2-1)-n^2(n^2-1) = [n(n-1)(n+1)]^2$

Đặt $A = n(n-1)(n+1)$, ta có $\begin{cases} A \vdots 2 \\ A \vdots 3 \end{cases}$ và $(2,3)=1 \Rightarrow A \vdots 6 \Rightarrow [n(n-1)(n+1)]^2 \vdots 36$ (đpcm)

Câu 93. $\overline{ab}^2 - \overline{ba}^2 = (10a+b)^2-(10b+a)^2 = 99(a^2-b^2)$

$\overline{ab}^2 - \overline{ba}^2$ chia hết cho 3267 nên $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ chia hết cho 33

$1 \le a,b \le 9 \Rightarrow a=b$, hay $a=7, b=4$; $a=4, b=7$

Vậy ta có các số $11;22;33;44;47;55;66;74;77;88;99$

Câu 94. Ta có:

$4a^2+3ab-11b^2 \vdots 5 \Rightarrow (5a^2+5ab-10b^2)-(4a^2+3ab-11b^2) \vdots 5$

$\Rightarrow a^2+2ab+b^2 \vdots 5$

$\Rightarrow (a+b)^2 \vdots 5$

$\Rightarrow a+b \vdots 5$ (Vì 5 là số nguyên tố)

$\Rightarrow a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a+b)(a-b) \vdots 5$

Câu 95. Ta có:

$$x^2y + x + y \vdots xy^2 + y + 1$$
$$\Leftrightarrow y(x^2y + x + y) - x(xy^2 - y + 1) \vdots xy^2 + y + 1$$
$$\Leftrightarrow y^2 - x \vdots xy^2 + y + 1$$

TH1: $y^2 = x \Rightarrow \begin{cases} y = m \\ x = m^2 \end{cases}$: Với mọi m là số tự nhiên khác 0

Thử lại thấy thỏa mãn

TH2: $y^2 > x$, ta có:

$xy^2 + y + 1 \le y^2 - x \Leftrightarrow (x-1)y^2 + y + x + 1 \le 0$ (vô lí do $x, y \ge 1$)

TH3: $y^2 < x$. Ta có:

$xy^2 + y + 1 < x - y^2 \Leftrightarrow x(y^2 - 1) + y^2 + y + 1 < 0$ (vô lí do $x, y \ge 1$)

Vậy, $(x; y) = (m^2; m)$ với m thuộc tập số tự nhiên khác 0

Câu 96. Ta có $(x^2 - 2) \vdots (xy + 2) \Leftrightarrow (x^2y + 2x) - (2x + 2y) \vdots (xy + 2) \Leftrightarrow 2x + 2y \vdots xy + 2$

Đặt $2x + 2y = k(xy + 2)$ với $k \in N^*$

Xét $k \ge 2$. Khi đó

$2x + 2y = k(xy + 2) \ge 2(xy + 2) \Leftrightarrow x + y \ge xy + 2 \Leftrightarrow (x-1)(y-1) + 1 \le 0$

Điều này mâu thuẫn vì $x; y$ nguyên dương.

Suy ra $k < 2$ hay $k = 1$. Suy ra $2(x + y) = xy + 2 \Leftrightarrow (x-2)(y-2) = 2$

+ Nếu $x - 2 = 1; y - 2 = 2$ thì $x = 3; y = 4$

+ Nếu $x - 2 = 2; y - 2 = 1$ thì $x = 4; y = 3$

Vậy cặp số $(x; y)$ thỏa mãn bài toán là $(3; 4)$ và $(4; 3)$.

Câu 97. Ký hiệu (x;y) là ước chung lớn nhất của hai số nguyên x và y.

Gọi d = (a;b) => $a = da_1; b = db_1$, với $(a_1;b_1) = 1$

$\Rightarrow a^2 + b^2 = d^2(a_1^2 + b_1^2)$ và $ab = d^2a_1b_1$

$\Rightarrow d^2(a_1^2 + b_1^2) \vdots d^2a_1b_1 \Rightarrow a_1^2 + b_1^2 \vdots a_1b_1$

$\Rightarrow a_1^2 \vdots b_1 \Rightarrow a_1 \cdot a_1 \vdots b_1$ mà $(a_1;b_1) = 1 \Rightarrow a_1 \vdots b_1$

Tương tự $b_1 \vdots a_1$ suy ra $a_1 = b_1 = 1$

$\Rightarrow A = \dfrac{d^2(a_1^2 + b_1^2)}{2d^2a_1b_1} = 1.$

Câu 98. Giả sử *a* lẻ. Khi đó a^2 chia 4 dư 1. Mà $b^2 + c^2$ chia 4 chỉ có thể có số dư là 0, 1 hoặc 2. Do đó không thỏa mãn. Vậy *a* chẵn. Tương tự *b*, *c*, chẵn, đpcm.

Câu 99. Ta có $5^{3n+2} + 2^{2n+3} = 25.125^n + 8.4^n = 25(125^n - 4^n) + 33.4^n$.

Mặt khác $(125^n - 4^n) \vdots (125 - 4) = 121 \vdots 11$ và $33.4^n \vdots 11$, $\forall n \in N$. Do đó

$5^{3n+2} + 2^{2n+3} \vdots 11$, $\forall n \in N$.

Câu 100. Dễ thấy $xy \neq 1$. Ta xét các trường hợp sau

• Với $x = 1$ và $y \geq 2$, khi đó từ giả thiết ta được 4 chia hết cho $y - 1$ hay $y - 1$ là ước của 4. Chú ý rằng ước của 4 gồm 1; 2; 4 nên ta tìm được $y \in \{2;3;5\}$.

+ Với $x = 1$ và $y = 2$ ta được $A = 4$

+ Với $x = 1$ và $y = 3$ ta được $A = 2$

+ Với $x = 1$ và $y = 5$ ta được $A = 5$

• Với $y = 1$ và $x \geq 2$, khi đó từ giả thiết ta được $x^2 + x + 2$ chia hết cho $x - 1$ hay 4 chia hết cho $x - 1$, suy ra $x - 1$ là ước của 4 nên ta được $x \in \{2;3;5\}$.

+ Với $x = 2$ và $y = 1$ ta được $A = 8$

+ Với $x = 3$ và $y = 1$ ta được $A = 7$

+ Với $x = 5$ và $y = 1$ ta được $A = 8$

• Với $x \geq 2$ và $y \geq 2$, khi đó do $x^2 + x + 2$ chia hết cho $xy - 1$ nên ta được $y\left(x^2 + x + 2\right)$ chia hết cho $xy - 1$, từ đó suy ra $x + 2y + 1$ chia hết cho $xy - 1$.

Đặt $k = \dfrac{x + 2y + 1}{xy - 1}$, chú ý rằng do $x \geq 2$ và $y \geq 2$ nên ta được $xy - 1 \geq 3$.

+ Nếu $k=1$ thì ta được $x+2y+1=xy-1 \Leftrightarrow (x-2)(y-1)=4$.

Giải phương trình tích trên ta được các nghiệm là $(x;y)=(3;5),(4;3)(6;4)$.

Khi đó ta tính được các giá trị tương ứng của A là 1; 2; 4.

+ Nếu $k \geq 2$, khi đó ta được $x+2y+1 \geq xy-1 \Leftrightarrow (x-2)(2y-1) \leq 4$

Với $y \geq 3$ và $x \geq 2$ thì bất đẳng thức trên không xẩy ra, còn với $x=2$ và $y=2$ thì k không nhận giá trị nguyên dương.

Vậy các giá trị nguyên dương mà A nhận được là $A \in \{1;2;4;7;8\}$.

Câu 101. a) Ta có $a,b \in S$ nên $a=m^2+3n^2$ và $b=p^2+3q^2$ với m, n, p, q là các số nguyên.

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} ab &= (m^2+3n^2)(p^2+3q^2) = m^2p^2+3n^2p^2+3m^2q^2+9n^2q^2 \\ &= (m^2p^2+6mnpq+9n^2q^2)+3(m^2q^2-2mnpq+n^2p^2) \\ &= (mp+nq)^2+3(mq-np)^2 \end{aligned}$$

Do vậy $ab \in S$.

b)Do $N \in S$ nên ta có $N=x^2+3y^2$ với x, y là các số nguyên và do N là số chẵn nên x, y có cùng tính chẵn lẻ. Ta xét các trương hợp sau

+ Xét trường hợp x và y đều là số chẵn. Khi đó dễ thấy N chia hết cho 4.

Đặt $x=2a;y=2b\,(a,b \in Z)$, khi đó $\frac{N}{4}=a^2+3b^2$ nên $\frac{N}{4} \in S$.

+ Xét trường hợp x và y đều là số lẻ. Khi đó đặt $x=2a+1;y=2b+1\,(a,b \in Z)$

Ta có $N=x^2+3y^2=(2a+1)^2+3(2b+1)^2=4a^2+4a+12b^2+12b+4$ nên $N \vdots 4$.

Mặt khác do x, y là các số lẻ nên $x^2-y^2 \vdots 8$ nên $x-3y \vdots 4$ hoặc $x+3y \vdots 4$.

Với $x-3y \vdots 4$ ta được $\frac{N}{4}=\left(\frac{x-3y}{4}\right)^2+3\left(\frac{x+y}{4}\right)^2$ nên $\frac{N}{4} \in S$

Với $x+3y \vdots 4$ ta được $\frac{N}{4}=\left(\frac{x-3y}{4}\right)^2+3\left(\frac{x-y}{4}\right)^2$ nên $\frac{N}{4} \in S$

Vậy bài toán được chứng minh.

Câu 102. Giả sử $a \geq b \geq c$.Ta có $a^4+b^4+c^4=(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$.

Vì p là số nguyên tố và $p \geq 3$, suy ra $a^4+b^4+c^4$ chia hết cho p khi và chỉ $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ khi chia hết cho p hay $a^2b^2+c^2(a^2+b^2) \vdots p \Leftrightarrow a^2b^2-c^4 \vdots p \Leftrightarrow (ab-c^2)(ab+c^2) \vdots p$.

Do $p = a^2 + b^2 + c^2 > ab + c^2 > ab - c^2 \geq 0$ và p là số nguyên tố nên $ab - c^2 = 0 \Rightarrow a = b = c$

$\Rightarrow p = 3a^2 \Rightarrow a = b = c = 1$ và p = 3.

Câu 103. Trước hết ta chứng minh rằng $x^7 \equiv x(\text{mod}\, 42), \forall x \in \mathbb{Z}$. (1)

Thật vậy, ta có $x^7 - x = x(x-1)(x+1)(x^4 + x^2 + 1)$.

Dễ thầy $x(x-1)(x+1)$ là tích 3 số nguyên liên tiếp nên nó chia hết cho 6.

Theo định lí Ơle thì $x^7 - x \equiv 0(\text{mod}\, 7), \forall x \in \mathbb{Z}$, tức là $x^7 - x$ chia hết cho 7.

Vậy $x^7 - x$ chia hết cho $\text{BCNN}(6;7) = 42$. Khẳng định (1) được chứng minh.

Từ đó

$$\left[(27n+5)^7 + 10\right]^7 + \left[(10n+27)^7 + 5\right]^7 + \left[(5n+10)^7 + 27\right]^7$$
$$\equiv (27n+5)^7 + 10 + (10n+27)^7 + 5 + (5n+10)^7 + 27(\text{mod}\, 42)$$
$$\equiv 27n + 5 + 10 + 10n + 27 + 5 + 5n + 10 + 27(\text{mod}\, 42)$$
$$\equiv 42(n+1)(\text{mod}\, 42)$$
$$\equiv 0(\text{mod}\, 42).$$

Từ đó ta có khẳng định của bài toán.

Câu 104. Biến đổi giả thiết $\dfrac{x^2 - 1}{2} = \dfrac{y^2 - 1}{3} \Leftrightarrow 3(x^2 - 1) = 2(y^2 - 1) \Leftrightarrow 3x^2 - 2y^2 = 1$

Vì số chính phương chia 5 dư 0 hoặc 1 hoặc 4, mà $3x^2 - 2y^2 = 1$ nên x^2 và y^2 chia cho 5 có cùng số dư 1, từ đó ta được $x^2 - y^2 \,\vdots\, 5$

Vì số chính phương chia 8 dư 0 hoặc 1 hoặc 4, mà $3x^2 - 2y^2 = 1$ nên x^2 và y^2 chia cho 8 có cùng số dư 1, từ đó ta được $x^2 - y^2 \,\vdots\, 8$

Do 5 và 8 nguyên tố cùng nhau nên ta được $x^2 - y^2 \,\vdots\, 40$

Câu 105. Ta có $xy - 1 \,\vdots\, (x-1)(y-1)$, suy ra $xy - 1 \,\vdots\, xy + 1 - x - y$.
Mà $xy + 1 - x - y \,\vdots\, xy + 1 - x - y \Rightarrow (x-1) + (y-1) \,\vdots\, (x-1)(y-1)$, suy ra $x - 1 \,\vdots\, y - 1$ và $y - 1 \,\vdots\, x - 1$, nên $x = y$
$x^2 - 1 \,\vdots\, (x-1)^2$ ta có $x + 1 \,\vdots\, x - 1$, suy ra $2 \,\vdots\, x - 1$, nên $x = 2$ hoặc $x = 3$.

Câu 106. Ta có $\overline{abcde} = \overline{abc00} + \overline{de} = \overline{abc} \cdot 100 + \overline{de}$
$$= \overline{abc}(101 - 1) + \overline{de} = \overline{abc} \cdot 101 - \overline{abc} + \overline{de}$$
Suy ra $\overline{abcde}$ chia hết cho $101 \Leftrightarrow \overline{abc} - \overline{de} = \overline{abc} - (10d + e)$ chia hết cho 101.

Ta có $101 \cdot m \leq 99999 \Rightarrow m \leq \dfrac{99999}{101} = 990 + \dfrac{9}{101}$

Vậy số có 5 chữ số lớn nhất chia hết cho 101 là $990 \cdot 101$

Ta có $101 \cdot n \le 9999 \Rightarrow n \le \dfrac{999}{101} = 99$

Vậy số có 5 chữ số nhỏ nhất chia hết cho 101 là $100 \cdot 101$

Số các số có 5 chữ số thỏa mãn yêu cầu của bài toán là: $990 - 100 + 1 = 891$.

Đáp số: 891 số.

Câu 107. +) $41^2 = (40+1)^2 = 40^2 + 80 + 1 \equiv 81$ (mod 100).

$41^4 \equiv 81^2$ (mod 100) $\equiv (80^2 + 160 + 1)$ (mod 100) $\equiv 61$ (mod 100).

$\Rightarrow 41^5 \equiv 61.41$ (mod 100) $\equiv (60.40 + 100 + 1)$ (mod 100) $\equiv 1$ (mod 100).

$\Rightarrow (41^5)^{21} = 41^{105} \equiv 1$ (mod 100) $\Rightarrow 41^{106} \equiv 41$ (mod 100).

+) $57^4 \equiv 1$ (mod 100) $\Rightarrow 57^{2012} = (57^4)^{503} \equiv 1$ (mod 100).

Suy ra $A = 41^{106} + 57^{2012} \equiv (41+1)$ (mod 100).

Vậy 2 chữ số cuối cùng của A là 42.

Câu 108. Ta có

$13^{13} = (13^4)^3.13 \equiv 3(\text{mod}10); 6^6 \equiv 6(\text{mod}10); 2009^{2009} = (2009)^{2008}.2009 \equiv 9(\text{mod}10)$

$13^{13} + 6^6 + 2009^{2009} \equiv 3 + 6 + 9 \equiv 8(\text{mod}10)$

nên $13^{13} + 6^6 + 2009^{2009}$ có tận cùng là 8

Câu 109. Ta có: $A = 7(m+n)^2 + 2mn = 7(m^2+n^2) + 16mn = 7(m-n)^2 + 30mn$.

Do $A \vdots 225$ nên $A \vdots 15$.

Lại có $30mn \vdots 15$ nên $7(m-n)^2 \vdots 225$.

Suy ra $(m-n) \vdots 15$.

Từ đây, ta có: $7(m-n)^2$ chia hết cho 225.

Dẫn đến $30mn \vdots 225$, tức là $mn \vdots 15$.

Mà $mn = (m-n)n + n^2$ nên $n^2 \vdots 15$ tức $n \vdots 15$. Từ đó, suy ra $m \vdots 15$ (do $(m-n) \vdots 15$).

Vậy $mn \vdots 15^2 = 225$.

Câu 110. Ta có $5m + n \vdots m + 5n$ nên $5m + n = (m + 5n)a$ với a là số nguyên dương.

Khi đó ta được $5m - am = 5an - n \Leftrightarrow m(5-a) = n(5a-1)$.

Do m, n, a là các số nguyên dương nên $5a - 1 > 0$ do đó suy ra $5 - a > 0$.

Do a nguyên dương nên ta được $a \in \{1;2;3;4\}$. Ta đi xét các trường hợp sau.

+ Với $a = 1$, khi đó ta được $4m = 4n \Leftrightarrow m = n$ nên suy ra $m \vdots n$.

+ Với $a = 2$, khi đó ta được $3m = 9n \Leftrightarrow m = 3n$ nên suy ra $m \vdots n$.

+ Với $a = 3$, khi đó ta được $2m = 14n \Leftrightarrow m = 7n$ nên suy ra $m \vdots n$.

+ Với $a = 4$, khi đó ta được $m = 19n$ nên suy ra $m \vdots n$.

Vậy m luôn chia hết cho n.

Câu 111. a) Chứng minh rằng x và y là hai số lẻ và nguyên tố cùng nhau.

Giả sử trong hai số x và y có một số chẵn, do vài trò của x và y như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử x là số chẵn. Khi đó do $x^2 + y^2 + 10$ chia hết cho xy nên $x^2 + y^2 + 10$ chia hết cho 2. Từ đó dẫn đến y^2 chia hết cho 2. Từ đó suy ra được $x^2 + y^2 + 10$ chia hết cho 4, dẫn đến 10 chia hết cho 4, điều này vô lí. Do đó cả hai số x và y đều là số lẻ.

Gọi $d = \left(x;y\right)$, khi đó $x = dx_0; y = dy_0$ với $x_0; y_0 \in N, \left(x_0; y_0\right) = 1$.

Từ đó ta có $x^2 + y^2 + 10 = d^2x_0^2 + d^2y_0^2 + 10$ chia hết cho $d^2x_0y_0$ nên suy ra 10 chia hết cho d^2 nên suy ra $d = 1$ hay x và y nguyên tố cùng nhau.

b) Chứng minh rằng $k = \dfrac{x^2 + y^2 + 10}{xy}$ chia hết cho 4 và $k \geq 12$.

Đặt $x = 2m + 1; y = 2n + 1\left(m, n \in N\right)$. Khi đó ta có $k = \dfrac{4\left(m^2 + n^2 + m + n + 3\right)}{\left(2m + 1\right)\left(2n + 1\right)}$.

Do 4 và $\left(2m + 1\right)\left(2m + 1\right)$ nên suy ra $m^2 + n^2 + m + n + 3$ chia hết cho $\left(2m + 1\right)\left(2n + 1\right)$.

Hay ta được $\dfrac{m^2 + n^2 + m + n + 3}{\left(2m + 1\right)\left(2n + 1\right)}$ là số nguyên. Từ đó suy ra k chia hết cho 4.

Cũng từ $k = \dfrac{x^2 + y^2 + 10}{xy}$ ta được $x^2 + y^2 + 10 = kxy$. Nếu trong hai số x và y có một số chia hết cho 3, khi đó không mất tính tổng quát ta giả sử số đó là x. Khi đó ta suy ra được $y^2 + 10$ chia hết cho 3 nên $y^2 + 1$ chia hết cho 3 hay y^2 chia 3 dư 2, điều này vô lý vì y^2 chia 3 dư 0 hoặc dư 1. Do vậy x và y không chia hết cho 3. Suy ra $x^2; y^2$ chia 3 cùng có số dư là 1. Do đó ta được $x^2 + y^2 + 10 = kxy$ chia hết cho 3. Mà ta lại có $\left(3; xy\right) = 1$ nên k chia hết cho 3.

Kết hợp với k chia hết cho 4 ta suy ra được k chia hết cho 12. Do đó $k \geq 12$.

Câu 112. Đặt $F = \left|5x^2 + 11xy - 5y^2\right| = f\left(x;y\right)$, m là GTNN của F.

Ta có m là số nguyên và $f\left(0;1\right) = f\left(1;0\right) = 5 \Rightarrow m \leq 5$.

Vì x, y là các số nguyên không đồng thời bằng 0 nên $5x^2 + 11xy - 5y^2 \neq 0$ hay $F \neq 0$.

Xét $x=2n$; $y=2k$. Ta có $f(x;y)=f(2n;2k)=4f(n;k)$ nên giá trị $f(2n;2k)$ không thể là GTNN. Do đó GTNN của F xảy ra khi x, y không cùng chẵn, vì vậy m là số lẻ.

* Nếu $m=1$ suy ra tồn tại x, y để

$\left|5x^2+11xy-5y^2\right|=1 \Leftrightarrow 100x^2+220xy-100y^2=\pm 20 \Leftrightarrow (10x+11y)^2-221y^2=\pm 20$

$\Leftrightarrow (10x+11y)^2 \pm 20 = 221y^2 \vdots 3$. Suy ra $(10x+11y)^2$ chia 13 dư 6 hoặc dư 7. Mà số chính phương khi chia 13 chỉ có dư 0, 1, 3, 4, 9, 10, 12. Do đó vô lý.

* Nếu $m=3$ suy ra tồn tại x, y để

$\left|5x^2+11xy-5y^2\right|=3 \Leftrightarrow 100x^2+220xy-100y^2=\pm 60 \Leftrightarrow (10x+11y)^2-221y^2=\pm 60$

$\Leftrightarrow (10x+11y)^2 \pm 60 = 221y^2 \vdots 3$. Suy ra $(10x+11y)^2$ chia 13 dư 5 hoặc dư 8. Mà số chính phương khi chia 13 chỉ có dư 0, 1, 3, 4, 9, 10, 12. Do đó vô lý.

Vậy GTNN của F là 5.

Câu 113. $P=\left(a^7b^3-a^3b^3\right)-\left(a^3b^7-a^3b^3\right)$

$A=a^7b^3-a^3b^3=a^3b^3\left(a^4-1\right)=a^2b^3(a-1)a(a+1)\left(a^2+1\right)$ chia hết cho 6 vì $(a-1)a(a+1)$ là tích ba số nguyên liên tiếp.

$A=a^2b^3\left[(a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)+5a\left(a^2-1\right)\right] \Rightarrow A \vdots 5$. Do đó $A \vdots 30$.

Tương tự $B=\left(a^3b^7-a^3b^3\right) \vdots 30 \Rightarrow P \vdots 30$.

Câu 114. $P=\left(a^5-5a^4+6a^3\right)-a^3+5a^2-6a+240$

$=a^3\left(a^2-5a+6\right)-a\left(a^2-5a+6\right)+240=\left(a^2-5a+6\right)\left(a^3-a\right)+240$

Suy ra $P=(a-3)(a-2)(a-1)a(a+1)+240 \vdots 120$

Từ đó suy ra P chia hết cho 120.

Câu 115. $P=4^a+a+b=\left(4^a+2\right)+(a+1)+(b+2007)-2010$

Ta có $4^a+2=\left(4^a-1\right)+3=(4-1)\left(4^{a-1}+4^{a-2}+\ldots+4+1\right)+3$ chia hết cho 3.

Mặt khác 4^a+2 là số chẵn nên $\left(4^a+2\right) \vdots 2$ do đó 4^a+2 chia hết cho 6.

a + 1, b + 2007 và 2010 cùng chia hết cho 6 nên P chia hết cho 6.

Câu 116. Do $a+b+c$ chia hết cho 4 nên đặt $a+b+c=4k\ (k \in \mathbb{Z})$ ta có:

$P=(4k-c)(4k-b)(4k-a)-abc=\left(16k^2-4kc-4ka+ac\right)(4k-b)-abc$

$=4k\left(16k^2-4kc-4ka+ac-4kb+bc+ab\right)-2abc$.

Do $a+b+c\,\vdots\,4$ nên trong ba số a,b,c phải có ít nhất một số chẵn nên $2abc\,\vdots\,4$, từ đó suy ra P chia hết cho 4.

Câu 117. a) Ta biết rằng bình phương một số nguyên chia cho 8 dư 0, 1, 4, do đó $x^2+y^2+z^2$ chia cho 8 thì số dư thuộc tập $\{0;1;2;3;4;5;6\}$.

Mặt khác, 560647 chia cho 8 dư 7. Vậy không tồn tại x,y,z là các số nguyên thỏa mãn đề bài.

b) Đẳng thức đã cho tương đương với

$(a-1)a(a+1)+(b-1)b(b+1)+(c-1)c(c+1)+(d-1)d(d+1)=660064$.

Vế trái chia hết cho 6, vế phải không chia hết cho 6, từ đó suy ra điều cần chứng minh.

Câu 118. a) Ta có $(a+5)-(a-2)=7$ nên $a+5$ và $a-2$ cùng chia hết cho 7 hoặc cùng không chia hết cho 7.

Nếu $a+5$ và $a-2$ cùng chia hết cho 7 thì $P=(a+5)(a-2)+63$ không chia hết cho 49.

Nếu $a+5$ và $a-2$ cùng không chia hết cho 7 thì $(a+5)(a-2)$ không chia hết cho 7, do đó P không chia hết cho 7, nên P không chia hết cho 49.

b) $Q=a^2+5a+185$ không chia hết cho 169.

Tương tự ta viết $Q=(a+9)(a-4)+221$.

Câu 119. Ta có $P=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Đặt $Q=n(n+1)(2n+1)$ thì $Q=6P$.

Dễ thấy rằng $n=5k+1, n=5k+3$ thì Q không chia hết cho 5, do đó P không chia hết cho 5.

Câu 120. a) $P=(a+5)(a-6)+154$.
Ta có $(a+5)-(a-6)=11$ chia hết cho 11, vậy $a+5;a-6$ cùng chia hết cho 11 hoặc cùng không chia hết cho 11.
Nếu $a+5;a-6$ cùng chia hết cho 11 thì $a+5;a-6$ chia hết cho 121. Suy ra P không chia hết cho 121.
Nếu $a+5;a-6$ cùng không chia hết cho 11 thì P không chia hết cho 121.
Vậy không tồn tại số nguyên a để P chia hết cho 121.

b) $Q=(a^2+3)(a-7)+(a+7)$ chia hết cho a^2+3 khi

$(a+7)\vdots(a^2+3)\Rightarrow(a-7)(a+7)=\left[(a^2+3)-52\right]\vdots(a^2+3)$

$\Rightarrow a^2+3\in\{4;13;26;52\}\Rightarrow a\in\{1;-7\}$.

Bài 121.

a) Ta có $A(x)=(x^2-x-2)(x^2-8x+15)+m+23$, do đó $A(x)$ chia hết cho $B(x)$ khi

$m+23=0\Leftrightarrow m=-23$.

b) $f(x)$ chia hết cho $x-1$ và $x+2$ nên ta có:

$$\begin{cases} f(x)=p(x)(x-1) \\ f(x)=q(x)(x+2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} f(1)=0 \\ f(-2)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a-3b=1 \\ a-12b=25\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=-7 \\ b=-\dfrac{8}{3}\end{cases}$$

Bài 122. Theo đề bài ta có với mọi x:

$$\begin{cases} A(x)=p(x)(x-5)+7 & (1) \\ A(x)=q(x)(x+3)-1 & (2) \\ A(x)=(2x^3+1)(x-5)(x+3)+ax+b & (3)\end{cases}$$

Từ (1), (2) ta có $A(5)=7, A(-3)=-1$.

Từ (3) ta có $A(5)=5a+b; A(-3)=-3a+b$.

Do đó ta có $\begin{cases} A(5)=5a+b=7 \\ A(-3)=-3a+b=-1\end{cases}\Rightarrow a=1, b=2$.

Vậy $A(x)=(x^2-2x-15)(2x^3+1)+x+2$.

Bài 123. Ta phân tích $P(n)$ thành nhân tử:

$P(n)=n^{1800}(n^{80}+n^{40}+1)=n^{1800}\left[(n^{40}+1)^2-n^{40}\right]$

$=n^{1800}(n^{40}+n^{20}+1)(n^{40}-n^{20}+1)=n^{1800}\left[(n^{20}+1)^2-n^{20}\right](n^{40}-n^{20}+1)$

$=n^{1800}(n^{20}+n^{10}+1)(n^{30}-n^{10}+1)(n^{40}-n^{20}+1)$.

Từ đó suy ra $P(n)$ chia hết cho $Q(n)$ với $n\in\mathbb{Z}$.

Bài 124.

a) $P=\dfrac{1.2.3...(a+3)(a+4)(a+5)...(2a+5)(2a+6)}{1.2.3...(a+3)}$

$=1.2.3...(2a+5).\dfrac{2.4.6...(2a+4)(2a+6)}{1.2.3...(a+2)(a+3)}$

$=1.3.5...(2a+5)2^{a+3}$ chia hết cho 2^{a+3}.

b) $Q=\dfrac{1.2.3...(3a-1)3a}{1.2.3...a}$

$=\left[1.4.7...(3a-2)\right]\left[2.5.8...(3a-1)\right].\dfrac{3.6.9...3a}{1.2.3...a}$

$=\left[1.4.7...(3a-2)\right]\left[2.5.8...(3a-1)\right].3^a$ chia hết cho 3^a

Bài 125: Ta có: $\left(a^3+b^3\right)-\left(a+b\right)=\left(a^3-a\right)+\left(b^3-b\right)=\left(a-1\right)a\left(a+1\right)+\left(b-1\right)b\left(b+1\right)\vdots 6$

Do đó: $\left(a^3+b^3\right)\vdots 6 \Leftrightarrow (a+b)\vdots 6$

Bài 126. Vì m là số chẵn $\Rightarrow m=2k \Rightarrow m^3+20m=\left(2k\right)^3+40k$

$m^3+20m=8\left(k^3+5k\right)=8\left[\left(k^3-k\right)+6k\right]=8\left(k^3-k\right)+48k$

Ta có: $\left(k^3-k\right)\vdots 6 \Rightarrow 8\left(k^3-k\right)\vdots 48$ và $48k\vdots 48$

Vậy: $\left(m^3+20m\right)\vdots 48$

Bài 127. Gọi số cần tìm là $X=\overline{xy...tba_na_{n-1}...a_2a_1}$, b là chữ số cần gạch.

Đặt $A=\overline{xy...t}$ và $Y=\overline{xy...ta_na_{n-1}...a_2a_1}$

Ta có: $X=71.Y$

$\Leftrightarrow A.10^{n+1}+b.10^n+\overline{a_n...a_1}=71 \qquad \left(A.10^n+\overline{a_n...a_1}\right)$

$\Leftrightarrow b.10^n=61.A.10^n+70.\overline{a_na_{n-1}...a_2a_1}$

Nếu $A>0$ thì $b.10^n>61A.10$ vì $0<b\le 9$.

Vậy $A=0$ tức là $b.10^n=70.\overline{a_n...a_1}$

Chữ số bị gạch là chữ số đầu tiện tính từ trái qua phải.

Mặt khác: $\left(10^k,7\right)=1$ với mọi k $\Rightarrow b\vdots 7$

Mà $1\le b\le 9 \Rightarrow b=7$

Lúc đó: $7.10^n=70.\overline{a_n...a_1}$

$\Rightarrow Y=\overline{a_na_{n-1}...a_2a_1}=100...00$ ($n-1$ chữ số 0)

Vậy: $X=7100...00$ ($n-1$ chữ số 0) chữ số bị gạch đi là 7.

Bài 128.

Gọi số cần tìm là $\overline{ab}$. Ta có:

$\overline{ab}\vdots 3$ và $\overline{a0b}+2a=9.\overline{ab}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}(a+b)\vdots 3\\ 100a+b+2b=9(10a+b)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a+b)\vdots 3\\ 3a=2b\end{cases}$

Từ $3a = 2b \Rightarrow 2b \vdots 3$ mà $(2,3) = 1 \Rightarrow b \vdots 3$ do $(a+b) \vdots 3$

$\Rightarrow a \vdots 3$ mà $3a \vdots 2 \Rightarrow a \vdots 2$

Ta có: $a \vdots 3; a \vdots 2; (2,3) = 1 \Rightarrow a \vdots 6, 1 \le a \le 9 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow b = 9$

Vậy: $\overline{ab} = 69$.

Bài 129.

* Nếu $x \vdots 3$ và $y \vdots 3$ $\Rightarrow x^2 \vdots 3$ và $y^2 \vdots 3 \Rightarrow (x^2 + y^2) \vdots 3$

* Ngược lại: giả sử $(x^2 + y^2) \vdots 3$

Ta có một số nguyên a bất kỳ chỉ có một trong ba dạng.

$a = 3q, a = 3q + 1, a = 3q - 1$

$\Rightarrow a^2$ có một trong hai dạng $3k$ hoặc $3k + 1$

$\Rightarrow x^2 + y^2$ có một trong các dạng: $3p, 3p + 1, 3p + 2$

Do đó: $(x^2 + y^2) \vdots 3 \Leftrightarrow x^2 \vdots 3$ và $y^2 \vdots 3 \Leftrightarrow x \vdots 3$ và $y \vdots 3$.

Bài 130.

Ta có: $\overline{aaaa} = 16.\overline{bbb} + r$

$\overline{aaa} = 16.\overline{bb} + (r - 200)$

Với: $200 \le r < \overline{bbb}$.

Trừ các đẳng thức, ta có: $1000a = 1600b + 200 \Leftrightarrow 5a = 8b + 1 \Rightarrow a = 5$ và $b = 3$.

Ta có các số 5555 và 333 thỏa mãn.

Bài 131.

a) Gọi số cần tìm là: $\overline{abc} = 100a + 10b + c$.

$$k = \frac{\overline{abc}}{a+b+c} = \frac{100a + 10b + c}{a+b+c} = 1 + \frac{9(11a+b)}{a+b+c}$$

Nhận thấy k bé nhất khi c lớn nhất $\Rightarrow$ khi đó $c = 9$

$$\Rightarrow k = 1 + \frac{9(11a+b)}{a+b+9} = 10 + \frac{9(10a-9)}{a+b+9}$$

$\Rightarrow k$ bé nhất khi b lớn nhất $\Rightarrow b = 9$

$$\Rightarrow k = 10 + \frac{9(10a-9)}{a+18} = 100 - \frac{9.180}{a+18}$$

$\Rightarrow k$ bé nhất khi a bé nhất $\Rightarrow a = 1$

Vậy $\overline{abc} = 199$

b) Xét các trường hợp: (1) a chẵn, b chẵn; (2) a chẵn; b lẻ

(3) a lẻ; b chẵn; (4) a lẻ, b lẻ.

Trong tất cả các trường hợp ta đều có $A \vdots 16$

Dùng phương pháp quy nạp toán học để chứng minh cho $B \vdots 36$ với mọi n.

Bài 132.

a) Chỉ cần chứng minh $\left(n^5-n\right)\vdots 30$ với mọi n.

b) Với mọi số tự nhiên khác 0, ta có: $0<S\left(n\right)\le n$.

* Nếu $1\le n\le 1987\Rightarrow \left(n-1\right)\left(n-1987\right)\le 0$

$\Rightarrow n^2-1988n+1987\le 0$

$\Rightarrow n^2-1988n+26<n^2-1988n+1987\le 0$

$\Rightarrow$ vô lý.

* Nếu $n=1988\Rightarrow S\left(1988\right)=1988^2-1988.1988+26$

Vậy $n=1988$ thỏa mãn.

* Nếu $n>1988\Rightarrow n-1988\ge 1$

$\Rightarrow n^2-1988n+26>n^2-1988=n\left(n-1988\right)\ge n$

$\Rightarrow S\left(n\right)=n^2-1988n+26>n$ (vô lý)

Vì luôn luôn có: $0<S\left(n\right)\le n$

Vậy chi có $n=1988$ thỏa mãn.

c) Gọi $\left(A,B\right)=d\Rightarrow d\ge 1$

$\Rightarrow A\vdots d$ và $B\vdots d$ $\Rightarrow \left(2n+1\right)\vdots d$ và $\dfrac{n\left(n+1\right)}{2}\vdots d$

$\Rightarrow n\left(2n+1\right)\vdots d$ và $2n\left(n+1\right)\vdots d$

$\Rightarrow \left(2n^2+n\right)\vdots d$ và $\left(2n^2+2n\right)\vdots d$

$\Rightarrow \left[\left(2n^2+2n\right)-\left(2n^2+n\right)\right]\vdots d$

$\Rightarrow n\vdots d\Rightarrow 2n\vdots d$ mà $\left(2n+1\right)\vdots d$

$\Rightarrow 1\vdots d\Rightarrow d\le 1$ mà $d\ge 1\Rightarrow d=1$

Vậy $\left(A,B\right)=1$

Bài 133.

a) Một số nguyên dương không chia hết cho 5 thì có một trong các dạng:

$x=5q+1,5q+2,5q+3,5q+4$

$\Rightarrow x^2$ có một trong các dạng $5k+1$ hoặc $5k+4$

$\Rightarrow x^4$ có dạng duy nhất $5p+1$

$\Rightarrow b^4=5B+1$ và $a^4=5A+1\Rightarrow a^4-b^4=5\left(A-B\right)\vdots 5$

b) Theo giả thiết, ta suy ra các tích: $a_1a_2,a_2a_3,...,a_na_1$ chỉ nhận một trong hai giá trị 1 hoặc -1.

Do đó: $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + ... + a_na_1 = 0 \Leftrightarrow n = 2m$. Đồng thời có m số hạng bằng 1, m số hạng bằng -1.

Nhận thấy: $(a_1a_2)(a_2a_3)...(a_na_1) = a_1^2a_2^2...a_n^2 = 1$

$\Rightarrow$ Số các số hạng bằng -1 phải là số chẵn.

Tức là: $m = 2k \Rightarrow n = 4k \Rightarrow n \vdots 4$.

c) Ta có: $n + S(n) + S(S(n)) = 60 \Rightarrow n < 60 \Rightarrow S(n) < 5 + 9 = 14$

$\Rightarrow S(S(n)) < 1 + 9 = 10 \Rightarrow S(n) + S(S(n)) < 14 + 10 = 24$

$60 = n + S(n) + S(S(n)) < n + 24 \Rightarrow 36 < n < 60$

Bởi vì $n, S(n), S(S(n))$ có cùng số dư trong phép chia cho 9.

$\Rightarrow 3n$ chia cho 9 dư 6 (do $S(60) = 6$) $\Rightarrow n$ chia 3 dư 2.

$\Rightarrow n$ chia cho 9 có một trong ba số dư 2, 5, 8.

$\Rightarrow n \in \{44; 47; 50\}$

Bài 134.

a) Biểu diễn $M = (1993^{1997} - 1) + (1997^{1993} + 1) \Rightarrow M \vdots 3$

Biểu diễn $M = 1993.1993^{1996} + 1997.1997^{1992} = 1993.(1993^4)^{499} + 1997.(1997^4)^{498}$

$\Rightarrow$ M tận cùng là chữ số 0 $\Rightarrow M \vdots 5$ mà $(3,5) = 1 \Rightarrow M \vdots 15$.

b) M tận cùng là chữ số 0.

Bài 135. 1) Xét ba số dư của x, y, z khi chia cho 3.

* Nếu cả ba số là khác nhau: $(0,1,2)$ thì $x + y + z \vdots 3$ nhưng khi đó $(x-y)(y-z)(z-x)$ không chia hết cho 3 (vô lý).

* Nếu có hai số dư bằng nhau thì $x + y + z$ không chia hết cho 3 trong khi đó một trong ba hiệu $x - y; y - z$ hoặc $z - x$ chia hết cho 3 (vô lý) vì $(x-y)(y-z)(z-x) = x + y + z$.

Vậy chỉ còn trường hợp cả 3 số x, y, z đều có cùng số dư khi chia cho 3.

$\Rightarrow (x-y)(y-z)(z-x) \vdots 3.3.3 = 27$

Mà: $(x-y)(y-z)(z-x) = x + y + z \Rightarrow x + y + z \vdots 27$

2) Ta có: $a^{4k} - 1 = (a^4)^k - 1^k = (a^4 - 1).P$

Ta có: $a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$ là tích của hai số chẵn liên tiếp $a - 1 > 4$ vì a là số nguyên tố $a > 5$.

$\Rightarrow$ Ắt có một số chia hết cho 2 và một số chia hết cho 4.

$\Rightarrow (a-1)(a+1)\vdots 8$

Xét ba số liên tiếp: $a-1, a, a+1$; ắt có một số chia hết cho 3 vì a không chia hết cho 3.

$\Rightarrow (a-1)(a+1)\vdots 3 \Rightarrow (a-1)(a+1)\vdots 24$

Ta có: $a^4-1=(a-1)(a+1)(a^2+1)$ và a là số lẻ.

$\Rightarrow a^2+1$ là số chẵn $\Rightarrow (a^2+1)\vdots 2$

$\Rightarrow (a-1)(a+1)(a^2+1)\vdots 48$

Lại vì a không chia hết cho 5.

$\Rightarrow a$ có dạng $5k+1, 5k-1, 5k+2, 5k-2$ $\Rightarrow a^4$ có dạng $5m+1 \Rightarrow a^4-1\vdots 5$

Vì $(5,4,8)=1 \Rightarrow (a-1)(a+1)(a^2+1)\vdots 240$

Bài 136.

a) Nếu $n=2k \Rightarrow A=2k.2^{2k}+3^{2k}=(2k+1)2^{2k}+3^{2k}-2^{2k}$.

$$A=(2k+1).2^{2k}+5p$$

Bởi vì $(2^{2k},5)=1$ đo đó:

$$A\vdots 5 \Leftrightarrow 2k+1\vdots 5 \Leftrightarrow 2k=5m+4 \Leftrightarrow k=5t+2 \Leftrightarrow n=10t+4$$

Nếu $n=2k+1 \Rightarrow A=(2k+1)2^{2k+1}+3^{2k+1}=2k.2^{2k+1}+2^{2k+1}-3^{2k+1}=k.2^{2k+2}+5q$

Do đó: $A\vdots 5 \Leftrightarrow k\vdots 5 \Leftrightarrow n=10m+1$

Tóm lại: $A\vdots 5 \Leftrightarrow n=10m+4$ hoặc $n=10m+1$

b) $A\vdots 25 \Rightarrow A\vdots 5 \Leftrightarrow n=10m+4$ hoặc $n=10m+1$

* Trường hợp $n=10m+1$

Ta có: $2^{10}=1024\equiv -1 \pmod{25}$

$$3^{10}=59049\equiv -1 \pmod{25}$$

$$A=(10m+1).2^{10m+1}+3^{10m+1}$$

$$2^{10m}\equiv(-1)^m \pmod{25}; 2^{10m+1}=(-1)^m.2 \pmod{25}$$

$$\Rightarrow (10m+1).2^{10m+1}=(10m+1)(-1)^m.2 \pmod{25}$$

$$3^{10m+1}=(-1)^m.3 \pmod{25}$$

$$\Rightarrow A=(20m+5)(-1)^m \pmod{25}$$

$A \vdots 25 \Leftrightarrow (20m+5) \vdots 25 \Leftrightarrow 5(4m+1) \vdots 25 \Leftrightarrow (4m+1) \vdots 25$

$\Leftrightarrow 4m+1=5t \Leftrightarrow 4m=5t-1 \Leftrightarrow m=5q+1$

Vậy $A \vdots 25 \Leftrightarrow n=10(5q+1)=50q+11$

* Trường hợp $n=10m+4$

$A=(10m+4)2^{10m+4}+3^{10m+4}$

Làm tương tự $\Rightarrow A=16(10m+4)(-1)^m+81.(-1)^m \pmod{25}$

$(-1)^m.(160m+145) \pmod{25}$

Vậy $A \vdots 25 \Leftrightarrow (32m+29) \vdots 5 \Leftrightarrow 32m \equiv 1 \pmod 5$

$\Leftrightarrow m=5q+3 \Leftrightarrow n=50q+34$

Tóm lại $A \vdots 25 \Leftrightarrow n=50q+11$ hoặc $n=50q+34$

Bài 137.

a) Viết: $A=(25^n-18^n)-(12^n-5^n)$

Ta có: $(25^n-18^n) \vdots (25-18)$ và $(12^n-5^n) \vdots (12-5)$

$\Rightarrow A \vdots 7$

Viết: $A=(25^n-12^n)-(18^n-5^n)$

Ta có: $(25^n-12^n) \vdots (25-12)$ và $(18^n-5^n) \vdots (18-5)$

$\Rightarrow A \vdots 13$ vì $(7,13)=1 \Rightarrow A \vdots 7.13=91$

b) Ta có: $5^{2p}+1997=5^{2p^2}+q^2 \Leftrightarrow (5^{2p}-1)+1996=(5^{2p^2}-1)+q^2-1$

Nếu p và q là số nguyên tố $\Rightarrow 5^{2p}-1=25^p-1 \vdots 24$

Và $5^{2p^2}-1=25^{p^2}-1 \vdots 24; q^2-1=(q-1)(q+1) \vdots 3$

$\Rightarrow 1996 \vdots 3$ vô lý. Vậy phương trình không có nghiệm (p,q).

Bài 138. Biểu diễn $\mathrm{P}=(1998\mathrm{n}^2+1998\mathrm{n})+(\mathrm{n}^2-\mathrm{n}+30)$

Bởi vì $(1998\mathrm{n}^2+1998\mathrm{n}) \vdots 6\mathrm{n} \Rightarrow \mathrm{P} \vdots 6\mathrm{n} \Leftrightarrow (\mathrm{n}^2-\mathrm{n}+30) \vdots 6\mathrm{n}$

Xét hai trường hợp:

+ Nếu $\mathrm{n}>0$:

Ta có $(\mathrm{n}^2-\mathrm{n}) \vdots \mathrm{n} \Rightarrow 30 \vdots \mathrm{n}$ vì $30 \vdots 6 \Rightarrow (\mathrm{n}^2-\mathrm{n}) \vdots 6$

Mà $\mathrm{n}^2-\mathrm{n}=\mathrm{n}(\mathrm{n}-1) \vdots 2$, do đó:

$\mathrm{n}(\mathrm{n}-1) \vdots 3 \Rightarrow \mathrm{n}=3\mathrm{k}$ hoặc $\mathrm{n}=3\mathrm{k}+1$

Vậy $P \vdots 6n \Leftrightarrow n = 3k$ hoặc $n = 3k+1$ với n là ước số của $30 \Rightarrow n \in \{1, 3, 10, 30\}$

+ Nếu $n < 0$: Đặt $n = -m$ với $m > 0$

Làm tương tự ta có: $m \in \{2, 5, 6, 15\} \Rightarrow n \in \{-2, -5, -6, -15\}$

Bài 139. a) $1996 = 3.665 + 1 \Rightarrow ab = (3k+1)^{1995} \Rightarrow ab$ có dạng $3Q+1$

$\Rightarrow a$ và b phải có cùng dạng $3m+1$ hoặc $3m-1$

$\Rightarrow a+b$ có dạng $3p+2$ hoặc $3p-2$

$\Rightarrow a+b$ không chia hết cho 3 nên $a+b$ không chia hết cho 1995

b) Làm tương tự với:

$1991 = 3k-1 \Rightarrow cd = 3Q+1$

$\Rightarrow c$ và d phải có cùng dạng $3m+1$ hoặc $3m-1$

$\Rightarrow c+d$ có dạng $3p+2$ hoặc $3p-2$

$\Rightarrow c+d$ không chia hết cho 3 nên $c+d$ không chia hết cho 1992

Bài 140. Ta có: $(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y) = 1995 + 3xy(x+y) \vdots 3$

Do đó $(x+y)^3 \vdots 3 \Rightarrow (x+y) \vdots 3 \Rightarrow (x+y)^3 \vdots 27$

Ta có: $3xy(x+y) \vdots 9 \Rightarrow 1995 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) \vdots 9$

Vô lý vì 1995 chia cho 9 dư 6

Bài 141. Ta có: $2T_n = n(n+1)$. Mặt khác, sử dụng tính chất $a^n + b^n$ chia hết cho $a+b \in \mathbb{N}^*$ và n lẻ, ta có: $2S_n = \left[\left(1^{2019} + n^{2019}\right) + 2^{2019} + (n-1)^{2019} + \ldots + \left(n^{2019} + 1\right)\right] \vdots (n+1) \quad (1)$

$$2S_n = \left\{\left[1^{2019} + (n-1)^{2019}\right] + \left[2^{2019} + (n-2)^{2019}\right] + \ldots + \left[(n-1)^{2019}\right] + 2n^5\right\} \vdots n \quad (2)$$

Do $(n, n+1) = 1$ nên từ (1) và (2) suy ra: $2S_n \vdots n(n+1) = 2T_n$ hay $S_n \vdots T_n$.

Bài 142. Gọi d là ước chung lớn nhất của m và n.

Giả sử $m = ad,\ n = bd$ với $(a, b) = 1$

Ta có: $A = \dfrac{(m+n)^3}{n^2} = \dfrac{d^3(a+b)^3}{d^2b^2} = \dfrac{d(a+b)^3}{b^2}$

Vì $(a, b) = 1$ nên $(b, a+b) = 1$. Suy ra $(b^2, (a+b)^3) = 1$. Như vậy để A nguyên thì $d \vdots b^2$, giả sử $d = cb^2$. Bây giờ ta được $A = c(a+b)^3$ với $a,\ b,\ c$ nguyên dương.

Do $a+b\ge 2$ và A lẻ nên A nhận giá trị bé nhất là 27, điều này xảy ra khi $c=1, a+b=3$. Khi đó có hai khả năng:

Nếu $a=2$ *và* $b=1$ *thì ta có* $d=1$. *Suy ra* $m=2, n=1$.

Nếu $a=1$ *và* $b=2$ *thì ta có* $d=4$. *Suy ra* $m=4, n=8$.

Bài 143. Ta có $a^3b-1=b(a^3+1)-(b+1)\vdots a+1\Rightarrow b+1\vdots a+1$. Tương tự

$b^3a+1=a(b^3-1)+a+1\vdots b-1$ suy ra $a+1\vdots b-1$. Từ đó suy ra

$b+1\vdots b-1\Leftrightarrow b-1+2\vdots b-1\Rightarrow b-1\in U(2)$ suy ra $b=2$ hoặc $b=3$.

Với $b=2$ ta có $3\vdots a+1\Rightarrow a=2$, với $b=3$ ta có: $4\vdots a+1\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=1\\ a=3\end{array}\right.$.

Vậy các bộ số $(a;b)$ thỏa mãn điều kiện là: $(a;b)=(1;3),(2;2),(3;3)$.

Bài 143. Từ già thiết ta suy ra $a+b+c+d+e$ chia hết cho $3.4.5=60$ suy ra $4b, 5c$ chia hết cho 60 nên b chia hết cho 15, *c* chia hết cho 12. Nêu $b=0$ hoặc $c=0$ thì suy ra $a=b=c=d=e=0$ trái với giả thiết suy ra $b,c\ne 0$. Vậy $b,c\ge 1$ suy ra $b\ge 15$, $c\ge 12$. Theo giả thiết ta có: $3(a+b+c+d+e)=3a+4b+5c\Rightarrow 3(d+e)=b+2c\ge 15+2.19\Rightarrow d+e\ge 13$.

Dâu bằng xảy ra khi và chỉ khi $b=15, c=12$ vậy $a=20$. Vây $a=20$ là giá trị cần tìm.

Bài 144. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $n\ge m$

+ Nếu $n>m+1$ thì suy ra

$n^2-m>n+m^2$, thật vậy ta có: $n^2-m-n-m^2=(n+m)(n-m-1)>0$. Từ đó ta suy ra $n+m^2$ không thể chia hết cho $n-m^2$.

+ Ta xét $n=m+1$,

$m+n^2\vdots m^2-n\Leftrightarrow m+(m+1)^2\vdots m^2-(m+1)\Leftrightarrow m^2+3m+1\vdots m^2-m+1\Leftrightarrow m^2-m+1+4m\vdots m^2-m+1$ hay $4m\vdots m^2-m+1\Rightarrow 4m\ge m^2-m+1\Leftrightarrow m^2-5m+1\le 0\Leftrightarrow \dfrac{5-\sqrt{21}}{2}\le m\le\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}$, do m là số nguyên dương nên suy ra $m\in\{1;2;3;4\}$ thử trực tiếp ta thấy $m=1, m=2$ thỏa mãn.

+ Xét $m=n$ ta có $n^2+n\vdots n^2-n\Rightarrow 2n\vdots n^2-n\Rightarrow 2n\ge n^2-n\Leftrightarrow n^2-3n\le 0\Leftrightarrow 0\le n\le 3$ thử trực tiếp ta thấy $n=2$ hoặc $n=3$ thỏa mãn điều kiện.

Vậy cặp số (m; n) thỏa mãn điều kiện là: $(m,n)=(2;2),(3;3),(1;2),(2;1),(2;3),(3;2)$.

Bài 145. Đặt $x-1=a, y-1=b$ với $a,b\in N^*$. Yêu cầu bài toán được viết lại thành:

$2(a+1)(b+1)-1\vdots ab\Leftrightarrow 2ab+2(a+b)+1\vdots ab\Leftrightarrow 2(a+b)+1\vdots ab$. Ta giả sử $2(a+b)+1=kab$, và $1\le a\le b$ thì $kab=2(a+b)+1\le 4b+b=5b\Rightarrow ka\le 5$. Từ đó ta có các trường hợp có thể xảy ra là: $k=1, a=1\Rightarrow 2(1+b)+1=b\Rightarrow b=-3$ loại. Thử lần lượt: $k=1, a=2$; $k=1, a=3$; $k=1, a=4$; $k=1, a=5$; $k=2, a=1$; $k=2, a=2$; $k=3, a=1$; $k=4, a=1$; $k=5, a=1$; ta suy ra các cặp số $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện là:

$(x;y)=(2;2),(2;4),(4;2),(8;4),(4;8)$.

Bài 146. Từ giả thiết ta suy ra

$$y(4x^2+8x+3)\vdots 4xy-1\Leftrightarrow x(4xy-1)+2(4xy-1)+x+3y+2\vdots 4xy-1..$$

Hay

$x+3y+2\vdots 4xy-1\Leftrightarrow 4xy-1\le x+3y+2\Leftrightarrow x(4xy-1)\le 3y+3\Leftrightarrow x\le\dfrac{3y+3}{4y-1}=\dfrac{12y+12}{4(4y-1)}=\dfrac{3(4y-1)+15}{4(4y-1)}$

Mà $\dfrac{3(4y-1)+15}{4(4y-1)}=\dfrac{3}{4}+\dfrac{15}{4(4y-1)}\le\dfrac{3}{4}+\dfrac{15}{4.3}=2$ suy ra $x\le 2$.

Thay $x=1\Rightarrow y=1$ và $y=4$.

Thay $x=2$ suy ra $y=1$.

Bài 147. Từ giả thiết ta suy ra $x^2-2\vdots xy+2$ Ta có phân tích sau:

$y(x^2-2)=x(xy+2)-2(x+y)$ suy ra $2(x+y)\vdots xy+2$ hay $2(x+y)=k(xy+2)$ với $k\in N^*$.

Nếu $k\ge 2$ thì $2(x+y)=k(xy+2)\ge 2(xy+2)\Leftrightarrow x+y\ge xy+2\Leftrightarrow (x-1)(y-1)+1\le 0$. Điều này là vô lý do $x,y\ge 1$. Vậy $k=1\Leftrightarrow 2(x+y)=xy+2\Leftrightarrow (x-2)(y-2)=2$.Từ đó tìm được $(x;y)=(3;4),(4;3)$.

Bài 148. Giả sử $x^2+3xy+y^2=5^n$ do $x,y\ge 2\Rightarrow n\ge 2$.

Suy ra $x^2+3xy+y^2\vdots 25\Leftrightarrow (x-y)^2+5xy\vdots 25\Rightarrow (x-y)^2+5xy\vdots 5\Rightarrow (x-y)^2\vdots 5\Leftrightarrow x-y\vdots 5$ hay

$(x-y)^2\vdots 25\Rightarrow 5xy\vdots 5\Leftrightarrow xy\vdots 5$. Do x,y là số nguyên tố ta suy ra x hoặc y chia hết cho 5.

Giả sử $x\vdots 5\Rightarrow x=5$, lại có $x-y\vdots 5\Rightarrow$ số còn lại cũng chia hết cho 5, hay $x=y=5$.

Khi đó $n=3$.

Bài 149. Đặt $\dfrac{x^4-1}{y+1}=\dfrac{a}{b};\dfrac{y^4-1}{x+1}=\dfrac{m}{n}$; với $(a,b)=1,(m,n)=1,\ b,n>0$. Theo giả thiết ta có: $\dfrac{a}{b}+\dfrac{m}{n}$ là số nguyên, tức là: $\dfrac{an+bm}{bn}\in\mathbb{Z}\Rightarrow\begin{cases}an+bm\vdots b\\an+bm\vdots n\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}an\vdots b\\bm\vdots n\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n\vdots b\\b\vdots n\end{cases}\Rightarrow n=b$.

Mặt khác $\dfrac{a}{b}.\dfrac{m}{n}=\dfrac{x^4-1}{y+1}.\dfrac{y^4-1}{x+1}=(x-1)(x^2+1)(y-1)(y^2+1)$ là số nguyên, suy ra $am\vdots n\Rightarrow a\vdots n\Leftrightarrow a\vdots b\Rightarrow x^4-1\vdots y+1$. Ta có: $x^4y^{44}-1=y^{44}(x^4-1)+y^{44}-1$ mà $x^4-1\vdots y+1$ và $y^{44}-1\vdots y^2-1\vdots y+1$ nên bài toán được chứng minh.

Bài 150. Ta có:

$$\frac{p^{2n+1}-1}{p-1}=\frac{q^3-1}{q-1}\Leftrightarrow (p-1)\left(\frac{p^{2n}-1}{p-1}-1\right)=(p-1)\left(\frac{q^3-1}{q-1}-1\right)\Leftrightarrow p(p^n-1)(p^n+1)=(p-1)(p+1)\ (1)$$

Nếu $q\le p^n-1$ thì các thừa số ở vé trái lớn hơn các thừa số tương ứng ở vế phải của (1), do đó $q\ge p^n$.Vì q nguyên tố còn p^n không nguyên tố nên $q\ge p^n+1$.

Một trong những thừa số ở vế trái của (1) chia hết cho số nguyên tố q. Theo bất đẳng thức $q\ge p^n+1$, điều đó chỉ xảy ra khi $q=p^n+1$

Thay vào (1) ta được: $p(p^n-1)=(p-1)(p^n+2)$ suy ra $p^n-3p+2=0$.

Từ đó $p/2$ hay $p=2,n=2$ suy ra $q=p^n+1=5$.

Bài 151. Ta có: $2a^2b=a(a+b)-a(a^2+b^2)$

Vì p^4 là ước của a^2+b^2 và $a(a+b)^2$ nên p^4 là ước của $2a^2b$.Lại vì p lẻ nên p^4 là ước của a^2b.

Nếu a không chia hết cho p^2 thì số mũ của p trong a^2 lớn nhất chỉ có thể là 2. Do đó b phải chứa p^2, nghĩa là b chia hết cho p^2 suy ra $b^2\vdots p^4$. Điều này vô lý vì a^2+b^2 không chia hết cho p^4 (do a^2 không chia hết cho p^4). Như vậy a phải chia hết cho p^2.

Vì a^2+b^2 chia hết cho p^4 nên $b^2\vdots p^4$. Suy ra $b\vdots p$ và $(a+b)\vdots p$.

Tóm lại, p^4 là ước của $a(a+b)$.

Bài 152. Đặt $d=(a,b)$. Suy ra $a=xd, b=yd, (x,y)=1$

Khi đó: $\frac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2}=\frac{dxy(x+y)}{x^2+xy+y^2}\in\mathbb{Z}$

Ta có $(x^2+xy+y^2;x)=(y^2;x)=1$. Tương tự $(x^2+xy+y^2;y)=1$.

Vì $(x+y;y)=1$ nên $(x^2+xy+y^2;x+y)=(y^2;x+y)=1$.

Do đó $x^2+xy+y^2 \mid d \Rightarrow d\ge x^2+xy+y^2$.

Mặt khác $|a-b|^3=d^3|x-y|^3=d^2|x-y|^3.d\ge d^2.1.(x^2+xy+y^2)>ab$.

Vậy $|a-b|>\sqrt[3]{ab}$.

Bài 153. Ta có $n^2-n+1=n(n-1)+1$ và $n^2+n+1=n(n+1)+1$ là các số lẻ.

Suy ra rằng số lẻ nhỏ nhất được xem xét là n^2-n+2 và số lẻ lớn nhất là n^2+n. Như vậy tổng cần tìm là:

$(n^2-n+2)+(n^2-n+4)+\ldots+(n^2+n-2)+(n^2+n)$

$=(n^2-n)+2+(n^2-n)+4+\ldots+(n^2-n)+2n-2+(n^2-n)+2n$

$=n(n^2-n)+2(1+2+\ldots+n)=n^3-n^2+n^2+n=n^3+n$.

Bài 154. Gọi d là ước chung lớn nhất của m và n.
Giả sử $m=ad$, $n=bd$ với $(a,b)=1$.

Ta có $A=\frac{(m+n)^3}{n^2}=\frac{d^3(a+b)^3}{d^2b^2}=\frac{d(a+b)^3}{b^2}$.

Vì $(a,b)=1$ nên $(b,a+b)=1$ suy ra $(b^2,(a+b)^3)=1$. Như vậy để A nguyên thì $d\,\vdots\, b^2$, giả sử $d=cb^2$. Bây giờ ta được $A=c(a+b)^3$ với a, b, c nguyên dương.

Do $a+b\ge 2$ và A lẻ nên A nhận giá trị bé nhất là 27, điều này xảy ra khi $c=1$; $a+b=3$.
Khi đó có hai khả năng:
Nếu $a=2$ và $b=1$ thì ta có $d=1$. Suy ra $m=2$, $n=1$.
Nếu $a=1$ và $b=2$ thì ta có $d=4$, suy ra $m=4$; $n=8$.

Bài 155. Rõ ràng $n=2$ thỏa mãn các điều kiện bài toán.
Với $n>2$ ta viết $n^6-1=(n^3-1)(n^3+1)=(n^3-1)(n+1)(n^2-n+1)$

Do đó tất cả các thừa số nguyên tố của n^2-n+1 chia hết cho n^3-1 hoặc $n^2-1=(n-1)(n+1)$.

Tuy nhiên cần để ý rằng $(n^2-n+1;n^3-1)\le(n^3+1,n^2-1)\le 2$.

Mặt khác, $n^2-n+1=n(n-1)+1$ là số lẻ, vì vậy tất cả các thừa số nguyên tố của n^2-n+1 phải là chia hết $n+1$.

Nhưng $n^2-n+1=(n+1)(n-2)+3$ vì vậy ta phải có $n^2-n+1=3^k$ với k nguyên dương. Bởi vì $n>2$ nên ta có $k\ge 3$.

Bây giờ $3\mid n^2-n+1$ nên $n\equiv 2 \pmod 3$, nhưng mỗi trường hợp $n\equiv 2,5,8 \pmod 9$, ta có $n^2-n+1\equiv 3 \pmod 9$ mâu thuẫn.

Vậy bài toán có nghiệm duy nhất là $n=2$.

Bài 156. Ta có $M=10^{2n+1}+10^{n+1}+1$.
Để ý rằng $10^3\equiv 1\pmod{37}$, cho nên ta có thể xét các trường hợp của n theo $\bmod 3$.
Nếu $n=3k$ thì $M\equiv 10^2+10+1\equiv 0\pmod{37}$.
Nếu $n=3k+1$ thì $M\equiv 10^4+10^2+1\equiv 0\pmod{37}$.
Nếu $n=3k-1$ thì $M\equiv 1+1+1\equiv 3\pmod{37}$.
Tóm lại, M chia hết cho 37 khi và chỉ khi n có một trong hai dạng $n=3k$ hoặc $n=3k+1$ với $k\in\mathbb{N}^*$.
Bài 157. Đặt $x=\overline{ab}$. Ta có $\overline{abcde}=1000x+y$ với $0\le y<1000$.
Từ $\sqrt[3]{\overline{abcde}}=\overline{ab}$ ta suy ra $1000x+y=x^3$.
Vấn đề còn lại là chúng ta đi giải phương trình nghiệm nguyên.
Vì $y\ge 0$ nên $1000x\le x^3\Rightarrow x^2\ge 1000\Rightarrow x\ge 32$ (1)
Mặt khác do $y<1000$ nên $1000x+1000>x^3\Rightarrow x\left(x^2-1000\right)<1000\Rightarrow x<33$ (2)
Từ (1) và (2) suy ra $x=32$ hay $x^3=32768$.
Vậy $\overline{abcde}=32768$.
Bài 158.
Từ $\sqrt{\overline{abc}}=(a+b)\sqrt{c}$, suy ra $100a+10b+c=(a+b)^2c\Rightarrow 10(10a+b)=c\left[(a+b)^2-1\right]$ (*)
Vì $a\ge 1$ nên $10(10a+b)\ge 100\Rightarrow c\left[(a+b)^2-1\right]\ge 100\Rightarrow a+b\ge 4$ và $c\ge 1$.
Nếu $a+b$ không chia hết cho 3 thì $(a+b)^2\equiv 1\pmod 3$. Từ (*) suy ra $(10a+b)\vdots 3\Rightarrow (a+b)\vdots 3$ (vô lý).
Như vậy $(a+b)\vdots 3$ nên $(10a+b)\vdots 3$. Từ (*) suy ra $c\vdots 3$ và do đó c không chia hết cho 5.
Từ (*) suy ra $\left[(a+b)^2-1\right]\vdots 5\Rightarrow \left[\begin{array}{l}a+b-1=1\\a+b+1=1\end{array}\right.$. Kết hợp với $(a+b)\vdots 3$ ta suy ra $a+b=6$ hoặc $a+b=9$.
Trường hợp 1: $a+b=9$ thay vào (*) ta được: $10(9a+9)=80c\Rightarrow 8c=9(a+1)\Rightarrow c\vdots 9\Rightarrow c=9$, vì vậy $a=7$.
Trường hợp 2: $a+b=6$ làm tương tự trường hợp trên.
Bài 159. Vì $\overline{abc}<999$ nên $a!+b!+c!\le 999\Rightarrow a,\ b,\ c\le 6\Rightarrow \overline{abc}\le 666$.
Điều này dẫn đến $a!+b!+c!\le 666\Rightarrow a,\ b,\ c\le 5\Rightarrow a!+b!+c!\le 3.5!=360\Rightarrow a\le 3$.
Suy ra $a!+b!+c!\le 3!+5!+5!=246\Rightarrow a\le 2$.
Nếu $b=c=5$ thì $a!+5!+5!=\overline{a55}\Rightarrow a!+240=\overline{a55}$, ta có $a\ge 2$ vì vậy $a=2$.
Tuy nhiên thử lại thấy $255\ne 2!+5!+5!$
Một trong hai số b hoặc c nhỏ hơn 5.
Từ đó ta có $a!+b!+c!\le 2!+4!+5!=146\Rightarrow \overline{abc}\le 146\Rightarrow a=1,\ b\le 4$.
Vì $c<5$ thì $\overline{abc}=a!+b!+c!<1!+4!+4!=49$ vô lý.
Với $c=5$ thì $\overline{1b5}=1!+b!+5!$ sauy ra $10b=16+b!\Rightarrow b!$ tận cùng bởi số 4, vì vậy $b=4$.
Vậy $\overline{abc}=145$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Bài 160.
a, Một số chính phương khi chia cho 3 chỉ có thể dư 0 hoặc 1. Do a^2+b^2 chia cho 3 nên chỉ có thể xảy ra số dư $0+0,\ 0+1,\ 1+1$ trong 3 trường hợp này chỉ có trường hợp $a,\ b\vdots 3$ thì $a^2+b^2\vdots 3$ suy ra đpcm.

b, Một số chính phương khi chia cho 7 chỉ có thể dư 0, 1, 2, 4. (Thật vậy chỉ cần xét $a=7k$, $7k\pm7$, $7k\pm2$, $7k\pm3$ thì a^2 chia cho 7 có số dư lần lượt là 0, 1, 4, 2). Như vậy a^2+b^2 khi chia cho 7 thì có số dư là $0+0$, $0+1$, $0+2$, $0+4$, $1+2$, $1+4$, $2+4$, $1+1$, $2+2$, $4+4$. Trong các trường hợp này chỉ có a, b đồng thời chia hết cho 7 thì $a^2+b^2 \vdots 7$ đpcm.
c, Dễ thấy nếu a không chia hết cho 3 thì a^4 chia 3 chỉ có thể dư 1. Từ giả thiết ta có a^4+b^4 chia hết cho 3 và chia hết cho 5.
Nếu a không chia hết cho 3 thì a^4 không chia hết cho 3 suy ra b^4 không chia hết cho 3 nên b không chia hết cho 3 suy ra a^4+b^4 chia cho 3 dư 2. Trái với giả thiết, vậy a, b phải chia hết cho 3. Ta cũng có: Nếu a không chia hết cho 5 thì a^4 chia cho 5 có thể dư 1. Làm tương tự như trên ta suy ra a, b phải chia hết cho 5 là đpcm.
Bài 161. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $n \ge m$.
+) Nếu $n > m+1$ thì suy ra $n^2-m > n+m^2$ thật vậy ta có:
$n^2-m-n-m^2=(n+m)(n-m-1)>0$. Từ đó suy ra $n+m^2$ không thể chia hết cho n^2-m.
+) Ta xét $n=m+1$,
$m+n^2 \vdots m^2-n \Leftrightarrow m+(m+1)^2 \vdots m^2-(m+1) \Leftrightarrow m^2+3m+1 \vdots m^2-m+1 \Leftrightarrow m^2-m+1+4m \vdots m^2-m+1$
hay $\Leftrightarrow 4m \vdots m^2-m+1 \Rightarrow 4m \ge m^2-m+1 \Leftrightarrow m^2-5m+1 \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{5-\sqrt{21}}{2} \le m \le \dfrac{5+\sqrt{21}}{2}$, do m là số nguyên dương nên suy ra $m \in \{1;2;3;4\}$ thử trực tiếp ta thấy $m=1$, $m=2$ thỏa mãn.
+) Xét $m=n$ ta có $n^2+n \vdots n^2-n \Rightarrow 2n \vdots n^2-n \Rightarrow 2n \ge n^2-n \Leftrightarrow n^2-3n \le 0 \Leftrightarrow 0 \le n \le 3$ thử trực tiếp ta thấy $n=2$ hoặc $n=3$ thỏa mãn điều kiện.
Vậy các cặp số $(m;n)$ thỏa mãn điều kiện là $(m;n)=(2,2)$, $(3,3)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(2,3)$, $(3,2)$.
Bài 162. Giả sử A là phân số chưa tối giản, đặt $d=(n^2+4, n+5)$, suy ra $d>1$.
Ta có $d \mid (n+5)^2-(n^2-4)=10n+21=10(n+5)-29 \Rightarrow d \mid 29 \Rightarrow d=29$.
Ngược lại nếu $(n+5) \vdots 29$ thì đặt $n+5=29m$ với $m \in \mathbb{N}^*$. Khi đó
$n^2+4=29(29m^2-10+1) \vdots 29$ nên A chưa tối giản.
Như vậy, ta chỉ cần tìm n sao cho $n+5=29m$ với $m \in \mathbb{N}^*$.
$1 \le n \le 2017 \Rightarrow 1 \le 29m-5 \le 2017 \Rightarrow 1 \le m \le 69 \Rightarrow$ có 69 giá trị của $m \Rightarrow$ có 69 giá trị của n.
Vậy có 69 giá trị của n để A là phân số chưa tối giản.
Bài 163. Giả sử $d=(a,b) \Rightarrow a=md$, $b=nd$ với $(m,n)=1$.
Ta có $\dfrac{a+1}{b}+\dfrac{b+1}{a}=\dfrac{(m^2+n^2)d+(m+n)}{mnd} \Rightarrow (m+n) \vdots d \Rightarrow d \le m+n \Rightarrow d \le \sqrt{d(m+n)}=\sqrt{a+b}$.

CHỦ ĐỀ 3. SỐ NGUYÊN TỐ, HỢP SỐ

Bài 1. a) b) Đáp số: p = 3. Xét p dưới các dạng: p = 3k, p = 3k + 1, p = 3k + 2 $(k \in N)$.

Bài 2. n = 3.

Bài 3. Số nguyên tố lớn hơn 3 có dạng 6n +1, 6n + 5. Do đó 3 số a, a + k, a + 2k phải có ít nhất 2 số có cùng một dạng, hiệu là k hoặc 2k chia hết cho 6, suy ra k chia hết cho 3.

Bài 4. Ta có $(p-1)p(p+1) \vdots 3$ mà (p,3) = 1 nên

$(p-1)(p+1) \vdots 3$ (1).

p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ, p - 1 và p + 1 là hai số chẵn liên tiếp. Trong hai số chẵn liên tiếp, có một số là bội của 4 nên tích chúng chia hết cho 8 (2).

Từ (1) và (2) suy ra (p -1)(p + 1) chia hết cho hai số nguyên tố cùng nhau 3 và 8.

Vậy $(p - 1)(p + 1) \vdots 24$.

Bài 5. Ta có p = 42k + r = 2. 3. 7k + r ($k, r \in N$, 0 < r < 42). Vì p là số nguyên tố nên r không chia hết cho 2, 3, 7.

Các hợp số nhỏ hơn 42 và không chia hết cho 2 là 9, 15, 21, 25, 27, 33, 35, 39.

Loại đi các số chia hết cho 3, cho 7, chỉ còn 25. Vậy r = 25.

Bài 6. Ta có p = 30k + r = 2. 3. 5k + r ($k, r \in N$, 0 < r < 30). Vì p là số nguyên tố nên p không chia hết cho 2, 3, 5.

Các hợp số nhỏ hơn 30 và không chia hết cho 2 là 9, 15, 21, 25, 27.

Loại đi các số chia hết cho 3, 5 thì không còn số nào nữa. Vậy r không phải là hợp số.

r không phải là hợp số cũng không phải là số nguyên tố, suy ra r =1.

Bài 7. $\underbrace{11...1}_{n}2\underbrace{11...1}_{n} = \underbrace{11...1}_{n+1}\underbrace{0...0}_{n} + \underbrace{11...1}_{n+1} = \underbrace{11...1}_{n+1}(10^n + 1)$.

suy ra đpcm.

Bài 8. $p = 1010...101 = \dfrac{(10^{n+1}-1)(10^{n+1}+1)}{9.11}$.

n =1: p = 101 là số nguyên tố.

n > 1: p là hợp số.

Bài 9. Tất cả đều là hợp số.

a) $A = \underbrace{11...1}_{2001} = \underbrace{1+1+...+1}_{2001} \vdots 3$.

b) $B = \underbrace{11...1}_{2000} \vdots 11$.

c) $C = 1010101 \vdots 101$.

d) $D = 1112111 = 1111000 + 1111 \vdots 1111$.

e) $E\vdots 3$ vì $1!+2!=3\vdots 3$, còn $3!+4!+...+100!$ cũng chia hết cho 3.

g) G = 3. 5. 7. 9 - 28 chia hết cho 7.

h) H = 311141111 = 311110000 + 31111 chia hết cho 31111.

Bài 10. Chứng minh $A\vdots 7; B\vdots 11; C\vdots 29$.

Bài 11. 240 = 2^4. 3. 5.

Bài 12. n = 6k + 4, k$\in$N.

Bài 13. p = 2 lấy n chẵn; p > 2 lấy n = (pk - 1)(p -1), k$\in$N*.

Bài 14. $n^3-n^2+n-1=(n-1)(n^2+1)$, n =2.

Bài 15.

$x^4+4y^4=(x^4+4x^2y^2+4y^4)-4x^2y^2=(x^2+2y^2)^2-(2xy)^2=(x^2-2xy+2y^2)(x^2+2xy+y^2)$

$x=y=1$ thì $x^4+4y^4=5$ là số nguyên tố.

Bài 16. $p=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}+1=\dfrac{(n+3)(n^2+2)}{6}$.

Với $n\ge 4$ thì n +3 >6 và n^2 + 2 > 17.

n + 3 và n^2 +2 hoặc một số chẵn, một số chia hết cho 3; hoặc một trong hai số chia hết cho 6, khi đó p là hợp số với n = 1, 2, 3 thì p = 2, 5, 11 là các số nguyên tố.

Bài 17. n chẵn thì A chia hết cho 2.

n lẻ, đặt n = 2k +1 (k$\in$N*), ta có:

$$n^4+4^n=n^4+4^{2k+1}=(n^2+2^{2k+1})^2-2.n^2.2^{2k+1}$$
$$=(n^2+2^{2k+1}-n.2^{k+1})(n^2+2^{2k+1}+n.2^{k+1})$$
$$=\left[(n-2^k)^2+2^{2k}\right]\left[(n+2^k)^2+2^{2k}\right]$$

Bài 18. Giả sử phương trình (1) có nghiệm x,y nguyên. Xét nghiệm y nguyên dương . Vì a > b nên từ (1) có $x\ne a, x\ne b$ và $4(a-x)(x-b)>0$, suy ra b < x <a. Đặt $a-x=m, x-b=n$ thì m, n dương. Lúc đó (1) trở thành $4mn-m-n=y^2$ (2) với m, n, y nguyên dương. Biến đổi (2)$\Leftrightarrow(4m-1)(4n-1)=4y^2+1$ (3)

Vì tích các số dạng 4k + 1 lại có dạng đó nên số 4m - 1 phảI có ước nguyên tố dạng p = 4k + 3. Từ (3) có $(4y^2+1)\vdots p$ hay $4y^2\equiv -1$ (mod p) (4). Suy ra (y, p) = 1. Theo định lí nhỏ Fermat $(2y)^{p-1}\equiv 1(\bmod p)\Rightarrow\left[(2y)^2\right]^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1(\bmod p)$.

Từ đó và (4) có $(-1)^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1(\bmod p)\Rightarrow(-1)^{2k+1}\equiv 1(\bmod p)\Rightarrow$ mâu thuẫn.

Vậy phương trình (3) không có nghiệm nguyên.

Bài 19. Ta xét tập T gồm các số chẵn thuộc tập A. Khi đó $|T|=8$ và với a, b thuộc T ta có a^2+b^2 , do đó $k\ge 9$

Xét các cặp số sau:

$A = \{1;4\} \cup \{3;2\} \cup \{5;16\} \cup \{6;15\} \cup \{7;12\} \cup \{8;13\} \cup \{9;10\} \cup \{11;14\}$

Ta thấy tổng bình phương của mỗi cặp số trên đều là số nguyên tố

Xét T là một tập con của A và $|T| = 9$, khi đó theo nguyên lí Dirichlet T sẽ chứa ít nhất 1 cặp nói trên.

Vậy $k_{\min} = 9$

Bài 20. Các số nguyên tố lớn hơn 3 đều là số lẻ. Nếu m là số lẻ thì $a+m$ là số chẵn lớn hơn 3 nên không là số nguyên tố. Vậy m là số chẵn, $m = 2p$ (p là số nguyên dương).

Nếu $p = 3k+1$ thì ba số đã cho là $a, a+6k+2, a+12k+4$.

Nếu a chia cho 3 dư 1 thì $a+6k+2 \vdots 3$ (loại).

Nếu a chia cho 3 dư 2 thì $a+12k+4 \vdots 3$ (loại).

Vậy p không có dạng $3k+1$.

Tương tự p không có dạng $3k+2$. Vậy $p = 3k \Rightarrow m = 6k$.

Kết luận: m chia hết cho 6.

Bài 21. Ta thấy $p = 2$ và $p = 3$ không thỏa mãn.

Nếu $p = 5k+1 (k \geq 1)$ thì $p+24 = 5k+25 = 5(k+1)$ không là số nguyên tố;

Nếu $p = 5k+2$ thì $p+18 = 5k+20 = 5(k+4)$ không là số nguyên tố;

Nếu $p = 5k+3$ thì $p+12$ không là số nguyên tố;

Nếu $p = 5k+4$ thì $p+6$ không là số nguyên tố;

Nếu $p = 5k$ là số nguyên tố thì $k = 1$, nên $p = 5$.

Khi đó $p+6 = 11, p+12 = 17, p+18 = 23, p+24 = 29$.

Vậy $p = 5$ là số nguyên tố thỏa mãn đề bài.

Bài 22. Đặt $A = p^4 + 2$, nếu $p = 2$ thì $A = 18$ không là số nguyên tố.

Nếu $p = 3$ thì $A = 83$ là số nguyên tố.

Nếu $p > 3$ thì p lẻ nên có dạng $p = 3k+1$ hoặc $p = 3k+2$.

Khi đó $A = p^4 + 2$ chia hết cho 3 và $A > 3$ nên A không là số nguyên tố. $p = 3$ là số nguyên tố thỏa mãn đề bài.

Bài 23. $A = (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2 = (x^2+2)^2 - 4x^2 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2).$

Nếu $x = 0$ thì $A = 4$ không là số nguyên tố.

Nếu $x = 1$ thì $A = 5, B = 3$ là các số nguyên tố.

Nếu $x \geq 2$ thì $A = \left[x(x-2)+2\right](x^2+2x+2)$ là tích của hai số tự nhiên lớn hơn 1 nên A là hợp số. Vậy $x = 1$ thỏa mãn đề bài.

Bài 24. Để phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1, x_2 \left(x_1, x_2 \in N^*\right)$ thì ta phải có :

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 4(b+1) \geq 0$$

Theo định lý Vi-ét ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -a \\ x_1x_2 = b+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\left(x_1 + x_2\right) \\ b = x_1x_2 - 1 \end{cases}$$

Ta có: $a^2 + b^2 = \left[-\left(x_1 + x_2\right)\right]^2 + \left(x_1x_2 - 1\right)^2$

$$= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_1^2x_2^2 - 2x_1x_2 + 1$$

$$= x_1^2 + x_2^2 + x_1^2x_2^2 + 1 = \left(x_1^2 + 1\right)\left(x_2^2 + 1\right)$$

Do $x_1, x_2 \in N^*$ nên suy ra:

$$\begin{cases} x_1^2 + 1 \in N \\ x_1^2 + 1 \geq 2 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x_2^2 + 1 \in N \\ x_2^2 + 1 \geq 2 \end{cases}$$

Vậy $a^2 + b^2 \in N, a^2 + b^2 \geq 4; a^2 + b^2 = \left(x_1^2 + 1\right)\left(x_2^2 + 1\right) \Rightarrow a^2 + b^2$ là hợp số.

Bài 25. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình đã cho. Theo định lý Vi-ét ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1x_2 = n \end{cases}.$$

Do m,n là các số nguyên tố suy ra $x_1 = 1, x_2 = n$ (giả sử x_1, x_2).

Từ $x_1 + x_2 = m \Rightarrow 1 + n = m \Rightarrow m, n$ là hai số nguyên tố liên tiếp $\Rightarrow n = 2, m = 3$.

Ta có phương trình: $x^2 - 3x + 2 = 0$, phương trình này có hai nghiệm là 1 và 2.

Bài 26. Vì n là số nguyên tố lớn hơn 2 nên $2013n^2 + 3 = 2008n^2 + 5\left(n-1\right)\left(n+1\right) + 8 \vdots 8$

Vì n là số nguyên tố lẻ nên ta có điều phải chứng minh.

Bài 27.

1. Không mất tổng quát giả sử $p \leq q \leq r$.

Với $p = 2$: $2qr = q + r + 162 \Leftrightarrow 4qr - 2q - 2r = 324$

$\Leftrightarrow 2q(2r-1) - (2r-1) = 325 \Leftrightarrow (2q-1)(2r-1) = 325 = 5^2 \cdot 13.$

$3 \leq 2q - 1 \leq 2r - 1 \Rightarrow 9 \leq (2q-1)^2 \leq (2r-1)\left(2q-1\right) \Leftrightarrow 9 \leq (2q-1)^2 \leq 325 \Leftrightarrow 3 \leq 2q - 1 \leq 18.$

Do $2q - 1$ là ước của $5^2 \cdot 13$ nên $2q - 1 \in \left\{5; 13\right\}$.

Nếu $2q - 1 = 5 \Leftrightarrow q = 3 \Rightarrow r = 33$ (loại).

Nếu $2q - 1 = 13 \Leftrightarrow q = 7 \Rightarrow r = 13$ (thỏa mãn).

$pqr = p + q + r + 160 \Leftrightarrow p\left(qr - 1\right) - q - r = 160$

$\Leftrightarrow \left(qr-1\right)\left(p-1\right) + qr - 1 - q - r = 160 \Leftrightarrow \left(qr-1\right)\left(p-1\right) + q(r-1) - (r-1) - 2 = 160$

$\Leftrightarrow \left(qr-1\right)\left(p-1\right) + (q-1)(r-1) = 162.$

Nếu p lẻ $\Rightarrow q; r$ lẻ $\Rightarrow \left(qr-1\right)\left(p-1\right) + (q-1)(r-1) \vdots 4$ mà 162 không chia hết cho $4 \Rightarrow$ Vô lý.

Vậy bộ ba số nguyên tố cần tìm là $(2; 7; 13)$ và các hoán vị.

Bài 28. Đặt $p^3 - 4p + 9 = t^2 (t \in N)$

Biến đổi thành $p\left(p^2-4\right)=(t-3)(t+3)$ (1) $\Rightarrow p \mid \left(t-3\right) \vee p \mid \left(t+3\right)$

Trường hợp 1: Nếu $p \mid t-3$

Đặt $t-3=pk(k \in N)$

Khi đó thay vào (1) ta có:

$p\left(p^2-4\right)=pk(pk+6) \Leftrightarrow p^2-pk^2-6k-4=0$

Coi đây là phương trình bậc hai ẩn p điều kiện cần để tồn tại nghiệm của phương trình là:

$\Delta=k^4+4\left(6k+4\right)=k^4+24k+16$ là một số chính phương.

Mặt khác với $k>3$ ta dễ chứng minh được $\left(k^2\right)^2<k^4+24k+16<\left(k^2+4\right)^2$

Suy ra các trường hợp:

$k^4+24k+16=\left(k^2+1\right)^2 \Leftrightarrow 2k^2-24k-15=0$ (loại)

$k^4+24k+16=\left(k^2+2\right)^2 \Leftrightarrow k^2-6k-3=0$ (loại)

$k^2+24k+16=\left(k^2+3\right)^2 \Leftrightarrow 6k^2-24k-7=0$ (loại)

Do đó phải có $k \le 3$. Thử trực tiếp được $k=3$ thỏa mãn.

Từ đó ta có $t=36; p=11$.

Lưu ý: HS có thể làm như sau khi thay vào (1)

$p\left(p^2-4\right)=pk(t+3) \Leftrightarrow k(t+3)=p^2-4 \Rightarrow p^2=kt+3k+4$

Mặt khác ta có $(t-3)^2=p^2k^2 \Rightarrow t^2-6t+9=k^2(kt+3k+4)$

$\Leftrightarrow t^2-t\left(6+k^3\right)+9-3k^3-4k^2=0$

Coi đây là phương trình bậc hai ẩn n điều kiện cần để tồn tại nghiệm của phương trình là:

$\Delta=\left(6+k^3\right)^2-4\left(9-3k^3-4k^2\right)=k^6+24k^3+16k^2=k^2\left(k^4+24k+16\right)$ là một số chính phương. Muốn vậy thì $k^4+24k+16$ phải là một số chính phương.

Sau đó cách làm giống như trên.

Trường hợp 2: Nếu $p \mid t+3$

Đặt $t+3=pk(k \in N)$

Khi đó thay vào (1) ta có: $p\left(p^2-4\right)=pk(pk-6) \Leftrightarrow p^2-pk^2+6k-4=0$

Coi đây là phương trình bậc hai ẩn p điều kiện cần để tồn tại nghiệm của phương trình là:

$\Delta=k^4-4\left(6k-4\right)=k^4-24k+16$ là một số chính phương.

Mặt khác với $k>3$ ta dễ chứng minh được $\left(k^2-4\right)^2<k^4-24k+16<\left(k^2\right)^2$ Suy ra các trường hợp:

$k^4-24k+16=\left(k^2-1\right)^2 \Leftrightarrow 2k^2-24k+15=0$ (loại)

$k^4-24k+16=\left(k^2-2\right)^2 \Leftrightarrow k^2-6k+3=0$ (loại)

$k^2-24k+16=\left(k^2-3\right)^2 \Leftrightarrow 6k^2-24k+7=0$ (loại)

Do đó phải có $k \le 3$ Thử trực tiếp được $k=3$ thỏa mãn.

Từ đó suy ra $t=3;18$ tương ứng $p=2;7$.

Vậy tập tất cả giá trị p cần tìm là $\{2;7;11\}$

Bài 29. Ta có p^2 chia cho 3 dư 0 hoặc 1.

Xét p^2 chia cho 3 dư 0, vì p là số nguyên tố nên $p=3$, suy ra $q=1$, vô lí.

Xét p^2 chia cho 3 dư 1, suy ra $8q$ chia hết cho 3 mà $(8;3)=1$ nên $q=3 \Rightarrow p=5$ thỏa mãn.

Vậy $p=5; q=3$ thỏa mãn bài.

Bài 30. Ta có $\dfrac{x+y\sqrt{2019}}{y+z\sqrt{2019}}=\dfrac{m}{n}\left(m,n\in\mathbb{N}^*,(m,n)=1\right)$

$\Rightarrow mx-my=(mz-ny)\sqrt{2019} \Rightarrow \begin{cases} nx-my=0 \\ mz-my=0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x}{y}=\dfrac{y}{z} \Rightarrow xz=y^2$

$x^2+y^2+z^2=\left(x+z\right)^2-2xz+y^2=\left(x+z\right)^2-y^2=\left(x+y+z\right)\left(x+z-y\right)$.

Vì $x+y+z$ là số nguyên lớn hơn 1 và $x^2+y^2+z^2$ là số nguyên tố nên

$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=x+y+z \\ x-y+z=1 \end{cases}$.

Từ đó suy ra $x=y=z=1$.

Thử lại $\dfrac{x+y\sqrt{2019}}{y+z\sqrt{2019}}=1$ và $x^2+y^2+z^2=3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Kết luận $\left(x;y;z\right)=\left(1;1;1\right)$.

Bài 31. Ta có: $p^2+a^2=b^2 \Leftrightarrow p^2=(b-a)(b+a)$.

Các ước của p^2 là 1, p và p^2 ; không xảy ra trường hợp $b+a=b-a=p$

Do đó chỉ xảy ra trường hợp $b+a=p^2$ và $b-a=1$.

Khi đó $b=\dfrac{p^2+1}{2}$ và $a=\dfrac{p^2-1}{2}$ suy ra $2a=(p-1)(p+1)$.

Từ p lẻ suy ra $p+1$, $p-1$ là hai số chẵn liên tiếp $\Rightarrow (p-1)(p+1)$ chia hết cho 8.

Suy ra $2a$ chia hết cho 8 (1)

Từ p nguyên tố lớn hơn 3 nên p không chia hết cho 3. Do đó p có dạng $3k+1$ hoặc $3k+2$.

Suy ra một trong hai số $p+1$; $p-1$ chia hết cho 3 . Suy ra $2a$ chia hết cho 3 (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2a$ chia hết cho 24 hay a chia hết cho 12 (đpcm).

Xét $2\left(p+a+1\right)=2\left(p+\dfrac{p^2-1}{2}+1\right)=2p+p^2+1=\left(p+1\right)^2$ là số chính phương.

Bài 32. Do $p-5 \vdots 8$ nên $p=8k+5$ $(k\in\mathbb{N})$

Vì $\left(ax^2\right)^{4k+2}-\left(by^2\right)^{4k+2} \vdots \left(ax^2-by^2\right) \vdots p$ nên $a^{4k+2}\cdot x^{8k+4}-b^{4k+2}\cdot y^{8k+4} \vdots p$

Nhận thấy $a^{4k+2}\cdot x^{8k+4}-b^{4k+2}\cdot y^{8k+4}=\left(a^{4k+2}+b^{4k+2}\right)x^{8k+4}-b^{4k+2}\left(x^{8k+4}+y^{8k+4}\right)$

Do $a^{4k+2}+b^{4k+2}=\left(a^2\right)^{2k+1}+\left(b^2\right)^{2k+1}\vdots\left(a^2+b^2\right)=p$ và $b<p$ nên $x^{8k+4}+y^{8k+4}\vdots p$ (*)

Nếu trong hai số x,y có một số chia hết cho p thì từ (*) suy ra số thứ hai cũng chia hết cho p.

Nếu cả hai số x,y đều không chia hết cho p thì theo định lí Fecma ta có :

$x^{8k+4}=x^{p-1}\equiv 1(\text{mod } p),\ \ y^{8k+4}=y^{p-1}\equiv 1(\text{mod } p)$

$\Rightarrow x^{8k+4}+y^{8k+4}\equiv 2(\text{mod } p)$. Mâu thuẫn với (*).Vậy cả hai số x và y chia hết cho p.

Bài 33. Ta có :

$p^{2016}-1=(p^4)^{504}-1^{504}=(p^4-1).A=(p-1)(p+1)(p^2+1).A \quad (1) \quad (A\in N)$

Vì P là số nguyên tố lớn hơn 5 nên p là số lẻ, suy ra p – 1, p +1 là hai số chẵn liên tiếp

$$\Rightarrow (p-1)(p+1)\vdots 4 \qquad (2)$$

Vì p – 1, p, p+1 là ba số tự nhiên liên tiếp nên $(p-1)p(p+1)\vdots 3$. Nhưng p không chia hết cho 3 nên $(p-1)(p+1)\vdots 3$ (3)

Vì p không chia hết cho 5 nên p có một trong các dạng $5k\pm 1;\quad 5k\pm 2$

- Nếu $p=5k\pm 1$ thì $p^2=25k^2\pm 10k+1=5n+1$
- Nếu $p=5k\pm 2$ thì $p^2=25k^2\pm 20k+4=5l-1$

Cả hai trường hợp trên đều cho ta $p^4-1=5q\vdots 5$ (4) ($(n,l,q\in N)$)

Vì 3, 4, 5 là các số nguyên tố cùng nhau từng đôi một nên từ (1), (2), (3), (4) suy ra $p^{2016}-1$ chia hết cho 4.3.5 tức là chia hết cho 60

Bài 34. Không mất tính tổng quát giả sử $\mathrm{m}<\mathrm{n}<\mathrm{p}<\mathrm{q}$.

Nếu $\mathrm{m}\geq 3$ thì $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{mnpq}\leq\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{3.5.7.11}<1.$

Vậy $\mathrm{m}=2$ và (1) trở thành $\frac{1}{n}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{2npq}=\frac{1}{2}$ (2).

Nếu $\mathrm{n}\geq 5$ ta có $\frac{1}{n}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{2npq}\leq\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{2.5.7.11}<\frac{1}{2}.$

Vậy $\mathrm{n}=3$ và (2) trở thành $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{6pq}=\frac{1}{6}\Leftrightarrow(p-6)(q-6)=37$

suy ra $\mathrm{p}=7$ và $\mathrm{q}=43$.

Vậy $(m;n;p;q)$ là $(2;3;7;43)$ và các hoán vị của nó.

Bài 35. Ta có:

$2A=2^{3n+2}+2^{3n}+2=5.8^n+2$

$Do\ 8\equiv 1(\text{mod } 7)\Rightarrow 8^n\equiv 1(\text{mod } 7)\Rightarrow A\equiv 5+2\equiv 0(\text{mod } 7)\Rightarrow A\vdots 7$

Mặt khác ta chứng minh được A > 0 nên A là hợp số.

Bài 36. Do q là số nguyên tố lớn hơn 3 nên q có dạng $3k+1$ hoặc $3k+2$ với $k \in N^*$.

+ Nếu $q=3k+1$, khi đó do $p=q+2$ nên $p=3k+3$ chia hết cho 3, trường hợp này loại do p không phải là số nguyên tố.

+ Nếu $q=3k+2$, khi đó do $p=q+2$ nên $p=3k+4$. Do p là số nguyên tố nên k phải là số tự nhiên lẻ. Khi đó ta được $p+q=6(k+1)\,\vdots\,12$. Vậy số dư khi chia $p+q$ cho 12 là 0.

Bài 37. $p^2+2=p^2-1+3=(p-1)(p+1)+3$

Trong ba số tự nhiên liên tiếp: $p-1, p, p+1$ có một số chia hết cho 3. Số đó không thể là $p-1$ hoặc $p+1$ vì nếu giả sử ngược lại, ta suy ra p^2+2 chia hết cho 3 và $p^2+2>3$, vô lý, vì p^2+2 là số nguyên tố. Vậy p phải chia hết cho 3, mà p là số nguyên tố, do đó $p=3$.

Khi $p=3 \Rightarrow p^3+2=3^3+2=29$ là số nguyên tố.

Bài 38. Giả sử $2015=a_1+a_2+...+a_n$, trong đó $a_1;a_2;...;a_n$ là các hợp số

Theo bài ra ta có

+ Mỗi số hạng $a_1;a_2;...;a_n$ không thể viết thành tổng hai hợp số (1)

+ Tổng hai hợp số bất kì không thể viết thành tổng 3 hợp số (2)

Do 2015 là số lẻ nên tồn tại ít nhất một hợp số lẻ, hợp số đó phải bằng 9 vì 1;3;5;7;11;13 không phải là hợp số.

Nếu có hợp số lẻ $a_1 \ge 15 \Rightarrow a_1=9-(a_1-9)$ với $(a_1-9)\ge 6$ là số chẵn nên a_1 bằng tổng hai hợp số- trái với (1)

Mặt khác không có quá một hợp số bằng 9 vì nếu có hai hợp số bằng 9 thì 9+9=6+6+6 trái với (2)

Do đó: $2015=9+a_2+a_3+...+a_n$ với $a_2;a_3;..;a_n$ là các hợp số chẵn

$\Rightarrow a_2+a_3+...+a_n=2006 \quad (3)$

$\Rightarrow$ các hợp số phải nhận các giá trị 4 hoặc 6.

Vì nếu a_2 là hợp số chẵn và $a_2\ge 8 \Rightarrow a_2=4-(a_2-4)$ là tổng hai hợp số, trái với (1)

Số hợp số bằng 6 chỉ có thể là một vì nếu có hai hợp số bằng 6 thì 6+6=4+4+4

Giả sử $a_2=6 \Rightarrow a_3=a_4=...a_n=4 \Rightarrow (n-2).4=2000 \Rightarrow n=502$

Vậy số tự nhiên cần tìm là $n=502$

Bài 39. Nếu $p=q$ thì $p=\dfrac{2(m^2+1)}{m+1}=2m-2+\dfrac{4}{m+1}$.

Do $m\in\mathbb{N}$ và p là số nguyên tố nên $4\,\vdots\,(m+1) \Rightarrow m=0; m=1; m=3 \Rightarrow p=2;\ p=5.$

Nếu $p\ne q$ thì pq và $p+q$ là nguyên tố cùng nhau vì pq chỉ chia hết cho các ước nguyên tố là p và q còn $p+q$ thì không chia hết cho p và không chia hết cho q.

Gọi r là một ước chung của m^2+1 và $m+1 \Rightarrow \left[(m+1)(m-1)\right]\vdots\, r \Rightarrow (m^2-1)\,\vdots\, r$

$\Rightarrow\left[(m^2+1)-(m^2-1)\right]\vdots r\Rightarrow 2\vdots r\Rightarrow r=1$ hoặc $r=2$.

+) $r=1$ suy ra $p+q=m+1,\ pq=m^2+1\Rightarrow p,q$ là hai nghiệm của phương trình $x^2-(m+1)x+m^2+1=0$ vô nghiệm do $\Delta=-3m^2+2m-3=-(m-1)^2-(2m^2+2)<0$

+) $r=2$ suy ra $2pq=m^2+1$ và $2(p+q)=m+1\Rightarrow p,\ q$ là hai nghiệm của phương trình $2x^2-(m+1)x+m^2+1=0$ vô nghiệm do

$\Delta=-7m^2+2m-7=-(m-1)^2-(6m^2+6)<0$.

Vậy bộ các số nguyên tố $(p;\ q)$ cần tìm là $(p;q)=(2;2);\ (p;q)=(5;5)$.

Bài 40.

+) Nếu p=7k + i; k,i nguyên, i thuộc tập $\{\pm1;\pm2;\pm3\}$. Khi đó p^2 chia cho 7 có thể dư: 1;4;2

Xét $p>2\Rightarrow 2p^2-1;\ 2p^2+3\ \&\ 3p^2+4>7$

Nếu p^2 chia cho 7 dư 1 thì $3p^2+4$ chia hết cho 7 nên trái GT

Nếu p^2 chia cho 7 dư 4 thì $2p^2-1$ chia hết cho 7 nên trái GT

Nếu p^2 chia cho 7 dư 2 thì $2p^2+3$ chia hết cho 7 nên trái GT

+) Xét p=2 thì $3p^2+4$=16 (loại)

+) Xét p=7k, vì p nguyên tố nên p = 7 là nguyên tố, có:

$2p^2-1=97;\ 2p^2+3=101;\ 3p^2+4=151$ đều là các số nguyên tố

Vậy p = 7

Bài 41. Xét n = 0 thì A = 1 không phải số nguyên tố

n = 1 thì A = 3 là số nguyên tố

Xét n > 1 ta có:

$$A=n^{2012}-n^2+n^{2002}-n+n^2+n+1=n^2\left[\left(n^3\right)^{670}-1\right]+n\left[\left(n^3\right)^{667}-1\right]+\left(n^2+n+1\right)$$

Mà $\left[\left(n^3\right)^{670}-1\right]$ chia hết cho $\left(n^3-1\right)$ suy ra $\left[\left(n^3\right)^{670}-1\right]$ chia hết cho $\left(n^2+n+1\right)$

Tương tự: $\left[\left(n^3\right)^{667}-1\right]$ chia hết cho $\left(n^2+n+1\right)$

Do đó với n > 1 thì A chia hết cho $\left(n^2+n+1\right)$ nên A là hợp số.

Vậy n = 1 là giá trị cần tìm.

Bài 42.

Đặt $\dfrac{a-b\sqrt{2}}{b-c\sqrt{2}}=\dfrac{x}{y}$ (x, y $\in$ Z, xy $\neq$ 0) $\Rightarrow$ ay – bx = (by – cx)$\sqrt{2}$ (*)

Vì a, b, c, x, y $\in$ Z $\Rightarrow$ ay – bx $\in$ Z $\Rightarrow$ (by – cx)$\sqrt{2}$ $\in$ Z

Mà $\sqrt{2}$ $\in$ I nên từ (*)$\Rightarrow\begin{cases}ay-bx=0\\ by-cx=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}ay=bx\\ cx=by\end{cases}$

$\Rightarrow$ acxy = b²xy $\Rightarrow$ ac = b² (vì xy ≠ 0)

$a^2 + b^2 + c^2 = (a + c)^2 - 2ac + b^2 = (a + c)^2 - b^2 = (a+c-b)(a+c+b)$

Vì $a^2 + b^2 + c^2$ là số nguyên tố và $a + c - b < a + c + b$

$\Rightarrow$ $a + b - c = 1$ $\Rightarrow$ $a + b + c = a^2 + b^2 + c^2$ (1)

Mà a, b, c nguyên dương nên $a \leq a^2$, $b \leq b^2$, $c \leq c^2$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ a = b = c = 1, thử lại: Thỏa mãn, kết luận

Bài 43. Vì k là số nguyên tố suy ra $k^2 + 4 > 5; k^2 + 16 > 5$

-Xét k = 5n $(n \in N)$ mà k là số nguyên tố nên k = 5.

Khi đó $k^2 + 4 = 29$; $k^2 + 16 = 41$ đều là các số nguyên tố.

-Xét k = 5n+1 $(n \in N) \Rightarrow k^2 = 25n^2 + 10n + 1 \Rightarrow k^2 + 4 \vdots 5$

$\Rightarrow k^2 + 4$ không là số nguyên tố.

- Xét k = 5n + 2 $(n \in N) \Rightarrow k^2 = 25n^2 = 20n + 4 \Rightarrow k^2 + 16 \vdots 5$

$\Rightarrow k^2 + 16$ không là số nguyên tố.

- Xét k = 5n +3 $(n \in N) \Rightarrow k^2 = 25n^2 + 30n + 9 \Rightarrow k^2 + 16 \vdots 5$

$\Rightarrow k^2 + 16$ không là số nguyên tố.

- Xét k = 5n + 4 $(n \in N) \Rightarrow k^2 = 25n^2 + 40n + 16 \Rightarrow k^2 + 4 \vdots 5$

$\Rightarrow k^2 + 4$ không là số nguyên tố.

Vậy để $k^2 + 4$ và $k^2 + 16$ là các số nguyên tố thì k = 5.

Bài 44. Ta có $p^{20} - 1 = (p^4 - 1)(p^{16} + p^{12} + p^8 + p^4 + 1)$.

Do p là số nguyên tố lớn hơn 5 nên p là một số lẻ.

$\Rightarrow p^2 + 1$ và $p^2 - 1$ là các số chẵn

$\Rightarrow p^4 - 1$ chia hết cho 4

$\Rightarrow p^{20} - 1$ chia hết cho 4

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 5 $\Rightarrow p$ là một số không chia hết cho 5.

Lập luận ta được $p^4 - 1$ chia hết cho 5.

Lập luận ta được $p^{16} + p^{12} + p^8 + p^4 + 1$ chia hết cho 5.

Suy ra $p^{20} - 1$ chia hết cho 25.

Mà $(4;25) = 1$ nên $p^{20} - 1$. (đpcm)

Bài 45. Từ giả thiết suy ra b chẵn, ta đặt $b = 2c$ thì $p = \dfrac{c}{2}\sqrt{\dfrac{a-c}{b-c}} \Leftrightarrow \dfrac{4p^2}{c^2} = \dfrac{a-c}{a+c}$, đặt $\dfrac{2p}{c} = \dfrac{m}{n}$

với $(m,n) = 1$ và $k = (a-c, a+c) \Rightarrow \begin{cases} a - c = km^2 \\ a + c = kn^2 \end{cases} \Rightarrow 2c = k(n^2 - m^2)$ và $4pn = km(n^2 - m^2)$.

Nếu m, n cùng lẻ thì $4pn = km\left(n^2 - m^2\right) \vdots 8 \Rightarrow p$ chẵn, tức là $p = 2$.

Nếu m, n không cùng lẻ thì m chia 4 dư 2. (do $2p$ không là số chẵn không chia hết cho 4 và $\frac{2p}{c}$ là phân số tối giản). Khi đó n là số lẻ nên $n^2 - m^2$ là số lẻ nên không chia hết cho 4 suy ra k là số chia hết cho 2. Đặt $k = 2r$ ta có $2pn = rm\left(n^2 - m^2\right)$ mà $\left(n^2 - m^2, n\right) = 1 \Rightarrow r \vdots n$ đặt $r = ns$ ta có $2p = s(n-m)(n+m)m$ do $n - m$, $n + m$ đều là các số lẻ nên $n + m = p$, $n - m = 1$, suy ra s, $m \le 2$ và $(m;n) = (1;2)$ hoặc $(2;3)$. Trong cả hai trường hợp đều suy ra $p \le 5$. Với $p = 5$ thì $m = 2$, $n = 3$, $s = 1$, $r = 3$, $k = 6$, $c = 15$, $b = 30$, $a = 39$.

Bài 46. Không mất tính tổng quát, giả sử $p \le q$.

Trường hợp 1: $p = 2$

$$\Rightarrow p(p+3) = 2(2+3) = 2.5 = 10$$

$$\Rightarrow 10 + q(q+3) = n(n+3)$$

$$\Leftrightarrow 10 = n^2 + 3n - q^2 - 3q = \left(n^2 - q^2\right) + (3n - 3q)$$

$$\Leftrightarrow 10 = (n-q)(n+q) + 3(n-q)$$

$$\Leftrightarrow 10 = (n-q)(n+q+3)$$

Vì $p(p+3) + q(q+3) = n(n+3)$ mà p; q; n là các số nguyên dương $\Rightarrow n > q \ge 2$.

$\Rightarrow n + q + 3 > 2 + 2 + 3 = 7$

Mà $10 = 1.10 = 2.5$

$$\Rightarrow \begin{cases} n + q + 3 = 10 \\ n - q = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n + q = 7 \\ n - q = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 4 \\ q = 3 \end{cases}$$

So với điều kiện thỏa mãn.

Vậy bộ ba số nguyên dương $(p;q;n)$ cần tìm là $(2;3;4)$.

Trường hợp 2: $p = 3$

$$\Rightarrow p(p+3) = 3.(3+3) = 3.6 = 18$$

$$\Rightarrow 18 + q(q+3) = n(n+3) \Leftrightarrow 18 = n^2 + 3n - q^2 - 3q = \left(n^2 - q^2\right) + (3n - 3q)$$

$$\Leftrightarrow 18 = (n-q)(n+q) + 3(n-q)$$

$$\Leftrightarrow 18 = (n-q)(n+q+3)$$

Vì $p(p+3) + q(q+3) = n(n+3)$ mà p; q; n là các số nguyên dương $\Rightarrow n > q \ge 3$.

$\Rightarrow n + q + 3 > 3 + 3 + 3 = 9$

Mà $18 = 1.18 = 2.9 = 3.6$

$$\Rightarrow \begin{cases} n + q + 3 = 18 \\ n - q = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n + q = 15 \\ n - q = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 8 \\ q = 7 \end{cases}$$

So với điều kiện thỏa mãn.

Vậy bộ ba số nguyên dương $(p;q;n)$ cần tìm là $(3;7;8)$.

Trường hợp 3: $p>3$

Ta sẽ chứng minh với 1 số nguyên a bất kì không chia hết cho 3 thì tích $a(a+3)$ luôn chia 3 dư 1.

Thật vậy:

Nếu $a:3$ dư 1 $\Rightarrow a=3k+1 \Rightarrow a+3=3k+4$

$\Rightarrow a(a+3)=(3k+1)(3k+4)=9k^2+15k+4:3$ dư 1.

Nếu $a:3$ dư 2 $\Rightarrow a=3k+2 \Rightarrow a+3=3k+5$

$\Rightarrow a(a+3)=(3k+2)(3k+5)=9k^2+21k+10:3$ dư 1.

Trở lại bài toán chính:

Vì $q \ge p>3 \Rightarrow p \nmid 3; q \nmid 3$.

$\Rightarrow p(p+3)+q(q+3):3$ dư 2.

Mà $n(n+3):3$ dư 1 (nếu $n \nmid 3$) hoặc $n(n+3) \vdots 3$ nếu $n \vdots 3$.

$\Rightarrow p(p+3)+q(q+3) \ne n(n+3)$

Suy ra không có bộ ba số nguyên dương $(p;q;n)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 47. Ta có:

$p^2q+p \vdots p^2+q \Rightarrow q(p^2+q)-(p^2q+p)=q^2-p \vdots p^2+q.$

$pq^2+q \vdots q^2-p \Rightarrow (pq^2+q)-p(q^2-p)=p^2+q \vdots q^2-p.$

$q^2-p=-(p^2+q) \Leftrightarrow q^2+q+p^2-p=0(VN).$

$q^2-p=p^2+q \Leftrightarrow (q+p)(q-p-1)=0 \Leftrightarrow q-p-1=0 \Leftrightarrow q=p+1.$

Mà p, q là hai số nguyên tố nên $p=2, q=3$ (thỏa mãn bài toán)

Bài 48. Giả sử phương trình $ax^2+bx+c=0$ có nghiệm hữu tỉ, khi đó

$\Delta=b^2-4ac=m^2,(m\in\mathbb{N})$.

Suy ra $b^2>m^2$ hay $b>m$. (1)

Ta có $4a.\overline{abc}=4a(100a+10b+c)=400a^2+40ab+4ac$

$=(400a^2+40ab+b^2)-(b^2-4ac)=(20a+b)^2-m^2$

$=(20a+b+m)(20a+b-m)$

Do $\overline{abc}$ là số nguyên tố nên $(20a+b+m) \vdots \overline{abc}$ hoặc $(20a+b-m) \vdots \overline{abc}$, suy ra $20a+b+m \ge \overline{abc}$ (2)

Từ (1) ta có $20a+2b=20\text{a}+b+b>20\text{a}+b+m$

Từ (2) ta có $20a+b+m \ge 100a+10b+c > 100a+10b$

Do đó

$20a+2b > 100a+10b \Leftrightarrow 2(10a+b) > 10(10a+b) \Leftrightarrow 2 > 10$ (vô lý)

Vậy Δ không thể là số chính phương nên phương trình $ax^2+bx+c=0$ không có nghiệm hữu tỉ.

Bài 49. Ta có $2n^2-6n+2=2\left[n(n-3)+1\right]$

Vì n(n – 3) chẵn nên n(n – 3) + 1 = 2k +1 với $k \in N \cup \{-1\}$.

Suy ra $5^{2n^2-6n+2}-12=25^{2k+1}+1-13 \vdots 13$

Vì vậy $5^{2n^2-6n+2}-12$ nguyên tố hay $5^{2n^2-6n+2}-12=13$

nên n(n – 3) + 1 = 1 , suy ra n = 0 hoặc n = 3.

Bài 50. Xét dãy số có dạng $2; 2.3; 2.3.5; ...$

Giả sử hai số cần chọn là $a=2.3.4.5...p_n; b=2.3.5...p_m$ với $p_n, p_m \left(n<m\right)$ là các số nguyên tố thứ n và thứ m.

Ta có $b-a=2.3.5...p_m-2.3.5...p_n=30000 \Leftrightarrow 2.3.5.p_n\left(p_{n+1}.p_{n+2}...p_m-1\right)=2.3.5.10000$

Ta thấy $2.3.5.1000$ tồn tại ước của 3 nên a và b có chữa số nguyên tố 3 nên $p_n \ge 3$ và 1000 không có ước nguyên tố khác 2 và 5 nên a không có ước khác 2 và 5 nên $p_n \le 5$. Từ đó ta được

+ Nếu $p_n=3$, ta được $p_{n+1}.p_{n+2}...p_m=10000,$ không tồn tại p_m thỏa mãn

+ Nếu $p_n=5$ ta được $p_{n+1}.p_{n+2}...p_m=1001=7.11.13 \Rightarrow p_m=13,$ từ đó ta được

$a=2.3.5=30; b=2.3.5.7.11.13=30030$

Bài 51. Giả sử tồn tại số nguyên tố p lẻ sao cho:

$\frac{1}{p}=\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2} \Leftrightarrow p.(m^2+n^2)=m^2n^2 \Rightarrow m^2n^2 \vdots p$,

Mà p là số nguyên tố nên $m \vdots p$ hoặc $n \vdots p$.

Nếu $m \vdots p$ thì $m=kp (k \in N^*)$

$\Rightarrow p.(m^2+n^2)=\left(kpn\right)^2 \Rightarrow m^2+n^2=pk^2n^2 \Rightarrow \left(m^2+n^2\right) \vdots p$

Mà $m \vdots p$ nên $n \vdots p$.

Vậy $m \ge p, n \ge p \Rightarrow m^2 \ge p^2, n^2 \ge p^2$

Suy ra $\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2} \le \frac{2}{p^2} \Rightarrow \frac{1}{p} \le \frac{2}{p^2} \Rightarrow p \le 2$. Vô lí vì p là số nguyên tố lẻ.

Bài 52. Theo đề ta có $\begin{cases} p+q=a^2 \\ p+4q=b^2 \\ a;b \in N^* \end{cases}$, suy ra $b^2-a^2=3q \Leftrightarrow (b-a)(b+a)=3q$

Từ q là số nguyên tố và $a+b \geq 2$ nên ta có các trường hợp sau:

+ TH 1: $\begin{cases} b-a=1 \\ b+a=3q \end{cases}$ suy ra $b=a+1$ và $2a+1=3q$, suy ra q lẻ.

Ta viết $q=2k+1$ ($k \in N^*$)

Khi đó $2a=3q-1=6k+2$ hay $a=3k+1$ và $p=a^2-q=9k^2+4k=k(9k+4)$

Do p nguyên tố nên $k=1$ và $p=13, q=3$.

+ TH 2: $\begin{cases} b-a=3 \\ b+a=q \end{cases}$, suy ra $b=a+3$ và $q=2a+3$

Lại có $p=a^2-q=a^2-2a-3=(a+1)(a-3)$. Do p nguyên tố nên $a=4$ và $p=5, q=11$.

+ TH 3: $\begin{cases} b-a=q \\ b+a=3 \end{cases}$ và $b>a \geq 1$.

Suy ra $b=2$ *và* $a=1$ khi đó $q=1$ không phải số nguyên tố.

Bài 53.

Ta có:

$$n^8+4^{2k-1}=n^8+\left(2^{2k-1}\right)^2=\left(n^2\right)^4+2.2^{k-1}n^2+\left(2^{2k-1}\right)^2-\left(2^{k-1}.n\right)^2$$

$$=\left(n^2+2^{2k-1}\right)^2-\left(2^{k-1}.n\right)^2$$

$$=\left(n^2+2^{2k-1}-2^{k-1}.n\right)\left(n^2+2^{2k-1}+2^{k-1}.n\right)$$

Do n,k là các số tự nhiên và n^8+4^{2k+1} là một số nguyên tố nên

$$n^8+4^{2k+1}=\left(n^2+2^{2k+1}-2^{k+1}.n\right)\left(n^2+2^{2k+1}+2^{k+1}.n\right)$$

$$\Rightarrow n^2+2^{2k+1}-2^{k+1}.n=1$$

$$\Leftrightarrow n^2-2.2^k.n+2.\left(2^k\right)^2=1$$

$$\Leftrightarrow \left(n-2^k\right)^2+\left(2^k\right)^2=1$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} n-2^k=0 \\ 2^k=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=0 \\ n=1 \end{cases} \Rightarrow n^8+4^{2k+1}=1+2+2=5 \\ \begin{cases} n-2^k=1 \\ 2^k=0 \end{cases} (VN) \\ \begin{cases} n-2^k=-1 \\ 2^k=0 \end{cases} (VN) \end{array}\right.$$

Vậy $n=1, k=0$ là các giá trị cần tìm.

Bài 54. Ta có:

$P=\left(7+x+x^2\right)\left(7+x-x^2\right)$

Ta có $7+x+x^2>1$

Vì P là số nguyên tố nên $7+x-x^2=1\Leftrightarrow x^2-x-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=-2\quad\text{(L)}\end{array}\right.$

Vậy $x=3\Rightarrow P=19$ (thỏa mãn).

Bài 55. Ta có với mọi số nguyên m thì m^2 chia cho 5 dư 0 , 1 hoặc 4.

+ Nếu n^2 chia cho 5 dư 1 thì $n^2=5k+1\Rightarrow n^2+4=5k+5\,\vdots\,5$ ($k\in\mathbb{N}^*$).

nên n^2+4 không là số nguyên tố.

+ Nếu n^2 chia cho 5 dư 4 thì $n^2=5k+4\Rightarrow n^2+16=5k+20\,\vdots\,5$ ($k\in\mathbb{N}^*$).

nên n^2+16 không là số nguyên tố.

Vậy $n^2\,\vdots\,5$ hay n chia hết cho 5.

Nhận xét. Bài toán áp dụng tính chất chia hết, chia có dư của một số chính phương khi chia cho 5; tính chất số nguyên tố, hợp số,…

Nhắc lại kiến thức và phương pháp.

- Một số chính phương khi chia cho 5 chỉ tồn tại số dư 0 hoặc 1 hoặc 4. Chứng minh:
  + $m=5k\Rightarrow m^2=25k^2$ chia 5 dư 0 (đúng).
  + $m=5k+1\Rightarrow m^2=25k^2+10k+1$ chia 5 dư 1 (đúng).
  + $m=5k+2\Rightarrow m^2=25k^2+20k+4$ chia 5 dư 4 (đúng).
  + $m=5k+3\Rightarrow m^2=25k^2+30k+9$ chia 5 dư 4 (đúng).
  + $m=5k+4\Rightarrow m^2=25k^2+40k+16$ chia 5 dư 1 (đúng).
- Áp dụng tính chất chia hết, chia có dư vào bài toán; "Số nguyên tố" là số chỉ có hai ước là 1 và chính nó.
  + n chia 5 dư 1 thì $\left(n^2+4\right)\vdots\,5$ nên $\left(n^2+4\right)$ không phải là số nguyên tố (loại).
  + n chia 5 dư 4 thì $\left(n^2+16\right)\vdots\,5$ nên $\left(n^2+16\right)$ không phải là số nguyên tố (loại).
  + Do đó nếu $\left(n^2+4\right)$ và $\left(n^2+16\right)$ là số nguyên tố thì chỉ còn tồn tại trường hợp n^2 chia hết cho 5. Khi đó n chia hết cho 5.

Bài 56.

1) Cho số nguyên dương n thỏa mãn n và 10 là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh $(n^4-1)\,\vdots\,40$

Vì n và 10 nguyên tố cùng nhau nên n không chia hết cho 2 và 5.

⇒ n chỉ có thể có dạng 10k ± 1 và 10k ± 3 với k ∈ ℕ.

Ta có: $n^4-1=(n^2-1)(n^2+1)=(n-1)(n+1)(n^2+1)$

Do n lẻ nên $n-1\,\vdots\,2$; $n+1\,\vdots\,2$ và $n^2+1\,\vdots\,2\Rightarrow n^4-1\,\vdots\,8$. (1)

• Nếu $n=10k\pm1\Rightarrow n^2\equiv(\pm1)^2\equiv1\pmod{10}\Rightarrow n^2-1\,\vdots\,10\Rightarrow n^4-1\,\vdots\,5$ (2)

Từ (1) và (2), chú ý (5;8) = 1 suy ra $n^4-1\,\vdots\,40$

• Nếu $n=10k\pm3\Rightarrow n^2\equiv(\pm3)2=9\pmod{10}\Rightarrow n^2+1\,\vdots\,10\Rightarrow n^4-1\,\vdots\,5$ (3)

Từ (1) và (3) chú ý (5;8) = 1 suy ra $n^4-1\,\vdots\,40$

Vậy trong mọi trường hợp ta có $n^4 - 1 \vdots 40$

2) Tìm tất cả các số nguyên tố p và các số nguyên dương x,y thỏa mãn $\begin{cases} p-1=2x(x+2) \\ p^2-1=2y(y+2) \end{cases}$

Từ (1) ⇒ p – 1 là số chẵn ⇒ p là số nguyên tố lẻ.
Trừ từng vế của (2) cho (1) ta
được $p^2 - p = 2y^2 - 2x^2 + 4y - 4x \Leftrightarrow p(p-1) = 2(y-x)(y+x+2)(*)$
⇒ $2(y - x)(y + x + 2) \vdots p$. Mà (2;p) = 1 nên xảy ra 2 TH:
• $y - x \vdots p \Rightarrow y - x = kp$ ($k \in \mathbb{N}^*$)
Khi đó từ (*) ⇒ $p - 1 = 2k(x + y + 2) \Rightarrow kp - k = 2k^2(x + y + 2) \Rightarrow y - x - k = 2k^2(x + y + 2)$
(loại vì $x + y + 2 > y - x - k > 0$; $2k^2 > 1 \Rightarrow 2k^2(x + y + 2) > y - x - k$)
• $y + x + 2 \vdots p \Rightarrow x + y + 2 = kp$ ($k \in \mathbb{N}^*$)
Từ (*) ⇒ $p - 1 = 2k(y - x) \Rightarrow kp - k = 2k^2(y - x) \Rightarrow x + y + 2 - k = 2k^2(y - x)$ (**)
Ta chứng minh k = 1. Thật vậy nếu $k \ge 2$ thì từ (**) ⇒ $x + y = 2k^2(y - x) + k - 2 \ge 8(y - x)$ (vì $y - x > 0$)
⇒ $9x \ge 7y \Rightarrow 7y < 14x \Rightarrow y < 2x$
Do đó từ (2) ⇒ $(p - 1)(p + 1) = 2y(y + 2) < 4x(2x + 2) < 4x(2x + 4) = 8x(x + 2) = 4(p - 1)$
(vì $2x(x + 2) = p - 1$ theo (1))
⇒ $p + 1 < 4 \Rightarrow p < 3$, mâu thuẫn với p là số nguyên tố lẻ.
Do đó k = 1, suy ra

$$\begin{cases} x+y+2=p \\ p-1=2(y-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2=p \\ x+y+1=2(y-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2=p \\ y=3x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x+1 \\ p-1=4x+2 \end{cases}$$

Thay p – 1 = 4x + 2 vào (1) ta có: $4x+2=2x(x+2) \Leftrightarrow 2x+1=x^2+2x \Leftrightarrow x^2=1 \Rightarrow x=1$
⇒ y = 4, p = 7 (thỏa mãn)
Vậy x = 1, y = 4 và p = 7.

Bài 57. a) Ta có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c} \Rightarrow \frac{a+b}{ab}=\frac{1}{c} \Rightarrow c(a+b)=ab(*)$

Giả sử a + b là số nguyên tố, khi đó từ (*) ⇒ $ab \vdots (a + b) \Rightarrow a \vdots (a + b)$ hoặc $b \vdots (a + b)$
Điều này mâu thuẫn do 0 < a < a + b, 0 < b < a + b.
Vậy a + b không thể là số nguyên tố.

b) Giả sử a + c và b + c đồng thời là số nguyên tố.

Từ $c(a+b)=ab \Rightarrow ca+cb=ab \Rightarrow ca+ab=2ab-ab \Rightarrow a(b+c)=b(2a-c) \Rightarrow a(b+c) \vdots b$ (**)
Mà b + c là số nguyên tố, b là số nguyên dương nhỏ hơn b + c nên (b + c, b) = 1
Do đó từ (**) suy ra $a \vdots b$.
Chứng minh tương tự ta có $b(a + c) = a(2b - c) \Rightarrow b \vdots a$
Vậy a = b. Từ (*) ⇒ a = b = 2c
Do đó a + c = b + c = 3c, không là số nguyên tố với c > 1 (mâu thuẫn với giả sử)
Vậy a + c và b + c không thể đồng thời là số nguyên tố.

Bài 58. Ta có

$$a^2+ab+b^2=c^2+cd+d^2 \Rightarrow a^2+2ab+b^2=c^2+2xd+d^2+ab-cd$$

$$\Leftrightarrow ab-cd=(a+b)^2-(c-d)^2=(a+b+c+d)(a+b-c-d)(*)$$

Nếu $ab-cd=0$. Do a + b + c + d > 0 => a + b – c – d = 0 => a + b + c + d = 2(c + d) là hợp số do $c + d \in \mathbb{N}^*$ và c + d > 1

Nếu $ab - cd \neq 0$. Từ (*) ⇒ ab – cd ⋮ (a + b + c + d).

$a^2 + ab + b^2 = c^2 + cd + d^2 \Rightarrow 3(ab - cd) + (a^2 - 2ab + b^2) = c^2 - 2cd + d^2$

$\Rightarrow 3(ab - cd) = (c - d)^2 - (a - b)^2 = (c - d + a - b)(c - d - a + b) \neq 0$

⇒ (c – d + a – b)(c – d – a + b) ⋮ (a + b + c + d)

Giả sử a + b + c + d là số nguyên tố thì ta có

c – d + a – b ⋮ a + b + c + d hoặc c – d – a + b ⋮ a + b + c + d

Điều này mâu thuẫn do –(a + b + c + d) < c – d + a – b < a + b + c + d ;

–(a + b + c + d) < c – d – a + b < a + b + c + d và (c – d + a – b)(c – d – a + b) ≠ 0

Vậy a + b + c + d là hợp số.

Bài 59. Biến đổi được $p = (n^2 + 1)(n - 1)$

Nếu $n = 0;1$ không thỏa mãn đề bài

Nếu $n = 2$ thỏa mãn đề bài vì $p = (2^2 + 1)(2 - 1) = 5$

Nếu $n > 3$ không thỏa mãn đề bài vì khi đó p có từ 3 ước trở lên là $1; n - 1 > 1$ và $n^2 + 1 > n - 1 > 1$

Vậy $n = 2$ thì $p = n^3 - n^2 + n - 1$ là số nguyên tố.

Bài 60.

Ta có: $n^3 + n + 2 = n^3 + 1 + n + 1 = (n + 1)(n^2 - n + 1) + (n + 1) = (n + 1)(n^2 - n + 2)$

Do $\forall n \in N^*$ nên $n + 1 > 1$ và $n^2 - n + 2 > 1$. Vậy $n^3 + n + 2$ là hợp số

Bài 61. Ta có: $\dfrac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \dfrac{a}{c} \Leftrightarrow (a - c)(b^2 - ac) = 0 \Rightarrow b^2 = ac$

Mà

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + ac + c^2 = a^2 + 2ac + c^2 - b^2 = (a + c)^2 - b^2 = (a + c + b)(a + c - b)$$

Ta thấy $a^2 + b^2 + c^2 > 3$ do đó nếu $a^2 + b^2 + c^2$ là các số nguyên tố thì xảy ra các trường hợp sau:

$1) a + c - b = 1; a + c + b = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 2a + 2c - 1$

$\Rightarrow (a - 1)^2 + (c - 1)^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a = c = 1, b = \pm 1 \qquad (ktm)$

$2) a + c + b = 1, a + c - b = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 2a + 2c - 1$

$\Rightarrow (a - 1)^2 + (c - 1)^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a = c = 1, b = \pm 1 \qquad (ktm)$

$3) a + c + b = -1, a + c - b = -(a^2 + b^2 + c^2) \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -2a - 2c - 1$

$\Rightarrow (a + 1)^2 + (c + 1)^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a = c = -1, b = \pm 1 \qquad (ktm)$

$4) a + c - b = -1, a + c + b = -(a^2 + b^2 + c^2) \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -2a - 2c - 1$

$\Rightarrow (a + 1)^2 + (c + 1)^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a = c = -1, b = \pm 1 \qquad (ktm)$

Bài 62. Do p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên có dạng $p = 3k+1; p = 3k-1$ với $k > 1$

+ Nếu $p = 3k+1$ thì $2p+1 = 6k+3 = 3(2k+1)$

Suy ra $2p+1$ là hợp số (vô lý)

+Nếu $p = 3k-1, k > 1$ thì $4p+1 = 12k-3 = 3.(4k-1)$

Do $k > 1$ nên $4k-1 > 3$. Do đó $4p+1$ là hợp số.

Bài 63. Do p là số nguyên tố và p > 3 nên p không chia hết cho 3. (*)

p^n có 20 chữ số. Các chữ số chỉ có thể là 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 gồm 10 chữ số đôi một khác nhau.

Nếu không có quá nhiều hơn 2 chữ số giống nhau thì mỗi chữ số phải có mặt đúng 2 lần trong cách viết số p^n.

Như vậy tổng các chữ số của số p^n là: 2(0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = $90 \vdots 3$ nên $p^n \vdots 3$

Điều này mâu thuẫn (*).

Vậy trong số p^n phải có ít nhất 3 chữ số giống nhau.

Bài 64. Rõ ràng p, q phân biệt. Không mất tính tổng quát ta giả sử $p < q$. Xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1. $p = 2$. Không thỏa mãn vì $p + q$ lẻ, còn $2(p-q)^2$ chẵn.

Trường hợp 2. $p = 3$. Khi đó tìm được $q = 5$.

Trường hợp 3. $p \geq 5$. Gọi r_1, r_2 lần lượt là số dư của phép chia p, q cho 3.

Rõ ràng $r_1, r_2 \in \{1, 2\}$.

Nếu $r_1 = r_2$ thì $3 \nmid p + q$ và $3 \mid 2(p-q)^2$. Không thỏa mãn.

Nếu $r_1 \neq r_2$ thì $3 \mid p + q$ và $3 \nmid 2(p-q)^2$. Không thỏa mãn.

Vậy $(p; q) = (3; 5), (5; 3)$.

Bài 65. Ta có: p, q là số nguyên tố nên $pq + 11$ là số nguyên tố lớn hơn 11

$\Rightarrow pq+11$ là số lẻ suy ra pq là số chẵn.

Do $7p+q$ là số nguyên tố lớn hơn 7 nên p và q không thể cùng tính chẵn lẻ.

*) TH1: $p = 2$ thì $7p+q = 14+q$. Ta thấy 14 chia 3 dư 2

+) Nếu q chia hết cho 3, do q là số nguyên tố nên $q = 3$.

$7p+q = 17$; $pq+11 = 17$ (T/m)

+) Nếu q chia cho 3 dư 1 thì $14+q$ chia hết cho 3 $\Rightarrow 7p+q$ là hợp số

+) Nếu q chia cho 3 dư 2 thì $2q$ chia cho 3 dư 1 nên $pq+11 = 2q+11$ chia hết cho 3

$\Rightarrow pq+11$ là hợp số.

*) TH2: $q = 2$ thì $7p+q = 7p+2$

+) Nếu $7p$ chia hết cho 3 thì p chia hết cho 3 nên $p = 3 \Rightarrow 7p+q=23; pq+11=17$ (Thỏa mãn)

+) Nếu $7p$ chia cho 3 dư 1 chia hết cho 3 $\Rightarrow 7p+2$ là hợp số

+) Nếu $7p$ chia cho 3 dư 2 thì p chia cho 3 dư 2 nên 2p chia cho 3 dư 1 $\Rightarrow pq+11=2p+11$ chia hết cho 3 nên $pq+11$ là hợp số.

Vậy: $p=2,\ q=3$ hoặc $p=3,\ q=2$.

Bài 66. Vì $\overline{ab}; \overline{cd}$ là các số nguyên tố nên b,d lẻ và khác 5

Ta lại có $b^2 = \overline{cd} + b - c \Leftrightarrow b^2 - b = 9c + d \Leftrightarrow b(b-1) = 9c+d$

Nếu $b=1$ (không thỏa mãn)

Nếu $b=3$ nên $9c+d=6 \Rightarrow c=0, d=6$ (không thỏa mãn)

Nếu $b=7 \Rightarrow 9c+d=42 \Rightarrow d=42-9c \Rightarrow c=4; \mathrm{d}=6$ (loại)

Nếu $b=9 \Rightarrow 9c+d=72 \Leftrightarrow d=72-9c \Rightarrow c=7; d=9$ (thỏa mãn)

$\Rightarrow a \in \{1;2;7\}$

Vậy $\overline{abcd} \in \{1979;2979;7979\}$

Bài 67. Trong 3 số $a,\ b,\ c$ có ít nhất hai số cùng tính chẵn lẻ.

Giả sử hai số cùng tính chẵn lẻ là a và b.

Suy ra $p = b^c + a$ là số nguyên tố chẵn nên $p = 2$.

Suy ra $a = b = 1$. Khi đó $q = c+1$ và $r = c+1$ nên $q = r$.

Vậy trong ba số $p,\ q,\ r$ có ít nhất hai số bằng nhau.

Bài 68. +) Với $p=2$ thì $p^2+2=8$ không là số nguyên tố.

+) Với $p=3$ thì $p^2+2=11$ và $p^3+p^2+1=37$ đều là số nguyên tố.

+) Với $p>3 \Rightarrow p=3k\pm1\ (k\in\mathbb{N}, k\ge 2)$

$\Rightarrow p^2+2=(3k\pm1)^2+2=9k^2\pm6k+3=3(3k^2\pm2k+1) \vdots 3$ nên p^2+2 là hợp số.

Vậy chỉ có $p=3$ thì p^2+2 và p^3+p^2+1 đều là số nguyên tố.

Bài 69. Ta có: $x^2=45+y^2$.

Ta thấy $x^2>45$ và x là số nguyên tố nên x phải là số nguyên tố lẻ. Suy ra x^2 là số lẻ.

Từ đó suy ra y^2 là số chẵn, mà y là số nguyên tố. Suy ra $y=2$; $x=7$

Vậy $x=7$ và $y=2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 70. 1) Đặt $d = UCLN(2n+1, 10n+7)$

Suy ra $2n+1 \vdots d$. Vì vậy $5(2n+1) \vdots d$.

Mà $10n+7 \vdots d$ nên $10n+7-5(2n+1) \vdots d$

$\Rightarrow 2 \vdots d$

Do đó $d = 2$ hoặc $d = 1$.

Nếu $d = 2$ thì $2n + 1 \vdots 2$ (vô lý).

$\Rightarrow d = 1$.

$1 = UCLN\left(2n+1, 10n+7\right)$

Vậy $2n+1$ và $10n+7$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

2)

- Nếu là số nguyên tố lẻ thì $y^3 = x^2 + 23$ là số chẵn. Vậy $y^3 = 2$ (loại).
- Nếu $x = 2$ thì $y^3 = 2^2 + 23 = 27$. Vậy $y = 3$.

Bài 71. Ta có: $\overline{ab} - \overline{ba} = 9(a-b)$

$=> \overline{ab} - \overline{ba} = 3^2(a-b)$

Để $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương khi $a - b$ là số chính phương

Do a, b là các chữ số và $0 < a, b \le 9 => 1 \le a - b \le 8$

$=> (a-b)$ là số chính phương khi $(a-b) \in \{1, 4\}$

+Nếu $a - b = 1 \Rightarrow \overline{ab} \in \{21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98\}$ mà $\overline{ab}$ là số nguyên tố và là số lẻ $=> \overline{ab} = 43$

+Nếu $a - b = 4 \Rightarrow \overline{ab} \in \{51, 62, 73, 84, 95\}$ mà $\overline{ab}$ là số nguyên tố và là số lẻ $=> \overline{ab} = 73$

Vậy $\overline{ab} \in \{43; 73\}$

Bài 72. Vì p là số nguyên tố do đó ta được $4p^2 + 1 > 5$ và $6p^2 + 1 > 5$

Đặt $x = 4p^2 + 1 = 5p^2 - (p-1)(p+1)$; $y = 6p^2 + 1 \Rightarrow 4y = 25p^2 - (p-2)(p+2)$

Khi đó

- Nếu p chia cho 5 dư 4 hoặc dư 1 thì $(p-1)(p+1)$ chia hết cho 5

Suy ra x chia hết cho 5 mà $x > 5$ nên x không là số nguyên tố.

- Nếu p chia cho 5 dư 3 hoặc dư 2 thì $(p-2)(p+2)$ chia hết cho 5

Suy ra 4y chia hết cho 5 mà $(4,5) = 1$ nên y chia hết cho 5 mà $y > 5$

Do đó y không là số nguyên tố

Vậy p chia hết cho 5, mà p là số nguyên tố nên $p = 5$.

Thử với $p = 5$ thì $x = 101$; $y = 151$ là các số nguyên tố

Tìm tất cả các số nguyên tố p để $4p^2 + 1$ và $6p^2 + 1$ cũng là số nguyên tố.

Bài 73. 1. Giả sử p và q là các số nguyên tố thỏa mãn đẳng thức $p\left(p-1\right) = q\left(q^2 - 1\right)$.

a) Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương k sao cho $p-1=kq, q^2-1=kp$.

Nếu $p=q$ thì ta có $p-1=q^2-1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} p=q=0 \\ p=q=1 \end{array}\right.$, điều này vô lí vì p, q là các số nguyên tố.

Do vậy $p \neq q$, khi đó do p và q là các số nguyên tố nên $p-1 \vdots q$ và $q^2-1 \vdots p$.

Như vậy tồn tại các số nguyên dương m, n thỏa mãn $p-1=mq; q^2-1=np$, thay vào

đẳng thức đã cho ta được $m=n$. Do vậy tồn tại số nguyên dương k sao cho $\begin{cases} p-1=kq \\ q^2-1=kp \end{cases}$.

b) Tìm tất cả các số nguyên tố p, q thỏa mãn đẳng thức $p(p-1)=q(q^2-1)$.

Thế $p=kq+1$ vào hệ thức $q^2-1=kp$ ta được $q^2-1=k(kq+1) \Leftrightarrow q^2-k^2q-k-1=0$.

Xem phương trình là phương trình bậc hai ẩn q, khi đó để phương trình có nghiệm nguyên dương thì

$\Delta=k^4+4(k+1)=k^4+4k+4$ phải là số chính phương.

Ta có $k^4<k^4+4k+4<(k^2+2)^2$ nên ta được $\Delta=(k^2+1)^2$.

Từ đó ta được $k^4+4k+4=(k^2+1)^2 \Leftrightarrow k=k^2 \Leftrightarrow k=1$.

Thay vào hệ thức đã cho ta được $q^2-q-2=0 \Leftrightarrow q=2 \Rightarrow p=3$.

Vậy các số $p=3; q=2$ là các số nguyên tố cần tìm.

Bài 74. Trước hết ta chứng minh với p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì p^2-1 chia hết cho 24.

Thật vậy, ta có $p^2-1=(p-1)(p+1)$.

Do p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $p-1$ và $p+1$ là hai số chẵn liên tiếp.

Suy ra ta được $p^2-1=(p-1)(p+1)$ chia hết cho 8.

Mặt khác ta lại có $(p-1)p(p+1)$ chia hết cho 3, mà p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p không chia hết cho 3. Do đó $p^2-1=(p-1)(p+1)$ chia hết cho 3.

Để ý là $(3;8)=1$ nên ta được $p^2-1=(p-1)(p+1)$ chia hết cho 24.

Chứng minh hoàn toàn tương tự thì ta được $q^2-1; r^2-1; s^2-1$ cũng chia hết cho 24.

Ta có $p^2-q^2+r^2-s^2=(p^2-1)-(q^2-1)+(r^2-1)-(s^2-1)$.

Do đó ta được $p^2 - q^2 + r^2 - s^2$ chia hết cho 24.

Bài 75. Từ $p^2 - 2q^2 = 1$ ta được $p^2 = 2q^2 + 1$. Do đó ta suy ra được p là số nguyên tố lẻ.

Từ đó ta đặt $p = 2k + 1$ với $k \in N^*$.

Khi đó ta được $(2k+1)^2 = 2q^2 + 1 \Leftrightarrow 4k^2 + 4k + 1 = 2q^2 + 1 \Leftrightarrow 2k(k+1) = q^2$

Do đó q^2 là số chẵn nên q là số chẵn. Mà q là số nguyên tố nên $q = 2$.

Thay vào $p^2 - 2q^2 = 1$ ta suy ra được $p = 3$.

Vậy cặp số nguyên tố $(p;q) = (3;2)$ thỏa mãm yêu cầu bài toán.

Bài 76.

- Trường hợp 1: Nếu $p = 2$ suy ra $p^3 + \frac{p-1}{2}$ không nguyên
- Trường hợp 2: Nếu $p = 4k + 1$, khi đó ta được $p^3 + \frac{p-1}{2} = (4k+1)^3 + 2k$ là số lẻ nên

$p^3 + \frac{p-1}{2}$ không thể là tích của hai số tự nhiên liên tiếp.

- Trường hợp 3: Nếu $p = 4k + 3$. Giả sử $p^3 + \frac{p-1}{2}$ là tích của hai số tự nhiên liên tiếp

Khi đó ta có $p^3 + \frac{p-1}{2} = x(x+1) \Leftrightarrow 2p(2p^2+1) = (2x+1)^2 + 1$ với x là số tự nhiên.

Từ đó suy ra $(2x+1)^2 + 1 \vdots p$ vô lí vì $p = 4k + 3$.

Từ các trường hợp trên, ta có điều phải chứng minh.

Bài 77. Do p và q là các số nguyên tố nên $p; q \geq 2$, do đó suy ra $r \geq 3$, mà r là số nguyên tố nên r là số lẻ.

Từ đó suy ra p^q và q^p khác tính chẵn lẻ nên p và q khác tính chẵn lẻ.

Như vậy trong hai số p, q có một số chẵn, không mất tính tổng quát ta giả sử số đó là q.

Khi đó $q = 2$ nên ta được $p^2 + 2^p = r$. Đến đây ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $p = 3$, khi đó ta có $3^2 + 2^3 = r$ hay $r = 17$ là một số nguyên tố.
- Nếu $p > 3$, do p là số nguyên tố nên có dạng $p = 3k + 1$ hoặc $p = 3k + 2$ với k là số

nguyen dương.

Từ đó suy ra p^2 chia 3 dư 1 hay $p^2 = 3n+1\left(n \in N^*\right)$.

Lại có p là số lẻ nên $2^p = \left(3-1\right)^p = 3m-1\left(m \in N^*\right)$.

Từ đó ta được $p^2 + 2^p = 3n+1+3m-1 = 3\left(m+n\right) \vdots 3$ nên là hợp số. Do đó trường hợp này loại.

Vậy bộ ba số nguyên tố cần tìm là $\left(p;q;r\right) = \left(2;3;17\right),\left(3;2;17\right)$.

Bài 78. Từ $49 \le 2p^2 - r^2; 2q^2 - r^2 \le 193$ ta có $2q^2 - 193 \le r^2 \le 2p^2 - 49$, do đó $q^2 - p^2 \le 72$.

Mặt khác từ điều kiện $5 \le p < q < r$ ta được $r \ge 11$, do đó $2p^2 \ge 49 + 121 = 170$ hay $p \ge 11$.

Vì $\left(q-p\right)\left(q+p\right) \le 72$ nên $q - p = 2$ hoặc $q - p \ge 4$. Xét hai trường hợp sau:

- Với $q - p = 2$ và $q + p \le 36$, khi đó ta được $p = 11; q = 13$ hoặc $p = 17; q = 19$.

+ Nếu $p = 11; q = 13$ thì $145 \le r^2 \le 193$, suy ra $r = 13 = q$ (loại)

+ Nếu $p = 17; q = 19$ thì $529 \le r^2 \le 529$, suy ra $r = 23$ (nhận).

- Với $q - p \ge 4$ và $q + p \le 18$, không tồn tại vì $p \ge 11$.

Vậy ba số nguyên tố cần tìm là $p = 17; q = 19; r = 23$.

Bài 79. Từ giả thiết suy ra $\frac{2}{3} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{7}{10}$. Không giảm tính tổng quát giả sử $a > b > c > 1$.

Suy ra $\frac{2}{3} < \frac{3}{c} \Rightarrow 2c < 9$, do đó $c \in \left\{2;3\right\}$

- Với $c = 2$ suy ra $\frac{2}{3} < \frac{1}{2} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{7}{10} \Rightarrow \frac{1}{6} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{6} < \frac{2}{b}$ và $\frac{1}{b} < \frac{1}{5}$

Do đó $b \in \left\{7;11\right\}$

+ Với $b = 7$, khi đó từ $\frac{1}{6} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{1}{5}$ suy ra $\frac{1}{42} < \frac{1}{a} < \frac{2}{35} \Rightarrow a \in \left\{19;23;29;31;37;41\right\}$

+ Với $b = 11$ từ $\frac{1}{6} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{1}{5}$ suy ra $\frac{5}{66} < \frac{1}{a} < \frac{6}{55} \Rightarrow a = 13$, do $a > b$

- Với $c = 3$ từ giả thiết suy ra $\frac{1}{3} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{11}{30} \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{2}{b} \Rightarrow b < 6 \Rightarrow b = 5$ (do $b > c$)

Thay $b = 5$ vào $\frac{1}{3} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{11}{30}$ ta được $6 < a < \frac{15}{2} \Rightarrow a = 7$.

Vậy có các bộ ba số nguyên tố khác nhau $\left(a;b;c\right)$ thoả mãn là:

$(19;7;2),(23;7;2),(29;7;2),(31;7;2),(37;7;2),(41;7;2),(13;11;2),(7;5;3)$ và các hoán vị của nó.

Bài 80. Ta có $x^5+px+3q=0 \Leftrightarrow x\left(x^4+p\right)=-3q$.

Vì q là số nguyên tố và x là số nguyên nên từ phương trình trên suy ra
$x \in \{-1;-3;-q;-3q\}$.

Ta xét các trường hợp sau:

+ Nếu $x=-1$, khi đó từ phương trình trên ta được $1+p=3q$. Do q là số nguyên tố nên

- Khi $q=2$ thì ta được $p=5$
- Khi $q>2$ thì $3q$ là số lẻ nên p là số nguyên tố chẵn, do đó $p=2$ nên $q=1$ không phải là số nguyên tố.

+ Nếu $x=-3$, khi đó từ phương trình trên ta được $p+81=q$, do đó p là số nguyên tố chẵn và q là số nguyên tố lẻ. Từ đó ta được $p=2; q=83$.

+ Nếu $x=-q$, khi đó từ phương trình trên ta được $p+p^4=3$. Trường hợp này không xẩy ra do p và q là số nguyên tố nên $p+q^4>3$.

+ Nếu $x=-3q$, khi đó từ phương trình trên ta được $p+81p^4=1$. Trường hợp này không xẩy ra do p và q là số nguyên tố nên $p+81q^4>1$.

Vậy các bộ số $(x;p;q)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(-1;5;2),(-3;2;83)$.

Nhận xét: Từ phương trình $x\left(x^4+p\right)=-3q$ ta suy ra được x chia hết cho 3 hoặc x^4+p chia hết cho 3. Đến đây ta xét các trường hợp như trên. Tuy nhiên với cách làm này việc lý luận sẽ phức tạp hơn.

Bài 81. Giả sử tồn tại các số nguyên dương x và y thỏa mãn $\frac{p+1}{2}=x^2$ và $\frac{p^2+1}{2}=y^2$

Khi đó ta được $\begin{cases} p+1=2x^2 & (1) \\ p^2+1=2y^2 & (2) \end{cases}$.

Trừ theo vế của đẳng thức (2) cho đẳng thức (1) ta được $p(p-1)=2(y+x)(y-x)$ (3)

Suy ra ta được $2(y+x)(y-x) \vdots p$ (4).

Mặt khác từ (1) ta thấy p là số lẻ và $x > 1 >$ Ta có $p + 1 = 2x^2 = x^2 + x^2 > x + 1 \Rightarrow p > x$.

Từ (2) ta lại có $y > 1$ nên $p^2 + 1 = 2y^2 = y^2 + y^2 > y^2 + 1 \Rightarrow p > y$.

Từ (3) ta suy ra được $y > x$. Từ đó ta được $0 < y - x < p$.

Chú ý p là là số nguyên tố lẻ nên từ (4) ta suy ra được $x = y \vdots p$.

Mà ta lại có $0 < x + y < 2p$ nên ta được $x + y = p$. Thay vào (30 ta được $p - 1 = 2(y - x)$.

Từ đó suy ra $y - x = \dfrac{p+1}{2}$ nên ta được $x = \dfrac{p+1}{4}; y = \dfrac{3p-1}{4}$.

Thay $x = \dfrac{p+1}{4}$ vào (1) ta được $p + 1 = 2\left(\dfrac{p+1}{4}\right)^2 \Leftrightarrow p = 7$.

Thay $p = 7$ vào (2) ta được $7^2 + 1 = 2y^2 \Rightarrow y = 5$.

Vậy $p = 7$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nhận xét: Ngoài cách giải như trên ta còn có thể giải bằng cách xét các khả năng của p:

Với p chẵn không xẩy ra, với $p = 4k + 1$ khi đó ta được $\dfrac{p^2+1}{2} = \dfrac{(4k \pm 1)^2 + 1}{2} = 8k^2 \pm 4k + 1$.

Đến đây ta tìm các giá trị của k để $8k^2 \pm 4k + 1$ là các số chính phương.

Bài 82. Giả sử tồn tại số nguyên dương x thỏa mãn $\dfrac{(x+1)(2x+1)}{2012}$ là một số chính phương.

Khi đó tồn tại số nguyên dương q để $\dfrac{(x+1)(2x+1)}{2012} = q^2$ hay $(x+1)(2x+1) = 2012q^2$.

Vì 2012 chia hết cho 4 nên $(x+1)(2x+1) \vdots 4$. Mà $2x + 1$ là số lẻ nên $x + 1 \vdots 4$.

Từ đó ta được $x = 4k - 1$ với k là số nguyên dương.

Thay vào phương trình trên ta được $4k(8k-1) = 2012q^2 \Leftrightarrow k(8k-1) = 503q^2$.

Để ý là $(k, 8k-1) = 1$ và 503 là số nguyên tố. Nên tồn tại các số nguyên dương a và b sao cho $q = ab$ và $(a, b) = 1$. Từ đó ta có các hệ $\begin{cases} k = 503a^2 \\ 8k - 1 = b^2 \end{cases}$ và $\begin{cases} k = a^2 \\ 8k - 1 = 503b^2 \end{cases}$.

+ Với $\begin{cases} k = 503a^2 \\ 8k - 1 = b^2 \end{cases}$, hệ này vô nghiêm vì b^2 chia 8 chỉ có các số dư là 0, 1, 4.

+ Với $\begin{cases} k = a^2 \\ 8k - 1 = 503b^2 \end{cases}$. Khi đó ta được $x = 4k - 1 = 4a^2 - 1 = (2a-1)(2a+1)$.

Nếu $a=1$ thì $x=3$, khi đó ta được $\frac{(x+1)(2x+1)}{2012}=\frac{7}{503}$ không phải là số nhính phương.

Nếu $a\ge 2$ khi đó $x=(2a-1)(2a+1)$ là một hợp số. Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 83. Đặt $\frac{p^2-p-2}{2}=n^3$ với n là một số tự nhiên.

Vì p là số nguyên tố nên ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Với $p=2$, khi đó ta được $n=0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.
- Trường hợp 2: Với $p>2$, khi đó ta có $\frac{p^2-p-2}{2}=n^3 \Leftrightarrow p(p-1)=2(n+1)(n^2-n+1)$.

Từ đó ta được $n+1 \vdots p$ hoặc $n^2-n+1 \vdots p$ (vì p là số nguyên tố lẻ).

+ Nếu $n+1 \vdots p$ thì ta được $n+1\ge p$. Từ đó ta được $2(n^2-n+1)\ge n^2+(n-1)^2+1>n>p-1$.

Từ đó ta được $p(p-1)<2(n+1)(n^2-n+1)$. Do đó trường hợp này lại

+ Nếu $n^2-n+1 \vdots p$, khi đó ta đặt $n^2-n+1=kp$ với k là số tự nhiên khác 0.

Thay vào phương trình $p(p-1)=2(n+1)(n^2-n+1)$ ta được $p=2(n+1)k+1$.

Từ đó suy ra $n^2-n+1=2(n+1)k^2+k$ hay $n^2-(2k^2+1)n-(2k^2+k-1)=0$.

Xem phương trình trên là phương trình bậc hai ẩn n. Khi đó do $2k^2+1$ là số lẻ nên để phương trình trên có nghiệm nguyên thì $\Delta=(2k^2+1)^2+4(2k^2+k-1)$ phải là số chính phương lẻ.

Ta thấy $(2k^2+1)^2<\Delta<(2k^2+4)^2$. Do đó $\Delta=(2k^2+1)^2+4(2k^2+k-1)=(2k^2+3)^2$.

Từ đó ta tính được $k=3$ suy ra $n=20$ nên $p=127$. Thử lại ta thấy $p=127$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy các số cần tìm là $p=2$ và $p=127$.

Bài 84. Do vai trò của a, b, c như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử $a<b<c$.

Khi đó số nguyên tố lớn nhất là $a+b+c$ và số nguyên tố nhỏ nhất là $a+b-c$.

Do đó ta được $d=(a+b+c)-(a+b-c)=2c$, nên để có d lán nhất ta cần chọn được số nguyên tố c lớn nhất.

Chú ý rằng a, b, c là các số nguyên tố lẻ vì nếu $a = 2$ thì khi đó $b + c - a$ là số chẵn lớn hơn 2 nên không thể là số nguyên tố. Do đó cả bảy số nguyên tố đã cho đều là số lẻ.

Ta xét các trường hợp sau

• Trường hợp 1: Nếu $a + b = 800$, khi đó số nguyên tố $a + b - c \ge 3$ nên ta được $c \le 797$. Vì 797 là số nguyên tố và ta cần lấy c lớn nhất nên ta chọn $c = 797$.

Khi đó ta được $a + b + c = 1597$ và $a + b - c = 3$. Vì 1597 và 3 đều là các số nguyên tố nên ta cần chọn các số nguyên tố a, b sao cho $797 + a - b$ và $797 + b - a$ là các số nguyên tố.

La chọn $a = 13$ thì ta được $b = 787$ và $797 + a - b = 23; 797 + b - a = 1571$ đều là các số nguyên tố.

Lúc đó ta được $d = 2c = 2.797 = 1594$.

• Trường hợp 2: Nếu $b + c = 800$, khi đó $c < 800$. Nếu ta chọn $c = 797$ thì ta được $b = 3$.

Mà ta lại có $a < b$ nên $a = 2$ không thỏa mãn. Do đó $c < 797$ nên $d < 2.797 = 1594$.

• Trường hợp 3: Nếu $a + c = 800$, khi đó $c < 800$. Nếu ta chọn $c = 797$ thì ta được $a = 3$.

Từ đó ta được $a + b - c \ge 5$ nên suy ra $b \ge 799$, do đó $b > c$ không thỏa mãn.

Do đó $c < 797$ nên $d = 2c < 1594$.

Vậy giá trị lớn nhất của d là 1594 với các số nguyên tố được chọn trong trường hợp 1 và $a + b = 800$.

Bài 85. Khi $p = 2$ ta có: $\sqrt{k^2 - pk} = \sqrt{k^2 - 2k} = \sqrt{(k-1)^2 - 1}$ do $(k-1)^2 - 1$ không thể là số chính phương lớn hơn 0.

Khi $p \ge 3$ ta xét hai trường hợp.

+ Nếu k chia hết cho số nguyên tố p thì ta đặt $k = np$ khi đó ta có:
$k^2 - pk = n^2p^2 - p^2n = p^2n.(n-1)$ do $n.(n-1)$ không thể là số chính phương nên trường hợp này ta loại.

+ Nếu k không chia hết cho p, tức là $(k, p) = 1$ suy ra $(k, k-p) = 1$. Do đó $k^2 - pk = k(k-p)$ là số chính phương khi và chỉ khi k, $k - p$ là số chính phương. Tức là: $k = m^2$, $k - p = n^2 \Rightarrow p = m^2 - n^2 = (m-n)(m+n)$ mà p là số nguyên tố nên ta suy ra

$\begin{cases} m - n = 1 \\ m + n = p \end{cases} \Rightarrow m = \dfrac{p+1}{2} \Rightarrow k = \dfrac{(p+1)^2}{4}$. Thử lại ta thấy thỏa mãn.

Vậy $k = \dfrac{(p+1)^2}{4}$ với p là số nguyên tố lẻ.

Bài 86. Ta xét bài toán tổng quát: Tìm số nguyên dương n lớn nhất sao cho số nguyên dương A $(A > 3)$ viết được thành tổng $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ trong đó các số $a_1; a_2; a_3; ...; a_n$ là các hợp số.

Giả sử $A = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ trong đó $a_1; a_2; a_3; ...; a_n$ là các hợp số. Khi đó theo đề bài ta phải tìm số n lớn nhất có thể.

Chú ý rằng để có n lớn nhất thì các hợp số $a_1; a_2; a_3; ...; a_n$ phải nhỏ nhất. Dễ thấy 4 là hợp số chẵn nhỏ nhất và 9 là hợp số lẻ nhỏ nhất. Do đó với mọi số nguyên dương A ta luôn có $A = 4a + r$, trong đó a là số nguyên dương và $r \in \{0; 1; 2; 3\}$. Đến đây ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1: Nếu $r = 0$, khi đó $A = 4a$. Mà 4 là hợp số nhỏ nhất nên số k lớn nhất là $n = a$
- Trường hợp 2: Nếu $r = 1$, khi đó $A = 4a + 1$. Mà 4 là hợp số nhỏ nhất nên $n \le a$

Xét $n = a$. Vì A là số lẻ nên tồn tại ít nhất một số a_i với $i = 1; 2; ...; n$ là số lẻ. Không mất tính tổng quát, giả sử a_1 lẻ, suy ra $a_1 \ge 9$. Khi đó

$$a_1 + a_2 + ... + a_n \ge 9 + 4(a-1) = 4a + 1 + 4 > 4a + 1 = A$$

Xét $n = a - 1$, khi đó ta có $A = 4a + 1 = 4(a-2) + 9$. Do đó n lớn nhất là $n = a - 1$

- Trường hợp 3: Nếu $r = 2$, khi đó $A = 4a + 2$. Tương tự trường hợp 2 ta có $n \le a$.

Xét $n = a$ ta có $A = 4a + 2 = 4(a-1) + 6$ nên số n lớn nhất là $n = a$

- Trường hợp 4: Nếu $r = 3$, khi đó $A = 4a + 3$. Mà 4 là hợp số nhỏ nhất nên $n \le a$.

Xét $n = a$. Vì A là số lẻ nên tồn tại ít nhất một số a_i với $i = 1; 2; ...; n$ là số lẻ. Không mất tính tổng quát, giả sử a_1 lẻ, suy ra $a_1 \ge 9$. Khi đó

$$a_1 + a_2 + ... + a_n \ge 9 + 4(a-1) = 4a + 3 + 2 > 4a + 3 = A$$

Xét $n = a - 1$, khi đó ta có $A = 4a + 3 = 4(a-3) + 15 = 4(a-3) + 6 + 9$. Do đó n lớn nhất là $n = a - 1$

Kết luận: Với số nguyên dương $A > 3$ và A chẵn thì A phân tích được thành a hợp số.

Với số nguyên dương $A > 3$ và A lẻ thì A phân tích được thành $a - 1$ hợp số, trong đó a là thương trong phép chia số A cho 4.

Áp dụng: Với $A = 2016 = 4.504$ thì ta được n lớn nhất là 504 và $A = 2016 = 504.4$.

Với $A = 2017 = 4.504 + 1$ thì ta được n lớn nhât là 503 và $A = 2017 = 502.4 + 9$.

Bài 87. Giả sử p, q, r là các số nguyên tố thỏa mãn phương trình $(p+1)(q+2)(r+3) = 4pqr$.

Ta có $p, q, r \ge 2$. Khi đó ta xét các trường hợp sau

- Nếu $r = 2$, khi đó phương trình trên trở thành $5(p+1)(q+2) = 8pq$.

Do $(5,8) = 1$ và 5 là ước nguyên tố của pq nên ta được $p = 5$ hoặc $q = 5$.

+ Với $p = 5$, khi đó ta được $5(5+1)(q+2) = 8.5q \Rightarrow q = 6$ không phải là số nguyên tố.

+ Với $q = 5$, khi đó ta được $5(p+1)(5+2) = 8.5p \Rightarrow p = 7$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Nếu $r = 3$, khi đó phương trình trên trở thành $(p+1)(q+2) = 2pq$

Từ đó ta được $(p-1)(q-2) = 4 = 1.4 = 2.2$. Do p và q là các số nguyên tố nên $q - 2 \ne 2; q - 2 \ne 4$.

Nên từ đó ta suy ra được $\begin{cases} p-1=4 \\ q-2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=5 \\ q=3 \end{cases}$, thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Nếu $r > 3$, khi đó ta có $4pqr = (p+1)(q+2)(r+3) < 2r(p+1)(p+2)$

Hay ta được $2pq < (p+1)(q+2) \Rightarrow (p-1)(q-2) < 4$.

Do đó $p - 1 < 4; q - 2 < 4$ và p là số nguyên tố nên ta được $p = 2$ hoặc $p = 3$.

+ Với $p = 2$ thì từ phương trình đã cho ta được $3(q+2)(r+3) = 8qr$.

Do $(3,8) = 1$ nên 3 phải là ước nguyên tố của qr, mà q và r là các số nguyên tố, lại có $r > 3$ nên suy ra được $q = 3$. Từ đó ta được $r = 5$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Với $p = 3$ thì từ phương trình đã cho ta được $(q+2)(r+3) = 3qr$

Hay ta được $2qr - 3q - 2r = 6 \Leftrightarrow (q-1)(2r-3) = 9 = 1.9 = 3.3$.

Lại có $r > 3$ nên $2r - 3 > 3$, do đó từ phương trình trên ta được $\begin{cases} 2r-3=9 \\ q-1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=6 \\ q=2 \end{cases}$, không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy các bộ ba số nguyên tố $(p; q; r)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(7;5;2), (5;3;3), (2;3;5)$.

Bài 88. Đặt $p_1\left|a_1-a_2\right|=p_2\left|a_2-a_3\right|=...=p_n\left|a_n-a_1\right|=k$ với k là một số không âm.

Khi đó ta được $\left|a_1-a_2\right|=\dfrac{k}{p_1};\left|a_2-a_3\right|=\dfrac{k}{p_2};...;\left|a_n-a_1\right|=\dfrac{k}{p_n}$

Hay $a_1-a_2=\dfrac{kt_1}{p_1};a_2-a_3=\dfrac{kt_2}{p_2};...;a_n-a_1=\dfrac{kt_n}{p_n}$ với $t_1;t_2;...;t_n$ nhận giá trị là 1 hoặc -1.

Cộng theo vế tất cả các đẳng thức trên ta được $k\left(\dfrac{t_1}{p_1}+\dfrac{t_2}{p_2}+\dfrac{t_3}{p_3}+...+\dfrac{t_n}{p_n}\right)=0$

Đặt $M=\dfrac{t_1}{p_1}+\dfrac{t_2}{p_2}+\dfrac{t_3}{p_3}+...+\dfrac{t_n}{p_n}\Rightarrow M-\dfrac{t_1}{p_1}=\dfrac{t_2}{p_2}+\dfrac{t_3}{p_3}+...+\dfrac{t_n}{p_n}=\dfrac{Q}{p_2.p_3...p_n}$. Suy ra Q là một số nguyên. Từ đó ta được $p_2.p_3...p_n\left(Mp_1-t_1\right)=Qp_1$. Hay ta được

$p_1\left(p_2.p_3...p_n.M-Q\right)=t_1.p_2.p_3...p_n$

Nếu M là số nguyên thì từ đẳng thức trên suy ra vế trái chia hết cho p_1 còn vế phải không chia hết cho p_1, điều này vô lí. Do đó M không thể là số nguyên, suy ra $M\neq 0$.

Do đó từ $k\left(\dfrac{t_1}{p_1}+\dfrac{t_2}{p_2}+\dfrac{t_3}{p_3}+...+\dfrac{t_n}{p_n}\right)=0$ ta suy ra được $k=0$

Điều này dẫn đến $p_1\left|a_1-a_2\right|=p_2\left|a_2-a_3\right|=...=p_n\left|a_n-a_1\right|=0$

Hay suy ra được $\left|a_1-a_2\right|=\left|a_2-a_3\right|=...=\left|a_n-a_1\right|=0$ nên $a_1=a_2=...=a_n$.

Bài 89. Giả sử tồn tại các số nguyên tố a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^b+2011=c$. Khi đó ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $c=2$, khi đó $a^b+2011=2$, điều này vô lí do a, b lớn hơn 1.
- Nếu $c>3$, khi đó do c là số nguyên tố nên c là số lẻ.

Từ $a^b+2011=c$ ta suy ra được a^b+2011 là số lẻ nên a^b là số chẵn hay a là số chẵn.

Do a là số nguyên tố nên ta được $a=2$. Như vậy 2^b+2011 là số nguyên tố. Ta xét các khả năng sau

+ Khi $b=2$ thì ta được $2^b+2011=2015$ là một hợp số.

+ Khi $b\geq 3$, do b là số nguyên tố nên b là số lẻ. Ta đặt $b=2k+1, k\in N^*$.

Khi đó ta có $2^b+2011=2^{2k+1}+2011=2.2^{2k}+2011=2.4^k+2011=2.\left(3+1\right)^k+2011$

Dễ thấy $2\left(3+1\right)^k$ chia 3 dư 2 và 2011 chia 3 dư 2 nên ta được $2.\left(3+1\right)^k+2011$ chia hết cho 3.

Do đó $2^b + 2011$ chia hết cho 3. Suy ra $2^b + 2011$ là một hợp số.

Vậy không tồn tại các số nguyên tố a, b, c để $a^b + 2011 = c$.

Bài 90. Ta xét các trường hợp sau

- Với $p = 2$, khi đó tồn tại $n = 1$ và $x = y = 1$ để $2^1 = 1^3 + 1^3$.
- Với $p = 3$, khi đó tồn tại $n = 2$ và $x = 1; y = 2$ để $3^2 = 1^3 + 2^3$.
- Với $p > 3$, khi đó giả sử tồn tại các số nguyên dương n, x, y với n bé nhất thỏa mãn $p^n = x^3 + y^3$.

Do $p > 3$ nên suy ra $(x;y) \neq (1;1)$, do đó $x^2 - xy + y^2 = (x-y)^2 + xy > 1$ và $x + y > 1$.

Ta có $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$ nên $(x^3 + y^3) \vdots (x+y)$ và $(x^3 + y^3) \vdots (x^2 - xy + y^2)$.

Do đó suy ra $(x+y)$ và $(x^2 - xy + y^2)$ phải cùng chia hết cho p.

Suy ra $(x+y)^2 - (x^2 - xy + y^2) = 3xy$ chia hết cho p. Do p là số nguyên tố và $p^n = x^3 + y^3$ nên ta được x và y chia hết cho p.

Từ đó suy ra $n > 3$, khi đó chia cả hai vế của $p^n = x^3 + y^3$ cho p^3 ta được

$$p^{n-3} = \left(\frac{x}{p}\right)^3 + \left(\frac{y}{p}\right)^3.$$

Từ đó suy ra tồn tại số tự các số nguyên dương $n-3; \frac{x}{p}; \frac{y}{p}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.Tuy nhiên điều này lại mâu thuẫn với việc nhọn n nhỏ nhất.

Vậy với $p > 3$ thì không tồn tại các số nguyên dương n, x, y thỏa mãn $p^n = x^3 + y^3$.

Do đó các số nguyên tố thỏa mãn yêu cầu bài toán là $p = 2$ và $p = 3$.

Bài 91. Đặt $A = \frac{n^3 + 8n^2 + 1}{3n} = \frac{n^2}{3} + \frac{8n}{3} + \frac{1}{3n}$. Ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Nếu $n = 3k$ với k là một số nguyên dương, khi đó ta được

$$A = 3k^3 + 8k + \frac{1}{9k}$$

Dễ thấy $3k^2 + 8k < A < 3k^2 + 8k + 1$ nên suy ra $[A] = \left[3k^2 + 8k + \frac{1}{9k}\right] = 3k^2 + 8k = k(3k+8)$.

Để $\left[A\right]$ là một số nguyên tố thì $k=1$, khi đó $\left[A\right]=11$ là đó nguyên tố. Từ đó ta tìm được $n=3$

- Trường hợp 2: Nếu $n=3k+1$ với k là một số nguyên, khi đó ta được

$$A=3k^2+2k+\frac{1}{3}+8k+\frac{8}{3}+\frac{1}{9k+3}=3k^2+10k+3+\frac{1}{9k+3}$$

Dễ thấy $3k^2+10k+3<A<3k^2+10k+3+1$ nên suy ra

$$\left[A\right]=\left[3k^2+10k+3+\frac{1}{9k+3}\right]=3k^2+10k+3=\left(k+3\right)\left(3k+1\right).$$

Như vậy để $\left[A\right]$ là một số nguyên tố thì $k+3=1$ hoặc $3k+1=1$, từ đó ta tìm được $k=1$.

Khi đó $\left[A\right]=3$ là một số nguyên tố và $n=1$.

- Trường hợp 2: Nếu $n=3k+2$ với k là một số nguyên, khi đó ta được

$$A=3k^2+4k+\frac{4}{3}+8k+\frac{16}{3}+\frac{1}{9k+6}=3k^2+12k+6+\frac{1}{9k+3}+\frac{2}{3}$$

Ta thấy $0<\frac{1}{9k+3}+\frac{2}{3}<1$ nên suy ra

$$\left[A\right]=\left[3k^2+12k+6+\frac{1}{9k+3}+\frac{2}{3}\right]=3k^2+12k+6=3\left(k^2+4k+2\right)$$

Suy ra với mọi k thì $\left[A\right]$ luôn là số nguyên tố.

Vậy để $\left[A\right]$ là số nguyên tố thì $n=1$ hoặc $n=3$.

Bài 92. Gọi d là ước chung lớn nhất của x, y ta suy ra $\begin{cases}x=m\\y=nd\\(m,n)=1\end{cases}$.

Ta có: $A=\frac{x^2+py^2}{xy}=\frac{m^2d^2+pn^2d^2}{mnd^2}=\frac{m^2+pn^2}{mn}\Rightarrow m^2+pn^2\,\vdots\,mn\Rightarrow\begin{cases}m^2+pn^2\,\vdots\,n\\m^2+pn^2\,\vdots\,m\end{cases}\Rightarrow m^2\,\vdots\,n$.

Mặt khác ta có $(m,n)=1$ suy ra $n=1$ do đó $m^2+p\,\vdots\,m\Rightarrow p\,\vdots\,m$ mà p là số nguyên tố nên $m=1$ hoặc $m=p$.

+ Nếu $m=1$ thì $x=y=d\Rightarrow A=p+1$.

+ Nếu $m=p\Rightarrow x=dp, y=d$ khi đó $A=\frac{(dp)^2+pd^2}{d^2p}=p+1$.

Áp dụng vào bài toán ta suy ra đpcm.

Bài 93. Giả sử p và q là các số nguyên tố thỏa mãn $p^3-q^5=(p+q)^2$. Khi đó ta được $p^3-q^5>0$.

Từ đó ta được $p^3>q^5\ge 2^5$ nên ta được $p>3$.

Suy ra p không chia hết cho 3. Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $q=3$, khi đó $p^3-3^5=(p+3)^2 \Leftrightarrow p^3-p^2-6p-252=0 \Leftrightarrow (p-7)(p^2+6p+36)=0$.

Do $p^2+6p+36>0$ nên ta được $p-7=0 \Rightarrow p=7$.

- Nếu $q\ne 3$ khi đó $p=3m\pm 1; q=3n\pm 1$ với m, n là các số nguyên dương.

+ Với $p=3m+1$ và $q=3n+1$ thì $p^5-q^3 \vdots 3$ và $(p+q)^2$ chia 3 dư 1, nên không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Với $p=3m+1$ và $q=3n-1$ thì p^5-q^3 chia 3 dư 2 và $(p+q)^2$ chia hết cho 3, nên không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Với $p=3m-1$ và $q=3n+1$ thì p^5-q^3 chia 3 dư 1 và $(p+q)^2$ chia hết cho 3, nên không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Với $p=3m-1$ và $q=3n-1$ thì $p^5-q^3 \vdots 3$ và $(p+q)^2$ chia 3 dư 1, nên không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy cặp số nguyên tố $(p;q)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(3;7)$.

Bài 94. Ta có $2a^2b=a(a+b)^2-a(a^2+b^2)$.

Do p^4 là ước của a^2+b^2 và $a(a+b)^2$ nên p^4 cũng là ước của $2a^2b$.

Do p là số nguyên tố lẻ nên suy ra p^4 là ước của a^2b.

Nếu a không chia hết cho p^2 thì số mũ của p trong a^2 không vượt quá 2, khi đó a^2 không chia hết cho p^4. Do đó b phải chứa p^2, điều này có nghĩa là b chia hết cho p^2, từ đó ta được b^2 chia hết cho p^4. Từ đó suy ra a^2+b^2 không chia hết cho p^4, điều này mâu thuẫn voi giả thiết.

Do vậy a phải chia hết cho p^2 nên a^2 không chia hết cho p^4. Từ a^2+b^2 không chia hết cho p^4 ta suy ra được b^2 chia hết p^4, do đó b chia hết cho p^2

Dẫn đến $a+b$ chia hết cho p^2 nên suy ra $a(a+b)$ chia hết cho p^4.

Vậy p^4 cũng là ước của $a(a+b)$.

Bài 95. Đặt $A=a^2-b^2-5a+3b+4$, dễ thấy A là số chẵn. Do đó A là số nguyên tố khi và chỉ khi A = 2, hay $A=a^2-b^2-5a+3b+4=2$, suy ra $(a+b-4)(a-b-1)=2$.

Ta xét các trường hợp sau :

+ Trường hợp $\begin{cases} a+b-4=1 \\ a-b-1=2 \end{cases} \Leftrightarrow a=4; b=1$

+ Trường hợp $\begin{cases} a+b-4=2 \\ a-b-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=4;\ b=2$

+ Trường hợp $\begin{cases} a+b-4=-1 \\ a-b-1=-2 \end{cases} \Leftrightarrow a=1;\ b=2$.

+ Trường hợp $\begin{cases} a+b-4=-2 \\ a-b-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow a=1;\ b=1$

Bài 96. Ta có $f(5)-f(4)=2012 \Leftrightarrow 61a+9b+c=2012$

$$\begin{aligned} f(7)-f(2) &= (343a+49b+7c+d)-(8a+4b+2c+d)=335a+45b+5c \\ &= 305a+45b+5c+30a=2012+30a=2(1006+15a) \end{aligned}$$

Vì a là số nguyên nên ta được $f(7)-f(2)$ chia hết cho 2 và $1006+15a$ khác 1

Do đó $f(7)-f(2)$ là hợp số

Bài 97. Theo bài ra f(x) có dạng $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ với a nguyên dương.

Ta có $2010=f(5)-f(3)=(5^3-3^3)a+(5^2-3^2)b+(5-3)c=98a+16b+2c$

$$\Rightarrow 16b+2c=(2010-98a)$$

Lại có:

$$\begin{aligned} f(7)-f(1) &= (7^3-1^3)a+(7^2-1^2)b+(7-1)c=342a+48b+6c=342a+3(16b+2c) \\ &= 342a+3(2010-98a)=48a+6030=3(16a+2010) \end{aligned}$$

Vì a nguyên dương nên $16a+2010>1$. Vậy $f(7)-f(1)$ là hợp số

Bài 98. Biến đổi $2^m.p^2+1=q^5$ thành $2^m.p^2=(q-1)(q^4+q^3+q^2+q+1)$

Do $q^4+q^3+q^2+q+1$ lẻ nên $q-1=2^m.p^k$ với $k=0;1;2$

+ Nếu $k=0$ khi đó ta có $q-1=2^m$ Từ đó ta được

$$p^2=\frac{\left(2^m+1\right)^5-1}{2^m}=2^{4m}+5.2^{3m}+10.2^{2m}+10.2^m+5$$

Nếu $m>1$ thì $p^2\equiv 5\left(\bmod 8\right)$ vô lí nên suy ra $m=1$, từ đó ta được $p=11;q=3$.

+ Nếu $k=1$ khi đó ta có $q-1=2^m.p$ do đó ta được $p=\left(q-1\right)\left(q^4+q^3+q^2+q+1\right)$

Do đó để p là số nguyên tố thì $q-1=1\Rightarrow q=2$, từ đó suy ra $q=31$.

Thay vào phương trình ban đầu ta được $2^m.31^2+1=2^5$, phương trình không có m nguyên dương thỏa mãn.

+ Nếu $k=2$ khi đó ta có $q-1=2^m.p^2$ do đó ta được $1=q^4+q^3+q^2+q+1$ điều này vô lí do q là số nguyên tố

Vậy bộ $\left(m;p;q\right)=\left(1;11;3\right)$ là bộ duy nhất cần tìm.

Bài 99. Từ giả thiết suy ra $p_6>2\Rightarrow p_6^2\equiv 1\left(\bmod 8\right)$.

Mà $p_i^2\equiv 1;4\left(\bmod 8\right)$ nên trong 5 số $p_i\left(i=\overline{1;5}\right)$ có bốn số bằng 2, một số lớn hơn 2.

Thật vậy, giả sử k là số số chẵn trong dãy p_1,p_2,p_3,p_4,p_5. Suy ra

$$p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2+p_5^2=4k+A \text{ (A là tổng bình phương của 5-k số lẻ)}$$

$$\left(p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2+p_5^2\right)\equiv 4k+\left(5-k\right).1\left(\bmod 8\right)\equiv 3k+5\left(\bmod 8\right)$$

Mà $\left(p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2+p_5^2\right)\equiv 1\left(\bmod 8\right)$ nên $3k+4\vdots 8\Rightarrow k=4$.

Nhận xét được chứng minh xong.

Bây giờ ta giả sử $p_1=p_2=p_3=p_4=2;\ p_5>2$

Từ đó suy ra $p_6^2-p_5^2=16\Leftrightarrow\left(p_6-p_5\right)\left(p_6+p_5\right)=16$

Từ đó giải được $p_6=5;p_5=3$.

Vậy bộ các số nguyên tố các số cần tìm là $\left(p_1;p_2;p_3;p_4;p_5;p_6\right)$ trong đó $\left(p_1;p_2;p_3;p_4;p_5\right)$ được xác định là $\left(2;2;2;2;3\right)$ và các hoán vị, còn có định $p_6=5$.

Bài 100. Giả sử có số nguyên a để $\left(a^2+1\right)\vdots p$ hay ta có $a^2\equiv -1\left(\bmod p\right)$

Suy ra $a^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod p$ hay $a^{p-1} - 1 \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} - 1 \pmod p$

Nhưng theo định lí Fecmat thì $a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod p$

Nên ta được $(-1)^{\frac{p-1}{2}} - 1 \equiv 0 \pmod p$ mà p là số nguyên tố dạng $4k+3$ nên

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} - 1 \equiv 0 \pmod p \Leftrightarrow -2 \equiv 0 \pmod p, \text{ điều này vô lí.}$$

Nên không tồn tại số nguyên a thỏa mãn yêu cầu bài toán

Bài 101. Do 6(x + 2p) chia hết cho 3 nên từ phương trình đã cho ta suy ra $x^2 + p^2y^2$ chia hết cho 3. Mặt khác, ta có để ý rằng, với mọi số nguyên a thì a^2 chia cho 3 dư 0 hoặc 1. Do đó, để $x^2 + p^2y^2$ chia hết cho 3 thì ta phải có x^2 và p^2y^2 cùng chia hếtt cho 3. Suy ra x và py cùng chia hết cho 3.

Đặt x = 3a với a nguyên dương. Phương trình đã cho có thể được viết lại thành

$9a^2 + p^2y^2 = 18a + 12p \ (1)$

Do $9a^2, p^2y^2$ và 18a chia hết cho 9 nên từ phương trình trên, ta suy ra 12p chia hết cho 9, tức là p chia hết cho 3. Mà p là số nguyên tố nên p = 3. Khi đó, phương trình (1) có thể viết lại thành $a^2 + y^2 = 2a + 4$.

Hay $(a-1)^2 + y^2 = 5 \qquad (2)$

Vì $(a-1)^2 \geq 0$ nên từ phương trình trên, ta suy ra $y^2 \leq 5$. Do y là số nguyên dương nên ta có $y \in \{1, 2\}$. Bằng phép thử trực tiếp, ta tìm được các cặp số nguyên dương (a, y) thỏa mãn phương trình (2) là (3,1) và (2,2). Từ đó suy ra, có hai bộ (x, y, p) thỏa mãn yêu cầu đề bài là (9, 1, 3) và (6, 2, 3).

Bài 102.

Đặt $p = a + b + 2\sqrt{ab + c^2}$, giả sử $a \geq b$.

Cách 1: Xét $p \notin \mathbb{Z}$ thì p không là số nguyên tố.

Xét $p \in \mathbb{Z}$: Giả sử thì p là số nguyên tố $\Rightarrow ab + c^2$ là số chính phương

$\Rightarrow (a+b)^2 - 4(ab + c^2) = p.\left(a + b + 2\sqrt{ab + c^2}\right) \vdots\, p \Rightarrow (a - b + 2c)(a - b - 2c) \vdots\, p$.

TH1: $(a - b + 2c) \vdots\, p \Rightarrow a - b + 2c \geq p = a + b + 2\sqrt{ab + c^2} \Rightarrow c \geq b + \sqrt{ab + c^2} > c$ (loại)

TH2: $(a - b - 2c) \vdots\, p \Rightarrow a - b - 2c = 0$ hoặc $p \leq |a - b - 2c|$

Nếu $a - b - 2c = 0 \Rightarrow c = \dfrac{a-b}{2} \Rightarrow p = 2(a+b) \Rightarrow a + b = 1$ (loại).

Nếu $p \leq |a - b - 2c| \leq a + b + 2c \Rightarrow \sqrt{ab + c^2} \leq c$ (vô lí) (loại).

Vậy p không thể là số nguyên tố.

Cách 2: TH1: $\sqrt{ab + c^2} \notin \mathbb{Z}$ suy ra đpcm.

TH2: $\sqrt{ab + c^2} = d \notin \mathbb{Z}^+ \Rightarrow ab = (d - c)(d + c)$ voi $d > c$.

$\Rightarrow \exists r, s$ sao cho $(r, s) = 1$ và $\dfrac{a}{d-c} = \dfrac{d+c}{b} = \dfrac{r}{s}$.

+) $as \vdots r, (r,s)=1 \Rightarrow \exists p \in \mathbb{Z}^+, a = pr, d-c = ps$.

+) $br \vdots s, (r,s)=1 \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Z}^+, b = qs, d+c = qr$.

Từ đó $K = a+b+2d = pr+qs+(ps+qr) = (p+q)(r+s)$ là hợp số.

Bài 103. a) Mỗi số tự nhiên đều có thể viết dưới dạng: $6m, 6m\pm1, 6m\pm2, 6m+3$.

Mọi số nguyên tố khác 2 và khác 3 đều không chia hết cho 2 và cho 3 suy ra chúng chỉ có thể có một trong 2 dạng $6m+1$ hoặc $6m-1$.

b) Gọi p là số nguyên tố lớn nhất có dạng $6m-1$.

Đặt $A = 2.3.5...p$ là tích các số nguyên tố từ 2, 3, 5,… đến p.

Gọi $D = A+1$

Nếu D là số nguyên tố thì bài toán được chứng minh vì $D > p$, $D = 2.3.5...p-1 = 6m-1$.

Nếu D là hợp số thì D có ít nhất một ước số nguyên tố chinh là p_1. Ta có nếu $p_1 \le p$ thì p_1 là ước số của D và p_1 là ước số của A.

$\Rightarrow p_1$ là ước số của $A-D=1$ (vô lý vì p_1 là số nguyên tố).

Nếu $p_1 > p$ ta có p_1 cũng có dạng $6m-1$.

Vì nếu không một ước số nguyên tố nào của D có dạng $6m-1$ mà chỉ có dạng $6m+1$ thì tích của chúng có dạng $6m+1$, vô lý vì trái với cách đặt $D = 6m-1$. Tóm lại ta luôn luôn tìm được số nguyên tố dạng $6m-1$ lớn hơn p.

Vậy có vô số số nguyên tố có dạng $6m-1$.

Bài 104. Vì x, y là các số nguyên tố nên $x \ge 2, y \ge 2$ suy ra $z \ge 5$.

z là số nguyên tố lẻ nên x^y là số chẵn suy ra x = 2, khi đó $z = 2^y + 1$.

Nếu y lẻ thì $2^y + 1 \vdots 3$, suy ra $z \vdots 3$, vô lí. Vậy y chẵn, suy ra y=2, $z = 2^2+1 = 5$.

Vậy các số nguyên tố cần tìm là $x = y = 2; z = 5$.

Bài 105. Đặt $n = 3^k.m$ với (m, 3) = 1. Giả sử m > 1, xét hai trường hợp:

i) $m = 3l+1 (l \in N^*)$. Ta có: $1+2^n+4^n = 1+2^{3^k(3l+1)}+4^{3^k(3l+1)} = 1+a^{(3l+1)}+a^{(6l+2)}$, (với $a = 2^{3^k}$),

suy ra $1+2^n+4^n = a(a^{3l}-1)+a^2(a^{6l}-1)+a^2+a+1 \vdots a^2+a+1 \Rightarrow 1+2^n+4^n$ là hợp số.

ii) $m = 3l+2, (l \in N^*)$. Ta có:

$1+2^n+4^n = 1+2^{3^k(3l+2)}+4^{3^k(3l+2)} = 1+a^{3l+2}+a^{6l+4} = a(a^{6l+3}-1)+a^2(a^{3l}-1)+a^2+a+1 \vdots a^2+a+1$

(với $a = 2^{3^k}$).

Suy ra $1+2^n+4^n$ là hợp số.

Vậy m = 1 tức là n = 3^k.

Bài 106. Giả sử (a, b) = t, khi đó: $a = ta_1, c = tc_1$ với $(a_1, c_1) = 1$.

Từ ab = cd suy ra $a_1b = c_1d \Rightarrow b \vdots c_1$.

Đặt: $b = kc_1 \Rightarrow c_1d = a_1.kc_1 \Rightarrow d = ka_1$.

Khi đó: $A = a^n + b^n + c^n + d^n = t^na_1^n + k^nc_1^n + t^nc_1^n + k^na_1^n = (k^n + t^n)(a_1^n + c_1^n)$.

Vì $k, t, a_1, c_1 \in N^*$ nên A là hợp số.

Bài 107. Ta có: $p = \dfrac{n(n+1)}{2} - 1 = \dfrac{n^2 + n - 2}{2} = \dfrac{(n-1)(n+2)}{2}$.

Với n = 2 ta có p = 2.

Với n = 3 ta có p = 5.

Với n > 3 thì $\dfrac{n-1}{2} > 1$ và n+2 >1 nên p là hợp số.

Vậy với n = 2, n = 3 thì p là số nguyên tố có dạng $\dfrac{n(n+1)}{2} - 1$.

Bài 108. Vì a,b có vai trò như nhau nên có thể giả sử a > b.

Giả sử $\dfrac{ab}{|a-b|} = p$ với p là số nguyên tố. (*)

Suy ra $ab \vdots p \Rightarrow a \vdots p$ hoặc $b \vdots p \Rightarrow p \in \{2, 3, 5, 7\}$.

Từ (*) ta có ab = ap - bp $(a+p)(p-b) = p^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a + p = p^2 \\ p - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = p^2 - p \\ b = p - 1 \end{cases}$

Với p = 2 ta có $\overline{ab} = 21$ hoặc $\overline{ab} = 12$.

Với p = 3 ta có $\overline{ab} = 62$ hoặc $\overline{ab} = 26$.

Với p = 5 và p = 7 ta có a có 2 chữ số (loại).

Vậy các số $\overline{ab}$ cần tìm là 12, 21, 26, 62.

Bài 109. a) Giả sử phản chứng rằng k > 0 và $k \neq 2^n$ với mọi n.

Khi đó k = 2^n . t, với t lẻ > 1. Vô lí với $2^k + 1$ là số nguyên tố.

Vậy k = 0 hoặc k = 2^n.

b) Giả sử k = m . t với 1 < t <k, khi đó 2^k - 1 = $\left(2^t\right)^m - 1 \vdots 2^t - 1 \Rightarrow 2^k - 1$ là hợp số vì 2^t-1 >1.

Vậy k là số nguyên tố.

Bài 110. 1) Xét ba số dư của x, y, z khi chia cho 3.

* Nếu cả ba số là khác nhau: $(0,1,2)$ thì $x + y + z \vdots 3$ nhưng khi đó $(x-y)(y-z)(z-x)$ không chia hết cho 3 (vô lý).

* Nếu có hai số dư bằng nhau thì $x + y + z$ không chia hết cho 3 trong khi đó một trong ba hiệu $x - y; y - z$ hoặc $z - x$ chia hết cho 3 (vô lý) vì $(x-y)(y-z)(z-x) = x + y + z$.

Vậy chỉ còn trường hợp cả 3 số x, y, z đều có cùng số dư khi chia cho 3.

$\Rightarrow (x-y)(y-z)(z-x) \vdots 3.3.3 = 27$

Mà: $(x-y)(y-z)(z-x) = x+y+z \Rightarrow x+y+z \vdots 27$

2) Ta có: $a^{4k}-1=\left(a^4\right)^k-1^k=\left(a^4-1\right).P$

Ta có: $a^2-1=(a-1)(a+1)$ là tích của hai số chẵn liên tiếp $a-1>4$ vì a là số nguyên tố $a>5$.

$\Rightarrow$ Ắt có một số chia hết cho 2 và một số chia hết cho 4.

$\Rightarrow (a-1)(a+1) \vdots 8$

Xét ba số liên tiếp: $a-1, a, a+1$; ắt có một số chia hết cho 3 vì a không chia hết cho 3.

$\Rightarrow (a-1)(a+1) \vdots 3 \Rightarrow (a-1)(a+1) \vdots 24$

Ta có: $a^4-1=(a-1)(a+1)\left(a^2+1\right)$ và a là số lẻ.

$\Rightarrow a^2+1$ là số chẵn $\Rightarrow \left(a^2+1\right) \vdots 2$

$\Rightarrow (a-1)(a+1)\left(a^2+1\right) \vdots 48$

Lại vì a không chia hết cho 5.

$\Rightarrow a$ có dạng $5k+1, 5k-1, 5k+2, 5k-2$ $\Rightarrow a^4$ có dạng $5m+1 \Rightarrow a^4-1 \vdots 5$

Vì $(5,4,8)=1 \Rightarrow (a-1)(a+1)\left(a^2+1\right) \vdots 240$

Bài 111. +) Xét trường hợp p là hợp số:

Nếu p là hợp số thì p là tích của các thừa số nguyên tố nhỏ hơn p và số mũ các luỹ thừa này không thể lớn hơn số mũ của chính các luỹ thừa ấy chứa trong (p – 1)!.

Vậy: (p – 1) !: p (điều phải chứng minh).

+) Xét trường hợp p là số nguyên tố:

Vì p ∈ P => p nguyên tố cùng nhau với mọi thừa số của (p –1)!

(vì p > p - 1 => (p – 1)! : p (điều phải chứng minh)

Bài 112. Gọi p là ước số nguyên tố của (1994! – 1)

Giả sử p ≤1994 => 1994. 1993 ..... 3. 2. 1 chia hết cho p

<=> 1994! Choa hết cho p

mà (1994! – 1) : p => 1 : p (vô lý)

Vậy: p không thể nhỏ hơn hoặc bằng 1994 hay p > 1994 (điều phải chứng minh).

Bài 113. Vì n > 2 nên k = n! – 1 > 1, do đó k có ít nhất một ước số nguyên tố p.

Ta chứng minh p > n .Thật vậy: nếu p ≤ n thì n! chia hết cho p

Mà k chia hết cho p => (n! – 1) chia hết cho p.Do đó: 1 chia hết cho p (vô lý)

Vậy: p > n => n < p < n! – 1 < n! (Điều phải chứng minh)

Bài 114. Ta có: $m=\frac{3^p-1}{2}.\frac{3^p+1}{4}=a.b$, với $a=\frac{3^p-1}{2},b=\frac{3^p+1}{4}$.

a, b đều là các số nguyên lớn hơn 1 nên m là hợp số.

Mà $m=9^{p-1}+9^{p-2}+...+9+1$ và p lẻ nên m lẻ và $m\equiv 1$ (mod 3).

Theo định lí Fermat, ta có: $9^p-9\,⋮\,p$.

$(p,8)=1$ nên $9^p-9\,⋮\,8p \Rightarrow m-1\,⋮\,\frac{9^p-9}{8}\,⋮\,p$.

Vì $m-1\,⋮\,2$ nên $m-1\,⋮\,2p$, khi đó: $3^{m-1}-1\,⋮\,3^{2p}-1\,⋮\,\frac{9^p-1}{8}=m$. (đpcm).

Bài 115. Giả sử tồn tại số nguyên tố p sao cho:

$2003+23k=p^n$ (1).

Trong đó k,n là các số nguyên dương nào đó.

Từ (1) dễ thấy p không chia hết cho số nguyên tố 23 nên (p,23)=1.

Theo định lí nhỏ Fermat thì $p^{22}-1$ chia hết cho 23, suy ra p^{22t} có dạng $p^{22t}=1+23s$ với mọi số nguyên dương t.

Từ đó $p^{22t+n}=(1+23s)p^n=p^n+23s.p^n=2003+23k+23s.p^n$ hay $p^{22t+n}=2003+23(k+sp^n)$ với mọi $t=1,2,3,....$

Bài toán được giải đầy đủ khi ta chỉ ra sự tồn tại số nguyên tố p thõa mãn (1). Chẳng hạn:

Với p = 2 có $2003+23.91=2^{12}$

Với p = 3 có $2003+23.8=3^7$

Với p = 4 có $2003+23.6=2141$

Với p = 2003 thì tồn tại k theo định lí Fermat thỏa mãn $2003+23k=2003^{23}$.

Bài 116. Gọi bảy số nguyên tố là $p_{1,}p_{2,}p_{13,}....., p_7$.

Ta có: $p_1p_2p_3p_4p_5p_6p_7=p_1^6+p_2^6+p_3^6+p_4^6+p_5^6+p_6^6+p_7^6$ (*)

Ta cần dùng định lí Fecma nhỏ:

Nếu số nguyên a không chia hết cho 7 thì $a^6\equiv 1 (\text{mod } 7)$.(Có thể chứng minh trực tiếp điều này thông qua việc biến đổi $a^3=(7k+r)^3=7t\pm 1$ với mọi r thỏa mãn $0\le r\le 6$, còn t là số nguyên)

Giả sử trong bảy số nguyên tố trên có k số khác 7 với $0\le k\le 7$.

Nếu k = 0, nghĩa là cả bảy số trên đều bằng 7 thì ta có

$7. 7. 7. 7. 7. 7. 7 = 7^6+ 7^6+ 7^6+ 7^6+ 7^6+ 7^6+ 7^6$ thỏa mãn (*).

Nếu k = 7, nghĩa là cả bảy số trên đều là số nguyên tố khác 7 thì vế trái của (*) không chia hết cho 7, còn vế phải của (*) chia hết cho 7 theo định lí Fec ma, điều này không xảy ra.

Vậy chỉ xảy ra bảy số nguyên tố trong đề bài đều là 7.

Bài 117. Giả sử $a \geq b \geq c$.Ta có $a^4 + b^4 + c^4 = \left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2 - 2\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right)$.

Vì p là số nguyên tố và $p \geq 3$, suy ra $a^4 + b^4 + c^4$ chia hết cho p khi và chỉ $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$ khi chia hết cho p hay

$a^2b^2 + c^2\left(a^2 + b^2\right) \vdots p \Leftrightarrow a^2b^2 - c^4 \vdots p \Leftrightarrow \left(ab - c^2\right)\left(ab + c^2\right) \vdots p.$

Do $p = a^2 + b^2 + c^2 > ab + c^2 > ab - c^2 \geq 0$ và p là số nguyên tố nên $ab - c^2 = 0 \Rightarrow a = b = c$ $\Rightarrow p = 3a^2 \Rightarrow a = b = c = 1$ và p = 3.

Bài 118. Giả sử $\dfrac{x^2 + y^2}{x - y} = k$ nguyên dương và k là ước số của 1995 = 5.3.7.19 = 5n với n= 3.7.19. Các số nguyên tố 3, 7, 19 đều có dạng 2(2m + 1) + 1 = 4m +3

Gọi ước chung lớn nhất của x, y là $d = (x, y)$ thì $x = du, y = dv$ với $(u, v) = 1$.

Theo giả thiết $x^2 + y^2 = k(x - y) \Leftrightarrow d(u^2 + v^2) = k(u - v)$ (1).

Xét hai trường hợp:

1) k là ước số của n $\Rightarrow k$ có ước số nguyên tố dạng 4m + 3.

Áp dụng mệnh đề 2 vào (1) thì $u^2 + v^2$ không chứa các ước số nguyên tố của k nên k là ước số của d $\Rightarrow d = k.t$. Từ (1) có $t(u^2 + v^2) = u - v$, do đó $u^2 < u^2 + v^2 \leq u - v < u \Rightarrow$ (1) vô nghiệm.

2) k = 5m với m là ước số của m. Lúc đó (1) trở thành $d(u^2 + v^2) = 5m(u - v)$. Lập luận như trên thì m là ước số của d. Suy ra d= m.t. Từ đó ta có

$t(u^2 + v^2) = 5(u - v)$ (2)

Từ (2) có $u^2 + v^2 \leq 5(u - v)$

$A = u^2 + v^2 - 5(u - v) \leq 0$ (3)

Mặt khác

$4A = 4u^2 - 20u + 25 + 4v^2 + 20v + 25 - 50 = (2u - 5)^2 + (2v + 5)^2 - 50 \geq 1^2 + 7^2 - 50 \geq 0 \Rightarrow A \geq 0$

Kết hợp với (3) phải có A= 0. Điều này xảy ra chỉ khi $2u - 5 = \pm 1$ và v = 1,

nghĩa là $\begin{cases} u = 3 \\ v = 1 \end{cases}$ và $\begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases}$

Từ A = 0 và (2) suy ra $t = 1 \Rightarrow d = m$. Các số x, y phải tìm là $\begin{cases} x = 3m \\ y = m \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 2m \\ y = m \end{cases}$ trong đó m là ước của n = 3.7.19, nghĩa là m lấy 8 giá trị sau: 1, 3, 7, 19, 21, 57, 133, 399.

Bài 119. Giả sử số máy tivi đã giao là $\overline{abc} = 100a + 10b + c$. Ta có:

$100(a + n) + 10(b - n) + (c - n) = n(100a + 10b + c)$ hay

$100a + 100n + 10b - 10n + c - n = 100an + 10bn + cn$.

Từ đó ta được: $100a + 10b + c = \dfrac{89n}{n - 1}$.

Nhưng 89 là số nguyên tố nên hoặc n - 1 phải bằng 1 hoặc n phải chia hết cho n-1. Trong cả hai trường hợp ta đều tìm được n =2 và $\overline{abc} = 178$.

Vậy số máy tivi đã giao là 178.

Bài 120. Gọi 3 số nguyên tố phải tìm là; a, b, c ta có: a.b.c = 5(a + b + c) => abc $\vdots$ 5

Vì a, b, c có vai trò bình đẳng

Giả sử: a $\vdots$ 5, vì a $\in$ P => a = 5

Khi đó: 5bc = 5(5 + b + c)

<=> 5 + b + c = bc

<=> bc – b - c + 1 = 6

<=> b(c - 1) – (c - 1) = 6

<=> (c - 1)(b - 1) = 6

Do vậy: b-1 = 1=> b = 2

và c-1 = 6 và c = 7

b-1 = 2=> b = 3 (loại vì c = 4 $\notin$ P)

và c-1 = 3 và c = 4

Vai trò a, b, c, bình đẳng

Vậy bộ số (a ;b ;c) cần tìm là (2 ;5 ;7)

Bài 121. Đặt $a = 2.3.4...n(n+1) = (n+1)!$

Xét n số $a+2, a+3, ..., a+n+1$. Ta thấy $a+i \vdots i$ với mọi $i = 2,3,...,n+1$. Suy ra n số này đều là hợp số.

Bài 122. Giả sử n là hợp số, ta có $n = ab$ với $2 \le a \le b < n$. Khi đó

$2^n - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^a - 1)(2^{a(b-1)} + 2^{a(b-2)} + ... + 1)$ là hợp số. Điều này trái với giả thiết. Vậy n là số nguyên tố.

Bài 123. Ta xét các trường hợp sau

+) p = 2, khi đó $2^p + p^2 = 8$ là hợp số.

+) p = 3, khi đó $2^p + p^2 = 17$ là số nguyên tố.

+) p > 3, khi đó $2^p + p^2 = (2^p + 1) + (p^2 - 1)$.

Vì p lẻ và không chia hết cho 3 nên $2^p + 1 \vdots 3$ và $p^2 - 1 \vdots 3$.

Suy ra $2^p + p^2 \vdots 3$ nên $2^p + p^2$ là hợp số.

Vậy $p = 3$ là số cần tìm.

Bài 124. Gọi x_0 là nghiệm nguyên dương của phương trình $x^2 - px + q = 0$, ta có $q \vdots x_0$ nên $x_0 = 1$ hoặc $x_0 = q$.

+) $x_0 = 1$ ta có $1 - p + q = 0 \Leftrightarrow p = q + 1$, suy ra $q = 2, p = 3$.

+) $x_0 = q$ ta có $q^2 - pq + q = 0 \Leftrightarrow p = q + 1$, suy ra $q = 2, p = 3$.

Vậy $(p, q) = (3, 2)$.

Bài 125. Giả sử $n \geq 2$.

Trong ba số p, q, r có một số chẵn.

* $r = 2$, khi đó $p^n + q^n = 4$ điều này không xảy ra

* $p > q = 2$, ta có: $p^n + 2^n = r^2$.

+) n lẻ. Suy ra: $(p+2)\left(p^{n-1} - 2p^{n-2} + ... + 2^{n-1}\right) = r^2$.

Vì $p + 2 > 1$ và $p^{n-1} - 2p^{n-2} + ... + 2^{n-1} > 2^{n-1} > 1$

Nên ta có $r = p + 2$, suy ra $p^n + 2^n = (p+2)^2 = p^2 + 4p + 4$. Điều này không thể xảy ra với $n \geq 3$.

+) $n = 2k$, ta có: $p^{2k} + 2^{2k} = r^2$. Theo phương trình Pitago ta có:

$p^k = a^2 - b^2$, $2^k = 2ab$, $r = a^2 + b^2$ với $a, b \in Z, a > b, (a, b) = 1$.

Ta có: $b = 1, a = 2^{k-1}$, suy ra $p^k = 4^{k-1} - 1 < 4^k \Rightarrow p = 3$.

Hay $3^k = 4^{k-1} - 1$ phương trình này vô nghiệm.

Do đó ta có $n = 1$.

Bài 126. *) Nếu x hoặc y chia hết cho p thì hiển nhiên số còn lại cũng chia hết cho p.

*) Xét x, y cùng không chia hết cho p . Vì p là số nguyên tố nên $(x; p) = (y; p) = 1$.

Do đó, theo định lí Fecma ta có:

$x^{p-1} \equiv y^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ hay $x^{4k+2} \equiv y^{4k+2} \pmod{p}$

$\Leftrightarrow \left(x^2\right)^{2k+1} \equiv \left(y^2\right)^{2k+1} \pmod{p}$.

Suy ra $x \equiv y \pmod{p}$, do đó $x^2 + y^2 \equiv 2x^2 \pmod{p} \Rightarrow 2 \vdots p$ vô lí.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 127. Ta có $3m^2 + 6n - 61 = 3k + 2$

Nếu $k \geq 1$ ta có $x = 3^{3k+2} + 4 = 9.27^k + 4 \vdots 13$.

Suy ra $k = 0$ hay $3m^2 + 6n - 61 = 2 \Leftrightarrow m^2 + 2n - 21 = 0$.

Vì m^2 lẻ và $m^2 < 21$ nên $m^2 = 1, m^2 = 9$.

* $m = 1 \Rightarrow n = 10$

* $m = 3 \Rightarrow n = 6$.

Bài 128. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a \geq b \geq c$.
Ta có $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$.

Do đó $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ là số nguyên tố khi xảy ra một trong các trường hợp sau:
$a + b + c = 1$ và $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ là số nguyên tố.

Từ $a + b + c = 1 \Rightarrow a = 1, b = c = 0$, khi đó $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 1$ không là số nguyên tố.

$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 1$ và $a + b + c$ là số nguyên tố.

Ta có $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 1 \Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 2$.

Suy ra $\begin{cases} a = b \\ b - c = 1 \\ c - a = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ c = b - 1 \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 3b - 1$

Hoặc $\begin{cases} a - b = 1 \\ b - c = 0 \\ a - c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow b = c = a - 1$.

Vậy các số tự nhiên cần tìm là $(k; k; k-1)$ và các hoán vị với $3k - 1$ là số nguyên tố.

Hoặc $(k; k-1; k-1)$ và các hoán vị với $3k - 2$ là số nguyên tố.

Bài 129. Do p là số nguyên tố lẻ nên $p = 3k \pm 1$ hoặc $p = 3k$

+Nếu $p = 3k \pm 1$ thì $8p^2 + 1 = 8(3k \pm 1)^2 + 1 = 3(24k^2 \pm 16k + 3) \vdots 3$ nên vô lý.

+Nếu $p = 3k$. Do p là số nguyên tố lẻ nên $p = 3$, rõ ràng $8.9 + 1 = 73$ là số nguyên tố mà $8p^2 + 2p + 1 = 72 + 6 + 1 = 79$ là số nguyên tố.

Bài 130. Từ phương trình ta suy ra $a^2 + b^2 + c^2 = 1 \pmod 3$. Suy ra , trong ba số a, b, c có hai số chia hết cho 3.

$a = b = 3,$ ta có $18 + 16c^2 = 9k^2 + 1 \Leftrightarrow (3k - 4c)(3k + 4c) = 17$

Suy ra $\begin{cases} 3k + 4c = 17 \\ 3k - 4c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ c = 2 \end{cases}$

$c = 3$, không mất tính tổng quát, ta giả sử $a = 3$. Khi đó ta có $(3k - b)(3k + b) = 152 = 19.8$

+) $\begin{cases}3k+b=19\\3k-b=1\end{cases}$ vô nghiệm

+) $\begin{cases}3k+b=38\\3k-b=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=7\\b=17\end{cases}$

+) $\begin{cases}3k+b=76\\3k-b=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=13\\b=37\end{cases}$

+) $\begin{cases}3k+b=152\\3k-b=2\end{cases}$ vô nghiệm.

Bài 131. Nếu $p=3$, ta có $q^2 \mid 3^6-1=2^3.7.11$ nên $q=2$.

Xét $p\neq 3$, ta có $p^2 \mid (q+1)(q^2-q+1)$.

Mà $(q+1,q^2-q+1)=(q+1,3)=1$ hoặc 3. Suy ra hoặc $p^2 \mid q+1$ hoặc $p^2 \mid q^2-q+1$. Từ đây , suy ra $p<q$.

Nếu $q=p+1$ ta có $p=2,q=3$.

Xét $q\geq p+2$. Vì $q^2 \mid (p-1)(p+1)(p^2-p+1)$.

Do $(q,p+1)=(q,p-1)=1$ và $(p^2-p+1,p^2+p+1)=(p^2+p+1,2p)=1$ nên ta có hoặc $q^2 \mid p^2+p+1$ hoặc $q^2 \mid p^2-p+1$.

Mà $q\geq p+2$ nên $q^2\geq(p+2)^2>p^2+p+1>p^2-p+1$. Suy ra $q^2 \mid p^6-1$.

Vậy $(p,q)=(2,3);(3,2)$.

Bài 132. Nếu các số nguyên tố p, q, r đều khác 3 thì p, q, r có dạng $3k\pm1$ suy ra p^2, q^2, r^2 chia cho 3 đều dư là 1. Khi đó $p^2+q^2+r^2 \vdots 3$ và $p^2+q^2+r^2>3$ nên $p^2+q^2+r^2$ là hợp số.

Vậy $p=3$, $q=5$, $r=7$, khi đó $p^2+q^2+r^2=3^2+5^2+7^2=83$ là số nguyên tố.

Bài 133. Đặt $a=5^{25}$. Ta có $A=\dfrac{a^5-1}{a-1}=a^4+a^3+a^2+a+1$

$$=\left(a^2+3a+1\right)^2-5a\left(a+1\right)^2.$$

Thay $a=5^{25}$ ta được:

$$\begin{aligned}A&=\left(a^2+3a+1\right)^2-5^{26}\left(a+1\right)^2\\&=\left(a^2+3a+1-5^{13}\left(a+1\right)\right)\left(a^2+3a+1+5^{13}\left(a+1\right)\right)\end{aligned}$$

Từ đó có đpcm.

Bài 134. Vì p là số nguyên tố và $p>3$, nên số nguyên tố p có 1 trong 2 dạng: 3k + 1,3k + 2 với $k\in N^*$.

Nếu $p=3k+1$ thì $p+2=3k+3=(k+1)\Rightarrow p+2 \vdots 3$ và $p+2>3$

Do đó p +2 là hợp số (trái với đề bài $p+2$ là số nguyên tố)

Nếu $p=3k+2$ thì $p+1=3k+3=3(k+1)$ (1)

Do p là số nguyên tố và $p>3$ $\Rightarrow p$ lẻ $\Rightarrow k$ lẻ $\Rightarrow k+1$ chẵn $\Rightarrow k+1 \vdots 2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $p+1 \vdots 6$

Bài 135. Vì p là số nguyên tố và $(p>3)$, nên số nguyên tố p có một trong hai dạng: $3k+1; 3k+2$ với $k \in \mathbb{N}^*$

Nếu $p=3k+2$ thì $p+4=3k+6=3(k+2) \Rightarrow p+4 \vdots 3$ và $p+4>3$

Do đó $p+4$ là hợp số (trái với đề bài $p+4$ là số nguyên tố).

Nếu $p=3k+1$ thì $p+8=3k+9=3(k+3) \Rightarrow p+8 \vdots 3$ và $p+8>3$

Do đó $p+8$ là hợp số.

Vậy số nguyên tố p có dạng $p=3k+1$ thì $p+8$ là hợp số.

Bài 136. Từ $p^2-5q^2=4 \Leftrightarrow (p-2)(p+2)=5q^2$

Do $0<p-2<p+2, q$ nguyên tố nên $p-2$ nhận các giá trị 1, 5, q, q^2

Ta có bảng sau:

$p-2$	$p+2$	p	q
1	$5q^2$	3	1
5	q^2	7	3
p	$5q$	3	1
p^2	5	3	1

Vậy $(p,q)=(7;3)$ thỏa mãn.

Bài 137. Vì ba số nguyên tố đầu tiên là $2,3,5$ nên trong 12 số nguyên tố phân biệt đã cho luôn có ít nhất 9 số lớn hơn 5. Vì số nguyên tố lớn hơn 5 nên: 9 số trên khi chia cho 4 có số dư là 1 hoặc 2. Theo nguyên lý Dirichlet phải tồn tại ít nhất 5 số khi chia cho 3 có cùng số dư. Mà 5 số này lại không chia hết cho 5, vì thế trong 5 số ấy có ít nhất 2 số mà ta có thể giả sử là p_1, p_2 sao cho $(p_1-p_2) \vdots 5$. Ngoài ra hiển nhiên ta có $(p_1-p_2) \vdots 3$ dẫn đến $(p_1-p_2) \vdots 15$

Xét 7 số còn lại. theo nguyên lý Dirichlet tồn tại 4 số có cùng số dư khi chia hết cho 3. Đem 4 số này chia cho 5 cho hai khả năng xảy ra:

Nếu có 2 số (chẳng hạn p_3, p_4)mà $(p_3-p_4) \vdots 5$. Rõ ràng $(p_3-p_4) \vdots 2$ và $(p_3-p_4) \vdots 3$. Vì $(5;3;2)=1$ nên ta có $(p_3-p_4) \vdots 30$. Lấy hai số p_5, p_6 bất kì (ngoài ra p_1, p_2, p_3, p_4) đã chọn thì p_5, p_6 lẻ (do số nguyên tố khác 2) nên $(p_5+p_6) \vdots 2$.

Từ đó suy ra $(p_1-p_2)(p_4-p_3)(p_5+p_6) \vdots 30.30.2=1800$.

Nếu 4 số này khi chia cho 5 có các số dư khác nhau là $1;2;3;4$. Giả sử $(p_5-1)\vdots 5$, $(p_6-4)\vdots 5$ thì $(p_5+p_5-5)\vdots 5$ hay $(p_5+p_6)\vdots 5$

Với 2 số còn lại p_3, p_4 thì rõ ràng $(p_3-p_4)\vdots 3$ (theo cách chọn 4 số trên)

Do $p_3; p_4; p_5; p_6$ lẻ nên $(p_5+p_6)\vdots 2, (p_3-p_4)\vdots 2$.

Từ đó suy ra $(p_5+p_6)\vdots 10$ và $(p_3-p_4)\vdots 6$.

Do đó $(p_1-p_2)(p_4-p_3)(p_5+p_6)\vdots 30.10.6=1800$

Vậy tồn tại p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 là các số nguyên tố phân biệt sao cho $(p_1-p_2)(p_4-p_3)(p_5+p_6)\vdots 1800$.

Bài 138. Đặt $A=\dfrac{n^3+8n^2+1}{3n}=\dfrac{n^2}{3}+\dfrac{8n}{3}+\dfrac{1}{3n}$.

- Xét $n=3k$.

  Ta có: $A=3k^2+8k+\dfrac{1}{9k}$. Suy ra $[A]=3k^2+8k=k(3k+8)$.

  $[A]$ là số nguyên tố $\Leftrightarrow k=1$. Khi đó $n=3$.

- Xét $n=3k+1$

  Ta có: $A=3k^2+2k+\dfrac{1}{3}+8k+\dfrac{8}{3}+\dfrac{1}{3n}=3k^2+10k+3+\dfrac{1}{3n}$.

  Suy ra $[A]=3k^2+10k+3=(k+3)(3k+1)$.

  $[A]$ là số nguyên tố $\Leftrightarrow k=0$. Khi đó $n=1$.

- Xét $n=3k+2$.

  Ta có: $A=3k^2+4k+\dfrac{4}{3}+8k+\dfrac{16}{3}+\dfrac{1}{3n}=3k^2+12k+\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3n}$.

  Suy ra $[A]=3k^2+12k+6=3(k^2+4k+2)$ không phải số nguyên tố $\forall k$.

Bài 139. Do q là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $q \not\vdots 3$, vậy q có dạng $3k\pm 1$.

Nếu $q=3k+1$ thì $p=3k+3=3(k+1)\vdots 3$. Mặt khác, $p>q>3$ nên không phải là số nguyên tố. mâu thuẫn này chứng tỏ q không thể có dạng $3k+1$.

Do đó $q=3k-1 \Rightarrow p=3k+1$.

Từ đó $p+q=6k\vdots 3$.

Hơn nữa, vì p,q là hai số nguyên tố lơn hơn 3 và $(p+1)-(q+1)=2$ nên $p+1,q+1$ là hai số chẵn liên tiếp. do đó hai trong số $p+1,q+1$ có một số chia hết cho 4.

Không mất tính tổng quát, có thể giả sử $(q+1)\vdots 4$, tức là $q+1=4m$ hay $q=4m-1$.

Suy ra: $p=4m+1$ và do đó $p+q=8m\vdots 4$.

Vì $(3,4)=1$ nên suy ra $(p+q)\vdots 12$.

Bài 140. Với $p=3$ thì $p+10=13$ và $p+14=17$ là các số nguyên tố.

Với p > 3 thì $p=3k\pm 1$.

- Nếu $p=3k+1$ thì $p+14=3k+15\vdots 3$;
- Nếu $p=3k-1$ thì $p+10=3k+9\vdots 3$.

Vậy với $p=3$ thì $p+10$ và $p+14$ là số nguyên tố.

Bài 141. Tính chất: Nếu p là số nguyên tố lớn 3 thì p^2-1 chia hết cho 24.
Chứng minh: $p>3$ nên p là số lẻ dẫn đến $p^2-1=(p-1)(p+1)$ là tích 2 số chẵn liên tiếp nên chia hết cho 8 (*).
Lại có $(p-1)p.(p+1)$ là tích 3 số chẵn liên tiếp nên $(p-1)p.(p+1)$chia hết cho 3. Mà 3 là số nguyên tố nên trong 3 số $(p-1),p,(p+1)$ phải có ít nhất 1 số chia hết cho 3. Do p không chia hết cho 3 suy ra $(p-1)(p+1)$ chia hết cho 3 (**). Từ (*), (**) suy ra $p^2-1\vdots 24$.
Ta có: $2007-p^2=2016-(p^2-1)\vdots 24$ (đpcm).

Bài 142. Giả sử có ba số nguyên tố p, q, r sao cho $p^q+q^p=r$. Khi đó $r>3$nên r là số lẻ, suy ra p, q không cùng tính chẵn lẻ. Giả sử $p=2$ và q là số lẻ. Khi đó ta có $2^q+q^2=r$. Nếu $q$không chia hết cho 3 thì $q^2\equiv 1(\text{mod}3)$. Mặt khác, vì q lẻ nên $2^q\equiv -1(\text{mod}3)$, từ đó suy ra $2^q+q^2\vdots 3\Rightarrow r\vdots 3$, vô lí. Vậy $q=3$, lúc đó $r=2^3+3^2=17$ là số nguyên tố.

Vậy $p=2$, $q=3$, $r=17$ hoặc $p=3$, $q=2$, $r=17$.

Bài 143. a) Giả sử p là số nguyên tố và $p=30k+r$ với $0<r<30$. Nếu r là hợp số thì r có ước nguyên tố $q\le\sqrt{30}\Rightarrow q=2;3;5$ thì qlần lượt chia hết cho $2;3;5$, vô lí. Vậy $r=1$ hoặc r là số nguyên tố.

Khi chia cho 60 thì kết quả không còn đúng nữa, chẳng hạn $p=109=60.1+49$, 49 là hợp số.

b) Số nguyên tố p khi chia cho 30 chỉ có thể dư 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

Với r = 1, 11, 19, 29 thì $p^2\equiv 1(\text{mod}30)$.

Với $r=7,13,17,23$ thì $p^2\equiv 19$ (mod 30).

Suy ra $p^4 \equiv 1$ (mod 30).

Giả sử $p_1, p_2, ..., p_n$ là các số nguyên tố lớn hơn 5.

Khi đó $q = p_1^4 + p_2^4 + ... p_n^4 \equiv n$ (mod 30) $\Rightarrow q = 30k + n$ là số nguyên tố nên $(n, 30) = 1$.

Nhận xét: với p là số nguyên tố lớn hơn 5 ta có thể chứng minh $p^4 \equiv 1$ (mod 30) bằng cách áp dụng Định lí Fermat.

Ta có $p^2 \equiv 1$ (mod 2), $p^2 \equiv 1$ (mod 3), $p^4 \equiv 1$ (mod 5) $\Rightarrow p^4 \equiv 1$ (mod 30).

Bài 144. Vì a, b, c đóng vai trò như nhau nên giả sử $a \le b \le c$.

Khi đó $ab + bc + ca \le 3bc \Rightarrow abc < 3bc \Rightarrow a < 3 \Rightarrow a = 2$ (vì a là số nguyên tố).

Với $a = 2$, ta có $2bc < 2b + 2c + bc \Rightarrow bc < 2(b + c) \le 4c \Rightarrow b < 4 \Rightarrow b = 2$ hoặc $b = 3$.

- Nếu $b = 2$ thì $4c < 2 + 4c$ thỏa với c là số nguyên tố bất kì.
- Nếu $b = 3$ thì $6c < 6 + 5c \Rightarrow c < 6 \Rightarrow c = 3$ hoặc $c = 5$.

Vậy các cặp số (a, b, c) cần tìm là (2, 2, p), (2, 2, 3), (2, 3, 5) và các hoán vị của chúng, với p là số nguyên tố.

Bài 145. Ta có $a_1 = 2, a_2 = 3$, giả sử với $n \ge 3$ nào đó mà có số 5 là ước nguyên tố lớn nhất của số $A = 2.3.a_3...a_{n-1} + 1$ thì A không thể chia hết cho 2, cho 3. Vậy chỉ có thể xảy ra $A = 5^m$ với $m \ge 2$, suy ra $A - 1 = 5^m - 1 \vdots 4$.

Mà $A - 1 = 2.3.a_3...a_{n-1}$ không chia hết cho 4 do $a_3, ..., a_{n-1}$ là các số lẻ, vô lí. Vậy A không có ước nguyên tố lớn nhất là 5, tức là $a_k \ne 5$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

Bài 146. Với $p = 2$ ta có $2^p + p^2 = 8$ không là số nguyên tố.

Với $p = 3$ thì $2^p + p^2 = 17$ là số nguyên tố.

Với $p > 3$ ta có $p^2 + 2^p = (p^2 - 1) + (2^p + 1)$. Vì p lẻ và p không chia hết cho 3 nên $p^2 - 1 \vdots 3$ và $2^p + 1 \vdots 3$, do đó $2^p + p^2$ là hợp số.

Vậy, với $p = 3$ thì $2^p + p^2$ là số nguyên tố.

Bài 147. Ta có: $n^{2003} + n^{2002} + 1 = n^2(n^{2001} - 1) + n(n^{2001} - 1) + n^2 + n + 1$.

Với $n > 1$ ta có: $n^{2001} - 1 \vdots n^3 - 1 \vdots n^2 + n + 1$,
Do đó: $n^{2003} + n^{2002} + 1 \vdots n^3 + n + 1$ và $n^2 + n + 1 > 1$ nên $n^{2003} + n^{2002} + 1$ là hợp số.
Với $n = 1$ thì $n^{2003} + n^{2002} + 1 = 3$ là số nguyên tố.

Bài 148.

a) Giả sử $2p+1=n^3$ (với $n\in N$); n là số lẻ nên $n=2m+1 (m\in N)$, khi đó

$$2p+1=(2m+1)^3 \Rightarrow p=m(4m^2+6m+3).$$

Vì p là số nguyên tố nên $m=1$, suy ra $p=13$.

Thử lại, $2p+1=2.13+1=27=3^3$. Vậy $p=13$.

b) Giả sử $13p+1=n^3 (n\in N); p\geq 2$ suy ra $n\geq 3$.

$13p+1=n^3 \Rightarrow 13p=(n-1)(n^2+n+1).$

13 và p là các số nguyên tố, mà $n-1>1$ và $n^2+n+1>1$ nên $n-1=13$ hoặc $n-1=p$.

i) Với $n-1=13$ thì $n=14$, khi đó $13p=n^3-1=2743 \Rightarrow p=221$ là số nguyên tố

ii) Với $n-1=p$ thì $n^2+n+1=13 \Rightarrow n=3,$ khi đó $p=2$ là số nguyên tố.

Vậy, với $p=2, p=211$ thì $13p+1$ là lập phương của một số tự nhiên.

Bài 149. Bổ đề: Nếu số nguyên dương a là một ước số của tích $A=a_1a_2...a_n$ với $a_i\in N^*$ và $a>a_i, \forall i=1,2,...,n$ thì a là hợp số.

Chứng minh: Giả sử ngược lại, a là số nguyên tố. Khi đó, do $A \vdots a$ nên trong các số a_i phải có ít nhất một số a_j chia hết cho a, tức ta phải có $a_j\geq a$. Điều này mâu thuẫn với tính chất của số a, do đó nó phải là hợp số.

Trở lại bài toán: Giả thiết của bài toán có thể được viết dưới dạng như sau:

$$ac+bd=\left(b+d\right)^2-\left(a-c\right)^2,$$

hay $a^2-ac+c^2=b^2+bd+d^2$.

Ta có $\left(ab+cd\right)\left(ad+bc\right)=ac\left(b^2+d^2\right)+bd\left(a^2+c^2\right)$

$$=ac\left(b^2+bd+d^2\right)+bd\left(a^2-ac+c^2\right)$$

$$=\left(ac+bd\right)\left(b^2+bd+d^2\right).$$

Do đó, ab + cd là ước của $\left(ac+bd\right)\left(b^2+bd+d^2\right)$. Theo bổ đề trên, để chứng minh ab + cd là hợp số, ta chỉ cần chứng minh được tính đúng đắn của hai bất đẳng thức:

$ab+cd>ac+bd$ (1)

Và $ab+cd>b^2+bd+d^2$. (2)

Bất đẳng thức (1) hiển nhiên đúng do ta có ab + cd – ac – bd = (a – d)(b – c) > 0. Như vậy, ta chỉ còn phải xét bất đẳng thức (2). Từ giả thiết, ta thấy nếu a < b + d thì:

$a^2-ac+c^2=a\left(a-c\right)+c^2<\left(b+d\right)\left(b+d-c\right)+c^2$

$$=b^2+bd+d^2-\left(b-c\right)\left(c-d\right)<b^2+bd+d^2.$$

Mâu thuẫn này cho thấy $a\geq b+d$ và như thế, ta có:

$ab+cd>\left(b+d\right)b+d^2=b^2+bd+d^2.$

Bất đẳng thức (2) được chứng minh. Bài toán được giải quyết hoàn toàn.

Bài 150. Vì a, b, c, d $\in N^*$ $\Rightarrow$ a+ b + c + d $\geq$ 4 (1)

Xét $a^2+b^2+c^2+d^2-(a+b+c+d)=(a^2-a)+(b^2-b)+(c^2-c)+(d^2-d)$

$=a(a-1)+b(b-1)+c(c-1)+d(d-1)\vdots 2$

Mà $a^2+b^2+c^2+d^2=2(a^2+b^2)\vdots 2 \Rightarrow a+b+c+d\vdots 2$ (2)

Từ (1)và (2) suy ra a + b + c + d là hợp số.

Bài 151. Đặt $n=3^k.m$ với $(m,3)=1$. Giả sử $m>1$, xét hai trường hợp:

i) $m=3l+1(l\in\mathbb{N}^*)$ Ta có:

$1+2^n+4^n=1+2^{3^k(3l+1)}=1+a^{3l+1}+a^{6l+2}$ (với $a=2^{3^k}$), suy ra
$1+2^n+4^n=a(a^{3l}-1)+a^2(a^{6l}-1)+a^2+a+1\vdots a^2+a+1\Rightarrow 1+2^n+4^n$ là hợp số.

ii) $m=3l+2(l\in\mathbb{N}^*)$, Ta có:

$1+2^n+4^n=1+2^{3^k(3l+2)}+4^{3^k(3l+2)}=1+a^{3l+2}+a^{6l+4}$

$=a(a^{6l+3}-1)+a^2(a^{3l}-1)+a^2+a+1\vdots a^2+a+1$ (Với $a=2^{3^k}$),

Suy ra $1+2^n+4^n$ là hợp số.

Vậy $m=1$ tức là $n=3^k$.

Bài 152. Giả sử $2015=a_1+a_2+...+a_n$, trong đó $a_1;a_2;...;a_n$ là các hợp số
Theo bài ra ta có
+ Mỗi số hạng $a_1;a_2;...;a_n$ không thể viết thành tổng hai hợp số (1)
+ Tổng hai hợp số bất kì không thể viết thành tổng 3 hợp số (2)
Do 2015 là số lẻ nên tồn tại ít nhất một hợp số lẻ, hợp số đó phải bằng 9 vì 1;3;5;7;11;13 không phải là hợp số.
Nếu có hợp số lẻ $a_1\geq 15\Rightarrow a_1=9-(a_1-9)$ với $(a_1-9)\geq 6$ là số chẵn nên a_1 bằng tổng hai hợp số- trái với (1)
Mặt khác không có quá một hợp số bằng 9 vì nếu có hai hợp số bằng 9 thì 9+9=6+6+6 trái với (2)
Do đó: $2015=9+a_2+a_3+...+a_n$ với $a_2;a_3;..;a_n$ là các hợp số chẵn
$\Rightarrow a_2+a_3+...+a_n=2006$ (3)
$\Rightarrow$ các hợp số phải nhận các giá trị 4 hoặc 6.
Vì nếu a_2 là hợp số chẵn và $a_2\geq 8\Rightarrow a_2=4-(a_2-4)$ là tổng hai hợp số, trái với (1)
Số hợp số bằng 6 chỉ có thể là một vì nếu có hai hợp số bằng 6 thì 6+6=4+4+4
Giả sử $a_2=6\Rightarrow a_3=a_4=...a_n=4\Rightarrow(n-2).4=2000\Rightarrow n=502$
Vậy số tự nhiên cần tìm là $n=502$

Bài 153. Ta có: $p = \frac{n(n+1)}{2} - 1 = \frac{n^2+n-2}{2} = \frac{(n-1)(n+2)}{2}$

Với $n=2$ ta có $p=2$;

Với $n=3$ ta có $p=5$;

Với $n>3$ thì $\frac{n-1}{2}>1$ và $n+2>1$ nên p là hợp số.

Vậy với $n=2, n=3$ thì p là số nguyên tố có dạng $\frac{n(n+1)}{2}-1$.

Bài 154. Ta có $2^{2n+1}=2.2^{2n}$ chia 3 dư 2 $\forall n \in N$

$\Rightarrow$ $2^{2n+1}=3k+2, (k \in N)$

$\Rightarrow$ $A=2^{2^{2n+1}}+31=2^{3k+2}+31=4.(2^3)^k+31=4.8^k+31$

Mà 8^k chia 7 dư 1 $\forall k \in N \Rightarrow 4.8^k$ chia 7 dư 4 $\forall k \in N$

$\Rightarrow 4.8^k+31 \vdots 7$ $\forall k \in N$

$\Rightarrow$ $A=2^{2^{2n+1}}+31 \vdots 7$ $\forall n \in N$ Mà A >7

$\Rightarrow$ A là hợp số với mọi số tự nhiên n.

Bài 155. ● Ta chứng minh $2^{2^{10n+1}}+19 \vdots 23$ với mọi $n \geq 1$.

Ta có: $2^{10} \equiv 1$ (mod 1) $\Rightarrow 2^{10n+1} \equiv 2$ (mod 22) $\Rightarrow 2^{10n+1} = 22k+2$ ($k \in \mathbb{N}$).

Theo Định lí Fermat: $2^{22} \equiv 1$ (mod 23) $\Rightarrow 2^{2^{10n+1}} = 2^{22k+2} \equiv 4$ (mod 23) $\Rightarrow 2^{2^{10n+1}} = 19 \vdots 23$.

Mặt khác: $2^{2^{10n+1}}+19>23$ nên $2^{2^{10n+1}}+19$ là hợp số với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

● Ta chứng minh $2^{3^{4n+1}}+3^{2^{4n+1}}+5 \vdots 11$ với mọi $n \geq 1$.

Bài 156. Ta có $m = \frac{3^p-1}{2}.\frac{3^p+1}{4} = a.b$ với $a = \frac{3^p-1}{2}, b = \frac{3^p+1}{4}$

a,b đều là số nguyên tố lớn hơn 1 nên m là hợp số

Mà $m = 9^{p-1}+9^{p-2}+...+9+1$ và p lẻ nên m lẻ và $m \equiv 1$ (mod 3).

Theo Định lí Fermat, ta có $9^p - 9 \vdots p$.

$(p,8)=1$ nên $9^p-9 \vdots 8p \Rightarrow m-1 \vdots \frac{9^p-1}{8} \vdots p$.

Vì $m-1 \vdots 2$ nên $m-1 \vdots 2p$, khi đó $3^{m-1}-1 \vdots 3^{2p}-1 \vdots \frac{9^p-1}{8} = m$ (đpcm).

Bài 156. Giả sử tồn tại bộ số (m,n,p) thỏa mãn yêu cầu đề bài. Dễ thấy $0 < m$, $n < p$.
Phương trình đã cho có thể được viết lại thành

$$(m+n)A = p^{2018}, (1)$$

trong đó $A = m^{2018} - m^{2017}n + m^{2017}n^2 - ... - mn^{2017} + n^{2018}$
Nếu A không chia hết cho p thì từ (1), ta có $A = 1$ và

$$m + n = p^{2018} = m^{2019} + n^{2019}.$$

Từ đó dễ thấy $m = n = 1$ và $p^{2018} = 2$, mâu thuẫn. Vậy A chia hết cho p .
Do $m + n > 1$ nên từ (1) suy ra $m + n$ chia hết cho p . Khi đó, ta có

$$A \equiv 2019m^{2018} \pmod{p}.$$

Do A chia hết cho p và $0 < m < p$ nên từ kết quả trên, ta suy ra 2019 chia hết cho p , hay $p = 2019$. Từ đây, dễ thấy m và n khác tính chẵn lẻ, hay $m \neq n$.

Bây giờ, ta viết lại phương trình đã cho dưới dạng\ $\left(m^3\right)^{673} + \left(n^3\right)^{673} = 2019^{2018}$,

hay $(m+n)\left(m^2 - mn + n^2\right) = 2019^{2018}$,

trong đó, $B = \left(m^3\right)^{672} - \left(m^3\right)^{671}\left(n^3\right) + ... - \left(m^3\right)\left(n^3\right)^{671} + \left(n^3\right)^{672}$. Do $m \neq n$ nên
$m^2 - mn + n^2 = (m-n)^2 + mn > 1$, từ đó ta có $m^2 - mn + n^2$ chia hết cho 2019 . Tuy nhiên, điều này không thể xảy ra do

$$m^2 - mn + n^2 \equiv 3n^2 \pmod{2019}$$

$$m^2 - mn + n^2 \not\equiv 0 \pmod{2019}.$$

Vậy không tồn tại các số m,n,p thỏa mãn yêu cầu đề bài.
Bài 157. Đặt $n+3 = p \Rightarrow A = 2p+1 = a^3$.

Suy ra a là số tự nhiên lẻ nên $a = 2t+1 \Rightarrow 2p+1 = 8t^3 + 12t^2 + 6t + 1$.

$\Rightarrow p = t(4t^2 + 6t + 3)$ là số nguyên tố nên $t = 1 \Rightarrow p = 13$.

Suy ra $n = 10, A = 27$.

Bài 158. Ta có: $A = 3n + 1 + 2009b^2 = (3n + 2010b^2) + (1 - b^2) = 3.(n + 670b^2) + (1-b)(1+b)$.

Do b là số nguyên tố lớn hơn nên b không chia hết cho 3, do đó

$(b-1)(b+1) \vdots 3 \Rightarrow A \vdots 3, A > 3$.

Vậy A là hợp số.

CHỦ ĐỀ 4. CÁC BÀI TOÁN VỀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG

Bài 1: Ta có: $a^2+1=a^2+ab+bc+ca=(a+b)(a+c)$

Tương tự: $b^2+1=(a+b)(b+c)$; $c^2+1=(b+c)(c+a)$

Do đó: $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)=\left[(a+b)(b+c)(c+a)\right]^2$

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 2:

Đặt n(2n – 1) = $26q^2$ (1)

Do VP chẵn và (2n – 1) lẻ nên n chẵn hay n = 2k

Do đó: (1) suy ra k(4k – 1) = $13q^2$ (2)

Nhận thấy (k, 4k – 1) = 1 nên:

$$(1)\Leftrightarrow \begin{cases} k=u^2 \\ 4k-1=13v^2 \end{cases} \vee \begin{cases} k=13u^2 \\ 4k-1=v^2 \end{cases}$$

Xét trường hợp 1 ta có:

$$\begin{cases} k=u^2 \\ 4k-1=13v^2 \end{cases} \Rightarrow 4k=13v^2+1=12v^2+v^2+1 \Rightarrow v^2+1 \vdots 4 \Rightarrow v^2 \equiv 3 \pmod 4 \text{ (vô lý)}$$

Xét trường hợp 2 ta có:

$$\begin{cases} k=13u^2 \\ 4k-1=v^2 \end{cases} \Rightarrow 4k=v^2+1 \text{(vô lý)}$$

Vậy không tồn tại n thỏa mãn yêu cầu đầu bài.

Bài 3: Ta có A = $n^4+n^3+n^2=n^2(n^2+n+1)$

Với n = 0 thì A = 0 (thỏa mãn)

Với $n\neq 0$ thì A là số chính phương khi và chỉ khi n^2+n+1 là số chính phương.

Khi đó $n^2+n+1=k^2$ $(k\in\mathbb{N})$. $\Rightarrow 4(n^2+n+1)=4k^2 \Rightarrow (2n+1)^2-4k^2=-3$

$\Rightarrow (2n+1-2k)(2n+1+2k)=-3$

Vì $2n+1+2k \geq 2n+1-2k$, $\forall n\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{N}$ nên

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2n+1-2k=-3 \\ 2n+1+2k=1 \end{cases} \\ \begin{cases} 2n+1-2k=-1 \\ 2n+1+2k=3 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} 2n+1-2k=-3 \\ 2n+1+2k=1 \end{cases} \Rightarrow n=-1 \quad \text{(thỏa mãn)}$$

$$\begin{cases} 2n+1-2k=-1 \\ 2n+1+2k=3 \end{cases} \Rightarrow n=0 \quad \text{(loại)}$$

Vậy $n=0; n=-1$

Bài 4: Ta có $A=(x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y)+y^4 = (x^2+5xy+4y^2)(x^2+5xy+6y^2)+y^4$

Đặt $x^2+5xy+5y^2=t \quad (t\in Z)$ thì

$$A=(t-y^2)(t+y^2)+y^4=t^2-y^4+y^4=t^2=(x^2+5xy+5y^2)^2$$

Vì x, y, z $\in$ Z nên $x^2\in Z,\quad 5xy\in Z,\quad 5y^2\in Z \Rightarrow x^2+5xy+5y^2\in Z$

Vậy A là số chính phương.

Bài 5: a) Ta có:

$$\begin{aligned}A&=224\underbrace{99...9}_{n-2}1\underbrace{00...0}_{n}9\\&=224.10^{2n}+99...9.10^{n+2}+10^{n+1}+9\\&=224.10^{2n}+\left(10^{n-2}-1\right).10^{n+2}+10^{n+1}+9\\&=224.10^{2n}+10^{2n}-10^{n+2}+10^{n+1}+9\\&=225.10^{2n}-90.10^{n}+9\\&=\left(15.10^{n}-3\right)^2\end{aligned}$$

Vậy A là số chính phương.

b) Ta có :

$$B=\underbrace{11..1}_{n}\underbrace{55..5}_{n-1}6=\underbrace{11..1}_{n}\underbrace{55..5}_{n}+1=\underbrace{11...1}_{n}.10^n+5.\underbrace{11...1}_{n}+1$$

$$=\frac{10^n-1}{9}.10^n+5.\frac{10^n-1}{9}+1=\frac{10^{2n}-10^n+5.10^n-5+9}{9}$$

$$=\frac{10^{2n}+4.10^n+4}{9}$$

$$=\left(\frac{10^n+2}{3}\right)^2$$

Do đó B là số chính phương.

Bài 6: Giả sử: $n-2;n-1;n;n+1;n+2$ với $2\le n\in\mathbb{N}$ là 5 số tự nhiên liên tiếp

Ta có: $(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=5\left(n^2+2\right)$

Vì n^2 không thể có chữ số tận cùng là 3 hoặc 8 nên $\left(n^2+2\right)\not\vdots\,5\Rightarrow 5\left(n^2+2\right)$ không là số chính phương.

Vậy tổng các bình phương của 5 số tự nhiên liên tiếp không phải số chính phương.

Bài 7: Ta có $\underbrace{44...4}_{n}\underbrace{88...8}_{n-1}9=\underbrace{44...4}_{n}\underbrace{88..8}_{n}+1=\underbrace{44...4}_{n}.10^n+8.\underbrace{11...1}_{n}+1$

$$=4.\frac{10^n-1}{9}.10^n+8.\frac{10^n-1}{9}+1$$

$$=\frac{4.10^{2n}-4.10^n+8.10^n-8+9}{9}=\frac{4.10^{2n}+4.10^n+1}{9}$$

$=\left(\dfrac{2.10^n+1}{3}\right)$

Ta thấy $2.10^n+1=200...01$ (có $n-1$ chữ số 0) có tổng các chữ số chia hết cho 3 nên nó chia hết cho 3

Suy ra $\left(\dfrac{2.10^n+1}{3}\right)\in\mathbb{Z}$ hay các số có dạng $44...488...89$ là số chính phương.

Bài 8: Vì p là tích của n số nguyên tố đầu tiên

Nên $p\,\vdots\,2$ và p không chia hết cho 4 (1)

a) Giả sử $p+1$ là số chính phương. Đặt $p+1=m^2\left(m\in\mathbb{N}\right)$

Vì p chẵn nên $p+1$ lẻ $\Rightarrow m^2$ lẻ $\Rightarrow m$ lẻ.

Đặt $m=2k+1\left(k\in\mathbb{N}\right)$.

Ta có: $m^2=4k^2+4k+1$

$\Rightarrow p+1=4k^2+4k+1$

$\Rightarrow p=4k^2+4k=4k\left(k+1\right)\vdots\,4$ mâu thuẫn với (1)

$\Rightarrow p+1$ là số chính phương.

b) $p=2\cdot3\cdot5\cdots$ là số chia hết cho 3 $\Rightarrow p-1$ có dạng $3k+2$.

Không có số chính phương nào có dạng $3k+2$

Nên $p-1$ không là số chính phương.

Vậy nếu p là tích n số nguyên tố đầu tiên thì $p-1$ và $p+1$ không là số chính phương.

Bài 9: Giả sử 2010 + n^2 là số chính phương thì 2010 + n^2 = m^2 (m $\in N$)

Từ đó suy ra m^2 - n^2 = 2010 $\Leftrightarrow$ (m + n) (m – n) = 2010

Như vậy trong 2 số m và n phải có ít nhất 1 số chẵn (1)

Mặt khác m + n + m – n = 2m $\Rightarrow$ 2 số m + n và m – n cùng tính chẵn lẻ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ m + n và m – n là 2 số chẵn.

$\Rightarrow$ (m + n) (m – n) $\vdots$ 4 nhưng 2006 không chia hết cho 4

$\Rightarrow$ Điều giả sử sai.

Vậy không tồn tại số tự nhiên n để 2010 + n^2 là số chính phương.

Bài 10: Gọi 5 số tự nhiên liên tiếp đó là $n-2,n-1,n,n+1,n+2\left(n\in\mathbb{N},n\geq2\right)$.

Ta có: $(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=5.(n^2+2)$

Vì n^2 không thể tận cùng bởi 3 hoặc 8

Do đó n^2+2 không thể chia hết cho 5

Suy ra: $5.(n^2+2)$ không là số chính phương

Hãy nói cách khác: A không là số chính phương

Bài 11: Vì n + 1 và 2n + 1 là các số chính phương nên đặt $n+1=k^2$, $2n+1=m^2$ ($k, m \in N$)

Ta có m là số lẻ $\Rightarrow$ m = 2a + 1 $\Rightarrow$ $m^2 = 4a(a+1)+1$

Mà $n=\dfrac{m^2-1}{2}=\dfrac{4a(a+1)}{2}=2a(a+1)$

$\Rightarrow$ n chẵn $\Rightarrow$ n + 1 lẻ $\Rightarrow$ k lẻ $\Rightarrow$ đặt k = 2b + 1 (với $b \in N$) $\Rightarrow$ $k^2 = 4b(b+1)+1$

$\Rightarrow$ n = 4b(b+1) $\Rightarrow$ $n \,\vdots\, 8$ (1)

Ta có: $k^2 + m^2 = 3n + 2 \equiv 2 \pmod 3$

Mặt khác k^2 chia cho 3 dư 0 hoặc 1, m^2 chia cho 3 dư 0 hoặc 1

Nên để $k^2 + m^2 \equiv 2 \pmod 3$ thì $k^2 \equiv 1 \pmod 3$

$m^2 \equiv 1 \pmod 3$

$\Rightarrow$ $m^2 - k^2 \,\vdots\, 3$ hay $(2n+1)-(n+1) \,\vdots\, 3 \Rightarrow n \,\vdots\, 3$ (2)

Mà (8; 3) = 1 (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow$ $n \,\vdots\, 24$

Bài 12: Gọi số chính phương phải tìm là: $\overline{aabb} = n^2$ với a, b $\in$ N, $1 \le a \le 9$; $0 \le b \le 9$

Ta có: $n^2 = \overline{aabb} = 11.\overline{a0b} = 11.(100a+b) = 11.(99a+a+b)$ (1)

Nhận xét thấy $\overline{aabb} \,\vdots\, 11 \Rightarrow a+b \,\vdots\, 11$

Mà $1 \le a \le 9$; $0 \le b \le 9$ nên $1 \le a+b \le 18 \Rightarrow a+b=11$

Thay a + b = 11 vào (1) được $n^2 = 11^2(9a+1)$ do đó 9a + 1 là số chính phương

Bằng phép thử với a = 1; 2;…; 9 ta thấy chỉ có a = 7 thoả mãn $\Rightarrow$ b = 4

Số cần tìm là: 7744

Bài 13: Gọi 3 số lẻ liên tiếp đó là 2n - 1 ; 2n + 1 ; 2n + 3 (n $\in$ N)

Ta có : $A = (2n-1)^2 + (2n+1)^2 + (2n+3)^2 = 12n^2 + 12n + 11$

Theo đề bài ta đặt $12n^2 + 12n + 11 = \overline{aaaa} = 1111.a$ với a lẻ và $1 \le a \le 9$

$\Rightarrow$ 12n(n + 1) = 11(101a – 1)

$\Rightarrow$ $101a - 1 \,\vdots\, 3 \Rightarrow 2a - 1 \,\vdots\, 3$

Vì $1 \le a \le 9$ nên $1 \le 2a-1 \le 17$ và 2a – 1 lẻ nên $2a-1 \in \{3;9;15\}$

$\Rightarrow a \in \{2;5;8\}$

Vì a lẻ $\Rightarrow$ a = 5 $\Rightarrow$ n = 21

3 số cần tìm là: 41; 43; 45

Bài 14: Ta có $A = \underbrace{444.....4}_{2n} = \underbrace{444......4}_{n}\underbrace{000...0}_{n} + \underbrace{444.....4}_{n} = \underbrace{444....4}_{n}.(10^n - 1) + \underbrace{888....8}_{n}$

$= 4.\underbrace{111....1}_{n}.\underbrace{999....9}_{n} + B = 4.\underbrace{111....1}_{n}.9.\underbrace{111....1}_{n} + B = \left(6.\underbrace{111....1}_{n}\right)^2 + B$

$= \left(\frac{3}{4}.\underbrace{888....8}_{n}\right)^2 + B = \left(\frac{3}{4}B\right)^2 + B$

Khi đó

$A + 2B + 4 = \left(\frac{3}{4}B\right)^2 + B + 2B + 4 = \left(\frac{3}{4}B\right)^2 + 2.\frac{3}{4}B.2 + 4 = \left(\frac{3}{4}B + 2\right)^2$

$= \left(\frac{3}{4}.\underbrace{888....8}_{n} + 2\right)^2 = \left(3.\underbrace{222....2}_{n} + 2\right)^2 = \left(\underbrace{666....6}_{n-1}8\right)^2$

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 15:

a. $2N - 1 = 2.1.3.5.7...2007 - 1$

Có $2N \vdots 3 \Rightarrow 2N - 1$ không chia hết cho 3 và $2N - 1 = 3k + 2\left(k \in \mathbb{N}\right)$

Suy ra $2N - 1$ không là số chính phương.

b. $2N = 2.1.3.5.7...2007$

Vì N lẻ nên N không chia hết cho 2 và $2N \vdots 2$.

Nhưng $2N$ không chia hết cho 4.

$2N$ chẵn nên $2N$ không là số chính phương.

c. $2N + 1 = 2.1.3.5.7....2007 + 1$

$2N + 1$ lẻ nên $2N + 1$ không chia hết cho 4.

$2N$ không chia hết cho 4 nên $2N + 1$ không chia cho 4 dư 1.

Do đó: $2N + 1$ không là số chính phương.

Bài 16: Kí hiệu p_n là số nguyên tố thứ *n*. Giả sử tồn tại số tự nhiên *m* mà

$S_{m-1} = a^2; S_m = b^2\left(a, b \in N^*\right)$

Vì $S_1 = 2; S_2 = 10; S_4 = 17 \Rightarrow m > 4$

Ta có: $p_m = S - S_{m-1} = b^2 - a^2 = (a - b)(a + b)$. Vì p_m là số nguyên tố và b + a > 1.

Nên $\begin{cases} b - a = 1 \\ b + a = p_m \end{cases}$. Suy ra: $p_m = 2b - 1 = 2\sqrt{S_m} - 1 \Rightarrow S_m = \left(\frac{p_m + 1}{2}\right)^2$ (1)

Do $m > 4$ nên

$$S_m \le (1+3+5+...+p_{m-1}+p_m)+2-1-9=\left(\frac{p_m+1}{2}\right)^2-8<\left(\frac{p_m+1}{2}\right)^2$$ mâu thuẫn với (1)

Nên trong dãy số S_1, S_2,…… không tồn tại hai số hạng liên tiếp là số chính phương.

Bài 17: Do p là số nguyên tố nên các ước số nguyên dương của p^4 là: 1; p; p^2; p^3; p^4 1

Đặt $S = 1 + p + p^2 + p^3 + p^4$

Giả sử S = $n^2 \Rightarrow 4n^2 = 4p^4 + 4p^3 + 4p^2 + 4p + 4$ (1) $(n \in \mathbb{Z})$

Ta có: $4p^4 + 4p^3 + p^2 < (2n)^2 < 4p^4 + p^2 + 4 + 4p^3 + 8p^2 + 4p$

$\Leftrightarrow (2p^2 + p)^2 < (2n)^2 < (2p^2 + p + 2)^2$

$\Leftrightarrow 4n^2 = (2p^2 + p + 1)^2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $p^2 - 2p - 3 = 0 \Leftrightarrow p = 3$

Thử lại với p = 3 thỏa mãn. Vậy số nguyên tố cần tìm là: p = 3.

Bài 18: Đặt $n^2 - 14n - 256 = k^2$ $(k \in N) \Leftrightarrow (n-7)^2 - k^2 = 305$

$\Leftrightarrow (n-k-7)(n+k-7) = 305 = 1.305 = 61.5$

Xét các trường hợp: do $n + k - 7 > n - k - 7$

Trường hợp 1: $n - k - 7 = 1$ và n + k – 7 = 305 => n = 160 (nhận)

Trường hợp 2: n – k – 7 = - 305 và n + k – 7 = -1 => n = -146 (loại)

Trường hợp 3: n – k – 7 = 5 và n + k – 7 = 61 => n = 40 (nhận)

Trường hợp 4: n – k – 7 = -61 và n + k – 7 = -5 => n = -26 (loại)

Vậy n = 40, k = 28 hoặc n = 160 , k = 152

Bài 19: Ta có: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{abc} \Rightarrow ab + bc + ca = 1$

$\Rightarrow 1 + a^2 = ab + bc + ca + a^2 = a(a+b) + c(a+b) = (a+b)(a+c)$

$\Rightarrow 1 + b^2 = ab + bc + ca + b^2 = b(a+b) + c(a+b) = (a+b)(b+c)$

$\Rightarrow 1 + c^2 = ab + bc + ca + c^2 = b(a+c) + c(a+c) = (a+c)(b+c)$

$\Rightarrow (1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) = (a+b)^2(b+c)^2(a+c)^2 = [(a+b)(b+c)(c+a)]^2$ Vì a, b, c là các số nguyên $\Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a) \in Z$

$\Rightarrow (1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)$ là số chính phương.

Bài 20: Để A là số chính phương thì $A = n^2 + n + 6 = a^2$ $(a \in N)$

- Ta có: $n^2 + n + 6 = a^2$

$\Leftrightarrow 4n^2 + 4n + 24 = 4a^2$

$\Leftrightarrow (2a)^2 - (2n+1)^2 = 23$

$\Leftrightarrow (2a+2n+1).(2a-2n-1) = 23$

- Vì a, n là các số tự nhiên nên (2a +2n +1) là số tự nhiên và

2a + 2n + 1 > 2a – 2n -1. Do đó

$\begin{cases} 2a+2n+1=23 \\ 2a-2n-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a=24 \\ 4n=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ n=5 \end{cases}$

- Vậy n = 5

Bài 21: Ta có

+ d là số nguyên tố và $\overline{abcd}$ là số chính phương nên $d = 5$.

+ $\overline{abcd} < 10000 = 100^2 \Rightarrow \overline{abcd} = \left(\overline{x5}\right)^2$; với $x \in \{1;2;3;4;...;9\}$

+ Vì $\overline{abcd}$ chia hết cho 9 $\left(\overline{x5}\right)^2 \vdots 9 \Rightarrow \overline{x5} \vdots 3 \Rightarrow x+5 \in \{6;9;12\} \Rightarrow x \in \{1;4;7\}$

Kiểm tra lại ta được hai số: 2015 và 5625.

Bài 22: Gọi $M = 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{98} \Rightarrow S = 2 + M$

$M = 2M - M = \left(2^2 + 2^3 + ... + 2^{99}\right) - \left(2 + 2^2 + ... + 2^{98}\right) = 2^{99} - 2 \Rightarrow S = 2^{99} = \left(2^4\right)^{24}.2^3 = 8.16^{24}$

Vì 16^{24} có chữ số tận cùng là 6

$\Rightarrow$ S có chữ số tận cùng là 8

Nên S không là số chính phương.

Bài 23: Vì $4x^3 + 14x^2 + 9x - 6$ là số chính phương, nên ta có $4x^3 + 14x^2 + 9x - 6 = k^2$ với $k \in N$

Ta có $4x^3 + 14x^2 + 9x - 6 = \ldots = (x+2)(4x^2+6x-3)$ nên ta có $(x+2)(4x^2+6x-3) = k^2$

Đặt $(x+2, 4x^2+6x-3) = d$ với $d \in N^*$

Ta có $x+2 \vdots d \Rightarrow (x+2)(4x-2) \vdots d \Rightarrow 4x + 6x - 4 \vdots d$

Ta lại có $4x^2 + 6x - 3 \vdots d \Rightarrow (4x^2+6x-3) - (4x^2+6x-4) = 1 \vdots d \Rightarrow d = 1$

Vậy $(x+2, 4x^2+6x-3) = 1$

mà $(x+2)(4x^2+6x-3) = k^2$ nên ta có

x+2 và $4x^2+6x-3$ là số chính phương $\Rightarrow x+2 = a^2$ và $4x^2 + 6x - 3 = b^2$ với $a, b \in N^*$

Vì x > 0 nên ta có $4x^2 < b^2 < 4x^2 + 12x + 9 \Leftrightarrow (2x)^2 < b^2 < (2x+3)^2$

Vì b lẻ nên $b^2 = (2x+1)^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 6x - 3 = 4x^2 + 4x + 1 \Leftrightarrow x = 2$

Với x = 2 ta có $4x^3 + 14x^2 + 9x - 6 = 100 = 10^2$ là số chính phương.

Bài 24: Giả sử: $n^2 + 17 = k^2$ ($k \in N$) và $k > n$ $\Rightarrow$ $(k-n)(k+n) = 17 \Leftrightarrow \begin{cases} k-n=1 \\ k+n=17 \end{cases} \Rightarrow n = 8$

Vậy với $n = 8$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 25: Đặt $A = 2^n + 3^n + 4^n$. Nếu $n = 1$ thì $A = 9$ (thỏa mãn)

Xét $n > 1$ hay $n \ge 2$ thì $2^n + 4^n$ chia hết cho 4.

Ta có 3^n chia 4 dư 1 với n chẵn hoặc -1 với n lẻ. Mà một số chính phương chia 4 dư 0 hoặc 1 nên A phải chia 4 dư 1 nên 3^n phải chia 4 dư 1. Suy ra n chẵn.

Với n chẵn: 2^n chia 3 dư 1, 4^n chia 3 dư 1, 3^n chia hết cho 3.

Do đó A chia 3 dư 2 (vô lí, vì một số chính phương chia 3 có số dư là 0 hoặc 1).

Vậy $n = 1$.

Bài 26: Giả sử $n^2 + 2014 = k^2 (k^2 \in N) \Leftrightarrow 2014 = k^2 - n^2 \Leftrightarrow 2014 = (k+n)(k-n)$ (1)

Suy ra (k + n) và (k – n) = 2k là số chẵn nên (k + n) và (k – n) cùng tính chẵn lẻ

Do 2014 là số chẵn nên (k + n) và (k – n) đều là số chẵn $\Rightarrow (k+n)(k-n) \vdots 4$

Khi đó từ (1) suy ra ta lại có $2014 \vdots 4$ (điều này vô lí)

Vậy không có số nguyên n nào để $n^2 + 2014$ là số chính phương

Bài 27: Ta có: $x^3 - 3x^2 + x + 2 = (x-2)(x^2 - x - 1)$

* Xét $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$: thỏa mãn yêu cầu bài toán.

* Xét $x^2 - x - 1 = 0$: Loại.

* Xét $x - 2 = x^2 - x - 1$ ta có: $x = 1$.

* TH $x \ne 2; x \ne 1$. Với x nguyên ta chứng minh được $(x-1; x^2 - x - 1) = 1$.

Nên $x^3 - 3x^2 + x + 2$ là số chính phương khi $x - 2$ và $x^2 - x - 1$ cùng là số chính phương.

Để $x^2 - x - 1$ là số chính phương thì $x^2 - x - 1 = y^2$ với $y \in \mathbb{Z}$.

Tìm được $x = 2$ (loại do $x \ne 2$) và $x = -1$. Thử lại $x = -1$ ta có $x^3 - 3x^2 + x + 2$ có giá trị bằng -1 không phải là số chính phương nên $\Rightarrow x = -1$ (loại).

Vậy $x = 2$ hoặc $x = 1$ thì $x^3 - 3x^2 + x + 2$ là số chính phương.

Bài 28: Nếu mệnh đề b) đúng thì A + 51 có chữ số tận cùng là 2 và A – 38 có chữ số tận cùng là 3 nên cả hai số này đều không là số chính phương. Vậy mệnh đề b) sai và các mệnh đề a) và c) đúng.

Giả sử $A + 51 = m^2; A - 38 = n^2 (m, n \in N; m > n) \Rightarrow m^2 - n^2 = 89$ hay (m – n)(m + n) = 89

Vì 89 là số nguyên tố nên m + n = 89 và m – n = 1 => m = 45 và n = 44 nên $A = 1974$.

Bài 29: Giả sử tồn tại số hữu tỉ n và số nguyên dương m để $n^2 + n + 503 = m^2$.

Vì: n là số hữu tỉ nên tồn tại $a, b \in Z$, $b \ne 0$ sao cho $n = \dfrac{a}{b}$ và $(a;b) = 1$

Ta có: $n^2 + n + 503 = m^2 \Rightarrow \left(\dfrac{a}{b}\right)^2 + \dfrac{a}{b} + 503 = m^2 \Leftrightarrow a^2 + ab + 503b^2 = m^2b^2$

$\Leftrightarrow a^2 = -b(a + 503b - m^2b^2) \Rightarrow a^2 \vdots b$

Mà $(a;b) = 1$ nên $b = 1$ hay $b = a \in Z$

Do đó: $n^2 + n + 503 = m^2 \Leftrightarrow 4n^2 + 4n + 2012 = 4m^2 \Leftrightarrow 4m^2 - (2n+1)^2 = 2011$

$\Leftrightarrow (2m-2n-1)(2m+2n+1)=2011$

Vì: $(2m-2n-1)+(2m-2n-1)=4m>0$.

Ta có các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: $\begin{cases}2m-2n-1=1\\2m+2n+1=2011\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=503\\n=502\end{cases}$

- Trường hợp 2: $\begin{cases}2m-2n-1=2011\\2m+2n+1=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=503\\n=-503\end{cases}$

Vậy, $n=502$; $n=-503$ thỏa mãn bài toán.

Bài 30: Giả sử $\begin{cases}n-50=a^2\\n+50=b^2\end{cases}$ với a,b nguyên dương và $a<b$.

Suy ra $b^2-a^2=100 \Leftrightarrow (b-a)(a+b)=2^2.5^2$

Do $b-a<a+b$ và chúng có cùng tính chẵn, lẻ nên $b-a$ và $a+b$ phải là các số chẵn.

Do đó $\begin{cases}b-a=2\\a+b=50\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=24\\b=26\end{cases}$

Vậy $n=626$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 31: Ta có: $\begin{cases}n+24=k^2\\n-65=h^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \mathrm{k}^2-24=\mathrm{h}^2+65$

$\Leftrightarrow (\mathrm{k}-\mathrm{h})(\mathrm{k}+\mathrm{h})=89=1.89$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\mathrm{k}+\mathrm{h}=89\\\mathrm{k}-\mathrm{h}=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\mathrm{k}=45\\\mathrm{h}=44\end{cases}$

Vậy: $\mathrm{n}=45^2-24=2001$

Bài 32: Ta có : $B = 4x(x + y)(x + y + z)(x + z) + y^2z^2$

$B = 4(x^2 + xy + xz)(x^2 + xy + xz + yz) + y^2z^2$

$B = 4(x^2 + xy + xz)^2 + 4(x^2 + xy + xz).yz + y^2z^2$

$B = (2x^2 + 2xy + 2xz + yz)^2$

Vì x, y, z là số nguyên nên $2x^2 + 2xy + 2xz + yz$ là số nguyên

$\Rightarrow$ B là số chính phương

Bài 33:

$\Rightarrow n^4+n^3+1=(n^2+k)^2=n^4+2kn^2+k^2\ (k\in\mathbb{N}^*)$

$\Rightarrow n^3-2kn^2=k^2-1 \Rightarrow n^2(n-2k)=k^2-1\ge 0$

Mà $k^2-1 \vdots n^2 \Rightarrow k^2=1$ hoặc $n^2\le k^2-1$

Nếu $k^2=1\Rightarrow k=1\Rightarrow n^2(n-2)=0\Rightarrow n=2$

Thử lại $2^4+2^3+1=5^2$ (thỏa mãn)

Khi $k\neq 1\Rightarrow k^2>k^2-1\geq n^2\Rightarrow k>n$

$\Rightarrow n-2k<0$ mâu thuẫn với điều kiện $n^2\left(n-2k\right)=k^2-1\geq 0$.

Vậy $n=2$.

Bài 34: + Giả sử tồn tại cặp số tự nhiên $\left(x;y\right)$ thỏa mãn yêu cầu. Khi đó $a,b\in N*$ mà $\begin{cases}2\left(x^2+y^2-3x+2y\right)-1=a^2\\5\left(x^2+y^2+4x+2y+3\right)=b^2\end{cases}$, suy ra $a^2+b^2=7\left[\left(x+1\right)^2+\left(y+1\right)^2\right]$

Nói cách khác phương trình (1): $A^2+B^2=7\left(X^2+Y^2\right)$ có nghiệm $\left(X;Y;A;B\right)$ với $X,Y\in N*$ và $A,B\in N$. Ta coi $\left(X;Y;A;B\right)$ là bộ nghiệm của (1) thỏa mãn điều kiện X + Y nhỏ nhất.

+ Từ (1) có $\left(A^2+B^2\right)\vdots 7$. Nhận thấy một số chính phương chia cho 7 chỉ có thể cho số dư là 0.1.2.4 nên $\left(A^2+B^2\right)\vdots 7$ khi và chỉ khi $A\vdots 7$ và $B\vdots 7$, dẫn tới biểu diễn $A=7A_1$, $B=7B_1$ với $A_1,B_1\in N*$. Khi đó (1) trở thành $X^2+Y^2=7\left(A_1^{\,2}+B_1^{\,2}\right)$.

Lập luận tương tự dẫn đến $X=7X_1,Y=7Y_1$ với $X_1,Y_1\in N*$.

Bài 35: Ta có:

$$\begin{aligned}M&=\left(n+1\right)^4+n^4+1\\&=\left[\left(n^2+2n+1\right)^2-n^2\right]+\left[\left(n^4+2n^2+1\right)-n^2\right]\\&=\left(n^2+n+1\right)\left(n^2+3n+1\right)+\left(n^2+n+1\right)\left(n^2-n+1\right)\\&=\left(n^2+n+1\right)\left(2n^2+2n+2\right)\\&=2\left(n^2+n+1\right)^2\quad (*)\end{aligned}$$

Vì $n\in N^*$ nên $\left(n^2+n+1\right)^2$ là số chính phương khác 1.

Do đó, từ (*) suy ra $M=\left(n+1\right)^4+n^4+1$ chia hết cho một số chính phương khác 1 với mọi số n nguyên dương (đpcm).

Bài 36: Vì $12n^2+1$ là số lẻ nên để $\sqrt{12n^2+1}$ là số nguyên thì $12n^2+1=\left(2m+1\right)^2, m\in\mathbb{N}$.

Suy ra, $m\left(m+1\right)=3n^2$.

Vì $\left(m;m+1\right)=1$ nên xảy ra hai trường hợp $\left[\begin{array}{l}m=3u^2;m+1=v^2\\m=v^2;m+1=3u^2\end{array}\right., u,v\in\mathbb{Z}^*$.

Nếu $m = v^2; m+1 = 3u^2$ thì $v^2 = 3u^2 - 1$ hay v^2 là số chính phương chia 3 dư 2. Điều này không xảy ra vì mọi số chính phương chia 3 dư là 0 hoặc 1. Do đó chỉ xảy ra $m = 3u^2; m+1 = v^2$.

Ta có $2\sqrt{12n^2+1} + 2 = 2\left(2m+1\right) + 2 = 4m + 4 = 4v^2$ là số chính phương (điều phải chứng minh)

Bài 37: Từ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ ta được $\frac{a+b}{ab} = \frac{1}{c} \Leftrightarrow c\left(a+b\right) = ab \Leftrightarrow ab - ac - bc = 0$.

Từ đó ta được $ab - ca - bc + c^2 = c^2 \Leftrightarrow \left(a-c\right)\left(b-c\right) = c^2$.

Gọi $d = \left(a-c; b-c\right)$, khi đó ta có $c^2 \vdots d^2$ nên $c \vdots d$., từ đó dẫn đến $a \vdots d; b \vdots d$.

Mà do a, b, c nguyên tố cùng nhau nên ta được $d = 1$.

Do đó ước chung lớn nhất của $a-c$ và $b-c$ là 1. Mà ta lại có $\left(a-c\right)\left(b-c\right) = c^2$ nên suy ra $a-c$ và $b-c$ là các số chính phương.

Đặt $a - c = m^2; b - c = n^2 \left(m, n \in N^*\right)$. Khi đó ta có

$c^2 = \left(a-c\right)\left(b-c\right) = m^2.n^2 \Rightarrow c = mn$.

Từ đó ta có $a + b = a - c + b - c + 2c = m^2 + n^2 + 2mn = \left(m+n\right)^2$.

Vậy $a+b$ là số chính phương.

Bài 38: Vì a, b là các số tự nhiên lẻ nên ta đặt $a = 2m+1; b = 2n+1 \left(m, n \in \mathrm{N}\right)$.

Khi đó ta có $a^2 + b^2 = \left(2m+1\right)^2 + \left(2n+1\right)^2 = 4\left(m^2 + n^2 + m + n\right) + 2$

Ta có một số chính phương chia hết cho 2 thì phải chia hết cho 4

Mà $a^2 + b^2$ chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4, nên $a^2 + b^2$ không phải là số chính phương

Bài 39: Giả sử $3^n + n^2 = m^2$ với m là một số nguyên dương.

Ta có $3^n + n^2 = m^2 \Leftrightarrow \left(m-n\right)\left(m+n\right) = 3^n$, do đó ta được $\begin{cases} m - n = 3^k \\ m + n = 3^{n-k} \end{cases}$

Do $m + n > m - n$ nên $n - k > k \Rightarrow n - 2k > 0$ hay $n - 2k \geq 1$. Ta xét các trường hợp

- Trường hợp 1: Nếu $n - 2k = 1$, khi đó từ hệ phương trình trên ta được

$$2n = 3^{n-k} - 3^k = 3^k\left(3^{n-2k} - 1\right) = 2.3^k \Rightarrow n = 3^k = 2k+1$$

Dễ dàng chứng minh được với $k \ge 2$ thì $3^k = (2+1)^k > 2^k + 1 > 2k+1$

Từ đó để $3^k = 2k+1$ thì $k=0$ hoặc $k=1$, từ đó ta tìm được $n=1$ hoặc $n=3$.

- Trường hợp 2: Nếu $n-2k \ge 2$, khi đó ta được $k \le n-k-2$ nên $3^k \le 3^{n-k-2}$

Do đó $2n = 3^{n-k} - 3^k \ge 3^{n-k} - 3^{n-k-2} = 3^{n-k-2}(3^2-1) = 8.3^{n-k-2}$

Do k là số nguyên dương nên $n-k-2 \ge 1$, do đó ta được

$3^{n-k-2} = (2+1)^{n-k-2} \ge 1 + 2(n-k-2)$

Từ đó suy ra $2n \ge 8[1+2(n-k-2)]$ hay ta được $8k+12 \ge 7n$.

Mặt khác ta lại có $n \ge 2k+2$ nên $7n \ge 14k+14$. Do đó ta được $8k+12 \ge 14k+14$, điều này vô lí.

Do đó trong trường hợp này không có số tự nhiên n thỏa mãn.

Vậy các số tự nhiên thỏa mãn bài toán là $n=1$ hoặc $n=3$.

Bài 40: Chứng minh bằng phản chứng.

Giả sử $b^2 - 4ac$ là số chính phương m^2 $(m \in N)$.

Xét $4a.\overline{abc} = 4a(100a + 10b + c) = 400a^2 + 40ab + 4ac$

$$= (20a+b)^2 - (b^2 - 4ac) = (20a+b)^2 - m^2 = (20a+b+m)(20a+b-m)$$

Tồn tại một trong hai thừa số $20a+b+m, 20a+b-m$ chia hết cho số nguyên tố $\overline{abc}$. Điều này không xảy ra vì cả hai thừa số trên đều nhỏ hơn $\overline{abc}$.

Thật vậy, do $m < b$ (vì $m^2 - b^2 = -4ac < 0$)

Nên: $20a + b - m \le 20a + b + m < 100a + 10b + c = \overline{abc}$.

Vậy nếu số tự nhiên $\overline{abc}$ là số nguyên tố thì $b^2 - 4ac$ không là số chính phương.

Bài 41: Đặt $m^2 + 12 = n^2$ với n là số nguyên. Khi đó , ta có:

$n^2 - m^2 = 12 \Leftrightarrow (n-m)(n+m) = 12.$

Do m, n là các số nguyên và $n-m; n+m$ là các số chẵn nên ta có các trường hợp như sau

+ Với $n-m=-6$ và $n+m=-2$ ta được $n=-4; m=2.$.

+Với $n+m=-6$ và $n-m=-2$ ta được $n=-4; m=-2.$

+ Với n + m = 6 và n – m = 2 ta được n = 4; m = 2. .

+ Với n + m = 2 và n – m = 6 ta được n = 4; m = -2..

Thử lại ta được các giá trị m nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m \in \{-2; 2\}$.

Bài 42: Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $x \geq y$.

Khi đó ta có: $x^2 < x^2 + 8y \leq x^2 + 8x < x^2 + 8x + 16 = (x+4)^2$

Theo yêu cầu của đề bài $x^2 + 8y$ là số chính phương nên nó sẽ nhận giá trị là một trong các số $(x+1)^2$; $(x+2)^2$; $(x+3)^2$. Ta xét các trường hợp cụ thể như sau:

TH1: $x^2 + 8y = (x+1)^2 \Rightarrow 2x+1 = 8y$. Điều này không thể xảy ra vì $2x+1$ là số lẻ còn $8y$ là số chẵn.

TH2: $x^2 + 8y = (x+3)^2 \Rightarrow 6x+9 = 8y$. Điều này không thể xảy ra vì $6x+9$ là số lẻ còn $8y$ là số chẵn.

TH3: $x^2 + 8y = (x+2)^2 \Rightarrow 4x+4 = 8y \Rightarrow x = 2y-1$.

Do: $y^2 + 8x$ là số chính phương nên $y^2 + 8(2y-1) = y^2 + 16y - 8$ là số chính phương.

Với y = 1 => x = 1 => Cặp số (x; y) = (1; 1) thỏa mãn yêu cầu.

Xét $y \geq 2$ ta có: $y^2 + 16y - 8 = (y+3)^2 + (10y-17) > (y+3)^2$ và

$y^2 + 16y - 8 = (y+8)^2 - 72 < (y+8)^2$. Do đó để: $y^2 + 16y - 8$ là số chính phương thì ta phải có: $y^2 + 16y - 8 \in \left\{(y+7)^2; (y+6)^2; (y+5)^2; (y+4)^2\right\}$

Giải trực tiếp các trường hợp ta được: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 3 \\ x = 5 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 11 \\ x = 21 \end{cases} \end{array}\right. (TM)$

Vậy các cặp (x; y) = (1; 1) ; (5; 3) ; (3; 5) ; (21; 11) ; (11; 21).

Bài 43: Do m, n là các số nguyên dương nên ta có:

$$(m+n)^2 < (m+n)^2 + 3m + n < (m+n+2)^2.$$

Do đó $(m+n)^2 < A < (m+n+2)^2$. Mà A là số chính phương nên ta được $A = (m+n+1)^2$.

Do đó $(m+n)^2 + 3m + n = (m+n+1)^2 \Rightarrow 3m + n = 2(m+n) + 1 \Rightarrow m = n+1$.

Từ đó suy ra $n^3 + 1 = (n+1)(n^2 - n + 1) = m(n^2 - n + 1) \vdots m$.

Bài 44: Ta xét các trường hợp sau

+ Trường hợp 1. Nếu p = 2. khi đó ta có $A = n^4 + 4n$.

Xét $n \ge 0$, khi đó dễ thấy $n^4 \le n^4 + 4n < n^4 + 4n^2 + 4 \Leftrightarrow n^4 \le n^4 + 4n < \left(n^2 + 2\right)^2$

Do $A = n^4 + 4n$ là số chính phương nên ta được $A = n^4 + 4n = n^4$ hoặc

$A = n^4 + 4n = \left(n^2 + 1\right)^2$

Với $n^4 + 4n = n^4 \Leftrightarrow n = 0$.

Với $n^4 + 4n = \left(n^2 + 1\right)^2 \Leftrightarrow n^4 + 4n = n^4 + 2n^2 + 1 \Leftrightarrow 2n^2 - 4n + 1 = 0$, phương trình không có nghiệm nguyên.

Xét $n = -1$ và $n = -2$, thay vào ta được A không phải là số chính phương.

Xét $n < -2$, khi đó dễ thấy $n^4 - 2n^2 + 1 \le n^4 + 4n < n^4 \Leftrightarrow \left(n^2 - 1\right)^2 < n^4 + 4n < \left(n^2\right)^2$

Do đó $A = n^4 + 4n$ không thể là số chính phương.

+ Trường hợp 1. Nếu $p > 2$, khi đó do p là số nguyên tố nên p là số lẻ.

Do A là số chính phương nên tồn tại số nguyên t để $A = n^4 + 4n^{p-1} = t^2$.

Dễ thấy với $n = 0$ thì A là số chính phương.

Xét $n \ne 0$, khi đó ta có $n^4 + 4n^{p-1} = t^2 \Leftrightarrow 1 + 4n^{p-3} = \left(\dfrac{t}{n^2}\right)^2$.

Do p là số nguyên tố lẻ nên $1 + 4n^{p-3}$ là số nguyên dương, do đó $\left(\dfrac{t}{n^2}\right)^2$ và $4n^{p-3}$ là số chính phương.

Đặt $4n^{p-3} = a^2; \left(\dfrac{t}{n^2}\right)^2 = b^2 \left(a, b \in Z\right)$ ta có phương trình

$$1 + a^2 = b^2 \Leftrightarrow \left(b - a\right)\left(b + a\right) = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b - a = b + a = 1 \\ b - a = b + a = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 1; a = 0 \\ b = -1; a = 0 \end{array}\right.$$

Với $b = 1$; $a = 0$ ta có $4n^{p-3} = 0; \left(\dfrac{t}{n^2}\right)^2 = 1 \Rightarrow n = 0$, điều này vô lý vì $n \ne 0$

Với $b = -1$; $a = 0$ ta có $4n^{p-3} = 0; \left(\dfrac{t}{n^2}\right)^2 = 1 \Rightarrow n = 0$, điều này vô lý vì $n \ne 0$

Như vậy khi $p > 2$ không tồn tại số nguyên n để A là số chính phương.

Vậy với $n = 0$; $p = 2$ thì A là một số chính phương.

Bài 45: Giả sử $m \neq n$. Theo bài ra ta có:

$(m+n)^2 - 1 = (m+n+1)(m+n-1) \vdots (m+n+1)$

$\Rightarrow 2(m^2+n^2) - 1 - \left[(m+n)^2 - 1\right] \vdots (m+n+1)$

$\Leftrightarrow (2m^2 + 2n^2 - m^2 - 2mn - n^2) \vdots (m+n+1)$

$\Leftrightarrow (m-n)^2 \vdots (m+n+1)$

Do $m+n+1$ là số nguyên tố $\Rightarrow m+n+1$ là ước của $m-n$

Mà $m-n < m-n+1$ do đó vô lý

Vậy giả sử sai $\Rightarrow m = n \Rightarrow m.n = m^2$ là số chính phương

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 46: Ta có: $M = x^4 + (x+1)^3 - 2x^2 - 2x$

$M = x^4 + x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 2x^2 - 2x$

$M = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

$\Rightarrow 4M = 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4$

+) Ta có:

$(2x^2 + x)^2 = 4x^4 + 4x^3 + x^2 \leq 4x^4 + 4x^3 + x^2 + 2x^2 + (x+2)^2 = 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 = 4M$

Ta thấy dấu "=" không thể xảy ra nên $(2x^2 + x)^2 < 4M$ (1)

+) Với $x = 0 \Rightarrow 4M = 4 \Leftrightarrow M = 1 \Rightarrow$ M là số chính phương

Với $x = 1 \Rightarrow 4M = 20 \Leftrightarrow M = 5 \Rightarrow M$ không là số chính phương.

Với $x = 2 \Rightarrow 4M = 124 \Rightarrow M = 31 \Rightarrow$ M không là số chính phương

Với $x \neq \{0;1;2\}$ ta có: $\left[\begin{array}{l} x-1 \geq 2 \\ x-1 \leq -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 3 \\ x \leq -1 \end{array}\right. \Rightarrow (x-1)^2 \geq 4 \Leftrightarrow 4 - (x-1)^2 \leq 0$

Ta có:

$4M = 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4$

$= 4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x + 3$

$= (2x^2 + x + 1)^2 - (x-1)^2 + 4$

$\Rightarrow 4M \leq (2x^2 + x + 1)^2$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow (2x^2 + 1)^2 < 4M \leq (2x^2 + x + 1)^2$. Mà $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow 4M = (2x^2 + x + 1)^2$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1 = 2 \\ x-1 = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -1 \end{array}\right.$

Vậy có 3 giá trị nguyên của x thỏa mãn yêu cầu bài toán là $x = 0$; $x = -1$; $x = 3$

Bài 47: Ta có: $n^3 - 1 = (n-1).(n^2 + n + 1) \vdots p$

$(p-1) \vdots n \Rightarrow p - 1 \geq n \Rightarrow p \geq n + 1$

Vì $p \geq n + 1 \Rightarrow (n-1)$ không chia hết cho p

Do đó: $(n-1)(n^2+n+1)\vdots p \Leftrightarrow (n^2+n+1)\vdots p$

Đặt : $p-1=kn,\quad k\ge 1 \Rightarrow p=kn+1\quad (*)$

$\Rightarrow (n^2+n+1)\vdots(kn+1) \Rightarrow kn+1\le n^2+n+1$

$\Leftrightarrow kn\le n^2+n \Leftrightarrow k\le n+1$

$k(n^2+n+1)-n(kn+1)\vdots(kn+1)$

$\Rightarrow \left[(k-1)n+k\right]\vdots(kn+1)$

$k\ge 1\Rightarrow (k-1)n+k>0$

$\Rightarrow (k-1)n+k\ge kn+1$

$\Rightarrow k\ge n+1$

$\Rightarrow k=n+1\Rightarrow p=kn+1=n^2+n+1$

$\Rightarrow n+p=n^2+2n+1=(n+1)^2$

Vậy $n+p$ là một số chính phương.

Bài 48: Theo đề ta có $\begin{cases} p+q=a^2 \\ p+4q=b^2 \\ a;b\in N^* \end{cases}$, suy ra $b^2-a^2=3q \Leftrightarrow (b-a)(b+a)=3q$

Từ q là số nguyên tố và $a+b\ge 2$ nên ta có các trường hợp sau:

+ TH 1: $\begin{cases} b-a=1 \\ b+a=3q \end{cases}$ suy ra $b=a+1$ và $2a+1=3q$, suy ra q lẻ.

Ta viết $q=2k+1$ ($k\in N^*$)

Khi đó $2a=3q-1=6k+2$ hay $a=3k+1$ và $p=a^2-q=9k^2+4k=k(9k+4)$

Do p nguyên tố nên $k=1$ và $p=13, q=3$.

+ TH 2: $\begin{cases} b-a=3 \\ b+a=q \end{cases}$, suy ra $b=a+3$ và $q=2a+3$

Lại có $p=a^2-q=a^2-2a-3=(a+1)(a-3)$. Do p nguyên tố nên $a=4$ và $p=5, q=11$.

+ TH 3: $\begin{cases} b-a=q \\ b+a=3 \end{cases}$ và $b>a\ge 1$.

Suy ra $b=2$ *và* $a=1$ khi đó $q=1$ không phải số nguyên tố.

Kết luận: (*p;q*) = (5;11), (13;3).

Trình bày cách khác:

Theo đề ta có $\begin{cases} p+q=a^2 \\ p+4q=b^2 \\ a;b\in N^* \end{cases}$.

Suy ra $b^2-a^2=3q \Leftrightarrow (b-a)(b+a)=3q$.

Vì $p,\ q$ là các số nguyên tố nên $a\ge 2,\ b\ge 4$. Do đó ta có các trường hợp sau:

+ TH 1: $\begin{cases} b-a=1 \\ b+a=3q \end{cases}$. Khi đó $b=a+1$ và $2a+1=3q$. Suy ra q lẻ.

Ta viết $q=2k+1$ ($k\in N^*$)

Khi đó $2a=3q-1=6k+2$ hay $a=3k+1$ và $p=a^2-q=9k^2+4k=k(9k+4)$

Do p nguyên tố nên $k=1$. Suy ra $p=13,\ q=3$.

+ TH 2: $\begin{cases} b-a=3 \\ b+a=q \end{cases}$. Khi đó $b=a+3$ và $q=2a+3$

Lại có $p=a^2-q=a^2-2a-3=(a+1)(a-3)$.

Do p nguyên tố nên $a=4$. Suy ra $p=5,\ q=11$.

Vậy $p=13,\ q=3$ hoặc $p=5,\ q=11$.

Bài 49: Gọi 2 số tự nhiên liên tiếp đó là $a, a+1 (a\in\mathbb{Z})$, theo đề bài ta có:

$(a+1)^3-a^3=n^2 \Leftrightarrow a^3+3a^2+3a+1-a^3=n^2 \Leftrightarrow 3a^2+3a+1=n^2$ (*)

+)Xét TH: $-1\le a\le 0$ ta có: $\left[\begin{array}{l} a=0\Rightarrow n=1=0^2+1^2\Rightarrow a=0 \quad (tm) \\ a=-1\Rightarrow n=1=0^2+1^2\Rightarrow a=-1 \quad (tm) \end{array}\right.$

+)Xét TH: $\left[\begin{array}{l} a>0 \\ a<-1 \end{array}\right. \Rightarrow (2a)^2<3a^2+3a+1<(2a+1)^2$

Vậy ta có n là tổng của hai số chính phương liên tiếp .

Bài 50: Giả sử $2018+n^2$ là số chính phương thì $2018+n^2=m^2$ $\left(m\in\mathbb{N}^*\right)$

Suy ra $2018=m^2-n^2 \Leftrightarrow 2018=(m-n)(m+n)$

Như vậy trong hai số $m-n$ và $m+n$ phải có ít nhất một số chẵn (1)

Mà $(m-n)+(m+n)=2m$ nên suy ra hai số $m-n$ và $m+n$ cùng tính chẵn lẻ (2)

Từ (1) và (2) suy ra hai số $m-n$ và $m+n$ là hai số chẵn

$\Rightarrow (m-n)(m+n)$ chia hết cho 4

Mà 2018 không chia hết cho 4 nên điều giả sử là sai.

Vậy không tồn tại số tự nhiên n để $2018+n^2$ là số chính phương.

Bài 51: Khi $n=2$ ta có: $A=4m^2-4m-4=(2m-1)^2-5=4k^2$

$\Leftrightarrow (2m-2k-1)(2m+2k-1)=5$

$TH1: \begin{cases} 2m-2k-1=1 \\ 2m+2k-1=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ k=1 \end{cases} (tm)$

$TH2: \begin{cases} 2m-2k-1=-1 \\ 2m+2k-1=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-1 \\ k=-1 \end{cases} (ktm)$

$TH3: \begin{cases} 2m-2k-1=5 \\ 2m+2k-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ k=-1 \end{cases} (tm)$

$TH4: \begin{cases} 2m-2k-1=-5 \\ 2m+2k-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-1 \\ k=1 \end{cases} (ktm)$

Vậy $m = 2$

Với $n \geq 5, m = 1 \Rightarrow A = n^2 - 2n - 4 = (n-1)^2 - 5 < (n-1)^2$

$A = n^2 - 2n - 4 = (n-2)^2 + 2n - 8 > (n-2)^2$ $(Do\ n \geq 5)$

$\Rightarrow (n-2)^2 < A < (n-1)^2$.Do đó Akhông thể là số chính phương

Khi $m \geq 2$ ta có:

$A = m^2n^2 - 4m - 2n$

$A = (mn-1)^2 + 2mn - 4m - 2n - 1$

$A = (mn-1)^2 + 2(n-2)(m-1) - 5$

$\Rightarrow A \geq (mn-1)^2 + 2(n-2) - 5(do\quad m \geq 2 \Rightarrow m - 1 \geq 1)$

$\Rightarrow A > (mn-1)^2 \qquad (Do \quad n \geq 5 \Rightarrow 2(n-2) - 5 \geq 1)$

Lại có: $A = m^2n^2 - 4m - 2n \leq (mn)^2$

$\Rightarrow (mn-1)^2 < A < (mn)^2$. Do vậy Akhông thể là số chính phương

Bài 52: Từ $2a^2 + a = 3b^2 + b$ ta có a > b và

$$\Leftrightarrow 2(a^2 - b^2) + a - b = b^2 \Leftrightarrow (a-b)(2a + 2b + 1) = b^2$$

Đặt $(a-b; 2a+2b+1) = d$

$\Rightarrow (a-b) \vdots d; (2a+2b+1) \vdots d$ và b⋮ d

$\Rightarrow [2a + 2b + 1 - 2(a-b)] \vdots d \Rightarrow (4b+1) \vdots d$ mà b⋮ d

⇒ 1⋮ d hay d = 1.

Vậy $a-b$và $2a+2b+1$nguyên tố cùng nhau, kết hợp với (*) ta có:

$a-b$ và $4a+4b+1$đều là số chính phương.

Bài 53: Giả sử $x^2 + 2x + 20 = a^2\ (a \in N, a > 4)$. $\Leftrightarrow a^2 - (x+1)^2 = 19$

$$\Leftrightarrow (a - x - 1)(a + x + 1) = 19.$$

Vì $(a-x-1) < (a+x+1)$ và 19 = 1.19 nên $\begin{cases} a - x - 1 = 1 \\ a + x + 1 = 19 \end{cases}$. Do đó $x = 8$.

Thử lại với x = 8, ta có $x^2 + 2x + 20 = 8^2 + 2.8 + 20 = 10^2$ thỏa mãn.

Bài 54. Ta có: A= $(x^2 - 8x)(x^2 - 8x + 7)$.

Đặt $x^2 - 8x = y$ thì A = $y(y + 7) = y^2 + 7y$

Giả sử $y^2 + 7y = m^2$ (m thuộc N)

=> $4y^2 + 28y + 49 - 4m^2 = 49$

=> (2y + 7 + 2m)(2y + 7 - 2m) = 49 = 49.1 = (-1).(-49) = 7.7 = (-7).(-7).

Ta thấy 2y + 7 + 2m ≥ 2y + 7 - 2m nên ta có 4 trường hợp:

Trường hợp 1: $\begin{cases} 2y+7+2m=49 \\ 2y+7-2m=1 \end{cases}$, do đó $y=9$.

Suy ra $x\in\{-1;9\}$.

Trường hợp 2: $\begin{cases} 2y+7+2m=-1 \\ 2y+7-2m=-49 \end{cases}$, do đó $y=-16$.

Suy ra $x=4$.

Trường hợp 3: $\begin{cases} 2y+7+2m=7 \\ 2y+7-2m=7 \end{cases}$, do đó $y=0$.

Suy ra $x\in\{0;8\}$.

Trường hợp 4: $\begin{cases} 2y+7+2m=-7 \\ 2y+7-2m=-7 \end{cases}$, do đó $y=-7$.

Suy ra $x\in\{1;7\}$.

Vậy $x\in\{-1;0;1;4;7;8;9\}$.

Bài 55. Ta có : $A=\underbrace{11...1}_{n}\underbrace{00...0}_{n}+\underbrace{11...1}_{n}-\underbrace{88...8}_{n}+1$.

Đặt $a=\underbrace{11...1}_{n}$ thì $9a=\underbrace{99...9}_{n}$. Do đó $\underbrace{99...9}_{n}+1=10^n=9a+1$.

Ta có $A=a.10^n+a-8a+1=a(9a+1)+a-8a+1$

$\Rightarrow A=9a^2-6a+1=(3a-1)^2$.

$\Rightarrow A=\underbrace{33...3}_{n-1}2^2$.

Vậy A là một số chính phương.

Bài 56. Giả sử $2^x+5^y=k^2$ (k thuộc N)

Nếu x = 0 thì $1+5^y=k^2$ do đó k chẵn => k^2 chia hết cho 4 nhưng $1+5^y$ chia 4 dư 2.

Vậy x khác 0, từ $2^x+5^y=k^2$ => k lẻ và k không chia hết cho 5. Xét hai trường hợp.

+) Với y = 0 thì $2^x+1=k^2=(2n+1)^2$ (vì k lẻ nên $k=2n+1, n\in N$).

$\Rightarrow 2^x=4n(n+1)\Rightarrow n=1$. Khi đó x = 3; y = 0 (thỏa mãn)

Thử lại: $2^x+5^y=2^3+5^0=9$ là số chính phương.

+) Với $y\neq 0$ và k không chia hết cho 5 $\Rightarrow k^2\equiv \pm 1 (\text{mod } 5)$

Từ $2^x + 5^y = k^2 \Rightarrow 2^x \equiv \pm 1 (\bmod 5) \Rightarrow x$ chẵn

Đặt $x = 2x_1\ (x_1 \in N)$, ta có

$5^y = (k + 2^{x_1})(k - 2^{x_1})$

$\Rightarrow \begin{cases} k + 2^{x_1} = 5^{y_1} \\ k - 2^{x_1} = 5^{y_2} \end{cases}$ với $y_1 + y_2 = y$ với $y_1 > y_2$, y_1, y_2 là các số tự nhiên.

$\Rightarrow 2^{x_1+1} = 5^{y_2}(5^{y_1-y_2} - 1) \Rightarrow 5^{y_2} = 1 \Rightarrow y_2 = 0$.

$\Rightarrow y_1 = y$. Khi đó $2^{x_1+1} = 5^y - 1$.

Nếu $y = 2t\,(t \in N)$ thì $2^{x_1+1} = 5^{2t} - 1 = 25^t - 1 \vdots 3$, vô lý

Vậy y lẻ, khi đó $2^{x_1+1} = 5^y - 1 = 4(5^{y-1} + 5^{y-2} + ... + 5 + 1)$.

Nếu $y > 1$ thì $5^{y-1} + 5^{y-2} + .. + 1$,lẻ (vô lý).

Nếu $y = 1 \Rightarrow x_1 = 1$ khi đó $x = 2; y = 1$.

Thử lại $2^x + 5^y = 2^2 + 5^1 = 9$ là số chính phương

Vậy $x = 2; y = 1$ hoặc x = 3, y = 0.

Bài 57.

-Với $n \in \{0;1;2;....;8\}$, bằng cách thử không có giá trị n thỏa mãn đề bài.

- Với $n \geq 9$, đặt $2^8 + 2^{11} + 2^n = t^2$, ta có $t^2 = 2^8\left(1 + 2^3 + 2^{n-8}\right) = 2^8(9 + 2^{n-8})$

$\Rightarrow 9 + 2^{n-8}$ là số chính phương

- Đặt $9 + 2^{n-8} = k^2\ \left(k \in N^*, k > 3\right)$

Do đó: $2^{n-8} = (k-3)(k+3) \Leftrightarrow \begin{cases} k + 3 = 2^a \\ k - 3 = 2^b \end{cases}$ (với a > b).

Khi đó: $(k+3) - (k-3) = 2^b.\left(2^{a-b} - 1\right)$

$\Leftrightarrow 2.3 = 2^b.\left(2^{a-b} - 1\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^b = 2 \\ 2^{a-b} - 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases}$.

Do đó $n - 8 = 3 + 1 \Leftrightarrow n = 12$.

Thử lại $2^8 + 2^{11} + 2^{12} = 80^2$.

Vậy số tự nhiên cần tìm là n = 12.

Bài 58. Ta có $10 \leq n \leq 99$ nên $21 \leq 2n + 1 \leq 199$.

Tìm số chính phương lẻ trong khoảng trên ta được 25; 49; 81; 121; 169.

Tương ứng với số n bằng 12; 24; 40; 60; 84.

Số $3n+1$ bằng 37; 73; 121; 181; 253. Chỉ có 121 là số chính phương.

Vậy $n=40$.

Bài 59. Ta có: $\begin{cases} A=\dfrac{10^{2m}-1}{9} \\ B=\dfrac{10^{m+1}-1}{9} \\ C=6.\dfrac{10^{m}-1}{9} \end{cases}$

Nên: $A+B+C+8=\dfrac{10^{2m}-1}{9}+\dfrac{10^{m+1}-1}{9}+6.\dfrac{10^{m}-1}{9}+8$

$$=\frac{10^{2m}-1+10^{m+1}-1+6.10^{m}-6+72}{9}$$

$$=\frac{\left(10^{m}\right)^2+16.10^{m}+64}{9}=\left(\frac{10^{m}+8}{3}\right)^2.$$

Bài 60. Vì $n^4+2n^3+2n^2+n+7$ là số chính phương nên:

$n^4+2n^3+2n^2+n+7=m^2,\ m\in\mathbb{N}.$

Ta có: $m^2=\left(n^2+n\right)^2+n^2+n+7>\left(n^2+n\right)^2\Rightarrow m>\left|n^2+n\right|\Rightarrow m\ge\left|n^2+n\right|+1$

$\Rightarrow m\ge\left|n^2+n+1\right|\Rightarrow m^2\ge\left(n^2+n+1\right)^2.$

Khi đó $n^4+2n^3+2n^2+n+7\ge\left(n^2+n+1\right)^2\Leftrightarrow n^2+n-6\le 0\Leftrightarrow -3\le n\le 2.$

Vì $n\in\mathbb{Z}$ nên $n\in\{-3;-2;-1;0;1;2\}$.

Thử lần lượt từng giá trị ta thu được $n=2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 61. Áp dụng bất đẳng thức quen thuộc $2\left(a^2+b^2\right)\ge\left(a+b\right)^2$ ta có được $2n^3\ge n^4$ hay $n\le 2.$

- Với $n=0,$ ta chọn $a=b=0.$
- Với $n=1,$ ta chọn $a=1,\ b=0.$
- Với $n=2,$ ta chọn $a=b=2.$

Vậy các giá trị của n cần tìm là 0; 1; 2.

Bài 62. Đặt $\overline{a_1a_2a_3a_4}=a^2$ và $\overline{b_1b_2b_3b_4}=b^2$ với $a,\ b\in\mathbb{N}$. Giả sử rằng $\overline{a_1a_2a_3a_4}>\overline{b_1b_2b_3b_4}$. Khi đó $32\le b<a<100$ và $\overline{a_1a_2a_3a_4}>\overline{b_1b_2b_3b_4}=a^2-b^2=\left(a+b\right)\left(a-b\right)=1111c=11.101c$ (do việc đặt $c=a_1-b_1=a_2-b_2=a_3-b_3=a_4-b_4$).

Do 11; 101 là các số nguyên tố và $a+b<200,\ a-b<100$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a+b=101 \\ a-b=11c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=(101+11c)\vdots 2 \\ b=(101-11c)\vdots 2 \end{cases}.$$

Vì $b \ge 32$ nên $c \le 3$. Kết hợp với $a+b=101$ (số lẻ) nên c lẻ, nghĩa là $c=1$ hoặc $c=3$.

Điều này dẫn đến $\begin{cases} a=56 \\ b=45 \end{cases};\ \begin{cases} a=67 \\ b=34 \end{cases}$.

Do đó các cặp số chính phương phải tìm là: 3136 và 2025; 4489 và 1156.

Trong trường hợp $a+b=11c$ thì $c=1$ (bị loại).

Bài 63. Xuất phát từ đồng nhất thức $(2a+1)^2+(2a^2+2a)^2=(2a^2+2a+1)^2$;

Ta chọn $a=1$ và $a_1=3=2a+1,\ a_2=4=2a^2+2a,$ ta được:

$a_1^2+a_2^2=(2a^2+2a+1)^2=5^2.$

Chọn $a_3=2(a^2+a)^2+2(a^2+a)=12$ ta có:

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2=\left(2(a^2+a)+1\right)^2+\left(2(a^2+a)^2+2(a^2+a)\right)^2$$

$$=\left(2(a^2+a)^2+2(a^2+a)+1\right)^2=13^2.$$

Cứ như vậy ta chọn được 2013 số thỏa mãn.

Bài 64. Ta có: $A=\sqrt[6]{\overline{4****}} \Rightarrow A^6=\overline{4****}$

A^6 có chữ số tận cùng bên trái là 4
$\Rightarrow 10000 \le A^6 < 100000$
$\Rightarrow 100 \le A^3 < 317$
$\Rightarrow 4 < A < 7$
A là một số tự nhiên $\Rightarrow A=5$ hoặc $A=6$
Với $A=5 \Rightarrow A^6=15625$, không thỏa
Với $A=6 \Rightarrow A^6=46656$
Vậy số phải tìm là: $A=\sqrt[6]{46656}$.

Bài 65. A_n được viết lại như sau: $A_n=111...1(10^{n+1}+5)+1$ ($n+1$ chữ số 1).

Đặt $t=111...1$ (n chữ số 1). Suy ra $9t+1=10^{n+1} \Rightarrow A=t(9t+1+5)+1=9t^2+6t+1=(3t+1)^2$.

Vậy A_n là một số chính phương.

Bài 66. Giả sử $2n+1=a^2$ và $3n+1=b^2$ với $a,b\in\mathbb{N}^*$. Khi đó

$5n+3=4(2n+1)-(3n+1)=4a^2-b^2=(2a-b)(2a+b)$.

Do $a^2 \equiv 1(mod 2)$ nên $a^2 \equiv 1(mod\,4)$. Suy ra $n \equiv 0(\mathrm{mod}\,2)$ và $b \equiv 1(\mathrm{mod}\,2)$. Do đó $2a-b>1$ và $2a+b>1$. Vậy $5n+3$ là hợp số.

Bài 67. Giả sử tồn tại $y > x \geq 1$ sao cho $xy+x=m^2$, $xy+y=n^2$ với $m,n \in \mathbb{N}^*$. Vì $y>x$ nên $xy+x>x^2 \Rightarrow m^2>x^2 \Rightarrow m>x \Rightarrow m \geq x+1$. Ta có: $y-x=n^2-m^2 \geq (m+1)^2-m^2 \Rightarrow$ $y-x>(x+1)^2-x^2 \Rightarrow y>3x+1$. Lúc này $y \not\in (988;1994)$. Vậy không tồn tại các số x, y phân biệt thuộc khoảng $(988;1994)$ sao cho $xy+x$ và $xy+y$ đều là các số chính phương.

Bài 68. Giả sử tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho ta có $\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}=k$ là một số hữu tỉ

$\Rightarrow \sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}=\dfrac{2}{k}$ Do đó ta có $\begin{cases} \sqrt{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(k+\dfrac{2}{k}\right) \\ \sqrt{n-2}=\dfrac{1}{2}\left(k-\dfrac{2}{k}\right) \end{cases}$

Ta suy ra $(n+1)$ và $(n-1)$ là hai số chính phương.

$\begin{cases} n+1=p^2 \\ n-1=q^2 \end{cases}$ với $p,q \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow p^2-q^2=2(*)$

$(p+q)$ và $(p-q)$ cùng tính chất chẵn lẻ

$(*) \Rightarrow (p+q)$ và $(p-q)$ là hai số tự nhiên chẵn.

$\Rightarrow (p+q)(p-q) \vdots 4 \Rightarrow 2 \vdots 4$ vôlí.

Do đó không có số tự nhiên n thỏa yêu cầu của bài toán.

Bài 69. Ta có:

* $a_1=14$ không phải là số chính phương.
* $a_2=144=12^2$
* $a_3=1444=38^2$

Ta hãy xét a_n là một số chính phương

$$a_n=k^2, k \in \mathbb{N}^*$$

a_n tận cùng là 4444.

Số dư của phép chia a_n cho 16 bằng số dư của phép chia 4444 cho 16.

$\Rightarrow a_n=16q+12$

$\Rightarrow k^2=16q+12$ (*)

Suy ra: $k \vdots 2$ và $k \vdots 4$.

$\Rightarrow k=2(2t+1)=4t+2$

$\Rightarrow k^2=16t^2+16t+4=16h+4$ mâu thuẫn $(*)$.

Ta suy ra: a_n với $n>4$ không phải là số chính phương.

Bài 70. Chọn 3 số tự nhiên a,b,c nguyên tố cùng nhau và thỏa tính chất. $a=b+c$

Ta có $n=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=(b+c)^2(b^2+c^2)+b^2c^2$

$=b^4+c^4+3b^2c^2+2b^3c+2bc^3=\left(b+c+bc\right)^3$.

Do đó n là một số chính phương.

Có vô số bộ ba số tự nhiên nguyên tố cùng nhau mà một trong 3 số bằng tổng hai số kia.

TD: $(2,3,5)=1$ và $5=2+3$.

$\Rightarrow n=6^2+15^2+10^2=19^2$.

Bài 71. $p(x)$ là một đa thức bậc 4 và hệ số của x^4 là 1 nên $p(x)$ chỉ có thể là bình phương đúng của một tam thức bậc 2 có dạng: $\alpha(x)=x^2+px+q$

Do đó, ta có : $x^4+mx^3+29x^2+nx+4=\left(x^2+px+q\right)^2$

$=x^4+2px^3+\left(p^2+2q\right)x^2+2pqx+q^2$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}q^2=4\\2pq=n\\p^2+2q=29\\2p=m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}q=2\\p=\pm 5\\m=\pm 10\\n=\pm 20\end{cases}$$

Vậy $(m,n)=(10,20),(-10,-20)$.

Bài 72. Ta có : $a\,\vdots\,6,\ a\neq 0\Leftrightarrow a=6k,k\in\mathbb{N}^*$

Suy ra : $1000a=6000k=20^2.15k$

1000a là số chính phương khi và chỉ khi $k=15p^2,\ p\in\mathbb{N}^*$

$\Rightarrow a=90p^2,\ p\in\mathbb{N}^*$

Do đó số tự nhiên a nhỏ nhất phải tìm là : a = 90

2. Ta có : $2002=2.7.11.13$

$2002.b$ là số chính phương nên ta có : $b=2002k^2,k\in\mathbb{N}^*$

b chia hết cho bốn số nguyên tố liên tiếp mà b đã chứa ba thừa số nguyên tố liên tiếp là 7, 11 và 13 nên thừa số nguyên tố thứ tư là 5 hoặc 17, b nhỏ nhất nên ta chọn thừa số nguyên tố thứ 5.

$\Rightarrow b=2002.25t^2,t\in\mathbb{N}^*$

* Nếu $t^2=1\Rightarrow b=50050\Rightarrow b-1=50049\not\vdots\,9$ không thỏa mãn yêu cầu.

* Nếu $t^2=4\Rightarrow b=200200\Rightarrow b-1=200199\,\vdots\,9$ thỏa mãn.

Vậy số b phải tìm là b =200200.

Bài 73. Ta có: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

Giả sử $a>0$

Muốn cho a^2-b^2 là một số chính phương, ta chỉ cần chọn

$$\begin{cases}a+b=du^2\\a-b=dv^2,u>v\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{d(u^2+v^2)}{2}\\b=\dfrac{d(u^2-v^2)}{2}\end{cases}$$

Trong đó hoặc d chẵn hoặc u và v cùng tính chất chẵn, lẻ $(u>v)$

Lúc đó ta có: $a^2-b^2=c^2\Leftrightarrow a^2=b^2+c^2$

Các nghiệm của phương trình là:

$$a=d(u^2+v^2),b=2duv,c=d(u^2-v^2)$$

Vậy a^2-b^2 có thể là một số chính phương.

Bài 74. Ta có $k=\overline{ab}=10a+b$ nên $k+ab=(a+b)^2$

$\Leftrightarrow 10a+b+ab=a^2+b^2+2ab \Leftrightarrow b^2+ab-b=10a-a^2$

$\Leftrightarrow b^2+(a-1)b=a(10-a)$

Mà $a(10-a)\le 25$ do đó $b^2+(a-1)b\le 25 \Leftrightarrow b^2\le 25$ (vì $(a-1)b\ge 0$)

$\Rightarrow b=0;2;3;4;5$. Ta xét từng trường hợp và kết luận.

Vậy số k cần tìm là: 91; 13; 63.

Bài 75. Chuyển về dạng $A=2017^2(n^4+n^3+n^2)=2017^2n^2(n^2+n+1)$

Để A chính phương thì n^2+n+1 chính phương.

Giá trị n thỏa mãn là $n=-1$ hoặc $n=0$

Bài 76. Giả sử $\dfrac{n-37}{n+43}=\left(\dfrac{q}{p}\right)^2$ với p,q là hai số nguyên dương và $(p,q)=1$. Ta có

$n-37=k.q^2, n+43=k.q^2$ với k là số nguyên dương

$\Rightarrow k(p-q)(p+q)=80=2^4.5.1$

Trường hợp 1: Trong hai số p,q có một chữ số chẵn, một số lẻ $\Rightarrow p+q$ và $p-q$ đều lẻ.

Từ $(1)\Rightarrow\begin{cases}p+q=5\\p-q=1\\k=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}p=3\\q=2\Rightarrow n=101\\k=16\end{cases}$

Trường hợp 2: Cả hai số p,q đều lẻ. Đặt $p=2a-1,\ q=2b-1$ với a,b là các số nguyên dương

Từ $(1)\Rightarrow k(a-b)(a+b-1)=20=2^2.5.1$

Ta có $a+b-1>a-b$ và $a+b-1, a-b$ khác tính chẵn lẻ.

Xét các cặp số $(a-b;a+b-1)$ lần lượt $(1;2),(1;4),(1;20),(2;5),(4;5),(5;20)$.

Tính $a,b\Rightarrow p,q,k$ ta được n bằng $38,47,55,82,199,398$

Vậy n bằng $38,47,55,82,199,398$

Bài 77. Ta có: $\overline{abc}=100a+10b+c=n^2-1$;

$\overline{cba}=100c+10b+a=n^2-4n+4\Rightarrow 99(a-c)=4n-5\Rightarrow 4n-5\,\vdots\,99$ (*)

Mặt khác: $100\le n^2-1\le 999\Rightarrow 101\le n^2\le 1000$

$\Rightarrow 11 \le n \le 31$ (do $n \in \mathbb{Z}$) $(**)$

Từ $(*)$ và $(**)$ $\Rightarrow 4n-5=99 \Rightarrow n=26$. Vậy $\overline{abc}=675$

Bài 78. Giả sử: $n+12=a^2$; $n-11=b^2$ $(a,\, b \in \mathbb{N};\, a>b) \Rightarrow a^2-b^2=(n+12)-(n-11)=23$

Hay $(a-b)(a+b)=1.23$. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} a-b=1 \\ a+b=23 \end{cases}$ $(Do: a-b<a+b) \Rightarrow \begin{cases} a=12 \\ b=11 \end{cases}$

Với $\begin{cases} a=12 \\ b=11 \end{cases} \Rightarrow n=132$

Vậy n = 132.

Bài 79. Đặt: $n^2-14n-256=k^2\,(k \in \mathbb{N})$ $\Rightarrow (n-7)^2-k^2=305 \Rightarrow (n-7+k)(n-7-k)=305$

Mà: 305 = 1.305 = (- 305)(- 1) = 5.61 = (- 61)(- 5) và $(n-7-k) \le (n-7+k)$ nên xét các trường hợp: $\begin{cases} n-7-k=1 \\ n-7+k=305 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} n-7-k=-305 \\ n-7+k=-1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} n-7-k=5 \\ n-7+k=61 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} n-7-k=-61 \\ n-7+k=-5 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} n=160 \\ k=152 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} n=-146 \\ k=152 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} n=40 \\ k=28 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} n=-26 \\ k=28 \end{cases}$

Vì: $n,\, k \in \mathbb{N} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n=40 \\ n=160 \end{array}\right.$ Vậy $\left[\begin{array}{l} n=40 \\ n=160 \end{array}\right.$

Bài 80. Vì: n là số có 2 chữ số nên $9<n<100 \Rightarrow 18<2n<200$

Mà: 2n là số chính phương chẵn nên $2n=\{36;64;100;144;196\} \Rightarrow n=\{18;32;50;72;98\}$

$\Rightarrow n+4=\{22;36;54;76;102\}$ chỉ thấy $n+4=36$ là số chính phương $\Rightarrow n=32$

Vậy n = 32.

Bài 81. Giả sử $A=1010n^2+2010(n+p)+10^{10^{195}}=a^2-b^2$ $(a,b \in \mathbb{N})$

Do: A chẵn nên $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ cũng chẵn $(a-b);(a+b)$ cùng tính chẵn lẻ.

$\Rightarrow a^2-b^2=(a-b)(a+b) \,\vdots\, 4$ tiếp tục ta có: $B=1010n^2+2010(n+p) \,\vdots\, 4$

Từ $B=1010n^2+2010(n+p)+2(n^2+n+p) \,\vdots\, 2$ $\Rightarrow (n^2+n+p)=n(n+1)+p \,\vdots\, 2$

Mà: $n(n+1) \,\vdots\, 2 \Rightarrow p \,\vdots\, 2 \Rightarrow p=2$

Với $p=2 \Rightarrow A=4k=(k+1)^2-(k+1)^2$ $(k \in \mathbb{Z}^+)$

Bài 82. Đặt: $3^x+171=y^2$.

Cách 1: Viết phương trình đã cho về dạng $9.\left(3^{x-2}+19\right)=y^2$ $(x\geq 2)$. Để $y\in\mathbb{Z}$ thì điều kiện cần và đủ là $3^{x-2}+19=z^2$ $\left(z\in\mathbb{Z}^+\right)$ là số chính phương.

+) Nếu $x-2=2k+1$ là số lẻ thì $3^{2k+1}+19=\left(3^{2k+1}+1\right)+18=4.B+18 \vdots 2$ nhưng không chia hết cho 4 nên không thể là số chính phương.

+) Nếu $x-2=2k$ là số chẵn thì $3^{x-2}+19=z^2 \Leftrightarrow 3^{2k}+19=z^2 \Leftrightarrow \left(z+3^k\right)\left(z-3^k\right)=19$

Vì 19 là số nguyên tố nên $z-3^k<z+3^k$ nên $\begin{cases} z-3^k=1 \\ z+3^k=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=10 \\ 3^k=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=10 \\ k=2 \end{cases}$

Vậy x = 6.

Cách 2: +) Nếu $x=2k+1$ $\left(k\in\mathbb{Z}^+\right)$ thì VT = 1.3 + 3 = $VT\equiv 1.3+3\equiv 6(mod 3)$ (vô nghiệm) vì VP là số chính phương. Do đó: $x=2k$ $\left(k\in\mathbb{Z}^+\right)$ thì để ý rằng $3^k>y-3^k>0$.

Mà: $y-3^k+y+3^k=2y \vdots 2$ nên 2 số trên cùng tính chẵn lẻ.

Mặt khác: 171 = $\left(y-3^k\right)\left(y+3^k\right)=1.171=3.57=9.19$. Xét từng trường hợp cụ thể ta có kết quả x = 6.

Cách 3: Ta có: $3^x\equiv 1,3(mod 8)$; $y^2\equiv 0,1,4(mod 8)$. Mà: $3^x+171=y^2\Rightarrow 3^x\equiv 1(mod 8)$. Do đó: x có dạng 2k $(k\in\mathbb{N})$.

Phương trình trở thành $A=\left(3^k\right)^2+171=y^2$ với k = 0, 1, 2 thì phương trình vô nghiệm nên nếu phương trình có nghiệm thì nghiệm đó phải ≥ 3. Do đó theo nguyên lý kẹp được ta có: $\left[\left(3^k\right)^2+3\right]^2\geq a>\left(3^k\right)^2$.

Khi đó: $A=\left[\left(3^k\right)^2+3\right]^2$ hoặc $A=\left[\left(3^k\right)^2+2\right]^2$

Giải từng trường hợp ra ta được k = 3 $\Rightarrow x=6\Rightarrow y=30$. Vậy x = 6.

Cách 4: Vì: $3^x \vdots 3; 171 \vdots 3\Rightarrow y \vdots 3$. Đặt y = 3k $\left(k\in\mathbb{Z}^+, k\neq 1\right)$.

Khi đó: $3^x+171=9k^2$. Vì: $171 \vdots 9; 9k^2 \vdots 9\Rightarrow 3^x \vdots 9\Rightarrow x=2h$ $\left(h\in\mathbb{N}^*\right)$

Khi đó: $9^{h-1}+19=k^2 \Leftrightarrow k^2-\left(3^{h-1}\right)^2=19 \Leftrightarrow \left(k+3^{h-1}\right)\left(k-3^{h-1}\right)=19$.

Để ý rằng: $0<k-3^{h-1}<k+3^{h-1}$ và $k-3^{h-1}+k+3^{h-1}=2k \vdots 2$ nên hai số này cùng tính chẵn lẻ.

Mặt khác: $\left(k+3^{h-1}\right)\left(k-3^{h-1}\right)=1.19\Rightarrow\begin{cases} k-3^{h-1}=1 \\ k+3^{h-1}=19 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} k=10 \\ h=3 \end{cases}\Rightarrow x=6$. Vậy x = 6.

Bài 83. Giả sử $5^x+12^x=y^2$. Nhận xét x = 1 không thỏa mãn phương trình. Khi đó $x\geq 2$. Từ phương trình ta thấy y lẻ.

Vì: $12^x \vdots 8,\ y^2 : 8$ dư 1 với y lẻ nên $5^x \equiv 1(mod 8)$ suy ra x chẵn.

Đặt: $x = 2k\ \left(k \in \mathbb{N}^*\right)$ ta có phương trình: $5^{2k} = \left(y - 12^k\right)\left(y + 12^k\right)$.

Do 5 là số nguyên tố nên tồn tại $m \in \mathbb{N},\ m < k$ sao cho $\begin{cases} y + 12^k = 5^{2k-m} \\ y - 12^k = 5^m \end{cases}$

Suy ra $2.12^k = 5^m\left(5^{2k-2m} - 1\right)$. Do 2, 12 đều nguyên tố cùng nhau với 5 mà: $2.12^k \vdots 5^m$ nên m = 0 và ta được y = $12^k + 1$.

Thay vào phương trình ta được: $2.12^k = 25^k - 1\ (*)$ hay $k \ge 2$ thì :

$25^k - 1 > 24^k = 2^k.12^k > 2.12^k$ (Loại)

Với k = 1 (TM) $\Rightarrow x = 2, y = 13$. Vậy phương trình có nghiệm tự nhiên x = 2.

Bài 84. Ta có: $A = (n+2)^2\left(4n^2 + 6n - 3\right)$.

TH1: $A = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n = 3 \\ n = \dfrac{-3 \pm \sqrt{21}}{4} \end{array}\right.$

TH2: $A \ne 0$ và A là số chính phương $\Rightarrow \left(4n^2 + 6n - 3\right)$ là số chính phương.

$\Leftrightarrow 4n^2 + 6n - 3 = k^2\ (k \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow (4n+3)^2 - (2k)^2 = 21 \Leftrightarrow (4n+3+2k)(4n+3-2k) = 21.$

Ta thấy: $\begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ nên $4n+3+2k$ và $4n+3-2k$ là các ước của 21.

+) $4n+3-2k \le 4n+3+2k$ với $\begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ Do đó ta có: $\begin{cases} 4n+3-2k = 1 \\ 4n+3+2k = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 5 \\ n = 2 \end{cases}$

hoặc: $\begin{cases} 4n+3-2k = 3 \\ 4n+3+2k = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ n = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} 4n+3-2k = -21 \\ 4n+3+2k = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 5 \\ n = \dfrac{-7}{2} \end{cases}$ hoặc

$\begin{cases} 4n+3-2k = -7 \\ 4n+3+2k = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ n = -2 \end{cases}$

Vậy $n = \pm 2$ là giá trị cần tìm.

Bài 85. Đặt: $M = k^4 - 8k^3 + 23k^2 - 26k + 10$ ta có:

$M = \left(k^4 - 2k^2 + 1\right) - 8k\left(k^2 - 2k + 1\right) + 9k^2 - 18k + 9$

$\Rightarrow M = (k-1)^2\left((k-3)^2 + 1\right)$. M là số chính phương khi và chỉ khi: $(k-1)^2 = 0$ hoặc $(k-3)^2 + 1$ là số chính phương.

TH1: $(k-1)^2 = 0 \Leftrightarrow k = 1$

TH2: $(k-3)^2+1$ là số chính phương

Đặt: $(k-3)^2+1=m^2\left(m\in\mathbb{Z}\right)\Leftrightarrow m^2-(k-3)^2=1\Leftrightarrow(m-k+3)(m+k-3)=1$

Vì: $m,k\in\mathbb{Z}\Rightarrow m-k+3\in\mathbb{Z},\ m+k-3\in\mathbb{Z}$ nên: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m-k+3=1\\m+k-3=1\end{cases}\\\begin{cases}m-k+3=-1\\m+k-3=-1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1,k=3\\m=-1,k=3\end{array}\right.\Rightarrow k=3.$

Vậy $\left[\begin{array}{l}k=1\\k=3\end{array}\right.$ thì $k^4-8k^3+23k^2-26k+10$ là số chính phương.

Bài 86. Ta có: $\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n}=\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6}$ Giả sử $(n+1)(2n+1)=6k^2\left(k\in\mathbb{N}^*\right)$ (1)

Do $(2n+1)$ lẻ nên $(n+1)$ chẵn $\Rightarrow n$ lẻ. Đặt $n=2m+1$ $\left(m\in\mathbb{N}^*\right)$

Thay vào (1) ta có: $(m+1)(4m+3)=3k^2$. Do: $(m+1,\ 4m+3)=1,$ $4m+3$ không là số chính phương nên ta có: $\begin{cases}m+1=a^2\\4m+3=3b^2\end{cases}$ $\left(a,b\in\mathbb{N}^*;ab=k\right)$ Từ đó ta có: $4a^2-3b^2=1$

$\Leftrightarrow(2a-1)(2a+1)=3b^2$. Ta lại có $(2a+1,\ 2a-1)=1$ nên có 2 khả năng:

(I) $\begin{cases}2a-1=a_1^2\\2a+1=b_1^2\end{cases}$ $\left(a_1,b_1\in\mathbb{N}^*\right)$ nên ta suy ra $b_1^2=3a_1^2+2$ (Vô lý vì số chính phương chia 3 chỉ dư 0 hoặc 1).

(II) $\begin{cases}2a-1=a_2^2\\2a+1=3b_2^2\end{cases}$ $\left(a_2,b_2\in\mathbb{N}^*\right)$ nên ta suy ra $3b_2^2-a_2^2=2$ suy ra a_2 lẻ và không chia hết cho 3.

Dễ thấy $a_2=5\Rightarrow n=337$ là số nguyên dương bé nhất thỏa mãn bài toán.

Khi đó: $\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n}=\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6}=\dfrac{(337+1)(2.337+1)}{6}=195^2$

Bài 87: Ta có: n = 0 thỏa mãn bài toán.

Xét n > 0, nếu cả 2 số $9n+16$ và $16n+9$ đều là số chính phương thì số $A_n=(9n+16)(16n+9)=(12n)^2+\left(9^2+16^2\right)n+12^2$ cũng là số chính phương.

Mặt khác: $(12n+12)^2<(12n)^2+\left(9^2+16^2\right)n+12^2<(12n+15)^2$ nên ta có: $\left[\begin{array}{l}A_n=(12n+13)^2\\A_n=(12n+14)^2\end{array}\right.$

Từ đó thay vào giải ra được: $\left[\begin{array}{l}n=1\\n=52\end{array}\right.$

Vậy có 3 giá trị của n thỏa mãn: $n=\{0,1,52\}$

Bài 88: Gọi số phải tìm là: $\overline{ab}\ (a,b\in\mathbb{N},1\le a,b\le 9)$ ta có hệ: $\begin{cases}\overline{ab}=4\overline{ba}+15 & (1)\\ \overline{ab}-9=a^2+b^2\,(2)\end{cases}$

Từ (1) ta thấy nếu $b\ge 2\Rightarrow 4\overline{ba}+15\ge 4.21+15\Rightarrow \overline{ab}\ge 99\Rightarrow \overline{ab}=99\Rightarrow a=b=9\,(KTM)$

Vậy b = 1 thay b = 1 vào (2) ta được: $\overline{a1}-9=a^2+1^2\Leftrightarrow 10a+1-9=a^2+1\Leftrightarrow a^2-10a+9=0$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\\a=9\end{array}\right.$

Với a = 1 $\Rightarrow a=b\,(KTM)$

Với a = 9 $\Rightarrow ab=91\,(TM:91=4.19+15)$

Vậy số phải tìm là 91.

Bài 89. Gọi là tổng các chữ số của s thì s và t_s có cùng số dư khi chia cho 9, nghĩa là $s=t_s+9\text{a}$ với a là số tự nhiên. Do đó số A được viết boie 1, 2, 3, …, 2007 nên

$t_A=t_1+...+t_{2007}=1+2+...+2007-9k=B-9k\quad (k\in N^*)\qquad (1)$

Ta có tổng 9 số tự nhiên liên tiếp là $a+(a+1)+(a+2)+...+(a+8)=9(a+4)\,\vdots\, 9$ nên tổng của $2007=9.223$ số tự nhiên liên tiếp cũng chia hết cho 9, nghĩa là

$B=1+2+3+...+2007=9h\quad (h\in N^*)\quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có $t_A=9(h-k)\Rightarrow A=9m\quad (m\in N^*)$

Mà ta có $(9u+1)(9v+1)=9(9uv+u+v)+1$ với $u,v\in N^*$

Khi đó $C=2008^{2007}+2009=(9.223+1)^{2007}+9.223+2=9n+3\quad (n\in N^*)\quad (4)$

Từ (3) và (4) suy ra số $A+C=9(m+n)+3$ (5). Nếu $A+C$ là số chính phương mà chia hết cho số nguyên tố 3 thì nó phải chia hết cho 9, nhưng điều này mâu thuẫn với (5). Vậy $A+C$ không là số chính phương.

Bài 90. Với $x=0$ hoặc $y=0$ ta có $1-xy=1^2$ (đpcm)

Với $x\ne 0,y\ne 0,x,y\in Q$, ta có các cách sau:

Cách 1: Bình phương hai vế đẳng thức (1) ta được:

$x^{10}+y^{10}+2\text{x}^5y^5=4\text{x}^4y^4\Rightarrow x^{10}+y^{10}-2\text{x}^5y^5=4\text{x}^4y^4-4\text{x}^5y^5$

$(x^5-y^5)^2=4\text{x}^4y^4(1-xy)\Rightarrow 1-xy=\left(\dfrac{x^5-y^5}{2\text{x}^2y^2}\right)^2$ (đpcm)

Cách 2: Bình phương hai lần (1) $x^{10}+y^{10}+2\text{x}^5y^5=4\text{x}^4y^4$

$x^{10}+y^{10}=2\text{x}^4y^4(2-xy)\Rightarrow x^{20}+y^{20}+2\text{x}^{10}y^{10}=4\text{x}^8y^8(4-4\text{x}y+x^2y^2)$

$$\Rightarrow x^{20}+y^{20}+2x^{10}y^{10}=16x^8y^8-16x^9y^9+4x^{10}y^{10}$$

$$\Rightarrow x^{20}+y^{20}-2x^{10}y^{10}=16x^8y^8(1-xy)\Rightarrow\left(x^{10}-y^{10}\right)^2=\left(4x^4y^4\right)^2(1-xy)$$

$$1-xy=\left(\frac{x^{10}-y^{10}}{4x^4y^4}\right)^2 \text{ (đpcm)}$$

Cách 3: Chia cả hai vế của (1) cho x^4 ta được $\frac{x^5}{x^4}+\frac{y^5}{x^4}=2\frac{y^2}{x^2}$

$\Rightarrow x+\frac{y^5}{x^4}=2\frac{y^2}{x^2}\Rightarrow xy+\frac{y^6}{x^4}=2\frac{y^3}{x^2}$ (nhân cả hai vế với y)

$\Rightarrow \frac{y^6}{x^4}-2\frac{y^3}{x^2}+1=1-xy\Rightarrow\left(\frac{y^3}{x^2}-1\right)=1-xy$ (đpcm)

Cách 4: $(1)\Rightarrow\frac{x^3}{y^2}+\frac{y^3}{x^2}=2\Rightarrow\frac{x^6}{y^4}+\frac{y^6}{x^4}+2xy=4\Rightarrow\frac{x^6}{y^4}+\frac{y^6}{x^4}-2xy=4-4xy$

$$\Rightarrow\left(\frac{x^3}{y^2}-\frac{y^3}{x^2}\right)^2=4(1-xy)\Rightarrow 1-xy=\left(\frac{\frac{x^3}{y^2}-\frac{y^3}{x^2}}{2}\right)^2$$

Cách 5: Đặt $x=ky$ thay vào (1) và biến đổi đồng nhất.

Ta có $(ky)^5+y^5=2(ky)^2y^2$

Hay $k^5y^5+y^5=2.k^2.y^2.y^2$. Hay $k^5y^5+y^5=2.k^2.y^4$. Hay $y^4[(k^5y+y)-2k^2]=0$.

Với $x\neq 0, y\neq 0, x,y\in Q$ ta có: $(k^5y+y)-2k^2=0$.

Hay $y=\frac{2k^2}{k^5+1}$ và $x=k.\frac{2k^2}{k^5+1}=\frac{2k^3}{k^5+1}$

Lúc này ta có: $1-xy=1-\frac{2k^2}{k^5+1}.\frac{2k^3}{k^5+1}=\frac{(k^5+1)^2-4k^5}{(k+1)^5}=\frac{(k-1)^5}{(k+1)^5}=\left[\frac{k-1}{k+1}\right]^5$ bình phương của một số hữu tỷ.

Bài 91. * Nếu $m=n$ thì ta có ngay đpcm.

* Nếu m khác n: Đặt $\begin{cases}m+n=2x\\m-n=2y\end{cases}(x,y\in N^*;x>0;y\neq 0)$

Khi đó $\begin{cases}m=x+y\\n=x-y\end{cases}$ và từ $x+y>0;x-y>0$ suy ra $x>|y|$

Do $n^2-1 \vdots |m^2+1-n^2|\Rightarrow m^2\vdots|m^2+1-n^2|\Rightarrow m^2=k(m^2+1-n^2)$ (1), $k\in N$.

Ta có (1) $\Leftrightarrow(x+y)^2=k(4xy+1)\Leftrightarrow x^2-2(2k-1)xy+(y^2-k)=0$ (*)

Phương trình (*) có một nghiệm là x nên có một nghiệm nữa là x_1.

Ta có: $\begin{cases} x+x_1=2(2k-1) \\ xx_1=y^2-k \end{cases} \Rightarrow x_1 \in N$

- Nếu $x_1>0$ thì $(x_1;y)$ là cặp nghiệm thoả mãn (*), suy ra $x_1>|y|$

Khi đó $y^2-k=xx_1>|y^2| \Rightarrow k<0 \Rightarrow 0<x+x_1=2(2k-1)<0$, mâu thuẫn.

- Nếu $x_1<0$ thì $xx_1=y^2-k<0 \Rightarrow k>y^2 \Rightarrow k>0 \Rightarrow 4xy+1>0 \Rightarrow y>0$

Ta có: $k=x_1^2-2(2k-1)x_1y+y^2=x_1^2+2(2k-1)|x_1|y+y^2$.

Suy ra $k>2(2k+1)|x_1|y \geq 2(2k-1)>k$, mâu thuẫn.

Vậy $x_1=0$. Khi đó $k=y^2$ và $\frac{m^2}{k}=m^2+1-n^2$ là số chính phương.

Do đó $|m^2+1-n^2|$ là số chính phương (đpcm).

Bài 92. +) Vì một số nguyên bất kỳ phải là số chẵn hoặc là số lẻ. Do đó theo nguyên lý Đirichlet trong 3 số nguyên bất kỳ luôn chọn ra được 2 số có cùng tính chẵn lẻ.

+) Áp dụng ta có trong 3 số chính phương bất kỳ luôn chọn ta được hai số có cùng tính chẵn lẻ. Gọi 2 số chính phương được chọn ra đó là a^2 và b^2.

Khi đó ta có: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

+) Vì a^2 và b^2 cùng tính chẵn lẻ nên a,b cũng cùng tính chẵn lẻ. Do đó $a-b$ là số chẵn cũng là số chẵn $a^2-b^2=(a-b)(a+b) \vdots 4$ (đpcm).

Bài 93. Ta có $n^5+1999n+2017=n^5-n+2000n+2015+2$ $(n \in N)$

Ta thấy: $n^5+1999n+2017=n^5-n+2000n+2015+2$

$=n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)+5n(n-1)(n+2)+2000n+2015+2$ $(n \in N)$ chia 5 dư 2.

Ta nhận xét rằng không có số chính phương nào chia 5 dư 2.

Vậy $n^5+1999n+2017$ $(n \in N)$ không phải là số chính phương.

Bài 94. Vì n là số nguyên dương nên $n^2+n+3>3$.

Gọi r là số dư khi chia n cho $3, r \in \{0;1;2\}$.

Nếu $r=0$ hoặc $r=2$ thì $n^2+n+3 \vdots 3$. Mâu thuẫn với giả thiết n^2+n+3 là số nguyên tố.

Do đó $r=1$ hay n chia 3 dư 1. Khi đó $7n^2+6n+2017$ chia 3 dư 2.

Mà một số chính phương có số dư khi chia cho 3 là 0 hoặc 1.

Nên $7n^2+6n+2017$ không phải số chính phương.

Bài 95. Từ: $2x^2+x=3y^2+y$ (1)

$\Rightarrow 2x^2 - 2y^2 + x - y = y^2 \Rightarrow (x-y)(2x+2y+1) = y^2$ (2)

Mặt khác từ (1) ta có: $3x^2 - 3y^2 + x - y = x^2$ hay $(x-y)(3x+3y+1) = x^2$

$\Rightarrow (x-y)^2(2x+2y+1)(3x+3y+1) = x^2y^2 \Rightarrow (2x+2y+1)(3x+3y+1)$ là số chính phương (3).

Gọi $(2x+2y+1; 3x+3y+1) = d \Rightarrow (2x+2y+1) \vdots d; (3x+3y+1) \vdots d$

$\Rightarrow (3x+3y+1) - (2x+2y+1) = (x+y) \vdots d$

$\Rightarrow 2(x+y) \vdots d \Rightarrow (2x+2y+1) - 2(x+y) = 1 \vdots \text{d}$ nên $d = 1$

$\Rightarrow (2x+2y+1; 3x+3y+1) = 1$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow 2x+2y+1$ và $3x+3y+1$ đều là số chính phương.

Lại có từ (2) $\Rightarrow (x-y)(2x+2y+1)$ là số chính phương suy ra $x-y$ cũng là số chính phương. Vậy $2x^2 + x = 3y^2 + y$ thì $x-y; 2x+2y+1$ và $3x+3y+1$ đều là các số chính phương.

Bài 96. Đặt $B = (1^2 + 2^2 + ... + 2017^2) = (2^2 + 4^2 + ... + 2016^2) + (1^2 + 3^2 + ... + 2017^2)$

Ta thấy số các số hạng của B là số lẻ là $(2017-1):2+1 = 1009$. Do đó B là số lẻ. Suy ra A chia hết cho 2 và không chia hết cho 4. Vậy A không phải là số chính phương.

Bài 97. Nếu $a < b$ thì vế trái của (1) nhỏ hơn vế phải nên chỉ xét $a \ge b$. Với $a = b$ thì từ (1) suy ra $a = b = c = 0$, lúc đó $a - b = 0$ là số chính phương (*).

Với $a > b$, biến đổi (1) về dạng:

$$b^2 = 2016(a^2 - b^2) + (a-b) \Rightarrow b^2 = (a-b)(2016a + 2016b + 1) \text{ (2)}$$

Đặt $d = (a;b)$ thì có $a = md, b = nd; (m;n) = 1, m - n = t > 0$

Giả sử $(t;n) = u \Rightarrow n \vdots u, t \vdots u \Rightarrow m \vdots u \Rightarrow u = 1$ nghĩa là $(t;u) = 1$

Thay $b = nd, a - b - td$ vào (2) có:

$$n^2d = t(2016dt + 4032dn + 1) \Rightarrow n^2d = 2016dt^2 + 4032dnt + t \text{ (3).}$$

Từ (3) ta có: $n^2d \vdots t, (t,n) = 1 \Rightarrow d \vdots t$. Mặt khác $d = t$. Lúc đó $a - b = td = d^2$ là số chính phương (**). Từ (*) và (**) có điều phải chứng minh. Vậy $a - b$ là một số chính phương.

Bài 98. Trước hết ta chứng minh rằng $(x-z);(y-z)$ nguyên tố cùng nhau. Giả sử $d = (x-z; y-z)$ ta có: $x - z \vdots d; y - z \vdots d \Rightarrow (x-z)(y-z) \vdots d^2$

Từ giả thiết suy ra $z^2 \vdots d^2 \Rightarrow z \vdots d$. Khi đó x và y chia hết cho d.

Vì $(x,y) = 1 \Rightarrow d = 1$. Vậy $(x-z);(y-z)$ cùng là số chính phương.

Đặt $k^2 = x - z; m^2 = y - z$ $(k \in N^*)$

Ta có: $(x-z)(y-z) = z^2 = k^2m^2 \Rightarrow z = km$

Khi đó $x+y=k^2+m^2+2km=(k+m)^2$. Mặt khác từ $(x-z)(y-z)=z^2$ suy ra $xy=z(x+y)\Rightarrow xyz=z^2(k+m)^2=\left[z(m+k)^2\right]$ là số chính phương.

Vậy $2017^2xyz=\left[2017z(k+m)^2\right]$ là số chính phương.

Bài 99: Ta có $\overline{xxyy}=11.\overline{x0y}$. Mà ta thấy rằng 11 là số nguyên tố và $\overline{xxyy}$ là một số chính phương nên suy ra $\overline{x0y}\,\vdots\,11\Rightarrow 99x+x+y\,\vdots\,11\Rightarrow x+y\,\vdots\,11$.

Theo điều kiện đề bài ta có:

$0<x+y\le 18\Leftarrow x+y=11\Rightarrow \overline{x0y}=99x+11\Rightarrow \overline{xxyy}=121(9x+1)$.

Từ đó suy ra $9x+1$ là số chính phương suy ra $x=7$ (0<x<10) $\Rightarrow y=4$

Vậy số điện thoại đó là 827744.

Bài 100: Với mọi số tự nhiên *a* thì a^2 khi chia cho 8 chỉ có các số dư là 0; 1; 4.

Số 2019 chia 8 dư 3; 2020 chia 8 dư 4.

Suy ra $2019^n\equiv 3^n \pmod 8$

- Nếu n chẵn thì $n=2k,k\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $2019^n\equiv 3^{2k}\equiv 1 \pmod 8$

$\Rightarrow$ $C\equiv 5 \pmod 8$

$\Rightarrow$ C không thể là số chính phương.

- Nếu n lẻ thì $n=2k+1,k\in\mathbb{N}\Rightarrow$ $2019^n\equiv 3^{2k+1}\equiv 3.3^{2k}\equiv 3 \pmod 8$

$\Rightarrow$ $C\equiv 7 \pmod 8$

$\Rightarrow$ C không thể là số chính phương.

KL: Không tồn tại n thỏa yêu cầu bài toán.

Bài 101: Đặt $p^3-4p+9=t^2 (t\in N)$

Biến đổi thành $p\left(p^2-4\right)=(t-3)(t+3)$ $(1)\Rightarrow p\mid\left(t-3\right)\vee p\mid\left(t+3\right)$

Trường hợp 1: Nếu $p\mid t-3$

Đặt $t-3=pk(k\in N)$

Khi đó thay vào (1) ta có:

$p\left(p^2-4\right)=pk(pk+6)\Leftrightarrow p^2-pk^2-6k-4=0$

Coi đây là phương trình bậc hai ẩn p điều kiện cần để tồn tại nghiệm của phương trình là:

$\Delta=k^4+4\left(6k+4\right)=k^4+24k+16$ là một số chính phương.

Mặt khác với $k>3$ ta dễ chứng minh được $\left(k^2\right)^2<k^4+24k+16<\left(k^2+4\right)^2$

Suy ra các trường hợp:

$k^4+24k+16=\left(k^2+1\right)^2\Leftrightarrow 2k^2-24k-15=0$ (loại)

$k^4+24k+16=\left(k^2+2\right)^2\Leftrightarrow k^2-6k-3=0$ (loại)

$k^2+24k+16=\left(k^2+3\right)^2 \Leftrightarrow 6k^2-24k-7=0$ (loại)

Do đó phải có $k \le 3$. Thử trực tiếp được $k=3$ thỏa mãn.

Từ đó ta có $t=36; p=11$.

Lưu ý: HS có thể làm như sau khi thay vào (1)

$p\left(p^2-4\right)=pk(t+3) \Leftrightarrow k(t+3)=p^2-4 \Rightarrow p^2=kt+3k+4$

Mặt khác ta có $(t-3)^2=p^2k^2 \Rightarrow t^2-6t+9=k^2(kt+3k+4)$

$\Leftrightarrow t^2-t\left(6+k^3\right)+9-3k^3-4k^2=0$

Coi đây là phương trình bậc hai ẩn n điều kiện cần để tồn tại nghiệm của phương trình là:

$\Delta=\left(6+k^3\right)^2-4\left(9-3k^3-4k^2\right)=k^6+24k^3+16k^2=k^2\left(k^4+24k+16\right)$ là một số chính phương. Muốn vậy thì $k^4+24k+16$ phải là một số chính phương.

Sau đó cách làm giống như trên.

Trường hợp 2: Nếu $p \mid t+3$

Đặt $t+3=pk(k \in N)$

Khi đó thay vào (1) ta có: $p\left(p^2-4\right)=pk(pk-6) \Leftrightarrow p^2-pk^2+6k-4=0$

Coi đây là phương trình bậc hai ẩn p điều kiện cần để tồn tại nghiệm của phương trình là: $\Delta=k^4-4\left(6k-4\right)=k^4-24k+16$ là một số chính phương.

Mặt khác với $k>3$ ta dễ chứng minh được $\left(k^2-4\right)^2<k^4-24k+16<\left(k^2\right)^2$ Suy ra các trường hợp:

$k^4-24k+16=\left(k^2-1\right)^2 \Leftrightarrow 2k^2-24k+15=0$ (loại)

$k^4-24k+16=\left(k^2-2\right)^2 \Leftrightarrow k^2-6k+3=0$ (loại)

$k^2-24k+16=\left(k^2-3\right)^2 \Leftrightarrow 6k^2-24k+7=0$ (loại)

Do đó phải có $k \le 3$ Thử trực tiếp được $k=3$ thỏa mãn.

Từ đó suy ra $t=3;18$ tương ứng $p=2;7$.

Vậy tập tất cả giá trị p cần tìm là $\{2;7;11\}$

Bài 102: Ta có

$$4B=1.2.3.4+2.3.4.(5-1)+3.4.5.(6-2)+...+n.(n-1).(n-2).\left[(n+3)-(n-1)\right]$$

$$=n.(n+1).(n+2).(n+3)=n^4+6n^3+11n^2+6n<n^4+6n^3+11n^2+6n+1=\left(n^2+3n+1\right)^2$$

Mà $n^4+6n^3+11n^2+6n>n^4+6n^3+9n^2=\left(n^2+3n\right)^2 \Rightarrow \left(n^2+3n\right)^2<4B<\left(n^2+3n+1\right)^2$

Do đó B không phải là số chính phương.

Bài 103: Ta có: $p^2+a^2=b^2 \Leftrightarrow p^2=(b-a)(b+a)$.

Các ước của p^2 là 1, p và p^2 ; không xảy ra trường hợp $b + a = b - a = p$
Do đó chỉ xảy ra trường hợp $b + a = p^2$ và $b - a = 1$.

Khi đó $b = \dfrac{p^2+1}{2}$ và $a = \dfrac{p^2-1}{2}$ suy ra $2a = (p-1)(p+1)$.

Từ p lẻ suy ra $p+1$, $p-1$ là hai số chẵn liên tiếp $\Rightarrow (p-1)(p+1)$ chia hết cho 8.
Suy ra $2a$ chia hết cho 8 (1)
Từ p nguyên tố lớn hơn 3 nên p không chia hết cho 3. Do đó p có dạng $3k+1$ hoặc $3k+2$.
Suy ra một trong hai số $p+1$; $p-1$ chia hết cho 3 . Suy ra $2a$ chia hết cho 3 (2)
Từ (1) và (2) suy ra $2a$ chia hết cho 24 hay a chia hết cho 12 (đpcm).

Xét $2(\mathrm{p+a+1}) = 2\left(\mathrm{p}+\dfrac{\mathrm{p}^2-1}{2}+1\right) = 2\mathrm{p}+\mathrm{p}^2+1 = (\mathrm{p}+1)^2$ là số chính phương.

Bài 104: Ta phân chia 625 số tự nhiên đã cho thành 311 nhóm như sau :

Các nhóm $n_1, n_2, ..., n_{310}$ mỗi nhóm gồm 2 số hạng $(k, 625-k)$ tức là mỗi nhóm có hai số hạng có tổng bằng 625 sao cho $k \neq 49, k \neq 225$

Nhóm 311 gồm 5 số chính phương $\{49, 225, 400, 576; 625\}$

Nếu trong 311 số được chọn không có số nào thuộc nhóm n_{311}, như vậy 311 số này thuộc 310 nhóm còn lại thì theo nguyên tắc Dirichlet phải có ít nhất một trong hai số thuộc cùng một nhóm. Hai số này có tổng bằng 625. Mâu thuẫn với giả thiết. Vậy chắc chắn trong 311 số được chọn phải có ít nhất một số thuộc nhóm n_{311}. Số này là số chính phương.

Bài 105:

Do $n^2+2n+\sqrt{n^2+2n+18}+9$ là số chính phương nên $\sqrt{n^2+2n+18}$ là số tự nhiên.

Đặt $\sqrt{n^2+2n+18} = k \quad (k \in \mathbb{N})$

$\Leftrightarrow n^2+2n+18 = k^2 \Leftrightarrow (k+n+1)(k-n-1) = 17$

Do k, n đều là số tự nhiên nên $k+n+1 > k-n-1$

Xét $\begin{cases} k+n+1=17 \\ k-n-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=9 \\ n=7 \end{cases} \Rightarrow n^2+2n+\sqrt{n^2+2n+18}+9 = 81 = 9^2\,(tm)$

Vậy $n = 7$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Bài 106: Ta có $\overline{ab} - \overline{ba} = k^2 \quad (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow 9(a-b) = k^2$

Do đó $a-b$ là một số chính phương

Ta lại có $a-b \leq 9, a \neq b \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a-b=1 \\ a-b=4 \\ a-b=9 \end{array}\right.$

Với $a-b=1 \Rightarrow a=b+1 \Rightarrow$ có 9 số thỏa mãn: 10; 21; 32; 43; 54; 65; 76; 87; 98

Với $a-b=4 \Rightarrow a=b+4 \Rightarrow$ có 6 số thỏa mãn: 40; 51; 62; 73; 84; 95.

Với $a-b=9 \Rightarrow a=b+9 \Rightarrow$ có 1 số thỏa mãn: 90

Vậy có tất cả 16 số thỏa mãn: 10; 21; 32; 43; 54; 65; 76; 87;98; 40; 51; 62; 73; 84; 95; 90.

Bài 107: Chú ý đến biến đổi $\underbrace{111...1}_{n\ so\ 1}=\dfrac{10^n-1}{9}$ ta đi phân tích các số a và b về các lũy thừa của 10. Ta có $a=\underbrace{111...1}_{2017\ so\ 1}=\dfrac{10^{2017}-1}{9}$ và $b=1\underbrace{000...0}_{2016\ so\ 0}5=1\underbrace{000...0}_{2017\ so\ 0}+5=10^n+5.$

Khi đó ta được $\mathrm{M}=\mathrm{ab}+1=\dfrac{10^{2017}-1}{9}.\left(10^{\mathrm{n}}+5\right)+1=\dfrac{\left(10^{2017}\right)^2+4.10^{2017}-5}{9}+1=\left(\dfrac{10^{2017}+2}{3}\right)^2.$

Đến đây ta chỉ cần chỉ ra được $\dfrac{10^{2017}+2}{3}\in \mathrm{N}$ ta ta có điều phải chứng minh.

Tuy nhiên $\dfrac{10^{2017}+2}{3}\in \mathrm{N}$ hiển nhiên đúng do $10^{2017}+2\,\vdots\,3$. Vậy $\mathrm{M}=\mathrm{ab}+1$ là số chính phương.

• **Chú ý.** Với dạng toán chứng minh số chính phương như trên ta chú ý đến phép biến đổi:

$$9=10^1-1;99=10^2-1;999=10^3-1;\underbrace{999...9}_{n\ so\ 9}=10^n-1$$

Bài 108. Ta có

$$\begin{aligned}\mathrm{a_n}&=1+\frac{2^{\mathrm{n}}.\left[1.3.5...(2\mathrm{n}\text{-}1)\right].(\mathrm{n}\text{-}4)!}{(2\mathrm{n})!}=1+\frac{2^{\mathrm{n}}(\mathrm{n}+4)!}{2.4.6....2\mathrm{n}}\\&=1+\frac{2^{\mathrm{n}}..1.2.3....\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)(\mathrm{n}+2)(\mathrm{n}+3)(\mathrm{n}+4)}{2^{\mathrm{n}}.1.2.3.4...\mathrm{n}}\\&=1+(\mathrm{n}+1)(\mathrm{n}+2)(\mathrm{n}+3)(\mathrm{n}+4)=\left(\mathrm{n}^2+5\mathrm{n}+5\right)^2\end{aligned}$$

Do đó ta được $\mathrm{a_n}=\left(\mathrm{n}^2+5\mathrm{n}+5\right)^2$ là số chính phương.

Bài 109: $f(x)=x^4+x^2+1+2x^3-2x-2x^2-ax-2x+b+1$

$$=\left(x^2+x-1\right)^2+(a-2)x+(b+1)$$

Để $f(x)$ trở thành bình phương của một đa thức thì $\begin{cases}a-2=0\\b+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=-1\end{cases}$

Vậy với $a=2,b=-1$ thì $f(x)$ trở thành bình phương của một đa thức.

Bài 110: Ta có: $\overline{xxyy}=11\overline{x0y}$ là số chính phương nên

$$\overline{x0y}\,\vdots\,11\Leftrightarrow 100x+y\,\vdots\,11\Leftrightarrow 99x+x+y\,\vdots\,11$$

$$\Leftrightarrow x+y\,\vdots\,11\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+y=11\\x+y=0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=y=0\\x+y=11\end{array}\right.$$

Ta có: $\overline{xxyy} = 11\overline{x0y} = 11(99x + x + y) = 11(99x + 11) = 11^2(9x + 1)$

$\Rightarrow 9x + 1$ là số chính phương.

$\Rightarrow x = 7 \Rightarrow y = 4$

Vậy $\overline{xxyy} = 7744;\ \overline{xxyy} = 0000$

Bài 111: $2a^2 + a = 3b^2 + b \Leftrightarrow (a - b)(2a + 2b + 1) = b^2$ (*)

Gọi d là ước chung của (a - b, 2a + 2b + 1) ($d \in \mathbb{N}^*$). Thì

$$\begin{cases}(a-b) \vdots d \\ (2a + 2b + 1) \vdots d\end{cases} \Rightarrow (a-b)(2a + 2b + 1) \vdots d^2 \Rightarrow b^2 \vdots d^2 \Rightarrow b \vdots d$$

Mà $(a - b) \vdots d \Rightarrow a \vdots d \Rightarrow (2a + 2b) \vdots d$ mà $(2a + 2b + 1) \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d = 1$

Do đó (a - b, 2a + 2b + 1) = 1. Từ (*) ta được $a - b$ và $2a + 2b + 1$ là số chính phương

=> $2a + 2b + 1$ là số chính phương.

Bài 112: Giả sử $n^2 + m$ là số chính phương. Đặt $n^2 + m = k^2$ (1) (với k nguyên dương)

Theo bài ta có $2n^2$ = mp (p nguyên dương) $\Rightarrow m = 2n^2 : p$, thay vào (1) ta có:

$$n^2 + \frac{2n^2}{p} = k^2 \Rightarrow n^2p^2 + 2pn^2 = p^2k^2 \Rightarrow n^2\left(p^2 + 2p\right) = \left(pk\right)^2$$

Do n^2, $\left(pk\right)^2$ chính phương, nên $p^2 + 2p$ phải chính phương.

Mặt khác $p^2 < p^2 + 2p < \left(p + 1\right)^2$, tức $p^2 + 2p$ không chính phương. Nên giả sử sai.

Vậy $n^2 + m$ không chính phương.

Bài 113: Xét $n > 9 \Rightarrow A = 2^9 + 2^{13} + 2^n = 2^9\left(1 + 2^4 + 2^{n-9}\right)$

Thấy $1 + 2^4 + 2^{n-9}$ là số lẻ nên A chia hết cho 2^9 nhưng không chia hết cho 2^{10} nên A không là số chính phương.

Xét n = 9 $\Rightarrow A = 2^9 + 2^{13} + 2^9 = 2^9\left(1 + 2^4 + 1\right) = 9.2^{10} = 96^2$ là số chính phương.

Xét $n < 9 \Rightarrow A = 2^9 + 2^{13} + 2^n = 2^n\left(2^{9-n} + 2^{13-n} + 1\right)$

Do $2^{9-n} + 2^{13-n} + 1$ là số lẻ và A là số chính phương nên 2^n là số chính phương nên n là số chẵn, $n \in \mathbb{N}^*$ suy ra $n \in \{2; 4; 6; 8\}$

Khi đó A chính phương, 2^n chính phương suy ra $B = 2^{9-n} + 2^{13-n} + 1$ là số chính phương.

Nhận xét số chính phương lẻ chỉ có thể tận cùng là 1; 5; 9.

Với n = 2 $\Rightarrow B = 2^7 + 2^{11} + 1 = 2177$ (loại)

Với n = 4 $\Rightarrow B = 2^5 + 2^9 + 1 = 545$, thấy B chia hết cho 5 nhưng không chia hết cho 25 nên B không là số chính phương.

Với n = 6 $\Rightarrow B = 2^3 + 2^7 + 1 = 137$ (loại)

Với n = 8 $\Rightarrow B = 2 + 2^5 + 1 = 35$ (loại). Vậy n = 9.

Bài 114: Giả sử tồn tại các số dương a, b sao cho $(a+b)^2 - 2a^2$ và $(a+b)^2 - 2b^2$ đều là số chính phương. Trong các cặp số nguyên dương (a, b) như vậy, ta xét cặp sao cho a nhỏ nhất. Đặt $(a+b)^2 - 2a^2 = x^2$, $(a+b)^2 - 2b^2 = y^2$ với x, y nguyên dương. Ta có $(a+b)^2 - x^2 = 2a^2$

nên a + b và x cùng cùng tính chẵn lẻ, suy ra $(a+b)^2 - 2a^2$ chia hết cho 4. Từ đó ta có $2a^2$ chia hết cho 4, suy ra a chia hết cho 2.

Chứng minh tương tự, ta cũng có chia hết cho 2, suy ra x, y chẵn. Từ đó, ta có

$$\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2, \qquad \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{y}{2}\right)^2$$

Đều là số chính phương. Do đó cặp số $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ cũng thỏa mãn yêu cầu. Điều này mâu thuẫn với cách chọn cặp *(a, b).* Vậy với mọi *a, b* nguyên dương, các số *A, B* không thể đồng thời là số chính phương.

Bài 115. Cho 2 số nguyên a,b thỏa mãn

$a^2 + b^2 + 1 = 2(ab + a + b) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 1 - 2ab + 2a - 2b = 4a \Leftrightarrow (a - b + 1)^2 = 4a$

là số chính phương suy ra a là số chính phương a = x^2 (x là số nguyên)

$(x^2 - b + 1)^2 = 4x^2 \Leftrightarrow x^2 - b + 1 = 2x$

$\Leftrightarrow b = (x-1)^2$

Vậy a và b là hai số chính phương liên tiếp

Bài 116. Ta có $a^3b + ab^3 + 2a^2b^2 + 2a + 2b + 1 = 0$

$\Leftrightarrow ab(a+b)^2 + 2(a+b) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (ab-1)(a+b)^2 + (a+b+c)^2 = 0 \qquad (1)$

Từ (1) suy ra $a + b \neq 0$ và $1 - ab = \left(\dfrac{a+b+1}{a+b}\right)^2$ (đpcm)

Bài 117. 1) Ta có $\left(mn^2-2\right)^2 < n^2S \Leftrightarrow n^3 > 1 \Leftrightarrow n > 1$ (đúng)

$nS^2 < m^2n^4 \Leftrightarrow m > n$ (đúng theo giả thiết).

2) Giả sử $m \neq n$, xét hai trường hợp

Với *m* > *n*, theo 1) và do S là số chính phương suy ra $n^2S = \left(mn^2-1\right)^2 \Rightarrow 4n^3 = 2mn^2 + 1$ (sai)

Với *m* < *n* khi đó

Nếu $m \geq 2$ thì $n > 2 \Rightarrow 2mn > 4m \Rightarrow (mn)^2 < S < (mn+1)^2$ (mâu thuẫn với *S* là số chính phương).

Nếu *m* = *1* thì

Với *n* > *2* thì $(n+1)^2 < S < (n+2)^2$ (mâu thuẫn với S là số chính phương).

Với n = 2 thì S = 8 không phải là số chính phương

Vậy phải có *m* = *n*.

Bài 118. Do $x;\ y$ là các số nguyên lớn hơn 1 nên $x;\ y \geq 2$

$$\Rightarrow -4xy+1 < -7x+7y < 4xy+1$$
$$\Rightarrow 4x^2y^2-4xy+1 < 4x^2y^2-7x+7y < 4x^2y^2+4xy+1$$
$$\Rightarrow (2xy-1)^2 < 4x^2y^2-7x+7y < (2xy+1)^2.$$

Mà $4x^2y^2-7x+7y$ là số chính phương và $1 < 2xy-1 < 2xy+1$;

nên ta có $4x^2y^2-7x+7y = (2xy)^2 \Leftrightarrow x = y$, điều phải chứng minh.

Bài 119. Cho biểu thức $A = (m+n)^2 + 3m + n$ với m, n là các số nguyên dương. Chứng minh rằng nếu A là một số chính phương thì n^3+1 chia hết cho m.

Do m, n là các số nguyên dương nên ta có $(n+1)^3 < (m+n)^2 + 3m + n < (m+n+2)^2$.

Do đó $(m+n)^3 < A < (m+n+2)^2$. Mà A là số chính phương nên ta được $A = (m+n+1)^2$.

Do đó $(m+n)^2 + 3m + n = (m+n+1)^2 \Rightarrow 3m + n = 2(m+n) + 1 \Rightarrow m = n+1$..

Từ đó suy ra $n^3+1 = (n+1)(n^2-n+1) = m(n^2-n+1) \vdots m$..

Bài số 120. Giả sử b^2-4ac là số chính phương thì $b^2-4ac = k^2$ với $k \in N^*$. Ta có:
$4a\overline{abc} = 400a^2 + 40ab + 4ac = 400a^2 + 40ab + b^2 - k^2 = (20a+b+k)(20a+b-k)$.

Vì $\overline{abc}$ là số nguyên tố nên $c \neq 0$ và $ac > 0$. Do đó $b > k \Rightarrow 20a+b+k > 20a+b-k > 20a$.

Suy ra $\overline{abc}=\dfrac{(20a+b+k)(20a+b-k)}{4a}=m.n$. Mà $20a+b+k,20a+b-k$ đều lớn hơn $4a$ nên $m,n>1$ suy ra $\overline{abc}$ là hợp số, mâu thuẫn với giả thiết.

Bài 121.

Đặt $\dfrac{(n+1)(4n+3)}{3}=k^2\Leftrightarrow(n+1)(3n+1)=3k^2\left(k\in N^*\right)$, các số $n+1,4n+3$ nguyên tố cùng nhau và số $4n+3$ không phải là số chính phương (số chình phương chia 4 chỉ có thể dư 0 hoặc 1 nên suy ra $\begin{cases}n+1=a^2\\4n+3=3b^2\end{cases}$ với $\left(a,b\in N^*\right)$. Từ đó ta có:

$4a^2-3b^2=1\Leftrightarrow(2a-1)(2a+1)=3b^2$ do $2a-1,2a+1$ nguyên tố cùng nhau nên ta có các khả năng xảy ra như sau:

TH1: $\begin{cases}2a-1=3x^2\\2a+1=y^2\end{cases}\Rightarrow y^2-3x^2=2\Rightarrow y^2$ chia 3 dư 2 (loại)

TH2: $\begin{cases}2a-1=x^2\\2a+1=3y^2\end{cases}\Rightarrow 3y^2-x^2=2(*)$.

+ Nếu x chẵn thì suy ra y chẵn suy ra $3y^2-x^2$ chia hết cho 4, mà 2 không chia hết cho 4 nên điều này không thể xảy ra.

+ Nếu x lẻ thì suy ra x không chia hết cho 3. Do $n+1=a^2,2a-1=x^2$ nên n nhỏ nhất khi và chỉ khi a nhỏ nhất dẫn đến x nhỏ nhất.

Xét $x=5$ khi đó ta tính được $a=13,n=168,\dfrac{(n+1)(4n+3)}{3}=\dfrac{169.657}{3}=(13.15)^2$ thỏa mãn điều kiện. Vậy giá trị n nhỏ nhất cần tìm là 168.

Bài 122.

Giả sử $x^2+3xy+y^2=m^2$ với m là số tự nhiên khác 0.

Ta thấy rằng: Nếu cả 2 số x,y không chia hết cho 3 thì x^2,y^2 chia 3 dư 1. Suy ra x^2+y^2 chia 3 dư 2 dẫn đến m^2 chia 3 dư 2 điều này không thể xảy ra. Vì một số chính phương chia 3 chỉ có thể dư 0 hoặc 1. Từ đó suy ra trong hai số x,y phải có 1 số chia hết cho 3. Giả sử số đó là x thì $x=3$ (do x là số nguyên tố). Thay vào ta có:

$y^2+9y+9=m^2\Leftrightarrow 4y^2+36y+36=4m^2$ hay

$(2y+9)^2-4m^2=45\Leftrightarrow(2y+9-2m)(2y+9+2m)=45=1.45=3.15=5.9$. Giải các trường hợp ta thu được cặp số $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện là $(x;y)=(3;7),(7;3)$.

Bài 123.

Vì $2y-1$ là số chính phương lẻ nên x là số lẻ.

Gọi $d=(2y-x,6y+x)$ với $d\in N,d$ lẻ.

Suy ra $\begin{cases}2y-x\,\vdots\,d\\6y+x\,\vdots\,d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2y-x+6y+x\,\vdots\,d\\3(2y-x)-(6y+x)\,\vdots\,d\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8y\,\vdots\,d\\-4x\,\vdots\,d\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\,\vdots\,d\\x\,\vdots\,d\end{cases}$

Mặt khác cũng từ giả thiết ta suy ra $(2y-1)^2=d^2\Rightarrow 2y-1\,\vdots\,d$ mà $y\,\vdots\,d\Rightarrow d\in U(1)\Rightarrow d=1$, hay $(2y-x,6y+x)=1$ từ đó suy ra $2y-x,6y+x$ đều là số chính phương.

Cách ra đề bài khác:

Cho các số nguyên dương x, y thỏa mãn $y > x$ và $x^2 + 4xy - 8y^2 - 4y + 1 = 0$. Chứng minh $2y - x$ là số chính phương.

Bài 124.

Đặt $(a,b) = d \Leftrightarrow \begin{cases} a = md \\ b = nd \\ (m,n) = 1 \end{cases}$. Vì $(a,b,c) = 1 \Rightarrow (c,d) = 1$ thay vào điều kiện ban đầu ta có:

$dmn = c(m-n) = cm - cn \Rightarrow \begin{cases} cm - cn \,\vdots\, m \\ cm - cn \,\vdots\, n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c \,\vdots\, m \\ c \,\vdots\, n \end{cases} \Rightarrow m.n | c$, đặt $c = mnk$ với k nguyên dương thì ta suy ra $dmn = c(m-n) \Leftrightarrow d = k(m-n) \Rightarrow d \,\vdots\, k$ mà $k | c \Rightarrow k = 1$ nên $d = m - n$ nên $a - b = d(m-n) = d^2$ là một số chính phương.

Bài 125. Đặt $(x, y) = d \Rightarrow \begin{cases} x = md \\ y = nd \\ (m,n) = 1; m, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Thay vào điều kiện bài toán ta có:

$d^2 mn = xy \mid x^2 + y^2 - x = d\left(dm^2 + dn^2 - m\right) \Rightarrow dmn \mid dm^2 + dn^2 - m$.

Từ đó suy ra $d \mid m$ (1).

Ta cũng có $dm^2 + dn^2 - m \,\vdots\, m \Rightarrow dn^2 \,\vdots\, m$ do $(m,n) = 1 \Rightarrow \left(m, n^2\right) = 1$.

Suy ra $m \mid d$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $d = m$ nên $x = dm = d^2$ là số chính phương.

Bài 126. Ta viết lại giả thiết thành $4c^2 = c^2 + ab + bc + ca = (c+a)(c+b)$.

Đặt $(a+c; b+c) = d \Rightarrow a + c - (b+c) \,\vdots\, d \Rightarrow a - b \,\vdots\, d$.

Vì $a - b$ là số nguyên tố nên $d = a - b$ hoặc $d = 1$.

+ Nếu $d = 1$ thì $a+c, b+c$ là hai số nguyên tố cùng nhau suy ra $a+c, b+c$ là hai số chính phương. Đặt $a + c = m^2, b + c = n^2$ với $m, n \in Z$. Khi đó $m^2 - n^2 = a - b$ là số nguyên tố hay $(m-n)(m+n)$ là số nguyên tố $\Rightarrow m - n = 1 \Rightarrow m = n + 1$ nên

$4c^2 = m^2.n^2 \Rightarrow 2c = mn \Rightarrow 8c + 1 = 4mn + 1 = 4n(n+1) + 1 = (2n+1)^2$.

+ Nếu $d = a - b$ thì $a + c = (a-b)x, b + c = (a-b)y$ với $x, y \in Z$. Khi đó $a - b = (a+c) - (b+c) = (a-b)x - (a-b)y = (a-b)(x-y) \Rightarrow x - y = 1 \Rightarrow x = y + 1$. Khi đó $4c^2 = (a+c)(b+c) = (a-b)^2 xy = (a-b)^2 y(y+1)$ suy ra $y(y+1)$ là số chính phương nên $y(y+1) = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow 8c + 1$ là số chính phương. (Chú ý: Tích hai số tự nhiên liên tiếp là số chính phương khi và chỉ khi tích đó bằng 0).

Bài 127. Giả sử $\begin{cases} 8n + 1 = x^2 \\ 24n + 1 = y^2 \end{cases}$ với x, y là các số nguyên dương.

Khi đó $8n + 3 = 4x^2 - y^2 = (2x + y)(2x - y)$. Do đó $2x + y > 2x - y$ vì vậy nếu $8n + 3$ là số nguyên tố thì điều kiện là $2x - y = 1 \Rightarrow y = 2x - 1$ khi đó

$24n + 1 = (2x-1)^2 \Leftrightarrow x^2 = x + 6n \Rightarrow 8n + 1 = x + 6n \Leftrightarrow x = 2n + 1 \Rightarrow 8n + 1 = (2n+1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 0 \\ n = 1 \end{array}\right.$

Điều này mâu thuẫn với điều kiện n là số nguyên dương lớn hơn 1. Vậy $8n + 3$ là hợp số.

Bài 128. Vì c và d là hai số nguyên liên tiếp nên $d=c+1$ thay vào đẳng thức $a-b=a^2c-b^2d$ ta được $a-b=a^2c-b^2(c+1)\Leftrightarrow(a-b)\left[c(a+b)-1\right]=b^2$

Dễ dàng chứng minh $\left(a-b,c(a+b)-1\right)=1$ nên $|a-b|$ phải là số chính phương.

Bài 129. Từ $a^2+b^2+c^2=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$, suy ra $a^2+b^2+c^2=2(ab+bc+ca)$ (1)

Từ (1) $\Rightarrow(a+b+c)^2=4(ab+bc+ca)$

Vì $(a+b+c)^2$ và 4 là những số chính phương nên $ab+bc+ca$ phải là số chính phương.

$(1)\Leftrightarrow(a+b-c)^2=4ab$

Vì $(a+b-c)^2$ và 4 là những số chính phương nên ab là số chính phương.

$(1)\Leftrightarrow(b+c-a)^2=4bc$

Vì $(b+c-a)^2$ và 4 là những số chính phương nên bc là số chính phương.

$(1)\Leftrightarrow(c+a-b)^2=4ca$

Vì $(c+a-b)^2$ và 4 là những số chính phương nên ca là số chính phương.

Bài 130. Đặt $a=\underbrace{11...1}_{n}{}^2=\dfrac{10^n-1}{9}$, ta có $10^n=9a+1$ và $\underbrace{11...1}_{n-1}{}^2=\dfrac{a-1}{10}$.

Suy ra $A=(3a)^2+\left[5.\dfrac{a-1}{10}.(9a+1)+4a^2\right]=9a^2+\left(\dfrac{9a^2-1}{2}\right)^2=\left(\dfrac{9a^2+1}{2}\right)^2$.

Vì a lẻ nên $\dfrac{9a^2+1}{2}$ là số nguyên. Suy ra A là số chính phương.

Ta có thể tính cụ thể như sau:

$$\frac{9a^2-1}{2}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{10^n-1}{3}\right)^2+1\right]=\frac{10^{2n}-2.10^n+10}{18}=\frac{10^n\left(10^n-10\right)}{18}+\frac{8\left(10^n-1\right)}{18}+1$$

$$=5.10^n.\frac{10^{n-1}-1}{9}+4.\frac{10^{n-1}-1}{9}+1=\underbrace{55...5}_{n-1}.10^n+\underbrace{44...4}_{n-1}+1=\underbrace{55...5}_{n-1}+\underbrace{44...4}_{n-1}5.$$

Như vậy $A=\underbrace{33...3}_{n}{}^2\,\underbrace{55...5}_{n-1}.10^n+\underbrace{44...4}_{n}{}^2=\underbrace{55...5}_{n-1}\underbrace{44...4}_{n-1}5^2$

Bài 131. Theo giả thiết, tồn tại các số nguyên dương x,y sao cho $\begin{cases}4n+9=x^2\\9n+10=y^2\end{cases}$

Suy ra $9x^2-4y^2=9(4n+9)-4(9n+10)=41\Leftrightarrow(3x-2y)(3x+2y)=41$

Vì 41 là số nguyên tố và $3x-2y<3x+2y$ nên chỉ xảy ra $\begin{cases}3x-2y=1\\3x+2y=41\end{cases}$

Từ đó tìm được $x=7; y=10$. Suy ra $n=10$.

Bài 132. Giải sử $3^n+144=l^2$ với $l\in\mathbb{N}$. Suy ra $(l+12)(l-12)=3^n$.

Suy ra $\begin{cases} l+12=3^a \\ l-12=3^b \\ a,b\in \mathrm{N}, a+b=n \end{cases}$ suy ra $3^a-3^b=24$ hay $3^{a-1}-3^{b-1}=8$. Vì 8 không chia hết cho 3 nên phải có $b=1$. Suy ra $a=3$ và $n=4$.

Bài 133.
Giải sử $3^n+63=k^2$. Nếu n lẻ thì $3^n+63\equiv 3+63\equiv 2 \pmod 4$. Suy ra $k^2\equiv 2\pmod 4$ (loại)
Nếu n chẵn đặt $n=2m$ với $m\in \mathrm{N}$, khi đó $k^2-3^{2m}=63 \Leftrightarrow \left(k-3^m\right)\left(k+3^m\right)=7.9$
Vì $k-3^m\equiv k+3^m \pmod 3$ nên suy ra cả $k+3^m$ và $k-3^m$ đều chia hết cho 3.
Hơn nữa $k-3^m<k+3^m$ chỉ xảy ra khả năng $\begin{cases} k-3^m=3 \\ k+3^m=3.7 \end{cases}$
Từ đó tìm được *m*=12 và *m*=2. Suy ra *n*=4.

Bài 134. Giả sử ta có thể thêm $n(n>0)$ vào giữa chữ số 6 và chữ số 8 trong số 1681 để thu được một số chính phương. Khi đó tồn tại số nguyên dương k sao cho: $16.10^{n+2}+81=k^2 \Leftrightarrow (k-9)(k+9)=2^{n+6}5^{n+2}$. Suy ra $k+9, k-9$ chỉ có ước nguyên tố là 2 hoặc 5. Hơn nữa k lẻ và $(k+9)-(k-9)=18=2.3^2$ nên $(k+9,k-9)=2$. Chỉ xảy ra hai trường hợp sau:
$\begin{cases} k-9=2.5^{n+2} \\ k+9=2^{n+5} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} k+9=2.5^{n+2} \\ k-9=2^{n+5} \end{cases}$
Trong cả hai trường hợp ta có: $\left|2.5^{n+2}-2^{n+4}\right|=18 \Leftrightarrow \left|25.5^n-16.2^n\right|=9$
Điều này không xảy ra vì $25.5^n-16.2^n>25.2^n-16.2^n=9.2^n>9$.

Bài 135. Giả sử số tự nhiên n thỏa mãn đề bài. Khi đó tồn tại số nguyên dương k sao cho:
$2^{2012}+2^{2015}+2^n=k^2 \Leftrightarrow 9.2^{2012}+2^n=k^2 \Leftrightarrow \left(k+3.2^{1006}\right)\left(k-3.2^{1006}\right)=2^n$

Suy ra $\begin{cases} k+3.2^{1006}=2^a \\ k+3.2^{1006}=2^b \\ a,b\in \mathrm{N}, a+b=n \end{cases}$ suy ra $2^a-2^b=3.2^{1007}$ hay $2^{b-1}\left(2^{a-b}-1\right)=3.2^{1006}$.

Suy ra $\begin{cases} b-1=1006 \\ 2^{a-b}-1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1007 \\ a=1009 \end{cases} \Leftrightarrow n=2016$.

Bài 136. Giả sử $2^m+3^n=k^2, k\in \mathrm{N}$. Nếu m lẻ thì $2^m\equiv 2\pmod 3$. Suy ra $n=0$. Do đó $(k+1)(k-1)=2^m$. Ta thấy k lẻ $(k+1,k-1)=2$ nên chỉ có thể xảy ra $k-1=2$ và $k+1=2^{m-1}$
Từ đó tìm được $k=3, m=3$.

Nếu m chẵn, đặt $m=2s, s\in \mathrm{N}$. Ta có: $\left(k+2^s\right)\left(k-2^s\right)=2^n$. Suy ra $\begin{cases} k+2^s=3^a \\ k-2^s=3^b \\ a,b\in \mathrm{N}, a+b=n \end{cases}$

Suy ra $3^a - 3^b = 2^{s+1}$. Vì 2^{s+1} không chia hết cho 3 nên phải có $b=0, a=n$. Như vậy $3^n - 1 = 2^{s+1}$

Nếu $s=0$ thì $n=1, m=0$

Nếu $s>0$ thì $3^n = 2^{s+1}+1 \equiv 1 \pmod 4$ nên n chẵn.

Đặt $n=2t, t\in \mathrm{N}$ khi đó $\left(3^t+1\right)\left(3^t-1\right)=2^{s+1}$.

Ta thấy $\left(3^t+1, 3^t-1\right)=2$ nên phải có $3^t-1=2; 3^t+1=2^s$

Từ đó tìm được $t=1, s=2, n=2, m=4$.

Vậy có ba cặp số thỏa mãn đề bài là $(m,n)=(0,1);(3,0);(4,2)$.

Bài 137. Giả sử $2^m.5^n+25=l^2$ với $l\in\mathbb{N}$. Suy ra $(l+5)(l-5)=2^m.5^n$.

Vì $(l+5)-(l-5)=10=2.5$ nên suy ra cả hai số $l+5$ và $l-5$ cùng chia hết cho 2 và 5.

Suy ra $(l+5, l-5)=10$. Xảy ra các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\begin{cases} l+5=10 \\ l-5=10.2^{m-2}.5^{n-2} \end{cases}$ (loại)

Trường hợp 2: $\begin{cases} l+5=10.2^{m-2} \\ l-5=10.5^{n-2} \end{cases}$.

Suy ra $2^{m-2}=5^{n-2}+1$. Vì $5^{n-2}+1\equiv 2 \pmod 4$ nên phải có $m=3, n=2$.

Trường hợp 3: $\begin{cases} l+5=10.5^{n-2} \\ l-5=10.2^{m-2} \end{cases}$.

Suy ra $5^{n-2}-1=2^{m-2}$. Nếu $m\ge 5$ thì $5^{n-2}-1=2^{m-2}\,\vdots\,8$. Suy ra $n-2$ chẵn, đặt $n-2=2k,\ k\in\mathbb{N}$.
Khi đó $\left(5^k-1\right)\left(5^k+1\right)=2^{m-2}$.

Vì $\left(5^{k-1},\ 5^{k+1}\right)=2$ nên phải có $5^k-1=2$ (loại). Với $m\le 4$, thử trực tiếp ta thấy $m=4, n=3$ thỏa mãn.

Trường hợp 4: $\begin{cases} l+5=10.2^{m-2}.5^{n-2} \\ l-5=10 \end{cases}$.

Suy ra $l=15$ và $2^{m-2}.5^{n-2}=2$. Suy ra $m=3,\ n=2$.

Vậy có hai cặp số thỏa mãn đề bài là $(m,\ n)=(3;\ 2),\ (4;\ 3)$.

Bài 138.

Không mất tính tổng quát ta giả sử: $x\le y$ vì $y^2\le y^2+3x\le y^2+3y<y^2+4y+4=(y+2)^2$.

$\Rightarrow y^2+3x=(y+1)^2 \Leftrightarrow 3x=2y+1$. Bây giờ ta cần tìm điều kiện để:

$x^2+3y=m^2 \Leftrightarrow 16x^2+48y=16m^2 \Leftrightarrow 16x^2+24(3x-1)=16m^2 \Leftrightarrow (4x+9)^2-16m^2=105$ hay $(4x-4y+9)(4x+4y+9)=1.105=3.35=5.21=7.15$. Giải các trường hợp trên ta thu được bộ số $(x;\ y)$ thỏa mãn điều kiện là $(x;\ y)=(1;1),\ (11;16),\ (16;11)$.

Bài 139.

a) Ta thấy $2n+1$ là số chính phương lẻ nên $2n+1$ tận cùng bởi các chữ số $1,\ 5,\ 9$ suy ra n có chữ số tận cùng là $0,\ 2,\ 4$. Mặt khác $3n+1$ cũng là số chính phương nên n chỉ có thể tận cùng bởi 0. Suy ra $n\,\vdots\,5$.

Khi n tận cùng là 0 thì $2n+1,\ 3n+1$ đều là số chính phương lẻ.

Suy ra $3n+1=(2k+1)^2 \Rightarrow 3n=4k(k+1)\vdots 8$ hay $n\vdots 8$ mà $(5,8)=1 \Rightarrow n\vdots 40$.

b) Từ kết quả câu *a* suy ra $\overline{ab}=40$ hoặc $\overline{ab}=80$ thử lại ta thấy chỉ có $\overline{ab}=40$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Bài 141.

a) Ta xét $n>1008$. Giả sử $4^{31}+4^{1008}+4^n=y^2$ với $y\in\mathbb{N}^*$. Hay $4^{30}\left(4+4^{978}+4^{n-30}\right)=y^2$ do $4^{30}=\left(4^{15}\right)^2$ suy ra $4+4^{978}+4^{n-30}$ là số chính phương chẵn, hay $4+4^{978}+4^{n-30}=(2k+2)^2$ với $k\in\mathbb{N}^*$.

Ta có: $4+4^{978}+4^{n-30}=(2k+2)^2 \Leftrightarrow 4^{977}+4^{n-31}=k(k+1) \Leftrightarrow 4^{977}\left(1+4^{n-1008}\right)=k(k+1)$.

Nếu k là số chẵn thì $k+1$ là số lẻ suy ra $\begin{cases}4^{977}=k\\1+4^{n-1008}=k+1\end{cases} \Rightarrow 4^{977}=4^{n-1008} \Rightarrow n=1985$ thử lại ta thấy không thỏa mãn.

Nếu k lẻ thì $\begin{cases}4^{977}=k+1\\1+4^{n-1008}=k\end{cases} \Rightarrow 4^{977}=4^{n-1008}+2 \Rightarrow 4^{n-1008}<4^{977} \Rightarrow n<1985$ hay $n\le 1984$.

Khi $n=1984$ thì $4^{31}+4^{1008}+4^{1984}=2^{62}+2^{2016}+2^{2968}=\left(2^{31}+2^{1984}\right)^2$ đpcm.

b) Không mất tính tổng quát ta giả sử $x\le y\le z$. Đặt $4^x+4^y+4^z=u^2$ thế thì $2^{2x}\left(1+4^{y-x}+4^{z-x}\right)=u^2$.

TH1: Nếu $1+4^{y-x}+4^{z-x}$ là số lẻ thì $1+4^{y-x}+4^{z-x}=(2k+1)^2 \Leftrightarrow 4^{y-x-1}+4^{z-x-1}=k(k+1) \Leftrightarrow 4^{y-x-1}\left(1+4^{z-y}\right)=k(k+1)$.

+ Nếu k chẵn thì $k+1$ là số lẻ suy ra $\begin{cases}4^{y-x-1}=k\\1+4^{z-y}=k+1\end{cases} \Rightarrow 4^{y-x-1}=4^{z-y} \Rightarrow z=2y-x-1$ và $4^x+4^y+4^z=4^x+4^y+4^{2y-x-1}=\left(2^x+2^{2y-x-1}\right)^2$.

+ Nếu k lẻ thì $k+1$ chẵn suy ra $\begin{cases}4^{y-x-1}=k+1\\1+4^{z-y}=k\end{cases} \Rightarrow 4^{y-x-1}-4^{z-y}=2 \Leftrightarrow 2^{2y-2x-3}=2^{2x-2y-1}+1\ (*)$ do $2x-2y-1$ là số lẻ luôn khác 0. Nên (*) không thể xảy ra.

TH2: Nếu $1+4^{y-x}+4^{z-x}$ là số chẵn thì $y=x$ hoặc $z=x$. Từ đó ta suy ra phải có $x=y$ dẫn đến: $2+4^{z-x}$ là số chính phương. Điều này là vô lý vì một số chính phương chia cho 4 chỉ có thể dư 0 hoặc 1. Còn $2+4^{z-x}$ chia cho 4 dư 2 hoặc 3.

Tóm lại: Điều kiện để $4^x+4^y+4^z$ là số chính phương là: $z=2y-x-1$.

Áp dụng vào câu *a*) ta có: $n=2.1008-31-1=1984$.

Bài 142. Vì d là một ước của $3n^2 \Rightarrow d.k=3n^2$, ta có $n^2+d=n^2+\dfrac{3n^2}{k}$ là số chính phương với $k>0,\ k\in\mathbb{N}$ tức là $\dfrac{n^2k(k+3)}{k^2}$ là số chính phương suy ra $k(k+3)$ là số chính phương.

Đặt $k(k+3)=m^2 \Rightarrow (2k+3+2m)(2k+3-2m)=9 \Rightarrow \begin{cases}2k+3-2m=1\\2k+3+2m=9\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}k=1\\m=2\end{cases}$.

Bài 143. Nếu $m=n$ thì ta có điều phải chứng minh.

Xét $m\ne n$ ta đặt $\begin{cases}m+n=2x\\m-n=2y\end{cases}(x,y\in\mathbb{Z},x>0,y\ne 0)$ khi đó ta có $\begin{cases}m=x+y\\n=x-y\end{cases}$ do $m,n>0$

suy ra $\begin{cases} x+y>0 \\ x-y>0 \end{cases} \Rightarrow x>|y|$.

Do $n^2-1 \vdots |m^2-n^2+1|$ suy ra $-(m^2-n^2-1)+m^2 \vdots |m^2-n^2+1| \Rightarrow m^2 \vdots |m^2-n^2+1|$. Suy ra $m^2=k\left(m^2-n^2+1\right)$ (1) (với $k \in \mathbb{Z}$).

Thay $m=x+y, n=x-y$ ta có: $(x+y)^2=k(4xy+1) \Leftrightarrow x^2-2k(2k-1)xy+y^2-k=0$ (*). Phương trình (*) có 1 nghiệm là $x \in \mathbb{Z}$ nên có một nghiệm nữa là x_1. Theo hệ thức Vi-et ta có:

$\begin{cases} x+x_1=2(2k-1) \\ xx_1=y^2-k \end{cases}$ từ đây suy ra $x_1 \in \mathbb{Z}$.

+ Nếu $x_1>0 \Rightarrow (x_1; y)$ là cặp nghiệm thỏa mãn (*) suy ra $x_1>|y| \Rightarrow y^2-k=xx_1>|y|^2=y^2 \Rightarrow k<0 \Rightarrow x_1+x=2(2k-1)<0$ mâu thuẫn.

+ Nếu $x_1<0$ thì $xx_1=y^2-k<0 => k>y^2 \Rightarrow k>0 \Rightarrow 4xy+1>0 \Rightarrow y>0$. Ta có:

$k={x_1}^2-2(2k-1)x_1y+y^2=x_1^2+2(2k-1)|x_1|y+y^2>2(2k-1)|x_1|y \geq 2(2k-1)>k$ mâu thuẫn.

Vậy $x_1=0$. Khi đó $k=y^2$ và $m^2-n^2+1=\dfrac{m^2}{k}=\left(\dfrac{m}{y}\right)^2$ nên $|m^2-n^2+1|$ là số chính phương.

CHỦ ĐỀ 5. ỨNG DỤNG CỦA ĐỒNG DƯ THỨC TRONG GIẢI TOÁN SỐ HỌC

Bài 1.

Ta có $4^3 = 64 \equiv 1 \pmod 9 \Rightarrow 4^{2016} = \left(4^3\right)^{672} \equiv 1 \pmod 9$

Mặt khác $4^2 = 16 \equiv 7 \pmod 9 \Rightarrow 4^{2018} = 4^{2016}.\,4^2 \equiv 1.\,7 \pmod 9$

Vậy $4^{2018} - 7 \equiv 0 \pmod 9$ hay $4^{2018} - 7 \;\vdots\; 9$.

Bài 2.

Trường hợp 1:

Với $n = 2 \Rightarrow A = 1 \vdots (2-1)^2$ luôn đúng

Trường hợp 2:

Với $n > 2 \Rightarrow A = n^2\left(n^{n-2} - 1\right) + (n-1) = n^2(n-1)\left(n^{n-3} + n^{n-4} + \ldots + 1\right) + (n-1)$

$= (n-1)\left(n^{n-1} + n^{n-2} + \ldots + n^2 + 1\right)$

Mặt khác

$n \equiv 1\left(\bmod (n-1)\right) \Rightarrow n^k \equiv 1\left(\bmod (n-1)\right)\left(\forall k \in N\right)$

$\Rightarrow n^{n-1} + n^{n-2} + \ldots + n^2 \equiv n - 2\left(\bmod (n-1)\right)$

$\Rightarrow n^{n-1} + \ldots + n^2 + 1 \equiv n - 1\left(\bmod (n-1)\right)$

$n^{n-1} + \ldots + n^2 + 1 \equiv 0\left(\bmod (n-1)\right)(1)$

$\Rightarrow (n-1)\left(n^{n-1} + .. + n^2 + 1\right) \equiv 0\left(\bmod (n-1)^2\right)$

$\Rightarrow A = \left(n^n - n^2 + n - 1\right) \vdots (n-1)^2$

Bài 3.

Trường hợp 1:

Với $n = 0 \Rightarrow 9^n + 1 = 2$ không chia hết cho 100.

hoặc $n = 1 \Rightarrow 9^n + 1 = 10$ không chia hết cho 100.

Trường hợp 2:

$n \geq 2$ Ta đi xét 2 khả năng sau:

Khả năng 1:

Với n chẵn $n = 2k\left(k \in N^*\right) \Rightarrow 9^n + 1 = 9^{2k} + 1 \equiv 2(\bmod 10)$

$\Rightarrow \left(9^n + 1\right)$ không chia hết cho 10. $\Rightarrow \left(9^n + 1\right)$ không chia hết cho 100.

Khả năng 2:

Với n lẻ $n = 2k+1\left(n \in N^*\right) \Rightarrow 9^n + 1 = 9.81^k + 1 \equiv 2\left(\bmod 4\right)$

$\Rightarrow$ $\left(9^n+1\right)$ không chia hết cho 4. $\Rightarrow$ $\left(9^n+1\right)$ không chia hết cho 100.

Bài 4.

Ta có a = $\overline{a_n a_{n-1}...a_1 a_0}$ = $a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + ... + a_1.10 + a_0$.

a) Ta có $10 \equiv 1 (\bmod 3)$ do đó $a_i.10^i \equiv a_i (\bmod 3)$, i = 1; 2; 3; ...; n

Do đó $a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + ... + a_1.10 + a_0 \equiv (a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0) (\bmod 3)$

Vậy a $\vdots$ 3 $\Leftrightarrow$ $a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0 \equiv 0 (\bmod 3)$

$\Leftrightarrow$ $a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0 \vdots 3$.

b) Ta có $10^2 = 100 \equiv 0 (\bmod 4)$ $\Rightarrow$ $a_i.10^i \equiv 0 (\bmod 4)$, i = 2; 3; ...; n

$\Rightarrow$ $a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + ... + a_1.10 + a_0 \equiv (a_1.10 + a_0) (\bmod 4)$

Vậy a $\vdots$ 4 $\Leftrightarrow$ $a_1.10 + a_0 \equiv 0 (\bmod 4)$ $\Leftrightarrow$ $\overline{a_1 a_0} \vdots 4$.

Bài 5. Ta có $124 = 4.31 \Rightarrow A \equiv 0\left(\bmod 4\right)$

Do vậy để chứng minh $A \vdots 124$ ta đi chứng minh $A \vdots 31$

Thật vậy : $1924 \equiv 2\left(\bmod 31\right); 1920 \equiv -2\left(\bmod 31\right) \Rightarrow A \equiv 2^{2003^{2004^n}} - 2\left(\bmod 31\right)(*)$

Mặt khác : $2^5 = 32 \equiv 1\left(\bmod 31\right)$. Ta đi tìm số dư của 2003^{2004^n} khi chia cho5.

$2004^n \equiv 0\left(\bmod 4\right) \Rightarrow 2004^n = 4k \Rightarrow 2003^{2004^n} = 2003^{4k}$

$2003 \equiv 3\left(\bmod 5\right) \Rightarrow 2003^{4k} \equiv 3^{4k} \equiv 81^k \equiv 1\left(\bmod 5\right)$

$\Rightarrow 2003^{2004^n} \equiv 1\left(\bmod 5\right) \Rightarrow 2003^{2004^n} = 5m+1$

$\Rightarrow 2^{2003^{2004^n}} = 2^{5m+1} = 2.\left(2^5\right)^m \equiv 2\left(\bmod 31\right)$

Thay vào (*) ta có $A \equiv 0\left(\bmod 31\right) \Rightarrow A \vdots 31$

Bài 6.

a) Tìm chữ số tận cùng của một số là tìm dư trong phép chia số đó cho 10. Vì $9^{2n+1} = 9.81^n \equiv 9 (\bmod 10)$. Do 9^{10} là số lẻ nên số $9^{9^{10}}$ có chữ số tận cùng là 9.

b) Tìm hai chữ số tận cùng của một số là tìm dư trong phép chia số đó cho 100.

Ta có $3^4 = 81 \equiv -19 (\bmod 100)$ $\Rightarrow$ $3^8 \equiv (-19)^2 (\bmod 100)$

Mà $(-19)^2 = 361 \equiv 61 (\bmod 100)$ Vậy $3^8 \equiv 61 (\bmod 100)$

$3^{10} \equiv 61.9 \equiv 549 \equiv 49 (\bmod 100)$

$3^{20} \equiv 49^2 \equiv 01 (\bmod 100)$ (do $49^2 = 2401 = 24.100 + 1$)

Do đó $3^{1000} \equiv 01 (\bmod 100)$ nghĩa là hai chữ số sau cùng của 3^{1000} là 01.

Bài 7. Với những bài toán dạng này, phương pháp chung là tính toán để đi đến $a \equiv b \pmod m$ với b là số có trị tuyệt đối nhỏ nhất có thể được (tốt nhất là $b = \pm 1$) từ đó tính được thuận lợi $a^n \equiv b^n \pmod m$

a) $8! = 1.2.3.4.5.6.7.8.$

Ta có $3.4 = 12 \equiv 1 \pmod{11}$; $2.6 = 12 \equiv 1 \pmod{11}$; $7.8 \equiv 1 \pmod{11}$ Vậy $8! \equiv 5 \pmod{11}$
$\Rightarrow 8! - 1 \equiv 4 \pmod{11}$. Số dư trong phép chia $8! - 1$ cho 11 là 4.

b) $2014 \equiv -1 \pmod 5 \Rightarrow 2014^{2015} \equiv -1 \pmod 5$

$2016 \equiv 1 \pmod 5 \quad \Rightarrow 2016^{2015} \equiv 1 \pmod 5$; $2018 \equiv 3 \pmod 5$

$2014^{2015} + 2016^{2015} + 2018 \equiv 3 \pmod 5$.

c) $2^3 \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow 2^{50} = (2^3)^{16}.\ 4 \equiv 4 \pmod 7$

$41 \equiv -1 \pmod 7 \Rightarrow 41^{65} \equiv (-1)^{65} \equiv -1 \pmod 7$

$2^{50} + 41^{65} \equiv 4 - 1 \equiv 3 \pmod 7$.

d) $1^5 \equiv 1 \pmod 4$; $3^5 \equiv -1 \pmod 4$; $5^5 \equiv 1 \pmod 4$; ...;

$97^5 \equiv 1 \pmod 4$; $99^5 \equiv -1 \pmod 4$. Đáp số : Dư 0 .

Bài 8. a) $1532 \equiv 2 \pmod 9 \Rightarrow 1532^5 \equiv 2^5 \equiv 5 \pmod 9$

$$\Rightarrow 1532^5 - 4 \equiv 1 \pmod 9$$

b) $2^5 = 32 \equiv 7 \pmod{25} \Rightarrow 2^{10} = (2^5)^2 \equiv 7^2 \equiv -1 \pmod{25}$.

$2^{2000} = (2^{10})^{200} \equiv (-1)^{200} \equiv 1 \pmod{25}$.

c) $2014 = 155.13 - 1$ nên $2014 \equiv -1 \pmod{13}$; $2015^{2016} = 2k + 1$ $(k \in \mathbb{N})$

$\Rightarrow 2014^{2015^{2016}} \equiv (-1)^{2k+1} \equiv -1 \pmod{13}$. Đáp số : dư 12.

Bài 9. a) Ta có $35^2 = 1225 = 425.3 - 50 \equiv -50 \pmod{425}$

$$35^3 = 35^2.\ 35 \equiv -50.\ 35 \equiv -1750 \equiv -50 \pmod{425}$$

$$35^4 = (35^2)^2 \equiv (-50)^2 \equiv 2500 \equiv -50 \pmod{425}$$

Tương tự với 35^8; 35^{16}; 35^{32}. Từ đó có $A \equiv -100 \pmod{425}$.

Hay số dư trong phép chia A cho 425 là 325.

b) Ta có $10^5 = 7.14285 + 5 \equiv 5 \pmod 7$; $10^6 = 5.10 \equiv 1 \pmod 7$;

$10^n - 4 = \underbrace{\overline{99...96}}_{n-1\text{ số } 9} \equiv 0 \pmod 2$ và $\underbrace{\overline{99...96}}_{n-1\text{ số } 9} \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow 10^n - 4 \equiv 0 \pmod 6$

$\Rightarrow 10^n \equiv 4 \pmod 6$ và $10^n = 6k + 4$ $(k, n \in \mathbb{N}^*)$.

Do đó $10^{10^n} = 10^{6k+4} = \left(10^6\right)^k.10^4 \equiv 10^4 \pmod 7$

Vậy $B \equiv 10^4 + 10^4 + 10^4 + ... + 10^4 \equiv 10.\ 10^4 \equiv 10^5 \equiv 5 \pmod 7$.

Bài 10. a) Ta tìm dư trong phép chia số đó cho 10.

Vì $4^2 \equiv 6 \pmod{10}$ nên $4^{3^2} = 4^9 = (4^2)^4.4 \equiv 6.4 \equiv 4 \pmod{10}$ $\Rightarrow$ chữ số tận cùng là 4.

b) Ta tìm dư trong phép chia số đó cho 100. Theo ví dụ 3 chuyên đề 26 ta đã có $3^{1000} \equiv 01$ (mod 100) nghĩa là hai chữ số sau cùng của 3^{1000} là 01. Số 3^{1000} là bội số của 3 nên chữ số hàng trăm của nó khi chia cho 3 phải có số dư là 2 để chia tiếp thì 201 chia hết cho 3 (nếu số dư là 0 hay 1 thì 001; 101 đều không chia hết cho 3). Vậy số $3^{999} = 3^{1000} : 3$ có hai chữ sô tận cùng bằng 201 : 3 = 67.

c) Ta tìm dư trong phép chia số đó cho 1000. Do 1000 = 125.8 trước hết ta tìm số dư của 2^{512} cho 125. Từ hằng đẳng thức:

$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$ ta có nhận xét nếu $a \vdots 25$ thì $(a + b)^5 \equiv b^5 \pmod{125}$.

Vì $2^{10} = 1024 \equiv -1 \pmod{25}$ nên $2^{10} = 25k - 1$ $(k \in N)$.

Từ nhận xét trên ta có $2^{50} = (2^{10})^5 = (25k - 1)^5 \equiv -1 \pmod{125}$

Vì vậy $2^{512} = (2^{50})^{10}.\, 2^{12} \equiv (-1)^{10}.\, 2^{12} \equiv 2^{12} \pmod{125}$.

Do $2^{12} = 2^{10}\, .\, 2^2 = 1024.\, 4 \equiv 24.4 \equiv 96 \pmod{125}$. Vậy $2^{512} \equiv 96 \pmod{125}$.

Hay $2^{512} = 125m + 96,\ m \in N$. Do $2^{512} \vdots 8\ ;\ 96 \vdots 8$ nên $m \vdots 8 \Rightarrow m = 8n\ (n \in N)$.

$2^{512} = 125.\, 8n + 96 = 1000n + 96$. Vậy ba chữ số tận cùng của số 2^{512} là 096.

Bài 11. Để chứng tỏ $a \vdots m$ ta chứng minh $a \equiv 0 \pmod{m}$

a) $41 = 42 - 1 \equiv -1 \pmod 7$. Do đó $41^{2015} \equiv (-1)^{2015} \equiv -1 \pmod 7$

Hay $41^{2015} \equiv 6 \pmod 7 \Rightarrow 41^{2015} - 6 \equiv 0 \pmod 7$

b) Ta có $2^4 = 16 \equiv 1 \pmod{15} \Rightarrow 2^{4n} \equiv 1 \pmod{15} \Rightarrow 2^{4n} - 1 \equiv 0 \pmod{15}$

Do đó $2^{4n+1} - 2 = 2(2^{4n} - 1) \equiv 0 \pmod{15}$.

c) Ta có $3^3 = 27 \equiv 1 \pmod{13}$; $3^{76} = (3^3)^{25}.3 \equiv 3 \pmod{13}$

Ta có $2^4 \equiv 3 \pmod{13} \Rightarrow 2^6 \equiv 12 \equiv -1 \pmod{13}$

$2^{76} = (2^6)^{12}.\, 2^4 \equiv 3 \pmod{13}$

Do đó $3^{76} - 2^{76} \equiv 0 \pmod{13}$ hay $3^{76} - 2^{76} \vdots 13$

d) 341 = 11 . 31

* Ta có $2^5 = 32 \equiv -1 \pmod{11}$; $20 = 22 - 2 \equiv -2 \pmod{11}$

Do đó $20^{15} \equiv (-2)^{15} \equiv -(2^5)^3 \equiv 1 \pmod{11}$

* $20^{15} = (2^5)^3.\, (5^3)^5 \equiv 1 \pmod{31}$ do $2^5 \equiv 1 \pmod{31}$ và $5^3 \equiv 1 \pmod{31}$

Do đó $20^{15} \equiv 1 \pmod{11.31}$ hay $20^{15} \equiv 1 \pmod{341} \Rightarrow 20^{15} - 1 \vdots 341$

Bài 12. $1890 \equiv 0 \pmod 7$; $1945 \equiv -1 \pmod 7$; $2017 \equiv 1 \pmod 7$

$1890^{79} \equiv 0 \pmod 7$; $1945^{2015} \equiv -1 \pmod 7$; $2017^{2018} \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow$ đpcm.

Bài 13. a)Ta có $5555 = 793.7 + 4 \equiv 4 \pmod 7$; $2222 = 318.7 - 4 \equiv -4 \pmod 7$

$\Rightarrow 5555^{2222} + 2222^{5555} \equiv 4^{2222} + (-4)^{5555} \equiv -4^{2222}(4^{3333} - 1) \pmod 7$

Do $4^{3333} - 1 = \left[\left(4^3\right)^{1111} - 1\right]$; $4^3 = 64 \equiv 1 \pmod 7$ nên $(4^3)^{1111} \equiv 1 \pmod 7$

Hay $4^{3333} - 1 \equiv 0 \pmod 7$. Do đó $5555^{2222} + 2222^{5555} \equiv 0 \pmod 7$ và

$15554^{1111} = (2.\ 7777)^{1111} = 2^{1111}.\ 7777^{1111} \equiv 0 \pmod 7$ $\Rightarrow$ đpcm.

b) Ta có 102 = 2.3.17. Ta có $(220 + 119 + 69)^{102} \equiv 0 \pmod{102}$

*$220 \equiv 0 \pmod 2$; $119 \equiv -1 \pmod 2$; $69 \equiv 1 \pmod 2$ $\Rightarrow$ $M \equiv 0 \pmod 2$

*$220 \equiv 1 \pmod 3$; $119 \equiv -1 \pmod 3$; $69 \equiv 0 \pmod 3$ $\Rightarrow$ $M \equiv 0 \pmod 3$

*$220 \equiv -1 \pmod{17}$; $119 \equiv 0 \pmod{17}$; $69 \equiv 1 \pmod{17}$ $\Rightarrow$ $M \equiv 0 \pmod{17}$

(Để ý 119^{69} và 69^{220} là các số lẻ) ; $\Rightarrow M \equiv 0 \pmod{2.3.17}$. Hay $M \vdots 102$

Bài 14. Đặt $A = 5^{2n-1}.\ 2^{n+1} + 2^{2n-1}.\ 3^{n+1}$. Ta có $A \vdots 2$, $\forall n \in N^*$;

Ta có $A = 2^n (5^{2n-1}.\ 2 + 2^{n-1}.\ 3^{n+1}) = 2^n (25^{n-1}.\ 10 + 6^{n-1}.\ 9)$

Do $25 \equiv 6 \pmod{19} \Rightarrow A \equiv 2^n (6^{n-1}.10 + 6^{n-1}.\ 9) \equiv 2^n.6^{n-1}.\ 19 \equiv 0 \pmod{19}$

Hay $A \vdots 19$. Mà $(2 ; 19) = 1$ $\Rightarrow$ $A \vdots 19.\ 2$ $\Rightarrow$ $A \vdots 38$.

Bài 15. Ta có $a = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0} = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + ... + a_1.10 + a_0$.

a) Ta có $10 \equiv 1 \pmod 9$ do đó $a_i.\ 10^i \equiv a_i \pmod 9$, i = 1; 2; 3; ...; n

Do đó $a \equiv (a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0) \pmod 9$. Vậy

$a \vdots 9 \Leftrightarrow a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0 \equiv 0 \pmod 9 \Leftrightarrow a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0 \vdots 9$.

b) Ta có $10^2 = 100 \equiv 0 \pmod{25} \Rightarrow a_i.\ 10^i \equiv 0 \pmod{25}$, i = 2; 3; ...; n.

$\Rightarrow a \equiv (a_1.10 + a_0) \pmod{25}$.

Vậy $a \vdots 25 \Leftrightarrow a_1.\ 10 + a_0 \equiv 0 \pmod{25} \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \vdots 25$.

c) Do $10 \equiv -1 \pmod{11} \Rightarrow a_i.\ 10^i \equiv a_i.(-1)^i \pmod{11}$

$a \equiv (a_0 + a_2 + a_4 + ...) - (a_1 + a_3 + a_5 + ...) \pmod{11}$

Do đó $a \vdots 11 \Leftrightarrow (a_0 + a_2 + a_4 + ...) - (a_1 + a_3 + a_5 + ...) \equiv 0 \pmod{11}$

Tức là hiệu của tổng các chữ số ở vị trí lẻ và tổng các chữ số ở vị trí chẵn bằng 0.

d) Ta có $10^3 = 1000 \equiv 0 \pmod 8 \Rightarrow a_i.\ 10^i \equiv 0 \pmod 8$, i = 3; 4; ...; n.

$\Rightarrow a \equiv (a_2.\ 10^2 + a_1.10 + a_0) \pmod 8$.

Vậy $a \vdots 8 \Leftrightarrow a_2.\ 10^2 + a_1.\ 10 + a_0 \equiv 0 \pmod 8 \Leftrightarrow \overline{a_2 a_1 a_0} \vdots 8$.

Bài 16. Theo định lý Fermat bé, do 11 là số nguyên tố nên ta có

$2^{10} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 2^{10n} \equiv 1 \pmod{11}$

$\Rightarrow 2^{10n+1} = 2.\ 2^{10n} \equiv 2 \pmod{22} \Rightarrow 2^{10n+1} = 22k + 2$ $(k \in N)$

Do 23 là số nguyên tố ta cũng có $2^{22} \equiv 1 \pmod{23} \Rightarrow 2^{2^{10n+1}} = 2^{22k+2} = 4.2^{22k} \equiv 4 \pmod{23} \Rightarrow$ $2^{2^{10n+1}} + 19 \equiv 4 + 19 \equiv 0 \pmod{23}$ Tức là $A \vdots 23$. Mà $A > 23, \forall n \geq 1$ nên A là hợp số.

Bài 17. Theo định lý Wilson : Với mọi số nguyên tố p thì $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$.

Do 13 nguyên tố nên $12! \equiv -1 \pmod{13} \Rightarrow (12!)^{13} \equiv (-1)^{13} \equiv -1 \pmod{13}$.

Ta có $2016 = 13.155 + 1 \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow 2016^{2015} \equiv 1 \pmod{13}$.

Do đó B = $(12!)^{13} + 2016^{2015} \equiv 0 \pmod{13}$. Hay $B \vdots 13$.

Bài 18. a) Theo Định lý Fermat bé , do 7 là số nguyên tố nên $2^6 \equiv 1 \pmod 7$.

Ta có $4 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow 4^n \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow 2.4^n \equiv 2 \pmod 6$. Nghĩa là

$2^{2n+1} = 2(2^2)^n = 2.\ 4^n \equiv 2 \pmod 6 \Rightarrow 2^{2n+1} = 6k + 2$, $(k \in N)$

Mặt khác $2^{3n} = (2^3)^n = 8^n \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow 3.\ 2^{3n} \equiv 3 \pmod 7$.

Do đó $2^{2^{2n+1}} + 3.2^{3n} \equiv 2^{6k+2} + 3 \equiv 2^2.\ (2^6)^k + 3 \equiv 2^2.1 + 3 \equiv 0 \pmod 7$.

b) Do 11 là số nguyên tố nên $2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$

Ta có $16 \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow 16^n \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow 2.16^n \equiv 2 \pmod{10}$. Nghĩa là $2^{4n+1} = 2(2^4)^n =$ $2.16^n \equiv 2 \pmod{10} \Rightarrow 2^{4n+1} = 10k + 2$, $(k \in N)$

Mặt khác $12 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 12^{5n+1} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 2.\ 12^{5n+1} \equiv 2 \pmod{11}$;

Do $10^2 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 10^{2n} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 5.10^{2n} \equiv 5 \pmod{11}$.

Vì thế $2^{2^{4n+1}} + 2.12^{5n+1} + 5.10^{2n} \equiv 2^{10k+2} + 2 + 5 \equiv 2^2 + 7 \equiv 0 \pmod{11}$.

Bài 19. a) Ta có $72 = 8.9$ và $(8; 9) = 1$.

*$63 \equiv 0 \pmod 9$; khi $n = 2$ thì $3^n \equiv 0 \pmod 9$ do đó $3^n + 63 \equiv 0 \pmod 9$.

*Mặt khác, với $n = 2k$ $(k \in N^*)$ thì $3^n - 1 = 3^{2k} - 1 = 9^k - 1 \equiv 1^k - 1$

$\equiv 0 \pmod 8$ do đó $3^n + 63 = 3^n - 1 + 64 \equiv 0 \pmod 8$.

Vậy với $n = 2k$ $(k \in N^*)$ thì $3^n + 63 \vdots 72$.

b) Ta có $323 = 17 . 19$ và $(17; 19) = 1$.

*$A = (20^n - 1) + (16^n - 3^n) = P + Q$.

Ta có $20^n \equiv 1 \pmod{19} \Rightarrow P \equiv 0 \pmod{19}$.

Nếu $n = 2k$ $(k \in N^*)$ thì $Q = 16^{2k} - 3^{2k} \equiv (-3)^{2k} - 3^{2k} \equiv 3^{2k} - 3^{2k} \equiv 0 \pmod{19} \Rightarrow A = P + Q \equiv 0 \pmod{19}$

* $A = (20^n - 3^n) + (16^n - 1) = P' + Q'$

$20^n \equiv 3^n \pmod{17}$. Do đó $P' = 20^n - 3^n \equiv 0 \pmod{17}$.

Nếu $n = 2k$ $(k \in N^*)$ thì $Q' = 16^{2k} - 1 = (-1)^{2k} - 1 \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{17}$

$\Rightarrow A = P' + Q' \equiv 0 \pmod{17}$. Do $(17 ; 19) = 1$ nên $A \equiv 0 \pmod{17.\ 19}$.

Vậy với $n = 2k$ $(k \in N^*)$ thì $A = 20^n + 16^n - 3^n - 1 \;\vdots\; 323$.

Bài 20. Theo định lý Fermat bé ta có $2^p \equiv 2 \pmod p$ nên nếu $2^p \equiv -1 \pmod p$ thì ta có $3 \equiv 0 \pmod p$ $\Rightarrow p = 3$.

Mặt khác khi $p = 3$ thì $2^3 + 1 = 9 \equiv 0 \pmod 3$. Vậy $p = 3$ là số cần tìm.

Bài 21. Với $p = 3$ thì $p^2 + 20 = 29$ là số nguyên tố.

Với $p \neq 3$ thì $p^2 \equiv 1 \pmod 3$ nên $p^2 + 20 \equiv 21 \equiv 0 \pmod 3$.

Vậy $p^2 + 20 \;\vdots\; 3$ mặt khác $p^2 + 20 > 3$ nên $p^2 + 20$ là hợp số. Vậy chỉ có 1 số nguyên tố cần tìm là $p = 3$.

Bài 22. Với $a, b \in N^*$. Nếu $ab \;\vdots\; p$ thì số $ab^p - ba^p \;\vdots\; p$

Nếu $ab \not\vdots\; p$ thì $(a, p) = (b, p) = 1$. Do đó $a^{p-1} \equiv b^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ $\Rightarrow$

$a^{p-1} - b^{p-1} \equiv 0 \pmod p$ $\Rightarrow ab(a^{p-1} - b^{p-1}) \equiv 0 \pmod p$

$\Rightarrow ab^p - ba^p \equiv 0 \pmod p$ hay $ab^p - ba^p \;\vdots\; p$, $\forall a, b \in N^*$.

Bài 23. a) Giả sử $a, b, c \in Z$ mà $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 7 \pmod 8$.

Ta có $a \equiv 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; 4 \pmod 8$ $\Rightarrow a^2 \equiv 0; 1; 4 \pmod 8$

$\Rightarrow b^2 + c^2 \equiv 7; 6; 3 \pmod 8$. Điều này vô lý vì $b^2 \equiv 0; 1; 4 \pmod 8$ và $c^2 \equiv 0; 1; 4 \pmod 8$
$\Rightarrow b^2 + c^2 \equiv 0; 1; 2; 4; 5 \pmod 8$.

Vậy $a^2 + b^2 + c^2 \not\equiv 7 \pmod 8$.

b) Áp dụng câu a) ta có với $x, y, z \in Z$

$4x^2 + y^2 + 9z^2 = (2x)^2 + y^2 + (3z)^2 \not\equiv 7 \pmod 8$.

Mà $2015 = 8.251 + 7 \equiv 7 \pmod 8$

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

Bài 24. Ta có $2011 \equiv 11 \pmod{100}$; $11^2 \equiv 21 \pmod{100}$; $11^3 \equiv 31 \pmod{100}$;

$11^5 \equiv 21.31 \equiv 51 \pmod{100}$ $\Rightarrow 11^{10} \equiv 51^2 \equiv 1 \pmod{100}$.

Ta có $2010^{2009} \equiv 0 \pmod{10} \Rightarrow 2010^{2009} = 10k$ $(k \in Z)$

$\Rightarrow 2011^{2010^{2009}} = 2011^{10k} \equiv 11^{10k} \equiv (11^{10})^k \equiv 1 \pmod{100}$. Do đó hai chữ số tận cùng là số 01.

Bài 25. Bài toán có nhiều cách giải. Sau đây là cách giải theo đồng dư thức:

* Ta có $\forall n \in N^*$ thì $n^5 - n \equiv 0 \pmod{30}$ (ví dụ 8 chuyên đề 26 đã chứng minh)

$A = (a^{2012} - a^{2008}) + (b^{2012} - b^{2008}) + (c^{2012} - c^{2008})$

$A = a^{2007}(a^5 - a) + b^{2007}(b^5 - b) + c^{2007}(c^5 - c)$

Ta có $a^5 - a \equiv 0 \pmod{30}$ $\Rightarrow a^{2007}(a^5 - a) \equiv 0 \pmod{30}$

Tương tự $b^{2007}(b^5 - b) \equiv 0 \pmod{30}$; $c^{2007}(c^5 - c) \equiv 0 \pmod{30}$

Vậy $A \equiv 0 \pmod{30}$. Hay $A \;\vdots\; 30$.

Bài 26. Giả sử tồn tại bộ ba số nguyên (x; y ; z) thỏa mãn $x^4 + y^4 = 7z^4 + 5$

$\Leftrightarrow\ x^4 + y^4 + z^4 = 8z^4 + 5$ (1).

Xét với một số nguyên a bất kỳ thì nếu a chẵn thì $a = 2k\ (k \in Z)$

$\Rightarrow\ a^4 = 16k^4 \equiv 0 \pmod 8$; nếu a lẻ thì $a^4 = (2k + 1)^4 \equiv 1 \pmod 8$

Do đó $x^4 + y^4 + z^4 \equiv 0 ; 1 ; 2 ; 3 \pmod 8$. Trong khi đó $8z^4 + 5 \equiv 5 \pmod 8$ mâu thuẫn với (1).
Vậy không tồn tại các bộ ba số nguyên (x; y; z) thỏa mãn đẳng thức $x^4 + y^4 = 7z^4 + 5$.

Bài 27. Ta có $41^2 = (40 + 1)^2 = 40^2 + 80 + 1 \equiv 81 \pmod{100}$

$41^4 \equiv 81^2 \equiv 6561 \equiv 61 \pmod{100} \Rightarrow 41^5 \equiv 61.41 \equiv 1 \pmod{100}$

$\Rightarrow 41^{106} \equiv 41.(41^5)^{21} \equiv 41 \pmod{100}$

Mặt khác $57^4 = 10556001 \equiv 1 \pmod{100} \Rightarrow 57^{2012} = (57^4)^{503} \equiv 1 \pmod{100}$

Vì thế $A \equiv 41 + 1 \pmod{100}$.

Do đó hai chữ số cuối cùng của số $A = 41^{106} + 57^{2012}$ là 42

Bài 28. Do $a + 20 \vdots 21 \Rightarrow a \equiv 1 \pmod 3$ và $a \equiv 1 \pmod 7$

$b + 13 \vdots 21 \Rightarrow b \equiv 2 \pmod 3$ và $b \equiv 2 \pmod 7$

Suy ra $A = 4^a + 9^b + a + b \equiv 1 + 0 + 1 + 2 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow A \equiv 10 \pmod 3$

Xét $a = 3k + 1 ; b = 3q + 2$ với $k, q \in N$ ta có $4^a = 4^{3k+1} = 4.64^k \equiv 4 \pmod 7$

$9^b = 9^{3q+2} \equiv 2^{3q+2} \equiv 4.8^q \equiv 4 \pmod 7$.

Do đó $A = 4^a + 9^b + a + b \equiv 4 + 4 + 1 + 1 \equiv 10 \pmod 7 \Rightarrow A \equiv 10 \pmod 7$

$A \equiv 10 \pmod 3$ và $A \equiv 10 \pmod 7$ mà $(3; 7) = 1$ nên $A \equiv 10 \pmod{3.7}$

Hay $A \equiv 10 \pmod{21}$. Vậy số dư trong phép chia A cho 21 là 10.

Bài 29. $2^3 \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow (2^3)^n \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow 2^{3n+1} = 2.(2^3)^n \equiv 2 \pmod 7$.

và $2^{3n-1} = 2^2.(2^3)^{n-1} \equiv 4 \pmod 7$.

Nên $A \equiv 2 + 4 + 1 \equiv 0 \pmod 7$ nghĩa là $A \vdots 7$. Mà với $n \in N^*$ thì $A > 7$.

Vậy A là hợp số.

Bài 30. $\forall n \in N^*$ ta có $2012^{4n} \equiv 0 \pmod 2$; $2013^{4n} \equiv 1 \pmod 2$;

$2014^{4n} \equiv 0 \pmod 2$; $2015^{4n} \equiv 1 \pmod 2$. Do đó $A \equiv 2 \equiv 0 \pmod 2$.

* Ta lại có $2012 \equiv 0 \pmod 4 \Rightarrow 2012^{4n} \equiv 0 \pmod 4$;

$2014 \equiv 2 \pmod 4 \Rightarrow 2014^2 \equiv 2^2 \equiv 0 \pmod 4 \Rightarrow 2014^{4n} \equiv (2014^2)^{2n} \equiv 0 \pmod 4$

Do $2013 \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow 2013^{4n} \equiv 1 \pmod 4$;

Do $2015 \equiv -1 \pmod 4 \Rightarrow 2015^{4n} = (-1)^{4n} \equiv 1 \pmod 4$

Vậy $A \equiv 2 \pmod 4$ nghĩa là A chia cho 4 dư 2. Ta có $A \vdots 2$; $A \not\vdots 2^2$; 2 là số nguyên tố. Vậy A không là số chính phương $\forall n \in N^*$.

Bài 31.

Ta có

$19^{2003} \equiv (2.9+1)^{2003} \equiv 1(\bmod 2003)(1); 7^{2003} \equiv (9-2)^{2003} \Rightarrow 7^{2003} \equiv (-2)^{2003}(\bmod 9)$ Mặt khác $(-2)^{2003} = (-2).2^{2002} = (-2).(2^3)^{667}.2 = (-4).(2^3)^{667}$

Do

$2^3 \equiv 1(\bmod 9) \Rightarrow (2^3)^{667} \equiv -1(\bmod 9) \Rightarrow (-4)(2^3)^{667} \equiv 4(\bmod 9) \Rightarrow 7^{2003} \equiv 4(\bmod 9)(2)$ Từ (1) và (2) $\Rightarrow 19^{2003} + 7^{2003} + 9^{2003} \equiv 5(\bmod 9)(3)$

Vì lập phương của một số tự nhiên khi chia cho 9 chỉ có thể dư là $0,1,-1$ nên mọi số nguyên x, y, z ta có : $x^{15} + y^{15} + z^{15} = (x^5)^3 + (y^5)^3 + (z^5)^3 \equiv (-3);(-1);0;1;3(\bmod 9)(4)$

Từ (3) và (4) suy ra phương trình không có nghiệm nguyên.

Bài 32.

Ta có $z(z+3) = z^2 + 3z$

Mặt khác ta luôn có $z^2 \equiv 0(\bmod 3)$ hoặc $z^2 \equiv 1(\bmod 3)$

Do đó với mọi z nguyên ta có :

$z(z+3) \equiv c(\bmod 3); c \in \{0;1\}(1)$

Chứng min tương tự với y,x

$\Rightarrow x(x+3) + y(y+3) \equiv d(\bmod 3); d \in \{0;1;2\}(2)$

Lại để ý rằng : $x(x+3) + y(y+3) = (x^2 + y^2)(\bmod 3)(3)$

Chú ý rằng nếu p là số nguyên tố khác 3 thì $p^2 \equiv 1(\bmod 3)$. Do vậy x, y đồng thời là các số nguyên tố khác 3 thì :

$x^2 + y^2 \equiv 2(\bmod 3)(4)$

Kết hợp (1), (2), (3), (4) suy ra ít nhất một trong hai số x,y phải là 3. Do vai trò đối xứng của x,y chọn $x = 3$

Khi $x = 3$ ta có :

$18 + y^2 + 3y = z^2 + 3z \Leftrightarrow 18 = z^2 + 3z - y^2 - 3y \Leftrightarrow 18 = (z-y)(x+y+3)(5)$

Từ $z > 0, y > 0 \Rightarrow z + y + z > 3 \Rightarrow z - y > 0$.

Vì thế kết hợp với $(z+y+3)-(z-y) = 2y + 3 \geq 7$ (do y nguyên tốn lớn hơn 2). Nên từ (5) suy ra :

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}z+y+3=18\\z-y=1\end{cases}\\\begin{cases}z+y+3=9\\z-y=2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=7\\z=8\end{cases}\\\begin{cases}y=2\\z=4\end{cases}\end{array}\right.$$

Do tính đối xứng nên phương trình có 4 nghiệm nguyên dương :

$(3;7;8);(7;3;8);(3;2;4);(2;3;4)$

Bài 33. Ta phải tìm số tự nhiên r sao cho

$0 = r \equiv (2013^{2016} + 2014^{2016} - 2015^{2016})^{10}$ (mod 106)

Ta có $2013 = 106.19 - 1 \Rightarrow 2013 \equiv -1$(mod 106) $\Rightarrow 2013^{2016} \equiv 1$(mod 106)

$2014 = 106.19 \Rightarrow 2014 \equiv 0$ (mod 106) $\Rightarrow 2014^{2016} \equiv 0$(mod 106)

$2015 = 106.19 + 1 \Rightarrow 2015 \equiv 1$(mod 106) $\Rightarrow 2015^{2016} \equiv 1$(mod 106)

Do đó $(2013^{2016} + 2014^{2016} - 2015^{2016})^{20} \equiv 0$ (mod 106).

Bài 34. Do 5 là số nguyên tố nên theo Định lý Fermat bé ta có: với a = 1; 2; 3; 4 ta có $a^5 \equiv a$ (mod 5) $\Leftrightarrow a^4 \equiv 1$ (mod 5) $\Leftrightarrow a^{4k} \equiv 1$ (mod 5).

Do đó $1^{4k} + 2^{4k} + 3^{4k} + 4^{4k} \equiv 1 + 1 + 1 + 1 \equiv 4$ (mod 5).

Chứng tỏ $1^{4k} + 2^{4k} + 3^{4k} + 4^{4k} \not\vdots\ 5$.

Bài 35. * Nếu p = 2 thì $2^n - n \ \vdots\ 2$, $\forall n = 2k$ $(k \in N)$.

* Nếu $p \neq 2$ do (2 ; p) = 1 nên theo định lý Fermat bé ta có :

$2^{p-1} \equiv 1$ (mod p) $\Rightarrow 2^{p-1} - 1 \equiv 0$ (mod p) $\Rightarrow 2^{(p-1)^{2k}} - 1 \equiv 0$ (mod p) .

Hay là $2^{(p-1)^{2k}} - 1 \ \vdots\ p$ $(k \in N ; k \geq 2)$.

Mặt khác $(p - 1)^{2k} \equiv (-1)^{2k} \equiv 1$ (mod p)

$$\Rightarrow 2^{(p-1)^{2k}} - (p-1)^{2k} = \underbrace{\left[2^{(p-1)^{2k}} - 1\right]}_{\vdots p} - \underbrace{\left[(p-1)^{2k} - 1\right]}_{\vdots p} \vdots\ p$$

Vậy tồn tại vô số số tự nhiên n có dạng $n = (p - 1)^{2k}$, $(\forall k \in N ; k \geq 2)$ sao cho $2^n - n \ \vdots\ p$.

Bài 36. $A = 26^{6^{2001}}$. Ta có 1000 = 8.125

Xét số dư của A khi chia cho 125, ta có:

$6^{2001} \equiv 1(\text{mod}\,5) \Rightarrow 6^{2001} = 5m + 1 \quad (m \in Z^+)$

$\Rightarrow A = 26^{6^{2001}} = 26^{5m+1} = 62.(26^5)^m$

Mặt khác $26^5 \equiv 1(\text{mod}\,125) \Rightarrow A \equiv 26(\text{mod}\,125)$

$\Rightarrow A = 125k + 26 \quad (k \in Z^{+})$

Xét số dư khi chia A cho 8, dễ thấy

$A \vdots 8 \Rightarrow 125k + 26 \vdots 8 \Rightarrow 5k + 2 \vdots 8 \Rightarrow k = 8m + 6 \quad (m \in Z^{+})$
$\Rightarrow A = 125(8m+6) + 26 = 1000m + 776 \equiv 776 \pmod{1000}$

Vậy ba chữ số tận cùng của A là 776.

Bài 37. Đặt $n = 4m + r \quad (m,\ r \in N,\ 0 \le r \le 3)$. Xét các trường hợp của r.

* $r = 0 \Rightarrow n = 4m$

Khi đó

$3^{n} = 81^{m} \equiv 1 \pmod{10}$
$\Rightarrow 3^{n} + 4n + 1 \vdots 10 \Leftrightarrow 16m + 2 \vdots 10 \Leftrightarrow 8m + 1 \vdots 5 \Leftrightarrow 3m + 1 \vdots 5 \Leftrightarrow m = 5k + 3 \quad (k \in N)$

Ta được $n = 20k + 12 \quad (k \in N)$

* $r = 1 \Rightarrow n = 4m + 1$

Khi đó

$3^{n} = 3.81^{m} \equiv 3 \pmod{10}$
$\Rightarrow 3^{n} + 4n + 1 \vdots 10 \Leftrightarrow 16m + 8 \vdots 10 \Leftrightarrow 8m + 4 \vdots 5 \Leftrightarrow 3m + 4 \vdots 5 \Leftrightarrow m = 5k + 2 \quad (k \in N)$

Ta được $n = 20k + 9 \quad (k \in N)$

Tương tự xét các trường hợp còn lại.

Bài 38. Đặt $A = n^{3} + 4n^{2} - 20n - 48$

Ta có $A = (n-4)(n+2)(n+6)$

Vì $A \vdots 5 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n \equiv 3 \pmod{5} \\ n \equiv 4 \pmod{5} \end{array}\right.$

* $n \equiv 3 \pmod{5}$

Khi đó $n - 4 \not\vdots\, 5$ và $n + 6 \not\vdots\, 5$ nên $n + 2 \vdots 125 \Rightarrow n \ge 123$

* $n \equiv 4 \pmod{5}$

Khi đó $n+2 \not\vdots 5 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n-4 \vdots 25 \\ n+6 \vdots 25 \end{array}\right. \Rightarrow n \geq 19$

Vậy n = 19 thỏa mãn điều kiện đề bài.

Bài 39.

Đặt $A=\left(a^4-1\right)\left(a^4+15a^2+1\right)$

Áp dụng định lí Fermat ta có:

$a^4 \equiv 1 \pmod 5$ và $a^6 \equiv 1 \pmod 7$ do a không chia hết cho 5 và 7.

Vì $a^4 \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow a^4-1 \vdots 5 \Rightarrow A \vdots 5$

Lại có: $A=a^8+15a^6-15a^2-1 \equiv a^2+15-15a^2-1 \equiv 0 \pmod 7 \Rightarrow A \vdots 7$

Vậy $A \vdots 5.7=35$ (vì (5, 7) = 1)

Bài 40. Giả sử $2^m+3^n \vdots 23 \Rightarrow 8^n\left(2^m+3^n\right) \vdots 23 \Rightarrow 2^{m+3n}+24^n$

Vì $24 \equiv 1 \pmod{23} \Rightarrow 24^n \equiv 1 \pmod{23}$

Do đó $2^{m+3n}+1 \vdots 23$

Ta chứng minh $2^u+1 \not\vdots 23 \quad \forall u \in N$

Ta có $2^{11} \equiv 1 \pmod{23}$. Lần lượt xét các số dư khi chia u cho 11 ta được
$2^u+1 \not\vdots 23 \quad \forall u \in N$.

Vậy $2^m+3^n \not\vdots 23 \quad \forall m, n \in N$.

Bài 41. Vì 2017 không chia hết cho 2 và không chia hết cho 5 còn $10^5=2^5.5^5$ nên $\left(2017,10^5\right)=1$.

Áp dụng định lí Euler ta có: $2017^{\varphi\left(10^5\right)} \equiv 1 \pmod{10^5}$

Mà $\varphi\left(10^5\right)=10^5\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{5}\right)=4.10^4$

Bài 42. Phương trình đã cho: $x^n+(x+2)^n+(2-x)^n=0$

Nhận xét: Để phương trình có nghiệm thì n lẻ.

* $n=1 \Rightarrow x=-4 \in Q$

* n > 1: Giả sử phương trình có nghiệm hữu tỉ $x = \frac{p}{q}\left(p, q \in Z,\ q > 0,\ \left(p, q\right) = 1\right)$.

Thay vào phương trình ta có:

$$p^n + \left(p + 2q\right)^n + \left(p - 2q\right)^n = 0 \quad (1)$$

Ta có:

$\left(p + 2q\right)^n + \left(2q - p\right)^n \vdots \left(p + 2q\right) + \left(2q - p\right) = 4q$

$\Rightarrow p^n \vdots 4q \Rightarrow \begin{cases} q = 1 \\ p = 2m \end{cases}$

Thay vào (1) ta có: $m^n + \left(m + 1\right)^n + \left(1 - m\right)^n = 0 \quad (2)$

Vì $\left(m + 1\right)^n + \left(1 - m\right)^n \vdots \left(m + 1\right) + \left(1 - m\right) = 2 \Rightarrow m^n \vdots 2 \Rightarrow m$ chẵn.

Vì n lẻ nên $\left(m + 1\right)^n \equiv m + 1 \pmod{4},\ \left(1 - m\right)^n \equiv 1 - m \pmod{4}$

Suy ra: $m^n \equiv 2 \pmod{4}$ Vô lí

Vậy $n = 1$.

Bài 43. Bởi vì $2^3 = 8 \equiv -1 \pmod{9} \Rightarrow \left(2^9\right)^{1945} \equiv -1 \pmod{9}$

$\Rightarrow \left(2^9\right)^{1945}$ chia 9 dư 8

$\Rightarrow a, b, c$ chia 9 dư 8

Ta có: $2^{13} = 8192 < 10^4 \Rightarrow 2^{130} < 10^{40} \Rightarrow 2^{130.134} < 10^{40.134}$

Ta cũng có: $\left(2^{13}\right)^6 < \left(10^4\right)^6 = 10^{24}$ và $2^7 < 10^3$

$\Rightarrow \left(2^9\right)^{1945} = 2^{17420 + 13.6 + 7} < 10^{40.134 + 24 + 7} = 10^{5391}$

$\Rightarrow$ số $\left(2^9\right)^{1945}$ không có quá 5391 chữ số.

$\Rightarrow a \le 5391.9 = 48519$

$\Rightarrow b \le 3 + 9 + 9 + 9 + 9 = 39 \Rightarrow c \le 3 + 9 = 12$

$c \le 12$; mà c chia 9 dư 8 và $c > 0$ nên suy ra $c = 8$.

CHỦ ĐỀ 6. PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

Bài 1:Biến đổi phương trình thành $4xy-2x-2y=2$

$\Leftrightarrow 2x(2y-1)-(2y-1)=3 \Leftrightarrow (2x-1)(2y-1)=3$.

Vì x và y là các số nguyên nên $2x-1$ và $2y-1$ là các số nguyên.

Do vai trò của x,y như nhau, không giảm tổng quát giả sử $x\ge y$ nên $2x-1\ge 2y-1$. Mà $3=3.1=(-3)(-1)$ nên xảy ra hai trường hợp

1) $\begin{cases}2x-1=3\\2y-1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$;

2) $\begin{cases}2x-1=-1\\2y-1=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=-1.\end{cases}$

Vậy phương trình có bốn nghiệm $(x;y)$ là $(2;1),(1;2),(0;-1),(-1;0)$.

Nhận xét. Bằng cách này ta có giải được phương trình dạng $ax+by+cxy=d$, trong đó a,b,c,d là các số nguyên.

Bài 2: Ta có $x^2+x+2009=y^2 (y\in\mathbb{N})$

$\Leftrightarrow (2x+1)^2-(2y)^2=-8035$

$\Leftrightarrow (2x+2y+1)(2x-2y+1)=-8035.$

Do $y\in\mathbb{N}$ nên $2x+2y+1\ge 2x-2y+1$, và chúng đều là số nguyên.

Ta có sự phân tích $-8035=1607.(-5)=(-1607).5=1.(-8035)=(-8035).1$.

Vì vậy xảy ra bốn trường hợp

1) $\begin{cases}2x+2y+1=1607\\2x-2y+1=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x+2=1602\\4y=1612\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=400\\y=403.\end{cases}$

2) $\begin{cases}2x+2y+1=-1607\\2x-2y+1=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x+2=-1602\\4y=1612\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-401\\y=403.\end{cases}$

3) $\begin{cases}2x+2y+1=1\\2x-2y+1=-8035\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x+2=-8034\\4y=8036\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2009\\y=2009.\end{cases}$

4) $\begin{cases}2x+2y+1=-1\\2x-2y+1=8035\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x+2=8034\\4y=8036\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2008\\y=2009.\end{cases}$

Bài 3: Biến đổi như sau

$[x^2+2x(2y-2z)+(y-2z)^2]-(y-2z)^2+5y^2+6z^2=10$

$\Leftrightarrow (x+y-2z)^2+4y^2+4yz+2z^2=10$

$\Leftrightarrow (x+y-2z)^2+(2y+z)^2+z^2=10.$

Nhận thấy x,y,z là các số nguyên và $2y+z+z=2(y+z)$ là số chẵn, nên $(2y+z)^2$ và z^2 là hai số chính phương cùng tính chẵn lẻ, nên viết

$$10=0^2+3^2+1^2.$$

Xảy ra các khả năng sau

$$1)\begin{cases}(x+y-2z)^2=0\\ (2y+z)^2=3^2\\ z^2=1\end{cases}$$

Tìm được các nghiệm $(x;y;z)$ là

$$(1;1;1),(4;-2;1),(-4;2;-1),(-1;-1;-1). \qquad (*)$$

$$2)\begin{cases}(x+y-2z)^2=0\\ (2y+z)^2=1^2\\ z^2=3\end{cases}$$

Tìm được các nghiệm $(x;y;z)$ là

$$(7;-1;3),(8;-2;3),(-8;2;-3),(-7;1;-3). \qquad (**)$$

Vậy có tất cả 8 bộ $(x;y;z)$ thỏa mãn được mô tả ở $(*)$ và $(**)$.

Bài 4: *Cách 1.* Phương trình này chỉ chứa bậc nhất đối với y nên ta có thể rút y theo x.

Ta có $(1-2x)y=-3x^2+5x-2$.

Do x nguyên nên $1-2x\neq 0$. Suy ra

$$y=\frac{3x^2-5x+2}{2x-1}\Leftrightarrow 4y=\frac{12x^2-20x+8}{2x-1}=6x+7+\frac{1}{2x-1}.$$

Do x,y là các số nguyên suy ra $\frac{1}{2x-1}$ là số nguyên, nên $2x-1\in\{1;-1\}$. Từ đó tìm được $(x;y)$ là $(1;0),(0;2)$.

Cách 2. Coi phương trình bậc hai đối với x, ta có

$$3x^2-(2y-5)x+y+2=0.$$

$\Delta=(2y+5)^2-12(y+2)=4y^2+8y+1.$

Nên phương trình có nghiệm nguyên thì Δ phải là số chính phương, tức là

$$4y^2+8y+1=k^2 (k\in\mathbb{N})$$
$$\Leftrightarrow (2y+2)^2-k^2=3$$
$$\Leftrightarrow (2y+k+2)(2y-k+2)=3.$$

Từ đó cũng tìm được các nghiệm như trên

Nhận xét. Bằng cách này ta có giải được phương trình dạng

$ax^2+bxy+cx+dy=e$, hoặc $(ay^2+bxy+cx+dy=e)$

Trong đó a,b,c,d,e là các số nguyên.

Bài 5: Biến đổi phương trình về dạng

$$y[2y^2+(x^2-3x)y+x+3x^2]=0.$$

Nếu $y=0$ thì x sẽ là số nguyên tùy ý.

Xét $y\neq 0$ thì $2y^2+(x^2-3x)y+x+3x^2=0. \qquad (1)$

Ta coi (1) là phương trình bậc hai theo ẩn y, ta tính

$$\Delta=(x^2-3x)^2-8(x+3x^2)=x(x+1)^2(x-8).$$

Trường hợp $x=-1$ thì $\Delta=0$, nghiệm kép của (1) là $y=-1$.

Trường hợp $x \neq -1$, để phương trình có nghiệm nguyên thì Δ phải là số chính phương, tức là

$$x(x-8) = k^2 (k \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow (x-4-k)(x-4+k) = 16.$$

Vì $k \in \mathbb{N}$ nên $x-4-k \leq x-4+k$ và $(x-4-k)+(x-4+k) = 2(x-4)$ nên $x-4-k, x-4+k$ cùng chẵn.Lại có $16 = 2.8 = 4.4 = (-4).(-4) = (-2).(-8).$ Xảy ra bốn trường hợp

$$\begin{cases} x-4-k = a \\ x-4+k = b \end{cases} \text{ với } (a;b) = (2;8),(4;4),(-4;-4),(-2;-8).$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm nguyên $(x;y)$ là $(-1;-1),(8;-10),(0;k)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Lưu ý. Trong trường hợp $F(x,y)$ là đa thức có hệ số nguyên với bậc cao hơn 2 theo biến x và y, ta cũng có thể đưa về một trong hai trường hợp trên bằng cách đặt ẩn phụ.

Bài 6: Ta có thể đưa về dạng phương trình bậc hai ẩn y bằng phép đặt $x = y + a$ (với a nguyên). Khi đó ta có $(3a-2)y^2 + (3a^2-2)y + a^3 - 8 = 0.$

Do a nguyên nên $3a - 2 \neq 0$, tính

$$\begin{aligned} \Delta &= (3a^2-2)^2 - 4(3a-2)(a^3-8) \\ &= -3a^4 + 8a^3 - 12a^2 + 96a - 60 \\ &= -(a^2-4a-2)^2 - 2a(a^3-56) - 56. \end{aligned}$$

Để cho $\Delta \geq 0$ suy ra $2a(a^3-56) < 0 \Leftrightarrow 0 < a \leq \sqrt[3]{56}$. Vì a nguyên nên a chỉ nhận giá trị $1,2,3.$ Thử chọn chỉ có $a = 2$ là thích hợp và tìm được $(x;y)$ là $(0;-2),(-2;0).$

Bài 7: Do vai trò x,y,z như nhau, không giảm tổng quát giả sử $1 \leq x \leq y \leq z.$ Chia hai vế của phương trình cho xyz ta có

$$2 = \frac{5}{xy} + \frac{5}{xz} + \frac{5}{yz} + \frac{4}{xyz} \leq \frac{18}{x^2}.$$

Do vậy $2x^2 \leq 18 \Rightarrow x \in \{1,2,3\}.$

1) Với $x = 1$ thì ta có $5(y+z) + 8 = 2yz \Leftrightarrow (2y-5)(2z-5) = 41.$

Vì y,z nguyên dương và $y \leq z$ nên $-3 \leq 2y-5 \leq 2z-5,$ và $41 = 1.41.$

Chỉ xảy ra trường hợp $\begin{cases} 2y-5 = 1 \\ 2z-5 = 41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ z = 23. \end{cases}$

2) Với $x = 2$ thì ta có $5(y+z) + 13 = 4yz \Leftrightarrow (4y-5)(4z-5) = 77.$

Vì y,z nguyên dương và $2 = x \leq y \leq z$ nên $-3 \leq 4y-5 \leq 4z-5,$ và $77 = 11.7.$

Xảy ra trường hợp $\begin{cases} 4y-5 = 7 \\ 4z-5 = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 4. \end{cases}$

3) Với $x = 3$ thì ta có $5(y+z) + 18 = 6yz \Leftrightarrow (6y-5)(6y-5) = 133.$ (*)

Mặt khác y,z nguyên dương và $3 \leq y \leq z$ nên $15 \leq 6y-5 \leq 6z-5$

suy ra $(6y-5)(6y-5) \geq 15^2 = 225.$ (Mâu thuẫn với (*)).

Vậy phương trình có các nghiệm nguyên dương $(x;y;z)$ là $(1;3;3),(2;3;4)$ và các hoán vị của nó.

Nhận xét. Với cách làm tương tự, ta có thể tìm nghiệm nguyên dương của phương trình dạng $a(x_1+x_2+...+x_n)+b=cx_1x_2...x_n$, trong đó a,b,c,n là các số nguyên dương và $n\ge 2$.

Bài 8: a) Với $x=0$ thay vào phương trình tìm được $y=1$ hoặc $y=-1$.

Với $x=-1$ thì $y=1$ hoặc $y=-1$.

Với $x>0$ thì $x^4<y^4<(x+1)^4$, điều này vô lí.

Với $x<-1$ thì $(x+1)^4<y^4<x^4$, điều này vô lí.

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm nguyên $(x;y)$ là

$$(0;1),(0;-1),(-1;1),(-1;-1).$$

b) Với $x=0$ thì $y=1$.

Với $x=-1$ thì $y=0$.

Với $x>0$ thì $x^3<y^3<(x+1)^3$, điều này vô lí.

Với $x<-1$ thì $(x+1)^3<y^3<x^3$, điều này vố lí.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm nguyên $(x;y)$ là $(0;1),(-1;0)$.

Nhận xét. Với cách làm tương tự như trên, ta có thể tìm nghiệm nguyên dương của phương trình dạng $1+x+x^2+...+x^n=y^n$ với n là số nguyên dương.

Bài 9: Giả xử x,y là các số nguyên thỏa mãn phương trình đã cho.

Ta thấy 48 và $4x$ chia hết cho 4 nên $9y$ chia hết cho 4, mà $(9;4)=1$ nên $y\vdots 4$.

Đặt $y=4t\left(t\in\mathbb{Z}\right)$, thay vào phương trình đầu ta được $4x+36t=48$

$\Leftrightarrow x=12-9t$ và $y=4t$ (*). Thay các biểu thức của x,y ở (*) thấy thỏa mãn.

Vậy phương trình có vô số nghiệm $\left(x;y\right)=\left(12-9t;4t\right)$ với $t\in\mathbb{Z}$.

Bài 10: Giả sử $26n+17=k^2$ (với k tự nhiên lẻ). Khi đó

$$26n+13=\left(k-2\right)\left(k+2\right)\Leftrightarrow 13\left(2n+1\right)=\left(k-2\right)\left(k+2\right).$$

Do $13\left(12n+1\right)\vdots 13$ nên $\left(k-2\right)\vdots 13$ hoặc $\left(k+2\right)\vdots 13$.

Nếu $\left(k-2\right)\vdots 13$ thì $k=13t+2$ (t lẻ), khi đó $n=\dfrac{13t^2-4t-1}{2}$.

Nếu $\left(k+2\right)\vdots 13$ thì $k=13t-2$ (t lẻ), khi đó $n=\dfrac{13t^2+4t-1}{2}$.

Vậy số tự nhiên lẻ n cần tìm có dạng $\dfrac{13t^2\pm 4t-1}{2}$(t lẻ).

Bài 11: Giả sử tồn tại các số nguyên x,y,z thỏa mãn phương trình.

Nhận thấy x^4,y^4,z^4 chia cho 16 dư 0 hoặc 1, nên $x^4+y^4+z^4$ chia cho 16 có số dư là một trong các số 0, 1, 2, 3.

Trong khi đó số 2012 chia cho 16 dư 12. Hai điều này mâu thuẫn với nhau.

Vậy không tồn tại các số nguyên x, y, z thỏa mãn đề bài.

Bài 12: Giả sử tìm được bộ số nguyên dương $(x,y,z,t)=(a,b,c,d)$ thỏa mãn điều kiện bài ra, ta có $\begin{cases} a^2+13b^2=c^2 \\ 13a^2+b^2=d^2. \end{cases}$

Gọi ƯCLN$(a,b)=m\left(m\in\mathbb{N}^*\right)$, suy ra $c\,\vdots\, m$ và $d\,\vdots\, m$.

Đặt $a=ma_1, b=mb_1, c=mc_1, d=md_1$, với a_1,b_1,c_1,d_1 là các số tự nhiên và $(a_1,b_1)=1$. Suy ra $14\left(a^2+b^2\right)=c^2+d^2 \Leftrightarrow 14\left(a_1^2+b_1^2\right)=c_1^2+d_1^2$. Suy ra $c_1^2+d_1^2\,\vdots\,7$, do đó $c_1\,\vdots\,7$ và $d_1\,\vdots\,7$, dẫn đến $a_1^2+b_1^2\,\vdots\,7$ nên $a_1\,\vdots\,7$ và $b_1\,\vdots\,7$. Điều này mâu thuẫn với $(a_1,b_1)=1$.

Nhận xét. Bằng cách làm tương tự ta có thể chứng minh được hệ phương trình $\begin{cases} x^2+ny^2=z^2 \\ nx^2+y^2=t^2 \end{cases}$ với $n+1$ có ước nguyên tố dạng $4k+3$ và $\left(n+1,p^2\right)=1$ không có nghiệm nguyên dương.

Bài 13: Giả sử (x_0,y_0,z_0) là nghiệm của phương trình.

Khi đó $x_0\,\vdots\,3$, đặt $x_0=3x_1$ (với $x_1\in\mathbb{Z}$) ta có $9x_1^3-y_0^3-3z_0^3=0$.

Khi đó $y_0\,\vdots\,3$, đặt $y_0=3y_1$ (với $y_1\in\mathbb{Z}$) ta có $3x_1^3-9y_1^3-z_0^3=0$.

Khi đó $z_0\,\vdots\,3$, đặt $z_0=3z_1$ (với $z_1\in\mathbb{Z}$) ta có $x_1^3-3y_1^3-9z_1^3=0$.

Như vậy $(x_1,y_1,z_1)=\left(\frac{x_0}{3};\frac{y_0}{3};\frac{z_0}{3}\right)$ cũng là nghiệm nguyên của phương trình. Quá trình tiếp tục như vậy ta suy ra các bộ số $\left(\frac{x_0}{3^n};\frac{y_0}{3^n};\frac{z_0}{3^n}\right)$ mọi $n\in\mathbb{N}$ cũng là nghiệm của phương trình. Điều này xảy ra khi và chỉ khi $x_0=y_0=z_0=0$,

Vậy phương trình có duy nhất nghiệm nguyên $(x;y;z)=(0;0;0)$.

Nhận xét. Ta gọi phương pháp giải trong ví dụ trên là phương pháp lùi vô hạn của Fermat, thường dùng để chứng minh phương trình có nghiệm duy nhất hoặc vô nghiệm.

Bài 14: Biến đổi phương trình về dạng

$$\left(x^2-2xy+y^2\right)+\left(y^2-2yz+z^2\right)+\left(z^2-4z+4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-2)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ y-z=0 \\ z-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=2.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y;z)=(2;2;2)$.

Bài 15: Nhận thấy nếu $(x_0;y_0;z_0)$ là một nghiệm nguyên của phương trình thì x_0,y_0,z_0 cùng dương hoặc có hai số âm và một số dương.

Ngoài ra $(-x_0;-y_0;z_0),(x_0;-y_0;-z_0),(-x_0;y_0;-z_0)$ cũng là nghiệm.

Do đó trước hết ta đi tìm nghiệm nguyên dương.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm, ta có

$$x^2+1\geq 2x\geq 0;\, y^2+4\geq 4y\geq 0;\, z^2+9\geq 6z\geq 0.$$

Suy ra $\left(x^2+1\right)\left(y^2+4\right)\left(z^2+9\right)\geq 48xyz.$

Đẳng thức chỉ xảy ra khi và chỉ khi $x=1, y=2, z=3.$

Vậy nghiệm nguyên $(x;y;z)$ của phương trình là

$$(1;2;3),(-1;-2;3),(1;-2;-3),(-1;2;-3).$$

Nhận xét. Bằng cách này ta có thể tìm nghiệm nguyên của phương trình dạng $\left(x_1^2+a_1^2\right)\left(x_2^2+a_2^2\right)...\left(x_n^2+a_n^2\right)=2^n x_1x_2...x_n.a_1a_2...a_n$ với a_i, n là các số nguyên dương.

Bài 16: Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhia-kôp-xki cho hai bộ số (x,z) và (t,y) ta có

$$9.16=\left(x^2+z^2\right)\left(y^2+t^2\right)\geq (xt+yz)^2=12^2,$$

suy ra $\left(x^2+z^2\right)\left(y^2+t^2\right)=(xt+yz)^2$ khi và chỉ khi $xy=zt.$

Từ $x^2+z^2=9\Leftrightarrow x=0, z=\pm 3$ hoặc $x=\pm 3, z=0.$

Nếu $x=0$ thì $t=0,$ khi đó $y^2=16, yz=12.$ Vậy $y=4, z=3$ hoặc $y=-4, z=-3.$

Nếu $z=0$ thì $y=0,$ tương tự tìm được $x=3, t=4$ hoặc $x=-3, t=-4.$

Vậy nghiệm nguyên $(x;y;z;t)$ của hệ là

$$(0;4;3;0),(0;-4;-3;0),(3;0;0;4),(-3;0;0-4).$$

Bài 17:

Ta có:

$$x^3+y^3-x^2y-xy^2=5$$
$$\Leftrightarrow (x-y)\left(x^2-xy+y^2\right)-xy(x+y)=5$$
$$\Leftrightarrow (x+y)\left(x^2-2xy+y^2\right)=5$$
$$\Leftrightarrow (x+y)(x-y)^2=5$$

Do $(x-y)^2\geq 0$ và x y thuộc Z nên xảy ra hai trường hợp:

Th1: $\begin{cases} x+y=5 \\ (x-y)^2=1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=5 \\ x-y=-1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \end{array}\right.$

Th2: $\begin{cases} x+y=1 \\ (x-y)^2=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=\pm\sqrt{5} \end{cases}$ (loại)

Vậy phương trình có hai nghiệm nguyên $(x;y)\in\{(3;2);(2;3)\}$

Bài 18: Nếu y thỏa mãn phương trình thì – y cũng thỏa mãn phương trình, do đó ta có ta giả sử $y\geq 0$.

Khi đó: (1) $\Leftrightarrow (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) = y^2$

Đặt $t = x^2 + 3x + 1$ được :

$(t-1)(t+1) = y^2 \Leftrightarrow t^2 - 1 = y^2 \Leftrightarrow (t-y)(t+y) = 1 \Rightarrow t + y = t - y \Rightarrow y = 0$

Thay y = 0 vào (1) ta được: x = 0, - 1, -2, - 3.

Vậy phương trình có nghiệm (x, y) = (0, 0); (-1, 0); (-2, 0); (-3, 0).

Bài 19: Ta có:

$$\begin{aligned}&(x^2-y)(y^2-x) = (x-y)\\ \Leftrightarrow\ & x^2y^2 - y^3 - x^3 + xy = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3\\ \Leftrightarrow\ & 2x^3 - x^2y^2 - xy - 3x^2y + 3xy^2 = 0\\ \Leftrightarrow\ & x\left(2x^2 + (-y^2 - 3y)x - y + 3y^2\right) = 0\end{aligned}$$

Nếu x = 0 thì y bất kì thuộc Z.

Nếu $x \neq 0$ suy ra: $2x^2 + (-y^2 - 3y)x - y + 3y^2 = 0$

Coi đây là phương trình ẩn x ta có: $\Delta = (y^2 + 3y)^2 - 8(3y^2 - y) = (y-1)^2 y(y+8)$

Để phương trình có nghiệm nguyên thì Δ phải là số chính phương tức là:

$y(y+8) = a^2 \Leftrightarrow (y+4)^2 - a^2 = 16 \Leftrightarrow (y+4+a)(y+4-a) = 16\ (a \in N)$

Vì (y + 4 + a) > (y + 4 – a) và (y + 4 + a) + (y + 4 – a) là số chẵn nên ta có các trường hợp:

$\begin{cases} y+4+a=8 \\ y+4-a=2 \end{cases}$; $\begin{cases} y+4+a=4 \\ y+4-a=4 \end{cases}$;

$\begin{cases} y+4+a=-8 \\ y+4-a=-2 \end{cases}$; $\begin{cases} y+4+a=-4 \\ y+4-a=-4 \end{cases}$

Giải ra ta được nghiệm của phương trình là:

$(1;1), (10,-8), (6,-9), (21,-9), (0;k)$ với $k \in Z$

Bài 20: Ta có

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{617} \Leftrightarrow \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{617} \Leftrightarrow xy - 617(x+y) = 0 \Leftrightarrow xy - 617x - 617y + 617^2 = 617^2$

$\Leftrightarrow (x-617)(y-617) = 617^2$

Vì x, y nguyên dương nên x – 617 và y – 617 là ước lớn hơn –617 của 617^2.

Do 617 là số nguyên tố nên xảy ra 3 trường hợp:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-617=617\\ y-617=617\end{cases}\\ \begin{cases}x-617=1\\ y-617=617^2\end{cases}\\ \begin{cases}x-617=617^2\\ y-617=1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=y=1234\\ x=618; y=381306\\ x=381306; y=618\end{array}\right.$$

Vậy tất cả các cặp (x;y) nguyên dương cần tìm là

(1234;1234) , (618; 381306), (381306; 618)

Bài 21: Ta có: $xy=px+py\Rightarrow (x-y)(y-p)=p^2$.

Vì p là số nguyên tố nên ước số nguyên của p^2 chỉ có thể là: $\pm 1,\pm p,\pm p^2$. Thử lần lượt với các ước trên ta được các nghiệm (x, y) là: $(p+1,p+p^2);(2p,2p);(p+p^2,p+1)$.

Bài 22: Ta có: $(1)\Leftrightarrow 6y+6x+1=xy\Leftrightarrow x(y-6)-6(y-6)=37\Leftrightarrow (x-6)(y-6)=37$

Do vai trò của x, y bình đẳng giả sử: $x\ge y\ge 1\Rightarrow x-6\ge y-6\ge -5$

Chỉ có một trường hợp là $\begin{cases}x-6=37\\ y-6=1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=43\\ y=7\end{cases}$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là (x, y) = (43, 7); (7, 43).

Bài 23: Ta có: $10z⋮3\Rightarrow z⋮3$. Đặt $z=3k$ ta được $6x+15y+30k=3\Leftrightarrow 2x+5y+10k=1$

Đưa về phương trình hai ẩn x, y với các hệ số tương ứng 2 và 5 là hai số nguyên tố cùng nhau $2x+5y=1-10k\Rightarrow x=\dfrac{1-10-5y}{2}=-5k-2y+\dfrac{1-y}{2}$

Đặt $\dfrac{1-y}{2}=t\,(t\in Z)$ ta được $\begin{cases}y=1-2t\\ x=-5k-2(1-2t)+t=5t-5k-2\\ z=3k\end{cases}$

Vậy phương trình có nghiệm là (x, y, z) = (5t - 5k - 2, 1 – 2t, 3k) với k, t là số nguyên tùy ý.

Bài 24: Ta biết rằng số chính phương chẵn thì chia hết cho 4, còn số chính phương lẻ thì chia cho 4 dư 1 và chia cho 8 dư 1.

Tổng $x^2+y^2+z^2$ là số lẻ nên trong ba số $x^2;y^2;z^2$ phải có: hoặc có một số lẻ, hai số chẵn; hoặc cả ba số lẻ.

Trường hợp trong ba số $x^2;y^2;z^2$ có một số lẻ, hai số chẵn thì vế trái của (1) chia cho 4 dư 1, còn vế phải là 1999chia cho 4 dư 3, loại.

Trong trường hợp ba số $x^2;y^2;z^2$ đều lẻ thì vế trái của (1) chia cho 8 dư 3, còn vế phải là 1999 chia cho 8 dư 7, loại.

Vậy phương trình (1) không có nghiệm nguyên.

Bài 25: Ta thấy ngay $0 \le x, y \le 50$. Từ $\sqrt{y} = \sqrt{50} - \sqrt{x}$ ta có

$y = 50 + x - 2\sqrt{50x} = 50 + x - 10\sqrt{2x}$

Vì x, y nguyên nên $10\sqrt{2x}$ nguyên. Ta biết rằng với x nguyên thì $10\sqrt{2x}$ hoặc là số nguyên hoặc là số vô tỷ. Do đó để $10\sqrt{2x}$ nguyên thì 2x phải là số chính phương tức là $2x = 4k^2 \Rightarrow x = 2k^2, k \in Z$ với $2k^2 \le 50 \Rightarrow k^2 \le 25 \Rightarrow$ k chỉ có nhận các giá trị: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Lựa chọn k trong các số trên để thỏa mãn phương trình ta được các nghiệm (x, y) là (0, 50); (2, 32); (8, 18); (18, 8); (32, 2); (50,0).

Bài 26: Điều kiện: $x \ge 1$

$$y = \sqrt{(x-1)+1+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{(x-1)+1-2\sqrt{x-1}}$$
$$= \sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}$$
$$= \sqrt{x-1}+1+\left|\sqrt{x-1}-1\right|$$

Với x = 1 thì y = 2

Với $x \ge 2$ thì $y = \sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}-1 = 2\sqrt{x-1}$. Do đó: $y^2 = 4(x-1)$

Do $x \ge 2$ nên có thể đặt: $x - 1 = t^2$ với t nguyên dương.

Do đó ta có: $\begin{cases} x = 1 + t^2 \\ y = 2t \end{cases}$

Vậy phương trình có nghiệm là (1, 2); $(1 + t^2, 2t)$ với t nguyên dương.

Bài 27: $x^{2015} = \sqrt{y(y+1)(y+2)(y+3)} + 1 \quad (1)$

Có $y(y+1)(y+2)(y+3) = \left[y(y+3)\right]\left[(y+1)(y+2)\right] = (y^2+3y)(y^2+3y+2)$

Đặt $t = y^2 + 3y + 1 \Rightarrow y(y+1)(y+2)(y+3) = t^2 - 1$ ($t \in \mathbb{Z}$, $t^2 \ge 1$)

(1) $\Leftrightarrow x^{2015} - 1 = \sqrt{t^2-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{2015} - 1 \ge 0 \\ (x^{2015}-1)^2 = t^2 - 1 (2) \end{cases}$

Với x, t là số nguyên ta có:

$(2) \Leftrightarrow \left(x^{2015} - 1 + t\right)\left(x^{2015} - 1 - t\right) = -1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^{2015} - 1 + t = 1 \\ x^{2015} - 1 - t = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x^{2015} - 1 + t = -1 \\ x^{2015} - 1 - t = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^{2015} = t = 1 \\ \begin{cases} x^{2015} = 1 \\ t = -1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Với $x^{2015} = t = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y^2 + 3y + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = -3 \end{array}\right. \end{cases}$

Với $\begin{cases} x^{2015}=1 \\ t=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y^2+3y+1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \left[\begin{array}{l} y=-1 \\ y=-2 \end{array}\right. \end{cases}$

Thử lại ta thấy các cặp (1;-3), (1;-2), (1;-1), (1;0) thỏa mãn đề bài

Vậy có 4 cặp (x;y) cần tìm là (1;-3), (1;-2), (1;-1), (1;0)

Bài 28: Lần lượt xét các giá trị tự nhiên của x:

Nếu $x = 0$ thì $y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$

Nếu $x = 1$ thì $y^2 = 5$, không có nghiệm nguyên

Nếu $x \geq 2$ 2 thì $2^x \vdots 4$, do đó vế trái chia cho 4 dư 3, còn y lẻ nên vế phải chia cho 4 dư 1. Mâu thuẫn.

Kết luận: Nghiệm của phương trình là (0 ; 2), (0 ; -2).

Bài 29: $\left(2^x+1\right)\left(2^x+2\right)\left(2^x+3\right)\left(2^x+4\right)-5^y=11879.$

$\Leftrightarrow \left(2^{2x}+5.2^x+4\right)\left(2^{2x}+5.2^x+6\right)-5^y=11879 \qquad (1)$

Đặt $t=2^{2x}+5.2^x+5, t \in \mathbb{N}^*,$ ta có:

$(1) \Leftrightarrow (t-1)(t+1)-5^y=11879$

$\Leftrightarrow t^2-5^y=11880(2)$

Xét các TH sau:

• TH1: $y \geq 2 \Rightarrow 5^y \vdots 25$

Từ (2) suy ra $t^2 \vdots 5 \Rightarrow t^2 \vdots 25$. Do đó từ (2) $\Rightarrow 11880 \vdots 25$ (vô lí)

• TH2: y = 1

(2) $\Leftrightarrow t^2 = 11885$ (loại vì 11885 không phải là số chính phương)

• TH3: y = 0

(2) $\Leftrightarrow t^2 = 11881 \Rightarrow t = 109$

$\Rightarrow 2^{2x}+5.2^x+5=109 \Rightarrow 2^{2x}+5.2^x-104=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x=8(tm) \\ 2^x=-13(L) \end{array}\right. \Rightarrow x=3.$

Vậy x = 3, y = 0 là các số tự nhiên cần tìm.

Bài 30: Ta có:

$\left(x+y+z\right)^3-\left(x^3+y^3+z^3\right)=3\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)$

$\Leftrightarrow 27-3=3\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)$

$\Leftrightarrow \left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)=8 \quad (*)$

Đặt $\begin{cases} x+y=a\in Z \\ y+z=b\in Z \\ z+x=c\in Z \end{cases}$. Khi đó: $(*)\Leftrightarrow abc=8\Rightarrow a,b,c\in\{\pm1;\pm2;\pm4;\pm8\}$

Vì x, y, z vai trò bình đẳng nên ta giải sử: $x\le y\le z\Rightarrow a\ge b\ge c$

Khi đó ta có: $a+b+c=2(x+y+z)=2.3=6\Rightarrow a\ge 2$

Với a = 2 ta có: $\begin{cases} b+c=4 \\ bc=4 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b=2 \\ c=2 \end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=1$

Với a = 4 ta có: $\begin{cases} b+c=2 \\ bc=1 \end{cases}$ (không có nguyện nguyên)

Với a = 8 ta có: $\begin{cases} b+c=-2 \\ bc=1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b=-1 \\ c=-1 \end{cases}\Leftrightarrow x-5;y=4;z=4$.

Vậy hệ đã cho có 4 nghiệm: $(x,y,z)=(1,1,1);(4,4,-5);(4,-5,4);(-5,4,4)$.

Bài 31: Từ (1) ta được z = 2 + y – x thay vào (2) ta được:

$2x^2-xy+x-4-2y+2x=1\Leftrightarrow 2x^2+3x-5=y(x+2)$

Do x = - 2 không thỏa mãn phương trình trên nên:

$y=\dfrac{2x^2+3x-5}{x+2}=2x-1-\dfrac{3}{x+2}$

y nguyên nên (x + 2) là ước của 3. Suy ra: $\left[\begin{array}{l} x+2=\pm1 \\ x+2=\pm3 \end{array}\right.\Leftrightarrow x\in\{-1;-3;1;-5\}$

Từ đó suy nghiệm của hệ là: $(x,y,z)=(1;-6;-3),(-3;-4;1),(1;0;1),(-5;-10;-3)$

Bài 32:

Gọi x_1,x_2 là nghiệm của phương trình (1) . Theo định lý Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=a \\ x_1.x_2=a+2 \end{cases}$

Do đó: $x_1x_2-(x_1+x_2)=2\Leftrightarrow x_1(x_2-1)-(x_2-1)=3\Leftrightarrow(x_1-1)(x_2-1)=3$

Suy ra (x_1-1) và (x_2-1) là ước của 3.

Giải sử: $x_1\ge x_2\Rightarrow x_1-1\ge x_2-1$. Khi đó:

a) $\begin{cases} x_1-1=3 \\ x_2-1=1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x_1=4 \\ x_2=2 \end{cases}$. Khi đó a = 6.

b) $\begin{cases} x_1-1=-1 \\ x_2-1=-3 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=-2 \end{cases}$. Khi đó a = -2

Thay giá trị của a vào phương trình (1) thử lại và kết luận.

Bài 33: Ta có:

$$\left(x^2+4y^2+28\right)^2-17\left(x^4+y^4\right)=238y^2+833$$
$$\Leftrightarrow\left[x^2+4\left(y^2+7\right)^2\right]^2=17\left[x^4+\left(y^2+7\right)^2\right]$$
$$\Leftrightarrow 16x^4-8x^2\left(y^2+7\right)+\left(y^2+7\right)^2=0$$
$$\Leftrightarrow\left[4x^4-\left(y^2+7\right)\right]^2=0$$
$$\Leftrightarrow 4x^2-y^2-7=0$$
$$\Leftrightarrow\left(2x+y\right)\left(2x-y\right)=7\ \left(1\right)$$

Vì $x,y\in N^*\Rightarrow 2x+y>2x-y$ và $2x+y>0$ Do đó: $\begin{cases}2x+y=7\\2x-y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$

Kết luận: (x, y) = (2, 3) thỏa mãi yêu cầu bài toán.

Bài 34: Ta có: $9y^2+6y+16\equiv\left(\text{mod}\,3\right)\Rightarrow 2^x.x^2\equiv1\left(\text{mod}\,3\right)$. Mà

$x^2\equiv0;1\left(\text{mod}\,3\right)\Rightarrow\begin{cases}2^x\equiv1\left(\text{mod}\,3\right)\\x^2\equiv1\left(\text{mod}\,3\right)\end{cases}$

Nếu x lẻ đặt: $x=2k+1\left(k\in N\right)\Rightarrow 2^x=2.4^k\equiv2\left(\text{mod}\,3\right)\left(\text{sai}\right)$, suy ra x lẻ loại.

Nếu x chẵn đặt: $x=2k\left(k\in N\right)\Rightarrow 2^x=4^k\equiv1\left(\text{mod}\,3\right)$ (đúng).

Do đó khi x chẵn thì

$2^x.x^2=9y^2+6y+16\Leftrightarrow\left(2k.2^k\right)^2=\left(3k+1\right)^2+15\Leftrightarrow\left(2k.2^k-3y-1\right)\left(2k+3y+1\right)=15.$

Vì $y,k\in N\Rightarrow 2k.2^k+3y+1>2k.2^k-3y-1>0.$

Vậy ta có các trường hợp:

$+\begin{cases}2k.2^k-3y-1=1\\2k.2^k+3y+1=15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2k.2^k=8\\3y+1=7\end{cases}\Rightarrow k\notin N$ (loại)

$+\begin{cases}2k.2^k-3y-1=3\\2k.2^k+3y+1=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2k.2^k=4\\3y+1=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=1\\y=0\end{cases}$. Vậy (x, y) = (2; 0).

Bài 35: Đặt x + y = a; xy = b. Phương trình trở thành: $ab^2+a=3+b$

Xét b = 3 suy ra: $a=\dfrac{3}{5}$ (Vô lý)

Xét $b\neq3$ ta có: $b^2a+a=3+b\Leftrightarrow a\left(b^2+1\right)=3+b\Leftrightarrow a=\dfrac{3+b}{b^2+1}\Leftrightarrow a\left(b-3\right)=\dfrac{b^2-9}{b^2+1}=1+\dfrac{-10}{b^2+1}$

Ta phải có (b^2 + 1) phải là ước dương của 10 do đó: $b^2+1\in\left\{1;2;5;10\right\}\Rightarrow b\in\left\{0;\pm1;\pm2;-3\right\}$

Nếu b = 0 thì a = 3. Ta có: $x+y=3,xy=0\Rightarrow x=0,y=3$ và $x=3,y=0$

Nếu b = 1 thì a = 2. Ta có $x+y=2,xy=1\Rightarrow x=1,y=1$

Nếu $b=-1$ thì $a=1$

Ta có: x + y = 1, xy = -1 $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}; y=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ và $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}; y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (loại)

Nếu b = 2 thì a = 1. Ta có: x + y = 1 và xy = 2 không tồn tại x, y.

Nếu b = -2 thì $a=\frac{1}{5}$ (vô lý).

Nếu $b=-3$ thì a = 0. Ta có: x + y = 0 và $xy=-3$ không tồn tại x, y nguyên.

Vậy phương trình có 3 nghiệm là (x, y) = (0, 3); (3, 0); (1, 1).

Bài 36:

$x^3+y^3-3xy=1$

$\Leftrightarrow (x+y)^3-3xy(x+y)-3xy=1$

Đặt x + y = a và xy = b (a, b nguyên) ta có:

$a^3-3ab-3b=1$

$\Leftrightarrow (a+1)(a^2-a+1)-3b(a+1)=2$

$\Leftrightarrow (a+1)(a^2-a+1-3b)=2$

1) $\begin{cases} a+1=1 \\ a^2-a+1-3b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=\frac{-1}{3}(L) \end{cases}$

2) $\begin{cases} a+1=2 \\ a^2-a+1-3b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}(TM) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ xy=0 \end{cases} \Rightarrow (x;y)\in\{(0;1);(1;0)\}$

3) $\begin{cases} a+1=-1 \\ a^2-a+1-3b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=3 \end{cases}(TM) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-2 \\ xy=3 \end{cases} \Rightarrow (x;y)\in\varnothing$

4) $\begin{cases} a+1=-2 \\ a^2-a+1-3b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=4 \end{cases}(TM) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-3 \\ xy=4 \end{cases} \Rightarrow (x;y)\in\varnothing$

Vậy $(x;y)\in\{(0;1);(1;0)\}$

Bài 37: Phương trình đã cho tương đương $x^2-xy-\left(y^2+8\right)=0$

Coi phương trình trên là phương trình ẩn x có y là tham số ta có:

$\Delta=y^2+4\left(y^2+8\right)=5y^2+32$

Ta có Δ chia cho 5 dư 2 nên có tận cùng là 2 hoặc 7. Do đó, Δ không là số chính phương vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 38: Ta có: $x^3+1=4y^2 \Leftrightarrow (2y-1)(2y+1)=x^3$

Do $(2y-1,2y+1)=1$ cho nên $2y+1=a^3, 2y-1=b^3\ (a,b\in Z)$

Suy ra: $a^3-b^3=2 \Leftrightarrow (a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} a-b=2 \\ a^2+ab+b^2=1 \end{cases} \\ \begin{cases} a-b=1 \\ a^2+ab+b^2=2 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=\dfrac{3+\sqrt{33}}{6} \\ b=\dfrac{-3+\sqrt{33}}{6} \end{cases}\end{array}\right.$$

Do a, b là số nguyên nên chỉ nhận được giá trị a =1 và b = -1 suy ra y = 0 và x = -1

Vậy phương trình có nghiệm (x, y) = (-1, 0)

Bài 39: Ta có: $x^2+y^2+5x^2y^2+60=37xy$

$$\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2=-5x^2y^2+35xy-60$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2=-5\left(x^2y^2+7xy-12\right) \quad (1)$$

Do $(x-y)^2 \ge 0 \Rightarrow -5\left(x^2y^2+7xy-12\right) \ge 0$. Đặt t = xy ($t \in Z$) ta có:

$-5\left(t^2+7t-12\right) \ge 0 \Leftrightarrow 3 \le t \le 4$. Mà t là số nguyên nên t = 3 hoặc t = 4

Khi t = 3 ta có $\begin{cases} (x-y)^2=0 \\ xy=3 \end{cases} \Leftrightarrow x^2=y^2=3$ (không tồn tại giá trị nguyên của x, y)

Khi t = 4 ta có $\begin{cases} (x-y)^2=0 \\ xy=4 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=2$ hoặc $x=y=-2$

Vậy phương trình có hai nghiệm là (x, y) = (2, 2); (-2, -2).

Bài 40: Ta có: $(1) \Leftrightarrow y^3=x^3+2x^2+3x+2$

Do $2x^2+3x+2=2\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{7}{8}>0 \Rightarrow y^3>x^3$

Xét $|x|>1$ thì: $y^3=x^3+2x^2+3x+2=(x+1)^3+1-x^2<(x+1)^3$

Do đó $x^3<(y+1)^3<(x+1)^3$

Vì x, y nguyên nên phương trình không có nghiệm.

Xét $|x| \le 1$ thì do x nguyên nên x = 1 hoặc x = -1 hoặc x = 0

Với x = -1 ta được y = 0

Với x = 1 thì y = 2

Với x = 0 thì y = $\sqrt[3]{2}$ (loại)

Vậy phương trình có 2nghiệm (x, y) = (-1, 0); (1, 2).

Bài 41: Ta có $(1) \Leftrightarrow (x-y-2)^2+(y+2)^2=1$

Do đó ta có: $(y+2)^2 \le 1 \Leftrightarrow -1 \le y+2 \le 1 \Leftrightarrow -3 \le y \le -1 \Rightarrow y \in \{-3,-2.-1\}$

Với $y=-3$ thay vào phương trình ta được: $x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

Với $y=-2$ thay vào phương trình ta được: $x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$

Với $y=-1$ thay vào phương trình ta được: $x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow x=1$

Vậy phương trình có 4 nghiệm (x, y) = (-1, -3); (1, -2); (-1, -2); (1, -1).

Bài 42: Ta có : $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{18}(x \ge 0; y \ge 0)$

Pt viết: $\sqrt{x}+\sqrt{y}=3\sqrt{2}(1)(0 \le \sqrt{x} \le 3\sqrt{2}; 0 \le \sqrt{y} \le 3\sqrt{2})$

Pt viết:

$\sqrt{x}=3\sqrt{2}-\sqrt{y} \ge 0 <=> (\sqrt{x})^2=(3\sqrt{2}-\sqrt{y})^2 <=> 6\sqrt{2y}=y-x+18$

$=> \sqrt{2y}=\dfrac{y-x+18}{6} \in Q$

$<=> \sqrt{2y}=a \in Q <=> 2y=a^2 \in Q <=> \begin{cases} a^2 \in N (Vi\ 2y \in Z\ va\ a \ge 0) \\ a \ \vdots\ 2 \end{cases}$

$a=2m(m \in N)$

$=> 2y=(2m)^2 <=> y=2m^2 <=> \sqrt{y}=m\sqrt{2}.TT => \sqrt{x}=n\sqrt{2}$

Pt (1) viết: $n\sqrt{2}+m\sqrt{2}=3\sqrt{2} <=> m+n=3(m;n \in N)$

$$<=> \left[\begin{array}{l} \begin{cases} n=0 \\ m=3 \end{cases} => \begin{cases} x=0 \\ y=18 \end{cases} \\ \begin{cases} n=1 \\ m=2 \end{cases} => \begin{cases} x=2 \\ y=8 \end{cases} \\ \begin{cases} n=2 \\ m=1 \end{cases} => \begin{cases} x=8 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} n=3 \\ m=0 \end{cases} => \begin{cases} x=18 \\ y=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy Pt đã cho có 4 nghiệm $\begin{cases} x=0 \\ y=18 \end{cases}; \begin{cases} x=2 \\ y=8 \end{cases}; \begin{cases} x=8 \\ y=2 \end{cases}; \begin{cases} x=18 \\ y=0 \end{cases}$

Bài 43: Phương trình đã cho tương đương với $9x=(y-1)(y+2)(1)$

Nếu $y-1 \ \vdots\ 3$ thì $y+2=(y-1)+3 \ \vdots\ 3 => (y-1)(y+2) \ \vdots\ 9$

Mà $9x \ \vdots\ 9 \ \forall x \in Z$ nên ta có mâu thuẫn.

Suy ray $-1 \ \vdots\ 3$, do đó: $y-1 = 3k(k \in Z)$=>y=3k+1($k \in Z$)

Thay vào (1) ta có: $9x=3k(3k+3) => x=k(k+1)$

Vậy phương trình có nghiệm: $\begin{cases} x=k(k+1) \\ y=3k+1 \end{cases} (k \in Z)$

Bài 44:

$$2015(x^2+y^2)-2014(2xy+1)=25$$
$$<=> 2014(x-y)^2+x^2+y^2=2039$$

Đặt t=|x-y| , $t \in N$ do x, y nguyên

Xét các trường hợp:

TH1: t = 0, tức x = y ⇒ phương trình vô nghiệm

TH2: t = 1, tức là x – y = ±1

+ Với x – y = 1 hay x = y + 1, phương trình trở thành:

$$(y+1)^2+y^2=25 <=> y^2+y-12=0$$
$$<=> \left[\begin{array}{l} y=3 \\ y=-4 \end{array}\right.$$

Với y = 3 thì x = 4; với y = –4 thì x = –3

+ Với x – y = –1 hay x = y – 1, phương trình trở thành:

$$(y-1)^2+y^2=25 <=> y^2-y-12=0$$
$$<=> \left[\begin{array}{l} y=-3 \\ y=4 \end{array}\right.$$

Với y = –3 thì x = –4; với y = 4 thì x = 3

TH3: t ≥ 2, VT > VP ⇒ phương trình vô nghiệm

Vậy các cặp (x;y) thỏa là (4;3), (–3;–4), (–4;–3), (3;4)

Cách khác: Sử dụng phương pháp biến đổi phương trình về dạng vế trái là tổng của các bìnhphương. Vế phải là tổng của các số chính phương, hoặc cách điều kiện có nghiệm của phươngtrình bậc hai cũng có thể giải ra đáp số.

Bài 45:

$$x^3+y^3-x^2y-xy^2=5$$
$$<=> (x+y)(x^2-xy+y^2)-xy(x+y)=5$$
$$<=> (x+y)(x^2-2xy+y^2)=5$$
$$<=> (x+y)(x-y)^2=5$$

Do $(x-y)^2 \geq 0$ và x y thuộc Z nên xảy ra hai trường hợp:

Th1: $\begin{cases} x+y=5 \\ (x-y)^2=1 \end{cases} => \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases} <=> \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=5 \\ x-y=-1 \end{cases} <=> \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \end{array}\right.$

Th2: $\begin{cases} x+y=1 \\ (x-y)^2=5 \end{cases} => \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=\pm\sqrt{5} \end{cases}$ (L)

Vậy phương trình có hai nghiệm nguyên $(x;y)\in\{(3;2);(2;3)\}$

Bài 46:

1) Tìm tất cả các số nguyên tố p và các số nguyên dương x,y thỏa mãn $\begin{cases} p-1=2x(x+2) \\ p^2-1=2y(y+2) \end{cases}$

Từ (1) ⇒ p – 1 là số chẵn ⇒ p là số nguyên tố lẻ.

Trừ từng vế của (2) cho (1) ta

được $p^2-p=2y^2-2x^2+4y-4x \Leftrightarrow p(p-1)=2(y-x)(y+x+2)(*)$

$\Rightarrow 2(y-x)(y+x+2) \vdots p$. Mà (2;p) = 1 nên xảy ra 2 TH:

• $y-x \vdots p \Rightarrow y-x=kp$ ($k\in N^*$)

Khi đó từ (*) ⇒ $p-1=2k(x+y+2) \Rightarrow kp-k=2k^2(x+y+2) \Rightarrow y-x-k=2k^2(x+y+2)$

(loại vì $x+y+2>y-x-k>0$; $2k^2>1 \Rightarrow 2k^2(x+y+2)>y-x-k$)

• $y+x+2 \vdots p \Rightarrow x+y+2=kp$ ($k\in N^*$)

Từ (*) ⇒ $p-1=2k(y-x) \Rightarrow kp-k=2k^2(y-x) \Rightarrow x+y+2-k=2k^2(y-x)$ (**)

Ta chứng minh k = 1. Thật vậy nếu $k\ge 2$ thì từ (**) ⇒ $x+y=2k^2(y-x)+k-2\ge 8(y-x)$ (vì $y-x>0$)

$\Rightarrow 9x\ge 7y \Rightarrow 7y<14x \Rightarrow y<2x$

Do đó từ (2) ⇒ $(p-1)(p+1)=2y(y+2)<4x(2x+2)<4x(2x+4)=8x(x+2)=4(p-1)$

(vì $2x(x+2)=p-1$ theo (1))

⇒ $p+1<4 \Rightarrow p<3$, mâu thuẫn với p là số nguyên tố lẻ.

Do đó k = 1, suy ra

$$\begin{cases} x+y+2=p \\ p-1=2(y-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2=p \\ x+y+1=2(y-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2=p \\ y=3x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x+1 \\ p-1=4x+2 \end{cases}$$

Thay p – 1 = 4x + 2 vào (1) ta có: $4x+2=2x(x+2) \Leftrightarrow 2x+1=x^2+2x \Leftrightarrow x^2=1 \Rightarrow x=1$

⇒ y = 4, p = 7 (thỏa mãn)

Vậy x = 1, y = 4 và p = 7.

2) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho tồn tại các số nguyên dương x, y, z thoả mãn $x^3+y^3+z^3=nx^2y^2z^2$ (1)

Giả sử n là số nguyên dương sao cho tồn tại các số nguyên dương x,y,z thỏa mãn (1)

Không mất tính tổng quát, giả sử $x\ge y\ge z\ge 1$.

Từ (1) $\Rightarrow 0<y^3+z^3=x^2(ny^2z^2-1) \Rightarrow ny^2z^2-1>0 \Rightarrow ny^2z^2-1\ge 1$

$\Rightarrow y^3+z^3=x^2(ny^2z^2-1)\ge x^2(*)$

Vì $x\ge y\ge z$ nên $3x^3\ge x^3+y^3+z^3=nx^2y^2z^2 \Rightarrow ny^2z^2 \Rightarrow 9x^2\ge n^2y^4z^4$

Kết hợp với (*) ta có $9\left(y^3+z^3\right) \geq 9x^2 \geq n^2y^4z^4 \Rightarrow 9\left(1+\frac{z^3}{y^3}\right) \geq n^2yz^4$

Mà $y \geq z \Rightarrow \frac{z^3}{y^3} \leq 1 \Rightarrow n^2yz^4 \leq 9\left(1+\frac{z^3}{y^3}\right) \leq 18$(**)

Ta có: (**) $\Rightarrow z^4 \leq 18 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z=1 \\ z=2 \end{array}\right.$

• Nếu $z=2$: (**) $\Rightarrow 16n^2y \leq 18 \Rightarrow n=y=1$ (loại vì $y<z$)

• Nếu $z=1$: (**) $\Rightarrow n^2y \leq 18 \Rightarrow n^2 \leq 18 \Rightarrow n \leq 4$

Ta chứng minh $n \notin \{2;4\}$. Thật vậy,

*Nếu $n = 4$ thì từ $n^2y \leq 18 \Rightarrow 16y \leq 18 \Rightarrow y = 1$. Từ (1) $\Rightarrow x^3 + 2 = 4x^2 \Rightarrow x^2(4 - x) = 2 \Rightarrow x^2$ là ước của 2 $\Rightarrow$

$x = 1$ (không thỏa mãn)

*Nếu $n = 2$ thì từ $n^2y \leq 18$ suy ra $4y \leq 18 \Rightarrow 1 \leq y \leq 4$.

+ $y=1:(1) \Rightarrow x^3-2x^2+2=0 \Rightarrow x^2(x-2)=-2<0 \Rightarrow x<2 \Rightarrow x=1(L)$

+ $y=2:(1) \Rightarrow x^3-8x^2+9=0 \Rightarrow 9=x^2(8-x)$. Suy ra x^2 là ước của 9. Mà $x^2 \geq y^2 = 4$ nên x=3 (không thỏa
mãn)

+ $y=3:(1) \Rightarrow x^3-18x^2+28=0 \Rightarrow x^2(18-x)=28$. Suy ra x^2 là ước của 28. Mà $x^2 \geq y^2 = 9$ nên không tồn tại x thỏa mãn.

+ $y=4:(1) \Rightarrow x^3-32x^2+65=0 \Rightarrow x^2$ là ước của 65 (loại vì 65 không có ước chính phương)

Vậy $n \notin \{2;4\}$. Do đó $n \in \{1;3\}$

Thử lại với n = 1, tồn tại bộ (x;y;z) nguyên dương chẳng hạn (x;y;z) = (3;2;1) thỏa mãn (1)

với n = 3, tồn tại bộ (x;y;z) = (1;1;1) thỏa mãn (1).

Vậy tất cả các giá trị n thỏa mãn bài toán là $n \in \{1;3\}$

$y=4:(1) \Rightarrow x^3-32x^2+65=0 \Rightarrow x^2$ là ước của 65 (loại vì 65 không có ước chính phương)

Vậy $n \notin \{2;4\}$. Do đó $n \in \{1;3\}$

Thử lại với n = 1, tồn tại bộ (x;y;z) nguyên dương chẳng hạn (x;y;z) = (3;2;1) thỏa mãn (1)

với n = 3, tồn tại bộ (x;y;z) = (1;1;1) thỏa mãn (1).

Vậy tất cả các giá trị n thỏa mãn bài toán là $n \in \{1;3\}$

Bài 47: Ta có: $x^3+y^3=(x+y)^2 <=> (x+y)(x^2-xy+y^2-x-y)=0$

Vì x, y nguyên dương nên x+y > 0, ta có: $x^2-xy+y^2-x-y=0$

$<=> 2(x^2 - xy + y^2 - x - y) = 0$

$<=> (x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$

Vì x, y nguyên nên có 3 trường hợp:

+ Trường hợp 1: $\begin{cases} x - y = 0 \\ (x-1)^2 = 1 <=> x = y = 2, z = 4 \\ (y-1)^2 = 1 \end{cases}$

+ Trường hợp 2: $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ (x-y)^2 = 1 <=> x = 1, y = 2, z = 3 \\ (y-1)^2 = 1 \end{cases}$

+ Trường hợp 3: $\begin{cases} y - 1 = 0 \\ (x-y)^2 = 1 <=> x = 2, y = 1, z = 3 \\ (x-1)^2 = 1 \end{cases}$

Vậy hệ có 3 nghiệm (1,2,3);(2,1,3);(2,2,4)

Bài 48: Ta có:

$x^2 - 2y(x-y) = 2(x+1) <=> x^2 - 2(y+1)x + 2(y^2-1) = 0(1)$

Để phương trình (1) có nghiệm nguyên *x* thì Δ' theo *y* phải là số chính phương

Ta có $\Delta' = y^2 + 2y + 1 - 2y^2 + 2 = -y^2 + 2y + 3 = 4 - (y-1)^2 \le 4$

Δ'chính phương nên $\Delta' \in \{0;1;4\}$

+ Nếu $\Delta' = 4 => (y-1)^2 = 0 <=> y = 1$ thay vào phương trình (1) ta có :

$x^2 - 4x = 0 <=> x(2-4) <=> \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x - 4 \end{array}\right.$

+ Nếu $\Delta' = 1 => (y-1)^2 = 3 <=> y \notin Z.$

+ Nếu $\Delta' = 0 => (y-1)^2 = 4 <=> \left[\begin{array}{l} y = 3 \\ y = -1 \end{array}\right.$

+ Với *y* = 3 thay vào phương trình (1) ta có: $x^2 - 8x + 16 = 0 <=> (x-4)^2 = 0 <=> x = 4$

+ Với *y* =-1 thay vào phương trình (1) ta có: $x^2 = 0 <=> x = 0$

Vậy phương trình (1) có 4 nghiệm nguyên : $(x; y) \in \{(0;1);(4;1);(4;3);(0;-1)\}$

Bài 49: Ta có (1) $\Leftrightarrow x^4 + x^2 + 20 = y^2 + y$

Ta thấy $x^4 + x^2 < x^4 + x^2 + 20 \le x^4 + x^2 + 20 + 8x^2$

$\Leftrightarrow x^2(x^2+1) < y(y+1) \le (x^2+4)(x^2+5)$

Vì x, y $\in \mathbb{Z}$ nên ta xét các trường hợp sau

+ TH1. $y(y+1) = (x^2+1)(x^2+2) \Leftrightarrow x^4 + x^2 + 20 = x^4 + 3x^2 + 2$

$\Leftrightarrow 2x^2 = 18 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$

Với $x^2 = 9$, ta có $y^2 + y = 9^2 + 9 + 20 \Leftrightarrow y^2 + y - 110 = 0$

$\Leftrightarrow y = 10; y = -11 (t.m)$

+ TH2. $y(y+1) = (x^2+2)(x^2+3) \Leftrightarrow x^4 + x^2 + 20 = x^4 + 5x^2 + 6$

$\Leftrightarrow 4x^2 = 14 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{7}{2}$ (loại)

+ TH3. $y(y+1) = (x^2+3)(x^2+4) \Leftrightarrow 6x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{4}{3}$ (loại)

+ TH4. $y(y+1) = (x^2+4)(x^2+5) \Leftrightarrow 8x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Với $x^2 = 0$, ta có $y^2 + y = 20 \Leftrightarrow y^2 + y - 20 = 0 \Leftrightarrow y = -5; y = 4$

Vậy PT đã cho có nghiệm nguyên (x;y) là :

(3;10), (3;-11), (-3; 10), (-3;-11), (0; -5), (0;4).

Bài 50:

a) Giải sử tồn tại (x, y, z) thỏa mãn $x^4 + y^4 = 7z^4 + 5 \Leftrightarrow x^4 + y^4 + z^4 = 8z^4 + 5 \quad (*)$

Ta có $a^4 \equiv 0,1 \pmod 8$ với mọi số nguyên a $\Rightarrow \begin{cases} x^4 + y^4 + z^4 \equiv 0,1,2,3 \pmod 8 \\ 8z^4 + 5 \equiv 5 \pmod 8 \end{cases}$

Mâu thuẫn với (*) vậy không tồn tại (x, y, z) thỏa mãn đẳng thức.

b) Phương trình tương đương với

$\left[(x+1)^2 + (x-1)^2\right]\left[(x+1)^2 - (x-1)^2\right] = y^3 \Leftrightarrow (2x^2+2).4x = y^3 \Leftrightarrow 8x^3 + 8x = y^3.$

Nếu $x \geq 1 \Rightarrow 8x^3 < 8x^3 + 8x < (2x+1)^3 \Leftrightarrow (2x)^3 < y^3 < (2x+1)^3$ (mâu thuẫn với y nguyên)

Nếu $x \leq -1$ và (x, y) là nghiệm, ta suy ra (-x, -y) cũng là nghiệm mà $-x \geq 1 \Rightarrow$ mâu thuẫn

Nếu x = 0 thì y = 0 (mâu thuẫn)

Vậy (x, y) = (0, 0) là nghiệm duy nhất

Bài 51: Phương trình đã cho tương đương $2x^2 - 2xy + 5y^2 - 41 = 0.$ (1)

Ta có $\Delta'_x = 82 - 9y^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 \leq \dfrac{82}{9}$. Mặt khác từ (1) ta có y^2 là số lẻ, nên $y^2 \in \{1;9\}$

Với $y = 1 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 36 = 0 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}.$

Với $y = -1 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 36 = 0 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}.$

Với $y = 3 \Rightarrow 2x^2 - 6x + 4 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Với $y = -3 \Rightarrow 2x^2 + 6x + 4 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -2. \end{array}\right.$

Vậy có 4 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn là: $\{(1;3),(2;3),(-1;-3),(-2;-3)\}$.

Bài 52: Đặt : $x^{673} = a; y^{673} = b\left(a;b \in \mathbb{Z}\right)$

Phương trình đã cho trở thành: $a^3 = b^3 - b^2 - b + 2(*)$

$\Rightarrow a^3 = b^3 - 3b^2 + 3b - 1 + 2b^2 - 4b + 3 = \left(b-1\right)^3 + \left(2b^2 - 4b + 3\right) > \left(b-1\right)^3$

Lại có: $a^3 = b^3 + 6b^2 + 12b + 8 - 7b^2 - 13b - 6 = \left(b+2\right)^3 - \left(7b^2 + 13b - 6\right) < \left(b+2\right)^3$

Từ (1) và (2) ta có: $\left(b-1\right)^3 < a^3 < \left(b+2\right)^3 \Rightarrow b - 1 < a < b + 2$

Vì $a,b \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ a = b + 1 \end{array}\right.$

+) Với $a = b$ ta có: $(*) \Leftrightarrow b^3 = b^3 - b^2 - b + 2$

$\Leftrightarrow b^2 + b - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(b-1\right)\left(b+2\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 1 \\ b = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b = 1 \\ a = b = -2 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^{673} = y^{673} = 1 \\ x^{673} = y^{673} = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 1(tm) \\ x = y = \sqrt[673]{-2}(ktm) \end{array}\right.$

+)Với $a = b + 1 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow \left(b+1\right)^3 = b^3 - b^2 - b + 2$

$\Leftrightarrow b^3 + 3b^2 + 3b + 1 = b^3 - b^2 - b + 2$

$\Leftrightarrow 4b^2 + 4b - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = \dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}(ktm) \\ b = \dfrac{-1-\sqrt{2}}{2}(ktm) \end{array}\right.$

Vậy $\left(x; y\right) = \left(1;1\right)$

Bài 53: a) Chứng minh rằng…..

Ta có: $9! = 1.2.3.4.5.6.7.8.9$ là số chẵn $\Rightarrow x^3 \,\vdots\, 2 \Rightarrow x \,\vdots\, 2 \Rightarrow x = 2m \quad \left(m \in \mathbb{Z}\right)$

$\Rightarrow 8m^3 + 2y^3 + 4z^3 = 9! \Leftrightarrow 4m^3 + y^3 + 2z^3 = 1.3.4.5.6.7.8.9$ là số chẵn

$\Rightarrow y^3 \,\vdots\, 2 \Rightarrow y \,\vdots\, 2 \Rightarrow y = 2n \quad \left(n \in \mathbb{Z}\right)$

$\Rightarrow 4m^3 + 8n^3 + 2z^3 = 1.3.4.5.6.7.8.9$

$\Leftrightarrow 2m^3 + 4n^3 + z^3 = 1.2.3.5.6.7.8.9$ là số chẵn

$\Rightarrow z^3 \,\vdots\, 2 \Rightarrow z \,\vdots\, 2 \Rightarrow z = 2p\left(p \in \mathbb{Z}\right)$

$\Rightarrow 2m^3 + 4n^3 + 8p^3 = 1.2.3.5.6.7.8.9$

$\Leftrightarrow m^3 + 2n^3 + 4p^3 = 1.3.5.6.7.8.9$

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta cũng có $\left\{\begin{array}{l} m \,\vdots\, 2 \\ n \,\vdots\, 2 \\ p \,\vdots\, 2 \end{array}\right. \left(m;n;p \in \mathbb{Z}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2m \,\vdots\, 4 \\ y = 2n \,\vdots\, 4 \\ z = 2p \,\vdots\, 4 \end{array}\right.$

Vậy ta có điều phải chứng minh

b) Chứng minh rằng không tồn tại…..

Theo ý a) ta có thể đặt $x = 4a; y = 4b; z = 4c \qquad (a;b;c \in \mathbb{Z})$

$\Rightarrow a^3 + 2b^3 + 4c^3 = \dfrac{9!}{4^3} = \dfrac{1.2.3.4.5.6.7.8.9}{4^3} = 1.3.5.6.7.9$ là số

chẵn $\Rightarrow a \vdots 2 \Rightarrow a = 2u \qquad (u \in \mathbb{Z})$

$\Rightarrow 8u^3 + 2b^3 + 4c^3 = 1.3.5.6.7.9 \Leftrightarrow 4u^3 + b^3 + 2c^3 = 1.3.3.5.7.9 = 1.5.7.3^4$

Lại có:

$$\begin{cases} (1.5.7.3^4) \vdots 3^4 \Rightarrow (1.5.7.3^4) \vdots 9 \\ x^3 \equiv 0; \pm 1 \qquad (\bmod 9)(x \in Z) \end{cases}$$

$\Rightarrow a;b;c \vdots 9 \Rightarrow (4u^3 + b^3 + 2c^3) \vdots 9^3$

Nhưng do $1.5.7.3^4$ không thể chia hết cho 9^3 nên ta có điều vô lý

Vậy ta có điều phải chứng minh

Bài 54:

$x^3 - xy + 2 = x + y \Leftrightarrow x^3 - xy - x - y = 2$

$\Leftrightarrow x(x^2 - 1) - y(x+1) = -2$

$\Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x - y) = -2$

$$\text{Vì } x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+1 = -2 \\ x^2 - x - y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x+1 = 2 \\ x^2 - x - y = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x+1 = 1 \\ x^2 - x - y = -2 \end{cases} \\ \begin{cases} x+1 = -1 \\ x^2 - x - y = 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -3 \\ y = 11 \end{cases} (tm) \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} (tm) \\ \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} (tm) \\ \begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases} (tm) \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có các nghiệm nguyên $(x; y) = \{(-3;11);(1;1);(0;2);(-2;4)\}$

Bài 55: Tìm các số nguyên x, y, z thỏa mãn đồng thời:

$x^2 + 4y^2 + z^2 + 2xz + 4(x+z) = 396$ và $x^2 + y^2 = 3z$.

Từ điều kiện $x^2 + y^2 = 3z$ suy ra $x^2 + y^2$ chia hết cho 3 hay x, y đều chia hết cho 3.

$x^2 + 4y^2 + z^2 + 2xz + 4(x+z) = 396 \Leftrightarrow (x+z+2)^2 = 4(100 - y^2)$.

Suy ra: $100 - y^2$ là số chính phương và $y^2 \le 100$. Mặt khác $y \vdots 3$ nên $y^2 \in \{0;36\} \Rightarrow y \in \{0;6;-6\}$.

$$\text{Xét } y = 0: \begin{cases} x^2 = 3z \\ (x+z+2)^2 = 400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \dfrac{x^2}{3} \\ x+z+2 = 20 \end{cases} \vee \begin{cases} z = \dfrac{x^2}{3} \\ x+z+2 = -20 \end{cases}$$

Tìm được $x = 6, z = 12$ hoặc $x = -9, z = 27$.

Xét $y=6$ hoặc $y=-6$: $\begin{cases} x^2+36=3z \\ (x+z+2)^2=256 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z=\dfrac{x^2}{3}+12 \\ x+z+2=16 \end{cases} \vee \begin{cases} z=\dfrac{x^2}{3}+12 \\ x+z+2=-16 \end{cases}.$

Giải ra $x,z\notin\mathbb{Z}$. Vậy $(x;y;z)$ là $(6;0;12)$ hoặc $(-9;0;27)$.

Bài 56:

$2x^2-4y^2-2xy-3x-3=0$

$\Leftrightarrow (2x^2-4xy-2x)+(2xy-4y^2-2y)-(x-2y-1)=4$

$\Leftrightarrow 2x(x-2y-1)+2y(x-2y-1)-(x-2y-1)=4$

$\Leftrightarrow (x-2y-1)(2x+2y-1)=4 \qquad (*)$

Do $x,y\in\mathbb{Z}, 2x+2y-1$ lẻ nên ta có các trường hợp sau đây:

$$(*)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x+2y-1=-1 \\ x-2y-1=-4 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x+2y-1=1 \\ x-2y-1=4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x+2y=0 \\ x-2y=-3 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x+2y=2 \\ x-2y=5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} (tm) \\ \begin{cases} x=\dfrac{7}{3} \\ y=\dfrac{-4}{3} \end{cases} (ktm) \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm nguyên của phương trình đã cho là $(1;-1)$

Bài 57: Phương trình đã cho tương đương với

$3x^2-2xy+y-5x+2=0$

$\Leftrightarrow 3x^2-5x+2=2xy-y$

$\Leftrightarrow 3x^2-5x+2=y(2x-1)$

$\Rightarrow y=\dfrac{3x^2-5x+2}{2x-1}(Do...x\in\mathbb{Z}\Rightarrow 2x-1\neq 0)$

Do x,y nguyên nên:

$$\begin{cases}\left(3x^2-5x+2\right)\vdots(2x-1)\\ 3(2x-1)^2\vdots(2x-1)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\left[4\left(3x^2-5x+2\right)-3(2x-1)^2\right]\vdots(2x-1)$$

$$\Leftrightarrow\left[-20x+8-3(-4x+1)\right]\vdots(2x-1)$$

$$\Leftrightarrow(-8x+5)\vdots(2x-1)$$

$$\Leftrightarrow\left[-8x+5+4(2x-1)\right]\vdots(2x-1)$$

$$\Leftrightarrow 1\vdots(2x-1)$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-1=1\\ 2x-1=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow y=0\\ x=0\Rightarrow y=-2\end{array}\right.$$

Vậy các nghiệm nguyên $(x;y)$ của phương trình đã cho là $(1;0);(0;-2)$

Bài 58:

Vì x, y nguyên dương nên $VP>0$ do đó $VT>0$ nên $x>y$

Ta có: $15xy=16\left(x^3-y^3\right)-371$ là số lẻ nên x, y đều lẻ, do vậy : $\begin{cases}x\ge 3\\ y\ge 1\end{cases}$

Xét $x=3$ thì $y=1$ thay vào phương trình thỏa mãn

Xét $x\ge 5$

Ta có:

$$x-2\ge y\Rightarrow 16\left(x^3-y^3\right)\ge 16\left[x^3-(x-2)^3\right]=16\left(6x^2-12x+8\right)$$

$$15xy+371\le 15x(x-2)+371=15x^2-30x+371$$

$$16\left(6x^2-12x+8\right)-\left(15x^2-30x+371\right)=81x^2-162x-243=81\left(x^2-2x-3\right)$$

Ta có: $x^2-2x-3>0, \forall x\ge 5\Rightarrow 16\left(x^3-y^3\right)>15xy+371$

Vậy trường hợp này vô nghiệm

Vậy phương trình có cặp nghiệm nguyên dương duy nhất $(x;y)=(3;1)$

Bài 59: Ta có 1 số chính phương khi chia cho 3 sẽ nhận được số dư là 0 hoặc 1 nên ta có:

$$\begin{cases}(3k)^2=9k^2\\ (3k+1)^2=9k^2+6k+1\equiv 1\pmod 3\\ (3k+2)^2=9k^2+12k+4\equiv 1\pmod 3\end{cases}$$

Nếu $x, y>3$ thì x,y không chia hết cho 3 do đó số dư của Vế trái cho 3 là $1-2.1=-1$ chia 3 dư 2 vô lý do $x^2-2y^2=1$

$\Rightarrow$ trong hai số x, y phải có một số bằng 3

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\Rightarrow 9-2y^2=1\Rightarrow y^2=4\Leftrightarrow y=2(y>0)\\ y=3\Rightarrow x^2-2.9=1\Leftrightarrow x^2=19\Rightarrow x\in\varnothing\end{array}\right.$$

Vậy các cặp số nguyên $(x;y)=(3;2)$

Bài 60:

$x^2-xy+y^2=2x-3y-2 \Leftrightarrow x^2-(y+2)x+y^2+3y+2=0 \ (1)$

$\Delta=(y+2)^2-4(y^2+3y+2)=-3y^2-8y-4$

Để phương tình (1) có nghiệm thì $\Delta \ge 0$

$\Rightarrow -3y^2-8y-4\ge 0 \Leftrightarrow 3y^2+8y+4\le 0 \Leftrightarrow -2\le y\le -\frac{2}{3}$

Vì y nguyên nên $y=-2$ hoặc $y=-1$.

Với $y=-2$, $(1) \Rightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$.

Với $y=-1$, $(1) \Rightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=0 \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của phương trình: $(0;-2),(0;-1),(1;-1)$.

Bài 61: - Với $y=0$, ta có $x=0$.

- Với $y\neq 0$, ta có:

$x^2y^2-x^2-6y^2=2xy \Leftrightarrow x^2y^2-5y^2=(x+y)^2 \Leftrightarrow x^2-5=\frac{(x+y)^2}{y^2}=a^2 \ (a\in\mathbb{Z})$.

$x^2-a^2=5 \Leftrightarrow \begin{cases} |x|+|a|=5 \\ |x|-|a|=1 \end{cases} \Rightarrow |x|=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-3 \end{array}\right.$

Khi $x=3 \Rightarrow 3y^2-6y-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1 \\ y=3 \end{array}\right.$

Khi $x=$ -3 $\Rightarrow 3y^2+6y-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-3 \end{array}\right.$

Vậy $(x;y)\in\{(0;0);(3;-1);(3;3);(-3;1);(-3;-3)\}$

Bài 62: Coi phương trình đã cho là phương trình bậc 2 ẩn y có tham số x

Ta có: $\Delta=4x^2+12x+8$

Vì $x,y\in\mathbb{Z} \Rightarrow \Delta$ là số chính phương

$\Rightarrow 4x^2+12x+8=k^2 \Leftrightarrow 4x^2+12x+9-k^2=1$

$\Leftrightarrow (2x+3)^2-k^2=1$

$\Leftrightarrow (2k+3-k)(2k+3+k)=1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x+3-k=1 \\ 2x+3+k=1 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x+3-k=-1 \\ 2x+3+k=-1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-1 \\ k=0 \end{cases} (tm) \\ \begin{cases} x=-2 \\ k=0 \end{cases} (tm) \end{array}\right.$$

Thay vào phương trình đề

Với $x=-1 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow y^2-2y+1=0 \Leftrightarrow (y-1)^2=0 \Rightarrow y=1(tm)$

Với $x=-2 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow y^2-4y+4=0 \Leftrightarrow (y-2)^2=0 \Leftrightarrow y=2(tm)$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $(x;y)=\{(-1;1);(-2;2)\}$

Bài 63: Nhân cả hai vế của phương trình với 12 ta được:

$$36\left(a^2+b^2\right)-84(a+b)=-48 \Leftrightarrow (6a-7)^2+(6b-7)^2=50=5^2+5^2=1^2+7^2$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases}(6a-7)^2=25\\(6b-7)^2=25\end{cases}\\ \begin{cases}(6a-7)^2=1\\(6b-7)^2=49\end{cases}\\ \begin{cases}(6a-7)^2=49\\(6b-7)^2=1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases}6a-7=5\\6b-7=5\end{cases}\\ \begin{cases}6a-7=-5\\6b-7=5\end{cases}\\ \begin{cases}6a-7=5\\6b-7=-5\end{cases}\\ \begin{cases}6a-7=-5\\6b-7=-5\end{cases}\\ \begin{cases}6a-7=1\\6b-7=7\end{cases}\\ \begin{cases}6a-7=-1\\6b-7=7\end{cases}\\ \begin{cases}6a-7=1\\6b-7=-7\end{cases}\\ \begin{cases}6a-7=-1\\6b-7=-7\end{cases}\\ \begin{cases}6a-7=7\\6b-7=1\end{cases}\\ \begin{cases}6a-7=-7\\6b-7=1\end{cases}\\ \begin{cases}6a-7=7\\6b-7=-1\end{cases}\\ \begin{cases}6a-7=-7\\6b-7=-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=2(tm)\\ a=\dfrac{1}{3},b=2(ktm)\\ a=2,b=\dfrac{1}{3}(ktm)\\ a=\dfrac{1}{3};b=\dfrac{1}{3}(ktm)\\ a=\dfrac{4}{3};b=\dfrac{7}{3}(ktm)\\ a=1;b=\dfrac{7}{3}(ktm)\\ a=\dfrac{4}{3};b=0(ktm)\\ a=1;b=0\\ a=0;b=\dfrac{4}{3}(ktm)\\ a=\dfrac{4}{3};b=\dfrac{4}{3}(ktm)\\ a=\dfrac{4}{3};b=1(ktm)\\ a=0,b=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}\\ a=b=2\\ \begin{cases}a=0\\b=1\end{cases}\end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $(a;b)=\{(0;1);(1;0);(2;2)\}$

Bài 64:

Ta có

$$y^2+y=x^4+x^3+x^2+x \Leftrightarrow 4y^2+4y+1=4x^4+4x^3+4x^2+4x+1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(2y+1)^2=\left(2x^2+x\right)^2+(3x+1)(x+1)\\(2y+1)^2=\left(2x^2+x+1\right)^2-x(x+1)\end{cases}$$

Ta thấy : nếu $x<-1$hoặc $x>2$ thì $(3x+1)(x+1)>0$ và $x(x-2)>0$ nên từ (1) và (2) ta suy ra $\left(2x^2+x+1\right)^2>(2y+1)^2>\left(2x^2+x\right)^2$ (*) Loại vì không có số nguyên y thỏa mãn.

Từ đó suy ra $-1\le x\le 2\Rightarrow x\in\{-1,0,1,2\}$

Xét $x=2\Rightarrow y^2+y=30\Rightarrow y=5, y=-6$

Xét $x=1\Rightarrow y^2+y=4$ loại

Xét $x=0\Rightarrow y^2+y=0\Rightarrow y=0, y=-1$

Xét $x=-1\Rightarrow y^2+y=0\Rightarrow y=0, y=-1$

Vậy hệ đã cho có 6 nghiệm là $(0,5)(2\cdot-6)(0:0),(0;-1),(-1,0),(-1,-1)$

Bài 65:

Từ $x^2-xy-5x+5y=2$

$\Leftrightarrow x(x-y)-5(x-y)=2$

$\Leftrightarrow (x-y)(x-5)=2$

Vì $2=1.2=2.1=(-1).(-2)=(-2).(-1)$ nên ta có 4 trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\begin{cases}x-y=1\\x-5=2\end{cases}$ $\begin{cases}y=6\\x=7\end{cases}(TM)$

Trường hợp 2: $\begin{cases}x-y=2\\x-5=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=4\\x=6\end{cases}(TM)$

Trường hợp 3: $\begin{cases}x-y=-1\\x-5=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=4\\x=3\end{cases}(TM)$

Trường hợp 4: $\begin{cases}x-y=-2\\x-5=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=6\\x=4\end{cases}(TM)$

Vậy có 4 cặp (x,y) thỏa mãn là: $(7;\ 6);\ (6;\ 4);\ (3;\ 4);\ (4;\ 6)$.

Bài 66:

Ta có $xy^2-(y-45)^2+2xy+x-220y+2024=0\Leftrightarrow(y+1)(xy+x-y-129)=-128=-2^7$

$\Rightarrow y+1\in\left\{2;4;8;16;32;64;128\right\}\Rightarrow y\in\left\{1;3;7;15;31;63;127\right\}\Rightarrow(x;y)\in\left\{(33;1),(25;3),(15;7)\right\}$.

Bài 67:

Xét phương trình: $x^2-n^2x+n+1=0$ (ẩn số x) (1)

Để phương trình (1) có nghiệm thì $\Delta\ge 0\Rightarrow n^4-4n-4\ge 0\Rightarrow n\notin\left\{0;1\right\}$ $\left(\text{do } n\in N\right)$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1).

Áp dụng hệ thức Vi-et, ta được: $\begin{cases}x_1+x_2=n^2\\x_1x_2=n+1\end{cases}$

$\Rightarrow x_1+x_2-x_1x_2=n^2-n-1$

$\Leftrightarrow x_1(1-x_2)-(1-x_2)=n^2-n-2$

$\Leftrightarrow (x_1-1)(1-x_2)=(n-2)(n+1)$

$\Leftrightarrow (x_1-1)(x_2-1)=(2-n)(n+1)$

Với $n\in N, n\notin\{0;1\}$ thì $\begin{cases} x_1+x_2=n^2\ge 4 \\ x_1x_2=n+1\ge 3 \end{cases}$

Do đó $x_1\ge 1; x_2\ge 1 \Rightarrow (x_1-1)(x_2-1)\ge 0 \Rightarrow (2-n)(n+1)\ge 0$

$\Rightarrow 2-n\ge 0$ (do $n+1>0, \forall n\in N$) $\Rightarrow n\le 2$

Mà $n\in N, n\notin\{0;1\}\Rightarrow n=2$. Khi đó, phương trình (1) trở thành:

$x^2-4x+3=0\Leftrightarrow (x-1)(x-3)=0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\ (t/m\ x\in Z) \\ x=3\ (t/m\ x\in Z) \end{array}\right.$

Vậy với $n\in N$, để phương trình đã cho có các nghiệm là số nguyên thì $n=2$.

Bài 68:

Vì $x,\ y\in\mathbb{Z}\Rightarrow x+y,\ x^2+y^2\in\mathbb{Z}$

=> $\dfrac{x^2+y^2}{x+y}=\dfrac{85}{13}\Leftrightarrow 85(x+y)=13(x^2+y^2)>0$

=> $x+y>0$.

Áp dụng BĐT: $x^2+y^2\ge\dfrac{(x+y)^2}{2}\Leftrightarrow (x-y)^2\ge 0$ (luôn đúng)

Ta có:

$85(x+y)=13(x^2+y^2)\ge\dfrac{13}{2}(x+y)^2\Rightarrow x+y\le\dfrac{170}{13}\Rightarrow x+y\le 13$

Mặt khác:

$$\begin{cases} x+y>0 \\ x+y\ \vdots\ 13 \end{cases}\Rightarrow x+y=13\Rightarrow x^2+y^2=85$$

Suy ra:

$$\begin{cases} x+y=13 \\ x^2+y^2=85 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=13-x \\ x^2+(13-x)^2=85 \end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=6 \\ y=7 \end{cases}(TM) \\ \begin{cases} x=7 \\ y=6 \end{cases}(TM) \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của PT là: (x; y) = (6; 7) ; (7; 6)

Bài 69: Có: $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$ suy ra $n^4 \le 2(n^3+2)$, hay $n^3(n-2)-4 \le 0$.

Nếu $n \ge 3$ thì $n^3(n-2)-4 \ge n^3-4>0$ (Loại). Do đó $n=0; 1; 2$.

Với $n=0; 1$ chỉ ra không tồn tại $a;b$ thỏa mãn đề bài.

Với $n=2$ chỉ ra $a=1;b=3$ hoặc $a=3;b=1$ thỏa mãn đề bài rồi kết luận.

Bài 70:

$$2020(x^2+y^2)-2019(2xy+1)=5$$

$$\Leftrightarrow 2019(x-y)^2+x^2+y^2=2024 \qquad (1)$$

$$\Rightarrow 2019(x-y)^2 \le 2024 \Rightarrow (x-y)^2 \le \frac{2024}{2019} \Rightarrow 0 \le (x-y)^2 \le 1 \Rightarrow 0 \le |x-y| \le 1$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} |x-y|=0 \\ |x-y|=1 \end{array}\right.$$

Nếu $|x-y|=0 \Rightarrow x=y$, từ (1) $\Rightarrow 2x^2=2024 \Rightarrow x^2=1012$ (vô nghiệm nguyên)

Nếu $|x-y|=1$ thì $\left[\begin{array}{l} x-y=1 \\ x-y=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x-1 \\ y=x+1 \end{array}\right.$ và từ (1) $\Rightarrow x^2+y^2=5$ (2)

Thay $y=x-1$ vào (2) ta được: $\Rightarrow x^2+(x-1)^2=5 \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=-2 \\ y=1 \end{array}\right.$

Thay $y=x+1$ vào (2) ta được: $\Rightarrow x^2+(x+1)^2=5 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=-1 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có 4 nghiệm nguyên: $(x;y)=(-1;2);(-2;1);(1;-2);(2;-1)$

Bài 71: $2(2x^2y-x^2-3y-1)=0 \Leftrightarrow (2x^2-3)(2y-1)=5$ (*)

Suy ra $2y-1 \in Ư(5)=\{\pm1;\pm5\}$ mà $2y-1>-1, \forall y>0$ nên $\left[\begin{array}{l} 2y-1=1 \\ 2y-1=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=3 \end{array}\right.$.

Với $y=1$ thay vào (*) ta được $2x^2-3=5 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2(n) \\ x=-2(l) \end{array}\right.$

Với $y=3$ thay vào (*) ta được $2x^2-3=1 \Leftrightarrow x^2=2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$ (loại).

Vậy các số nguyên dương thỏa mãn là $x=2, y=1$.

Bài 72:

$\sqrt{x+y+3}+1=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

$\Leftrightarrow x+y+3+2\sqrt{x+y+3}+1=x+2\sqrt{xy}+y$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+y+3}=\sqrt{xy}-2$

$\Leftrightarrow x+y+3=xy-4\sqrt{xy}+4$

$\Leftrightarrow \sqrt{xy}=\dfrac{xy-x-y+1}{4}$

Nếu xy là số không chính phương thì VT là số vô tỉ còn VP là số hữu tỉ, vô lý

Vậy $xy=k^2 \Rightarrow \sqrt{xy}=k$

Ta có $x+y+3=xy-4\sqrt{xy}+4 \Leftrightarrow x+y+2\sqrt{xy}=xy-2\sqrt{xy}+1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2=\left(\sqrt{xy}+1\right)^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{xy}-1$ (*)

$\Leftrightarrow \sqrt{y}=k-1-\sqrt{x} \Leftrightarrow y=(k-1)^2-2(k-1)\sqrt{x}+x$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}=\dfrac{(k-1)^2+x-y}{2(k-1)}$ **vì** $(k>2)$

Nếu x là số không chính phương thì VT là số vô tỉ còn VP là số hữu tỉ, vô lý

Vậy x là số chính phương, Lý luận tương tự thì y là số chính phương

Đặt $x=a^2; y=b^2$

Từ (*) $a+b=ab+1 \Leftrightarrow (a-1)(b-1)=2$

Ta tìm được $(a;b)=(2;3);(3;2) \Leftrightarrow (x;y)=(4;9);(9;4)$

Bài 73: ĐK: $199-x^2-2x \ge 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 \le 200 \Rightarrow x \in \{-15;-14;-13;...;12;13\}$ (Vì $x \in Z$)

Ta có: $4y^2=2+\sqrt{199-x^2-2x}=2+\sqrt{200-(x+1)^2} \le 2+10\sqrt{2} \Rightarrow 0<y^2 \le 4$, mà $y \in Z$

Suy ra: $y \in \{-2;-1;1;2\}$.

$y=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-15 \\ x=13 \end{array}\right.$; $\quad y=-1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-15 \\ x=13 \end{array}\right.$; $\quad y=-2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \end{array}\right.$;

$y=2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \end{array}\right.$

Vậy tập hợp các cặp số $(x;y)$ nguyên thỏa mãn đề bài là:

$S=\{(13;-1),(13;1),(-15;-1),(-15;1),(-3;2),(-3;-2)(1;2),(1;-2)\}$

Bài 74: Vì x,y nguyên dương và $(x;y)=(1;1)$ không thỏa mãn phương trình nên $x^2+y^2+1>3; xy+x+y>3$. Suy ra $xy+x+y$ là ước nguyên dương lớn hơn 3 của 30 gồm: $5;6$

Nếu $xy+x+y=5 \Leftrightarrow (x+1)(y+1)=6$ ta được các trường hợp

+) $\begin{cases} x+1=2 \\ y+1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện đầu bài)

+) $\begin{cases} x+1=3 \\ y+1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện đầu bài)

Nếu $xy+x+y=6 \Leftrightarrow (x+1)(y+1)=7$ không thỏa mãn

Vậy các cặp số $(x;y)$ thỏa mãn là $(1;2),(2;1)$.

Bài 75: Vì 65 lẻ nên $2x+5y+1$ lẻ và $2^{|x|-1}+y+x^2+x$ lẻ

Mà $2x+1$ lẻ nên $5y$ chẵn, suy ra y chẵn

Mặt khác $x^2+x=x(x+1)$ chẵn nên $2^{|x|-1}$ lẻ, suy ra $|x|-1=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$

Với x = 1 $\Rightarrow (5y+3)(y+3)=65 \Rightarrow y=2$

Với x = -1 $\Rightarrow (5y+3)(y+3)=65 \Leftrightarrow 5y^2+4y-66=0$ Phương trình này không có nghiệm nguyên.

Vậy: $(x;y)=(1;2)$

Bài 76: Ta có $2^m.m^2 = 9n^2 - 12n + 19 \Leftrightarrow 2^m.m^2 = (3n-2)^2 + 15$

Nếu m lẻ $\Rightarrow$ m= 2k +1, $k \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow 2^m.m^2 = 2.4^k.m^2 = (3+1)^k\, 2m^2 \equiv 2m^2 \pmod 3$ mà $m^2 \equiv 0;1 \pmod 3$ nên $2.4^k.m^2 \equiv 0;2 \pmod 3$.

Mặt khác $(3n-2)^2 + 15 \equiv 1 \pmod 3$

Vậy trường hợp này không xảy ra

Nếu m chẵn $\Rightarrow$ m= 2k , $k \in \mathbb{N}^*$ thì ta có phương trình

$2^{2k}.m^2 - (3n-2)^2 = 15 \Leftrightarrow (2^k.m + 3n - 2)(2^k.m - 3n + 2) = 15$ (*)

Vì $m,n \in \mathbb{N}^*$ nên $2^k.m + 3n - 2 > 2^k.m - 3n + 2$ và

$2^k.m + 3n - 2 > 0 \Rightarrow 2^k.m - 3n + 2 > 0$

Do dó (*) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^k.m+3n-2=15 \\ 2^k.m-3n+2=1 \end{array}\right.$ hoặc $\left[\begin{array}{l} 2^k.m+3n-2=5 \\ 2^k.m-3n+2=3 \end{array}\right.$

TH1: $\left[\begin{array}{l} 2^k.m+3n-2=15 \\ 2^k.m-3n+2=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} 2^k.2k=8 \\ n=3 \end{cases}$ (vô nghiệm)

TH2: $\left[\begin{array}{l} 2^k.m+3n-2=5 \\ 2^k.m-3n+2=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} 2^k.2k=4 \\ n=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=1 \\ n=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=1 \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm m = 2, n = 1

Bài 77:

Từ biểu thức $(x^2-x+1)(y^2+xy)=3x-1$ ta nhận thấy 3x-1 phải chia hết cho $(x^2 - x + 1)$

ta có (3x - 1)(3x - 2) = $9x^2 - 9x + 2 = 9(x^2 - x + 1) - 7$ cũng phải chia hết cho $(x^2 - x + 1)$

suy ra 7 chia hết cho $(x^2 - x + 1)$

$(x^2 - x + 1) = 1$ hoặc 7

Thay x = 0,1,3 và -2 lần lượt vào ta có y => (x,y) = (1,1),(1,-2) và (-2,1)

Bài 78: Phương trình đã cho có thể được viết lại thành $x^2(y-2)^2 + y^3 - 3y^2 + 4 = 3$

hay $(y-2)^2(x^2 + y + 1) = 3$.

Suy ra $(y-2)^2 = 1$ và $x^2 + y + 1 = 3$. Giải ra, ta được $x = \pm 1$ và $y = 1$. Vậy có hai cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu của đề bài là $(1;1)$ và $(-1;1)$.

Bài 79: Điều kiện: $x \geq 0; y \geq; \sqrt{x} + y - 2 \geq 0$

Với điều kiều kiện trên bình phương 2 vế ta có

$$2\left(\sqrt{x} + y - 2\right) = \sqrt{x}.y \Leftrightarrow \sqrt{x}(2 - y) - 2(2 - y) = 0 \Leftrightarrow (2 - y)\left(\sqrt{x} - 2\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow y = 2 \vee x = 4$$

Kết hợp với điều kiện ta có: $x \geq 0, y = 2$ và $x = 4, y \geq 0$

Bài 80: Ta có $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$

$\Leftrightarrow (x + y)^2 = xy(xy + 1)$

+ Nếu x + y = 0 $\Rightarrow$ $xy(xy + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xy = 0 \\ xy = -1 \end{array}\right.$

Với xy = 0. Kết hợp với x + y = 0 $\Rightarrow$ x = y = 0

Với xy = -1. Kết hợp với x + y = 0 $\Rightarrow$ $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$

+ Nếu $x + y \neq 0$ $\Rightarrow$ $(x + y)^2$ là số chính phương

xy(xy + 1) là hai số nguyên liên tiếp khác 0 nên chúng nguyên tố cùng nhau. Do đó không thể cùng là số chính phương

Vậy nghiệm nguyên của phương trình là (x; y) = (0; 0); (1; -1); (-1; 1)

Bài 81: Ta có $x^5 + y^2 = xy^2 + 1 \Leftrightarrow (x^5 - 1) - (xy^2 - y^2) = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) - y^2(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 - y^2) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = y^2 \end{array}\right.$$

*Nếu $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ ta có $1 + y^2 = y^2 + 1$ đúng với mọi y nguyên

Vậy ngiệm của PT là $(1; y \in Z)$

*Nêu $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = y^2 \Rightarrow 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 = (2y)^2$

Ta có

$(2y)^2 - (2x^2+x)^2 = 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 - 4x^4 - 4x^3 - x^2$

$= 3x^2 + 4x + 4 = 3\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{8}{3} > 0$

Vậy ta có $(2x^2+x)^2 < (2y)^2$ *

Ta có $(2x^2+x+2)^2 - (2y)^2 = 5x^2 \ge 0$, Vậy ta có $(2y)^2 \ge (2x^2+x+2)^2$ **

Từ * và ** ta có

$(2x^2+x)^2 < (2y)^2 \le (2x^2+x+2)^2 \Rightarrow (2y)^2 = (2x^2+x+1)^2$;

$(2y)^2 = (2x^2+x+2)^2$

Nếu $(2y)^2 = (2x^2+x+1)^2 \Leftrightarrow -x^2+2x+3=0 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$

+ nếu $x=-1 \Rightarrow y^2=1 \Rightarrow y=\pm 1$

+Nếu $x=3 \Rightarrow y^2=121 \Rightarrow y=\pm 11$

-Nếu $(2y)^2 = (2x^2+x+2)^2 \Leftrightarrow -5x^2=0 \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow y^2=1 \Rightarrow y=\pm 1$.

Kết luận (x, y) = (-1, 1); (-1, -1); (3, 11); (3, -11); (0, 1); (0, -1); là $(1, y \in Z)$.

Bài 82: Giả thiết $\Leftrightarrow 3(x-3)^2 - 18y^2 + 2z^2 + 3y^2z^2 = 54 \quad (1)$

+) Lập luận để $z^2 \vdots 3 \Rightarrow z \vdots 3 \Rightarrow z^2 \vdots 9 \Rightarrow z^2 \ge 9$ (*)

$(1) \Leftrightarrow 3(x-3)^2 + 2z^2 + 3y^2(z^2-6) = 54 \quad (2)$

$(2) \Rightarrow 54 = 3(x-3)^2 + 2z^2 + 3y^2(z^2-6) \ge 3(x-3)^2 + 2.9 + 3y^2.3$

$(x-3)^2 + 3y^2 \le 12 \Rightarrow y^2 \le 4 \Rightarrow y^2 = 1; y^2 = 4$ vì y nguyên dương

Nếu $y^2 = 1 \Leftrightarrow y = 1$ thì (1) có dạng:

$3(x-3)^2 + 5z^2 = 72 \Rightarrow 5z^2 \le 72 \Rightarrow z^2 \le \frac{72}{5} \Rightarrow z^2 = 9 \Rightarrow z = 3$ (vì có(*))

Khi đó $3(x-3)^2 = 27 \Rightarrow (x-3)^2 = 9$, x nguyên dương nên tìm được x=6

Nếu $y^2 = 4 \Leftrightarrow y = 2$ (vì y nguyên dương) thì (1) có dạng:

$3(x-3)^2 + 14z^2 = 126 \Rightarrow 14z^2 \le 126 \Rightarrow z^2 \le 9 \Rightarrow z^2 = 9 \Rightarrow z = 3$ (vì z nguyên dương)

Suy ra $(x-3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3$ (vì x nguyên dương) . Đáp số $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}; \begin{cases} x=6 \\ y=1 \\ z=3 \end{cases}$

Bài 83: Đặt $a = x + y, b = xy\left(a, b \in Z\right)$ và $a^2 \ge 4b$

Phương trình (1) trở thành: $b^2.a + a = 2 + b \Leftrightarrow a = \dfrac{2+b}{b^2+1}$

Do đó: $\left(2+b\right) \vdots \left(b^2+1\right) \Rightarrow a^2 - 4 \vdots b^2 + 1 \Rightarrow \left(a^2+1\right) - 5 \vdots b^2 + 1 \Rightarrow 5 \vdots a^2 + 1$

$\Rightarrow a^2 + 1 \in \left\{1;5\right\} \Rightarrow a \in \left\{0,4\right\} \Rightarrow a \in \left\{0;-2;2\right\}$

Với $a = 0 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow \begin{cases} xy = 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left(x, y\right) \in \left\{\left(0;2\right), \left(2;0\right)\right\}$

Với $a = -2 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow \begin{cases} xy = -2 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases} \end{array}\right.$ (loại vì không thỏa mãn x, y nguyên)

Với $a = 2 \Rightarrow b = \dfrac{4}{5}$ (loại vì b không nguyên)

Vậy nguyện (x, y) = (0, 2); (2, 0).

Bài 84: Ta có: $xy^2 + 2xy - 243y + x = 0 \Leftrightarrow x\left(y+1\right)^2 = 243y$

Vì $y + 1 \ne 0$ nên ta có: $x = \dfrac{243y}{\left(y+1\right)^2}$

Do (y, y + 1) = 1 nên $\left(y+1\right)^2$ là ước của 243 . Mặt khác: $243 = 3^5$

Do đó: $\left(y+1\right)^2 = 3^2 \vee \left(y+1\right)^2 = 3^4$

Với: $\left(y+1\right)^2 = 3^2 \Rightarrow y = 2, x = 54$

Với: $\left(y+1\right)^2 = 3^4 \Rightarrow y = 8, x = 24$

Vậy nghiệm dương của phương trình là: (x, y) = (54, 2); (24, 8)

Bài 84: Xét phương trình $x^2 = y^2 + \sqrt{y+1}$ với $x, y \in Z^+$

Xét y = 0 thì $x^2 = 1$ do x nguyên dương nên x = 1

Xét $y \ge 1 \Rightarrow x \ge 3.$ Ta có: $\left(x+y\right)^2\left(x-y\right)^2 = y + 1 \Rightarrow \left(y+1\right) \vdots \left(x+y\right)$ (vô lý)

Do đó số nguyên không âm phải tìm là (x, y) = (1, 0).

Bài 85: Ta có $y^2 = 1 + \sqrt{13 - \left(x^2 + 4x + 4\right)} = 1 + \sqrt{13 - \left(x+2\right)^2} \le 1 + \sqrt{13}$

Suy ra $1 \le y^2 \le 4$

Với $y^2 = 1 \Rightarrow 13 = \left(x+2\right)^2$ không có nghiệm nguyên.

Với $y^2 = 4 \Rightarrow 3 = \sqrt{13 - (x+2)^2} \Leftrightarrow (x+2)^2 = 4 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -4$

Vậy phương trình có 4 nghiệm (-2, 0); (-2, -4); (2, 0); (2; - 4).

Bài 86: Ta có: $|4 - 3x| = 5 - a \quad (1)$

Xét $x \le \frac{4}{3}$, ta được $x = \frac{a-1}{3}$.

Để x nguyên dương và thuộc khoảng đang xét ta giải hệ $\begin{cases} 0 < \frac{a-1}{3} \le \frac{4}{3} \\ a - 1 \vdots 3 \end{cases} \Rightarrow a = 4$

Khi đó x = 1.

Xét $x > \frac{4}{3}$, ta được $x = \frac{9-a}{3}$.

Giải hệ: $\begin{cases} \frac{9-a}{3} > \frac{4}{3} \\ 9 - a \vdots 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 5 \\ a \vdots 3 \end{cases} \Leftrightarrow a = 3k$ với $k \le 1$.

Khi đó x = 3 – k

Vậy ta cần a = 4 hoặc a = 3k với k nguyên, $k \le 1$.

Bài 87: Ta có:

$$x^2y^2 + (x-2)^2 + (2y-2)^2 - 2xy(x + 2y - 4) = 5$$

$$\Leftrightarrow x^2y^2 + x^2 - 4x + 4 + 4y^2 - 8y + 4 - 2x^2y - 4xy^2 + 8xy = 5$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2y^2 - 4xy^2 + 4y^2\right) + \left(x^2 - 4x + 4\right) + \left(-2x^2y + 8xy - 8y\right) = 5 - 4$$

$$\Leftrightarrow y^2\left(x^2 - 4x + 4\right) + \left(x^2 - 4x + 4\right) - 2y\left(x^2 - 4x + 4\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - 4x + 4\right)\left(y^2 + 1 - 2y\right) = 1 \Leftrightarrow (x-2)^2(y-1)^2 = 1$$

$TH1: (x-2) = (y-1) = 1 \Leftrightarrow x = 3$ và $y = 2$

$TH2: (x-2) = (y-1) = -1 \Leftrightarrow x = 1$ và $y = 0$

$TH3: (x-2) = -(y-1) = 1 \Leftrightarrow x = 3$ và $y = 0$

$TH4: (x-2) = -(y-1) = -1 \Leftrightarrow x = 1$ và $y = 2$

Vậy phương trình có các cặp $(x; y)$ nguyên là: $(3;2)$; $(1;0)$; $(3;0)$; $(1;2)$.

Bài 88:

Đặt $\sqrt{x} = a, a > 0$, $y^2 = b, b > 0$.

$4y^4 + 6y^2 - 1 = x$

$\Leftrightarrow 4b^2 + 6b - 1 = a^2$

$\Leftrightarrow 16b^2 + 24b - 4 = 4a^2$

$\Leftrightarrow 16b^2 + 24b + 9 - 4a^2 = 13$

$\Leftrightarrow (4b+3)^2 - 4a^2 = 13$

$\Leftrightarrow (4b+3-2a)(4b+3+2a) = 13$

Lập bảng

$4b+3-2a$	1	13
$4b+3+2a$	13	1
a	3	-3
b	1	1
	Nhận	Loại
x	9	
y	1	

Vậy phương trình có nghiệm nguyên là $(x;y)$ là $(9;1)$.

Bài 89: Ta có $(x-y-1)(x+1-y)+6xy+y^2(2-x-y)=2(x+1)(y+1)$

$\Leftrightarrow (x-y)^2 - 1 + 6xy - y^2(x+y-2) = 2(x+y+xy+1) \Leftrightarrow (x+y)^2 - y^2(x+y-2) = 2(x+y)+3$

$\Leftrightarrow (x+y)(x+y-2) - y^2(x+y-2) = 3 \Leftrightarrow (x+y-2)(x+y-y^2) = 3$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $x+y-2;\ x+y-y^2$ là các ước của 3

+) $\begin{cases} x+y-2=1 \\ x+y-y^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=0 \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$.

+) $\begin{cases} x+y-2=-1 \\ x+y-y^2=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=4 \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases} \end{array}\right.$.   +) $\begin{cases} x+y-2=3 \\ x+y-y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=4 \\ x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=7 \\ y=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \end{array}\right.$.

+) $\begin{cases} x+y-2=-3 \\ x+y-y^2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=0 \\ x+y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$.

Vậy các cặp số nguyên $(x;\ y)$ là $(3;0);\ (3;-2);\ (-1;2);\ (7;-2);\ (3;2);\ (-1;0)$.

Bài 89: Ta có

$(x-2018)^2+1 = y^4+9y^2+1-6y^3-6y+2y^2 = (y^2-3y+1)^2$

$\Leftrightarrow (y^2-3y+1)^2-(x-2018)^2 = 1 \Leftrightarrow (y^2-3y+1+x-2018)(y^2-3y+1-x+2018) = 1$

TH1 : $\begin{cases} (y^2-3y+1+x-2018) = -1 \\ (y^2-3y+1-x+2018) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2018 \\ y^2-3y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2018 \\ \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=2 \end{array}\right. \end{cases}$

TH2 : $\begin{cases} (y^2-3y+1+x-2018) = 1 \\ (y^2-3y+1-x+2018) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2018 \\ y^2-3y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2018 \\ \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=3 \end{array}\right. \end{cases}$

Vậy phương trình có nghiệm $(x;y) \in \{(2018;0);(2018;1);(2018;2);(2018;3)\}$.

Bài 90: Ta có (1) $\Leftrightarrow (y-2)(y-3)+56 = (y-2)x^2+(y-2)(y-4)x$

$\Leftrightarrow (y-2)\left[x^2+(y-4)x-(y-3)\right]=56$

$\Leftrightarrow (x-1)(y-2)(x+y-3)=56.$

Nhận thấy $(y-2)+(x-1)=x+y-3,$ nên ta phải phân tích số 56 thành tích của ba số nguyên mà tổng hai số đầu bằng số còn lại.

Như vậy ta có

+) $56=1.7.8 \Rightarrow (x;y)=(2;9).$

+) $56=7.1.8 \Rightarrow (x;y)=(8;3).$

+) $56=(-8).1.(-7) \Rightarrow (x;y)=(-7;3).$

+) $56=1.(-8).(-7) \Rightarrow (x;y)=(2;-6).$

+) $56=(-8).7.(-1) \Rightarrow (x;y)=(-7;9).$

+) $56=7.(-8).(-1) \Rightarrow (x;y)=(8;-6).$

Vậy phương trình có 6 nghiệm nguyên như trên.

Bài 91: Ta có $2x^2+2y^2+3x-6y=5xy-7 \Leftrightarrow (x-2y)(2x-y+3)=-7$

Xét các trường hợp ta có $(x;y)=(3;2);(-5;-6);(-7;-4);(1;4).$

Bài 92: Để phương trình có nghiệm thì $9x^2+16x+32$ phải là một số chính phương.

Khi đó $9x^2+16x+32=t^2\left(t\in\mathbb{N}\right)$. Phương trình trên tương đương với

$$81x^2+144x+288=9t^2 \Leftrightarrow 81x^2+2.9.8+64+224=9t^2$$

$$\Leftrightarrow (9x+8-3t)(9x+8+3t)=-224=-2^4.14=-2^3.28=-2^2.56=-2.112$$

$$=2^4.(-14)=2^3.(-28)=2^2.(-56)=2.(-112)$$

Ta có $x\in Z; t\in N$ nên $9x+8+3t>9x+8-3t$ $9x+8-3t; 9x+8+3t$ cùng tính chẵn lẻ.

Lại thấy $9x+8+3t$ và $9x+8-3t$ đều chia 3 dư 2 khi đó ta có các trường hợp sau.

$$\begin{cases}9x+8+3t=14\\9x+8-3t=-16\end{cases};\begin{cases}9x+8+3t=56\\9x+8-3t=-4\end{cases};\begin{cases}9x+8+3t=8\\9x+8-3t=-28\end{cases};\begin{cases}9x+8+3t=2\\9x+8-3t=-112\end{cases}$$

Giải các trường hợp trên ta được $x\in\{-7;-2;-1;2\}$

+ Với $x=-1 \Rightarrow -27-16y=5 \Rightarrow y=-2$ (thỏa mãn).

+ Với $x=-2 \Rightarrow -30-16y=6 \Rightarrow y=-\dfrac{9}{4}$ (loại).

+ Với $x=2 \Rightarrow -18-16y=10 \Rightarrow y=\dfrac{7}{4}$ (loại)

+ Với $x=-7 \Rightarrow -45-16y=19 \Rightarrow y=-4$ (thỏa mãn)

Vậy nghiệm nguyên của phương trình là $(x;y)=(-1;-2),(-7;-4)$.

Bài 93: Phương trình tương đương với $x^2+3xy+2y^2-x-5=0$. nhận thấy đây là phương trình có bậc là hai nên ta sẽ sử dụng delta để giải phương trình nghiệm nguyên này.

Phương trình tương đương với $x^2+3xy+2y^2-x-5=0 \Leftrightarrow x^2+(3y-1)x+2y^2-5=0$

Xem phương trình là phương trình bậc 2 ẩn x ta được

$$\Delta = (3y-1)^2 - 4(2y^2-5) = y^2 - 6y + 21 = (y-3)^2 + 12$$

Để phương trình trên có nghiệm là nghiệm nguyên thì Δ là số chính phương.

Đặt $\Delta = (y-3)^2 + 12 = a^2 \Leftrightarrow (a-y+3)(a+y-3) = 12$ với a là số nguyên.

Vì $a-y+3$ và $a+y-3$ cùng tính chẵn lẻ nên ta có bảng sau

$a-y+3$	2	6	−2	−6
$a+y-3$	6	2	−6	−2
a	4	4	−4	−4
y	5 (TM)	1 (TM)	1 (TM)	5 (TM)

Thay $y=5$ vào phương trình đã cho ta được $x^2 + 14x + 45 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-9;-5\}$

Bài 94: Ta có $x(x^2+x+1) = 4^y - 1 \Leftrightarrow (x+1)(x^2+1) = 4^y$

Do $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x, y \geq 0$

- Nếu $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (x;y) = (0;0)$ là nghiệm của phương trình đã cho.

- Nếu $x > 0 \Rightarrow y > 0 \Rightarrow x+1$ chẵn, đặt $x = 2k+1\,(k \geq 0)$

Khi đó $(k+1)(2k^2+2k+1) = 4^{y-1}$

Do $2k^2+2k+1$ là số lẻ nên suy ra $k = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (x;y) = (1;1)$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $(x;y) = (0;0);(1;1)$

Bài 95: Viết phương trình đã cho về dạng: $9.(3^{x-2}+19) = y^2$ $(x \geq 2)$. Để y là số nguyên thì điều kiện cần và đủ là $3^{x-2} + 19 = z^2$ là số chính phương (z là số nguyên dương)

Nếu $x - 2 = 2k + 1$ là số lẻ thì $3^{2k+1} + 19 = (3^{2k+1} + 1) + 18 = 4.B + 18$ chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4 nên không thể là số chính phương.

Do đó $x - 2 = 2k$ là số chẵn

Ta có $3^{x-2} + 19 = z^2 \Leftrightarrow (z-3^k)(z+3^k) = 19$. Vì 19 là số nguyên tố và $z - 3^k < z + 3^k$ nên

$$\begin{cases} z-3^k = 1 \\ z+3^k = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 10 \\ 3^k = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 10 \\ k = 2 \end{cases}$$

Vậy $x = 6$ và $y = 30$.

Bài 96: Nếu $x = 0 \Rightarrow y = 1$ thỏa mãn

Nếu $y = 0 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$ không thỏa mãn

Xét $x \neq 0; y \neq 0$ phương trình đã cho có dạng

$$4.54x^3(54x^3+1) = 4.54x^3.y^3 \Leftrightarrow (4.27x^3+1)^2 = (6xy)^3 + 1$$

Đặt $4.27x^3 = a; 6xy = b$ ta được phương trình

$$(a+1)^2 = (b+1)(b^2-b+1) \quad (*)$$

Từ $(*)$ ta thấy $b+1 > 0$. Gọi ƯCLN$(b+1; b^2-b+1) = d$

$\Rightarrow \begin{cases} b+1 \vdots d \\ b^2-b+1 \vdots d \end{cases} \Rightarrow b^2-b+1 = b(b+1)-2(b+1)+3 \vdots d \Rightarrow 3 \vdots d$

Mặt khác $(a+1)^2 = (4.27x^3+1)$ không chia hết cho 3 nên 3 không chia hết $d \Rightarrow d = 1 \Rightarrow (b+1; b^2-b+1) = 1$

Từ (*) nhận thấy tích hai số nguyên tố cùng nhau là một số chính phương nên phải có $\begin{cases} b+1 = m^2 \\ b^2-b+1 = n^2 \end{cases} \quad (m;n \in \mathbb{N}^*; m \geq 2; m^2 \geq 4)$

Ta có $n^2 = (m^2-1)^2 - (m^2-1)+1$

$\Leftrightarrow n^2 = (m^2-1)^2 - (m^2-2) \quad (1); n^2 = (m^2-2)^2 + (m^2-1) \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow (m^2-2)^2 < n^2 < (m^2-1)^2$ vô lý suy ra phương trình (*) vô nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y) = (0;1)$.

Bài 97:

Ta có: $5(x^2+xy+y^2) = 7(x+2y) \quad (1)$

$\Rightarrow 7(x+2y) \vdots 5 \Rightarrow (x+2y) \vdots 5$. Đặt $x+2y = 5t \quad (2) \quad (t \in Z)$ thì

(1) trở thành $x^2+xy+y^2 = 7t \quad (3)$.

Từ (2) $\Rightarrow x = 5t-2y$ thay vào (3) ta được $3y^2 - 15ty + 25t^2 - 7t = 0$ (*), coi đây là PT bậc hai đối với y có: $\Delta = 84t - 75t^2$

Để (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow 84t - 75t^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow 0 \leq t \leq \dfrac{28}{25}$

Vì $t \in Z \Rightarrow t = 0$ hoặc $t = 1$. Thay vào (*) :

+ Với $t = 0 \Rightarrow y_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

+ Với $t = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_2 = 3 \Rightarrow x_2 = -1 \\ y_3 = 2 \Rightarrow x_3 = 1 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có 3 nghiệm nguyên (x, y) là (0; 0), (-1; 3) và (1; 2)

Cách khác: Ta có $5(4x^2+4xy+4y^2) = 28(x+2y) \Rightarrow 15x^2 = 28(x+2y) - 5(x+2y)^2$

Do $15x^2 \geq 0 \Rightarrow 28(x+2y) - 5(x+2y)^2 = -5\left[(x+2y)^2 - 2(x+2y).\dfrac{14}{5} + \dfrac{169}{25}\right] + \dfrac{169}{5} \leq \dfrac{169}{5}$

Vậy $0 \leq 15x^2 \leq \dfrac{169}{5} \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq \dfrac{169}{75}, x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-1;0;1\}$

$+x = 0 \Rightarrow y = 0$

$+x = -1 \Rightarrow y = 3$ thỏa mãn bài toán.

$+x = 1 \Rightarrow y = 2$

Bài 98: Ta có $x(1+x+x^2) = 4y(y-1) \Leftrightarrow (x^3+x^2)+x+1 = 4y^2-4y+1$

$\Leftrightarrow (x+1)(x^2+1) = (2y-1)^2 \quad (1)$

Vì $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow (2y-1)^2 > 0$ nên từ (1) suy ra $x \geq 0$ và x chẵn.

Giả dử $(x+1; x^2+1) = d \Rightarrow d$ lẻ và $\begin{cases} x^2 - 1 \vdots d \\ x^2 + 1 \vdots d \end{cases} \Rightarrow 2 \vdots d \Rightarrow d = 1$

Vì $(x+1)(x^2+1)$ là số chính phương mà $(x+1; x^2+1) = 1$ nên $(x+1)$ và (x^2+1) cũng là hai số chính phương.

Do $x \geq 0 \Rightarrow x^2 < x^2 + 1 \leq (x+1)^2 \Rightarrow x^2 + 1 = (x+1)^2 \Rightarrow x = 0$

Khi $x = 0 \Rightarrow 4y(y-1) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 1 \end{array}\right.$

Vậy hai cặp số nguyên $(x; y) = (0;0); (0;1)$

Bài 99: Ta có $\mathrm{x}^2 = 2\mathrm{x} + \overline{\mathrm{yzz4}} \Leftrightarrow (\mathrm{x}-1)^2 = \overline{\mathrm{yzz5}}$; x, y, $\mathrm{z} \in \mathbb{Z}^+$ và $\mathrm{y}, \mathrm{z} \in \{1; 2; ...; 9\}$

Suy ra $\mathrm{x} - 1$ có dạng $\overline{\mathrm{a5}}$

Do đó $\overline{\mathrm{yzz5}} = \overline{\mathrm{a5}}^2 = (10\mathrm{a}+5)^2 = 100\mathrm{a}(\mathrm{a}+1) + 25$

Suy ra $\mathrm{z} = 2 \Rightarrow \mathrm{y} + \mathrm{z} + \mathrm{z} + 5 = \mathrm{y} + 9$

Vì $(\mathrm{x}-1)^2 = \overline{\mathrm{yzz5}}$ là số chính phương và có tổng các chữ số bằng $\mathrm{y} + 9$ nên $\overline{\mathrm{yzz5}}$ chia cho 9 dư 0, 1, 4, 7. Do đó $\mathrm{y} \in \{1; 4; 7\}$

Khi đó tìm được $(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) \in \{(36;1;2); (66;4;2); (86;7;2)\}$.

Bài 100: Ta có $\sqrt{x + 2\sqrt{3}} = \sqrt{y} + \sqrt{z} \Leftrightarrow x + 2\sqrt{3} = y + z + 2\sqrt{yz}$

$\Leftrightarrow (x - y - z) + 2\sqrt{3} = 2\sqrt{yz} \Rightarrow (x-y-z)^2 + 4\sqrt{3}(x-y-z) + 12 = 4yz$ (1)

TH1. Nếu $x - y - z \neq 0$ Ta có $\sqrt{3} = \dfrac{4yz - (x-y-z)^2 - 12}{4(x-y-z)}$ (2) vô lý

(do $x, y, z \in N$ nên vế phải của (2) là số hữu tỷ).

TH2. $x - y - z = 0$ khi đó $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = 0 \\ yz = 3 \end{cases}$ (3)

Giải (3) ra ta được $\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$ thử lại thỏa mãn

Bài 101: $2xy^2 + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy \Leftrightarrow x^2 - x(2y^2 - y + 1) + 2y^2 - y - 1 = 0$ (1)

Đặt $2y^2 - y + 1 =$ a, khi đó PT (1) trở thành $\Leftrightarrow x^2 - ax + a - 2 = 0$ (2)

Phương trình (2) có $\Delta = a^2 - 4a + 8 = (a-2)^2 + 4$

Phương trình (1) có nghiệm nguyên $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có nghiệm nguyên

$\Rightarrow$ Δ là số chính phương

Đặt $(a-2)^2 + 4 = k^2$ $(k \in N)$ $\Leftrightarrow k^2 - (a-2)^2 = 4 \Leftrightarrow (k + a - 2)(k - a + 2) = 4$

Vì $(k+a-2)+(k-a+2)=2k$ là số chẵn và có tích cũng là số chẵn nên $(k+a-2)$ và $(k-a+2)$ là số chẵn.

Do đó $\begin{cases} k+a-2=2 \\ k-a+2=2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} k+a-2=-2 \\ k-a+2=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=2 \\ a=2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} k=-2 \\ a=2 \end{cases}$

Vậy phương trình (2) có 2 nghiệm là $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{a+\sqrt{k^2}}{2}=\dfrac{2+2}{2}=2 \\ x=\dfrac{a-\sqrt{k^2}}{2}=\dfrac{2-2}{2}=0 \end{array}\right.$

Ta có $2y^2-y-1=a=2 \Leftrightarrow 2y^2-y-1=0 \Leftrightarrow 2y^2-2y+y-1=0$

$\Leftrightarrow (y-1)(2y+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$. Ta chọn $y=1$ (vì y $\in$ Z)

Vậy nghiệm nguyên $(x\,;\,y)$ của phương trình là $(2\,;\,1)$ và $(0\,;\,1)$

Bài 102: Xét $x=1 \Rightarrow y=1$.

Xét $x \ge 2$ thì $4^x \vdots 8$. Nếu y chẵn, đặt $y=2k\left(k \in \mathbb{N}^*\right) \Rightarrow 1+3^y=1+9^k \equiv 2(\bmod 8)$, vô lí

Nếu y lẻ $y=2k+1\left(k \in \mathbb{N}^*\right) \Rightarrow 1+3^y=1+9^k.3 \equiv 4(\bmod 8)$, vô lí.

Vậy $x=y=1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 103.

Nhận thấy x, y là các số nguyên không âm và $\sqrt{11296320}=2^3.41.\sqrt{105}$ là số vô tỷ.

Phương trình đã cho có thể viết lại:

$(x+y)^2+4xy-3361=4(x+y)\sqrt{xy}-328\sqrt{105} \qquad (1)$

Vế trái của (1) là số hữu tỉ nên điều kiện cần và đủ để phương trình có nghiệm nguyên là của vế trái và vế phải của (1) đều bằng 0. Khi đó ta có hệ phương trình:

$\begin{cases} (x+y)^2+4xy-3361 \\ 4(x+y)\sqrt{xy}-328\sqrt{105}=0 \end{cases}$

Đặt $S=x+y, P=xy$ ta có hệ phương trình: $\begin{cases} S^2+4P-3361 & (2) \\ S\sqrt{P}=82\sqrt{105} & (3) \end{cases}$

Từ (3) rút ra được: $P=\dfrac{82^2.105}{S^2}$. Thay vào (2) thu gọn ta được:

$S^4-3361.S^2+4.82.105=0 \Leftrightarrow S^2=1681 \vee S^2=1680=41^2$

Do đó: $S=41, P=420$.

Suy ra x, y là nghiệm của phương trình:

$t^2-42t+420=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=20 \\ t=21 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có 2 nghiệm (20 ; 21) và (21 ; 20).

Bài 104.

Ta thấy (x, y) = (0 , 0) không là nghiệm của phương trình.

Với x, y khác 0: $(1) \Leftrightarrow |4x-6y|+|9x-6y|=\sqrt{313(x^2+y^2)}$

Ta dễ dàng chứng minh được: $|A|+|B|=\begin{cases} |A+B| \ (A.B \ge 0) \\ |A-B| \ (A.B<0) \end{cases}$

Nếu $(4x-6y)(9x-6y) \ge 0$ thì

$(2) \Leftrightarrow |13x-12y|=\sqrt{313(x^2+y^2)} \Leftrightarrow 144x^2+2.13.12xy+169y^2=0 \Leftrightarrow 12x+13y=0$

Vì (13,12) = 1 nên $(x,y)=(13k;-12k)$ với $k \in Z$ và $k \ne 0$

Nếu $(4x-6y)(9x-6y)<0$ thì

$(2) \Leftrightarrow |5x|=\sqrt{313(x^2+y^2)} \Leftrightarrow 288x^2+313y^2=0$ (VN)

vậy phương trình có nghiệm $(x,y)=(13k;-12k)$ với $k \in Z$ và $k \ne 0$

Bài 105.

Phương trình đã cho được viết dưới dạng: $y=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4(2x+1)} \Leftrightarrow 4y=2x+1+\frac{3}{2x+1}$

Vì $x,y \in Z \Rightarrow 2x+1$ là ước của 3 $\Rightarrow 2x+1 \in \{1;-1;3;-3\}$

Vậy nghiệm của phương trình là: $(0;1),(-1;-1),(1;1)(-2;-1)$

Bài 106. Nếu $\left(A+B\sqrt{3}\right)^2=C+D\sqrt{3}$ thì $C=A^2+3B^2, D=2AB \Rightarrow \left(A-B\sqrt{3}\right)^2=C-D\sqrt{3}$

Do đó nếu $\left(x+y\sqrt{3}\right)^2=444444+303030\sqrt{3}$

Thì ta cũng có: $\left(x-y\sqrt{3}\right)^2=444444-303030\sqrt{3}$ (vô lý)

Do $444444-303030\sqrt{3}<0$.

Bài 107.

Đặt s = x + y, p = x. y khi đó $s,p \in N^*$. Lúc đó phương trình trở thành:

$3s^2=4p+664$ (1)

Nếu p =1 thì $s \notin N^*$ (mâu thuẫn)

Vì vậy $p \ge 2$ và $3s^2 \ge 672 \Rightarrow s^2 \ge 224$ (2)

Mặt khác từ điều kiện: $s^2 \ge 4p$, ta có $3s^2 - 664 \le s^2$. Vì vậy: $s^2 \le 332 \ \ (3)$

Từ (2) và (3) ta có: $s^2 \in \{256; 324\}$

a) $s^2 = 256 \Rightarrow s = 16, p = 26 \Rightarrow x \notin N^*$.

b) $s^2 = 324 \Rightarrow s = 18, p = 77 \Rightarrow (x, y) = (11, 7); (7, 11)$.

Vậy phương trình có 2 nghiệm (x, y) = (11, 7); (7,11).

Bài 108. Ta có:

$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 8(x^2 + xy + y^2 + 1)$$
$$\Leftrightarrow x(x^2 + y^2) + y(x^2 + y^2) = 8(x^2 + y^2) + 8xy + 8$$
$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2)(x + y - 8) = 8xy + 8 \qquad (1)$$

Suy ra: x, y chung tính chăn lẻ và (x + y – 8) là số chẵn.

Nếu $x + y - 8 \ge 6$ thì $x^2 + y^2 \ge \dfrac{(x+y)^2}{2} \ge \dfrac{14^2}{2} > 4$

Suy ra: $(x^2 + y^2)(x + y - 8) \ge 6(x^2 + y^2) \ge 2(x^2 + y^2) + 8xy > 8 + 8xy,$ phương trình (1) không thỏa.

Nếu $x + y - 8 \le -4$ thì $(x^2 + y^2)(x + y - 8) \le -4(x^2 + y^2) \le 8xy < 8 + 8xy$, phương trình (1) không thỏa.

Nếu $x + y - 8 = 2$ thì $(1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4xy + 4$. Khi đó: $x + y = 10, xy = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 8 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 8 \\ y = 2 \end{cases}$

Nếu $x + y - 8 = 0$ thì $(1) \Leftrightarrow 8xy + 8 = 0 \Leftrightarrow xy + 1 = 0,$ phương trình không có nghiệm nguyên vì $x + y = 8$

Nếu $x + y - 8 = -2$ thì $(1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4xy + 4 = 0$. Khi đó: $x + y = 6, xy = -20$ không có nghiệm nguyên.

Kết luận: Nghiệm nguyên của phương trình là (x, y) = (2, 8) ; (8, 2).

Bài 109. Phương trình đã cho có dạng: $x^2 + 17[y^2 + 2xy + 3(x + y)] = 1740$

Chú ý rằng với số x nguyên, x có thể có dạng như sau:

$x = 17k \pm r$ với $r \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ và $k \in Z$

Từ đó suy ra: $x^2 \in \{17k, 17k+1, 17k+4, 17k+9, 17k+8, 17k+16, 17k+2, 17k+15, 17k+13\}$.

Nhận thấy rằng vế phải là 1740 khi chia cho 17 có số dư là 6. Tron khi đó vế trái khi chia cho 17 trong mọi trường hợp đều không có số dư là 6. Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

Bài 110. Ta có:

$$(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)=3(x+y)(y+z)(z+x)$$
$$\Leftrightarrow 27-3=3(x+y)(y+z)(z+x)$$
$$\Leftrightarrow (x+y)(y+z)(z+x)=8 \quad (*)$$

Đặt $\begin{cases} x+y=a\in Z \\ y+z=b\in Z \\ z+x=c\in Z \end{cases}$. Khi đó: $(*)\Leftrightarrow abc=8\Rightarrow a,b,c\in\{\pm1;\pm2;\pm4;\pm8\}$

Vì x, y, z vai trò bình đẳng nên ta giải sử: $x\le y\le z\Rightarrow a\ge b\ge c$

Khi đó ta có: $a+b+c=2(x+y+z)=2.3=6\Rightarrow a\ge 2$

Với a = 2 ta có: $\begin{cases} b+c=4 \\ bc=4 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b=2 \\ c=2 \end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=1$

Với a = 4 ta có: $\begin{cases} b+c=2 \\ bc=1 \end{cases}$ (không có nguyện nguyên)

Với a = 8 ta có: $\begin{cases} b+c=-2 \\ bc=1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b=-1 \\ c=-1 \end{cases}\Leftrightarrow x-5;y=4;z=4$.

Vậy hệ đã cho có 4 nghiệm: $(x,y,z)=(1,1,1);(4,4,-5);(4,-5,4);(-5,4,4)$.

Bài 111. Ta có:

$$3x^2+6y^2+2z^2+3x^2y^2-18x-6=0$$
$$\Leftrightarrow 3(x^2-6x+9)+6x^2+2z^2+3y^2z^2=33$$
$$\Leftrightarrow 3(x-3)^2+(3y^2+2)(z^2+2)=37$$

Dễ dàng thấy: $3(x-3)^2\le 33\Leftrightarrow(x-3)^2\le 11$

Suy ra: $(x-3)^2\in\{0,1,4,9\}$

+ Với $(x-3)^2=0\Rightarrow(3y^2+2)(z^2+2)=37$

Nhận xét: $3y^2+2\ge 2$ và $z^2+2\ge 2$ (*)

Vậy trương trường hợp này phương trình vô nghiệm

+ Với $(x-3)^2=1\Rightarrow(3y^2+2)(z^2+2)=34$. Do (*) nên $\begin{cases} 3y^2+2=17 \\ z^2+2=2 \end{cases}\vee\begin{cases} 3y^2+2=2 \\ z^2+2=17 \end{cases}$

Không tồn tại giá trị nguyên của x, y nên trong trường hợp này phương trình vô nghiệm.

+ Với $(x-3)^2=4\Rightarrow(3y^2+2)(z^2+2)=25$. Do (*) nên $\begin{cases} 3y^2+2=5 \\ z^2+2=5 \end{cases}$

Không tồn tại giá trị nguyên của x, y nên trong trường hợp này phương trình vô nghiệm.

+ Với $(x-3)^2=9$:

$$\Rightarrow (3y^2+2)(z^2+2)=10 \Leftrightarrow \begin{cases}3y^2+2=2\\ z^2+2=5\end{cases} \vee \begin{cases}3y^2+2=5\\ z^2+2=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=1\\ z=0\end{cases} \vee \begin{cases}y=-1\\ z=0\end{cases}$$

Kết luận phương trình đã cho có 4 nghiệm nguyên:

$(x,y)=(6,1,0);(6,-1,0);(0,1,0);(0,-1,0)$

Bài 112. *Tìm tất cả các cặp số nguyên dương* (a,b) *thỏa mãn đẳng thức:*

$$a^3-b^3+3(a^2-b^2)+3(a-b)=(a+1)(b+1)+25.$$

$a^3-b^3+3(a^2-b^2)+3(a-b)=(a+1)(b+1)+25$

$\Leftrightarrow (a^3+3a^2+3a+1)-(b^3+3b^2+3b+1)=(a+1)(b+1)+25$

$\Leftrightarrow (a+1)^3-(b+1)^3=(a+1)(b+1)+25$ (*)

Đặt $x=a+1, y=b+1 (x,y\in Z; x,y\ge 2)$.

Khi đó (*) trở thành: $x^3-y^3=xy+25 \Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2)=xy+25$ (**)

+ Từ (**) suy ra $x>y \Rightarrow x-y\ge 1$, mà $x^2+xy+y^2>0$ nên:

$x^2+xy+y^2\le xy+25 \Rightarrow x^2+y^2\le 25 \Rightarrow x\le 4$ (1).

+ Hơn nữa: $x>y$ và $x,y\ge 2$ nên $xy\ge 6$.

Suy ra $x^3-y^3=xy+25\ge 31 \Rightarrow x^3>31 \Rightarrow x>3$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $x=4$. Do $x>y$ và $y\ge 2$ nên $y\in\{2;3\}$.

+ Thử lại, chỉ có $\begin{cases}x=4\\ y=3\end{cases}$ thỏa (**). Suy ra $\begin{cases}a=3\\ b=2\end{cases}$ là cặp số cần tìm.

Bài 113. PT $\Leftrightarrow \left[x^2+4(y^2+7)\right]=17\left[x^4+(y^2+7)^2\right]$

$\Leftrightarrow 16x^4-8x^2(y^2+7)+(y^2+7)^2=0 \Leftrightarrow \left[4x^2-(y^2+7)\right]^2=0$

$\Leftrightarrow 4x^2-y^2-7=0 \Leftrightarrow (2x+y)(2x-y)=7$

Do x,y nguyên dương nên $2x+y\ge 2x-y$ và $2x+y>0$

Vậy $\begin{cases}2x+y=7\\ 2x-y=1\end{cases} \Leftrightarrow (x;y)=(2;3)$

Vậy phương trình có nghiệm $(x;y)=(2;3)$

Bài 114.

$$x^2(y-1)-xy=x-y+1 \Rightarrow y(x^2-x+1)=5x^2+x+1 \Rightarrow y=\frac{5x^2+x+1}{x^2-x-1}=5+\frac{6x-4}{x^2-x+1} \quad (1)$$

Do $x^2 - x + 1 = (x-1)^2 + \frac{3}{4} > 0$ và $x^2 - x + 1 = x(x-1) + 1$ là số lẻ

Mặt khác y là số nguyên nên phải có $(3x-2) \vdots (x^2 - x + 1)$ hay $(3x^2 - 2x) \vdots (x^2 - x + 1)$

Lại có: $3(x^2 - x + 1) \vdots (x^2 - x + 1)$. Suy ra: $(x-3) \vdots (x^2 - x + 1) \Rightarrow (3x-9) \vdots (x^2 - x + 1)$

Ta có: $\begin{cases} (3x-9) \vdots (x^2 - x + 1) \\ (3x-2) \vdots (x^2 - x + 1) \end{cases} \Rightarrow 7 \vdots (x^2 - x + 1)$

Nếu $x^2 - x + 1 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$. ta được nghiệm (0, 1); (1, 7)

Nếu $x^2 - x + 1 = 7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 3 \end{array}\right.$

Với x = -2 thì y không nguyên

Với x = 3 thì y = 7.

Vậy phương trình cso 3 nghiệm (x, y) = (0, 1); (1, 7); (3, 7).

Bài 115. Ta có: $25 = (ac - 3bd)^2 + (ad + bc)^2 = 8(bd)^2 + (ac - bd)^2 + (ad - bc)^2 \le 8(bd)^2$.

Suy ra $(bd)^2 \le \frac{25}{8} < 4$ mà bd nguyên nên $|bd| < 1$

Với bd = 0 thì ta tìm được các bộ số (a, b, c, d) như sau

$(1,0,4,3), (-1,0,-4,-3), (4,3,1,0), (-4,-3,-1,0)$

Bài 116. Ta có: $2x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 4xy + 2xz - 20 = 0$.

$\Leftrightarrow (x - y + z)^2 + (x - y)^2 + (y + z)^2 = 20.$

Ta thấy 20 chỉ có một dạng phân tích thành tổng bình phương 3 số đó là: $20 = 0^2 + 2^2 + 4^2$ Do $x - y + z > 0, y + z > 0 \Rightarrow x - y = 0$

Từ đây ta giải ra được nghiệm x = y = z = 2 tức là tâm giác đều

Bài 117. Giả sử phương trình có nghiệm dương (x, y)

Với các số dương a, b kí hiệu (a, b) là ước chung lớn nhất của a và b.

Đặt $(x, y) = d$ ta có $x = dx_1, y = dy_1$ với $x_1, y_1 \in N^*$ và $(x_1, y_1) = 1$. Khi đó:

$(1) \Leftrightarrow d(x_1^3 + y_1^3) = (x_1 + y_1)^2 + (x_1 y_1)^2 \quad (2)$

Với lưu ý rằng $(x_1 y_1)^2 \ \vdots (x_1 + y_1) \quad (3)$

Từ $(x_1, y_1) = 1$ suy ra $(x_1 y_1, x_1 + y_1) = 1$. Kết hợp với (3) ta được $x_1 y_1 \vdots (x_1 + y_1)$ và đó đó $x_1 + y_1 = 1$, mâu thuẫn với $x_1, y_1 \in N^*$

Vậy phương trình đã cho không cso nghiệm nguyên dương.

Bài 118. Xét phương trình:

$$x^2y^3 - 4xy^3 + y^2 + x^2 - 2y - 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2\left(xy^3+1\right) - 4\left(xy^3+1\right) + \left(y^2 - 2y + 1\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(xy^3+1\right)\left(x^2-4\right) + \left(y-1\right)^2 = 0 \qquad (2)$$

Ta thấy với x, y là số tự nhiên thì :

$$xy^2 + 1 > 0, \quad \left(y-1\right)^2 \ge 0$$

Do đó $x^2 - 4 \le 0$. Nghĩa là x chỉ có thể lấy các giá trị 0, 1, 2

Với x = 0 thay vào (2) ta được: $y^2 - 2y - 3 = 0$ hay y = -1 (loại) hoặc y = 3.

Với x = 1 thì $3y^3 + 3 - (y - 1)^2 = 0$ (vô nghiệm)

Với x = 2 thì y = 1

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là (2, 1) (0, 3).

Bài 119. Phương trình đã cho tương đương với :

$2x^2 + (y-2)x + y^2 - 2y = 0$ (1)

Xem đây là phương trình bậc hai theo ẩn x

$$\Delta = (y-2)^2 - 8\left(y^2 - 2y\right) = -7y^2 + 12y + 4 = (y-2)(-7y-2)$$

Để (1) có nghiệm thì $\Delta \ge 0 \Leftrightarrow \frac{-2}{7} \le y \le 2$ do $y \in Z \Leftrightarrow y \in \{0,1,2\}$

- Với $y = 0 \Rightarrow 2x^2 = 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$
- Với $y = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{-1}{2}(loai) \\ x = 1 \end{array}\right.$
- Với $y = 2 \Leftrightarrow 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $(0;2);(1;1);(1;0);(0;0)$

Bài 120. Ta có: $x^2 - xy + y^2 = \frac{3}{4}(x+y)^2 + \frac{1}{4}(x-y)^2$

$$\frac{x-y}{x^2 - xy + y^2} = \frac{3}{7} \Leftrightarrow 7(x-y) = 3\left(x^2 - xy + y^2\right) \Leftrightarrow 7(x-y) = \frac{9}{4}(x+y)^2 + \frac{3}{4}(x-y)^2$$

Đặt $p = x + y, q = x - y$

Khi đó ta có: $28p = 3\left(p^2 + 3q^2\right)$ (2), từ đó suy ra $28p \vdots 3 \Rightarrow p \vdots 3$. Đặt $p = 3k$ $(k \in Z)$

Thay giá trị của p vào (2) ta có: $28k = 3\left(3k^2 + q^2\right)$ (3)

Suy ra $k \vdots 3 \Rightarrow k = 3m\left(m \in Z\right)$.

Thay k = 3m vào (3) ta được:

$$28m = 27m^2 + q^2 \Rightarrow m\left(27m - 28\right) = -q^2 \le 0 \Rightarrow 0 \le m \le \frac{28}{27} \Rightarrow m = 0 \vee m = 1$$

Với m = 0 thì q = p = 0 suy ra x = 0, y = 0 (loại)

Với m = 1 thì p = 9 và q = 1 hoặc q = - 1.

Từ đó suy ra x = 5, y = 4 hoặc x = 4, y = 5

Vậy phương trình có 2 nghiệm (x, y) = (5, 4); (4, 5).

Bài 121. Vì x, y nguyên dương nên $16\left(x^3 - y^3\right) = 15xy + 371 > 0 \Rightarrow x > y$.

Ta lại có $15xy = 16\left(x^3 - y^3\right) - 371$ là số lẻ nên x, y đều lẻ. suy ra $y \ge 1; x > y \ge 1 \Rightarrow x \ge 3$.

Xét $x = 3 \Rightarrow y < 3 \Rightarrow y = 1$ thay vào phương trình thỏa mãn.

Xét $x \ge 5$ ta có $x - 2 \ge y$, suy ra $16\left(x^3 - y^3\right) \ge 16\left[x^3 - \left(x-2\right)^3\right] = 16\left(6x^2 - 12x + 8\right)$.

Mặt khác $15xy + 371 \le 15x\left(x-2\right) + 371 = 15x^2 - 30x + 371$. Ta chứng minh

$16\left(6x^2 - 12x + 8\right) > 15x^2 - 30x + 371$.

Thật vậy, $16\left(6x^2 - 12x + 8\right) > 15x^2 - 30x + 371$

$\Leftrightarrow 81x^2 - 162x - 243 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow \left(x+1\right)\left(x-3\right) > 0$ đúng với mọi $x \ge 5$.

Suy ra $16\left(x^3 - y^3\right) > 15xy + 371$ với mọi $x \ge 5$.

Vậy phương trình có nghiệm $\left(x; y\right) = \left(3; 1\right)$.

Bài 122. Ta có: $\left(x-y\right)\left(2x+y+1\right) + 9\left(y-1\right) = 13 \Leftrightarrow 2x^2 + xy + x - 2xy - y^2 - y + 9y - 9 - 13 = 0$

$$\left(2x^2 - 2xy + 6x\right) + \left(xy - y^2 + 3y\right) - \left(5x - 5y + 15\right) = 7 \Leftrightarrow 2x\left(x - y + 3\right) + y\left(x - y + 3\right) - 5\left(x - y + 3\right) = 7$$
$$\Leftrightarrow \left(x - y + 3\right)\left(2x + y - 5\right) = 7$$

+ TH1: $\begin{cases} x - y + 3 = 1 \\ 2x + y - 5 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -2 \\ 2x + y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{10}{3} \\ y = \dfrac{16}{3} \end{cases}$ (loại)

+ TH2: $\begin{cases} x-y+3=7 \\ 2x+y-5=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=4 \\ 2x+y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{10}{3} \\ y=\dfrac{-2}{3} \end{cases}$ (loại)

+ TH3: $\begin{cases} x-y+3=-1 \\ 2x+y-5=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=-4 \\ 2x+y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$ (thỏa mãn)

+ TH4: $\begin{cases} x-y+3=-7 \\ 2x+y-5=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=-10 \\ 2x+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=8 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy pt đã cho có nghiệm nguyên $(x;y)$ là: $(-2;2)$, $(-2;8)$.

Bài 123. Điều kiện: $x^2+xy+y^2 \neq 0$. Từ phương trình suy ra $x-y \neq 0.$ Bây giờ ta viết lại phương trình đã cho dưới dạng

$$13(x-y)=7(x^2+xy+y^2) \qquad (1)$$

Từ đây, ta có $13(x-y)$ chia hết cho 7. Mà $(14,7=1)$ nên $x-y$ chia hết cho 7. (2)

Mặt khác, ta lại có $x^2+xy+y^2=\frac{1}{4}(x-y)^2+\frac{3}{4}(x+y)^2 \geq \frac{1}{4}(x-y)^2$

Do đó, kết hợp với (1), ta suy ra

$$13(x-y) \geq \frac{7}{4}(x-y)^2$$

Từ đó, với chú ý $x-y \neq 0$, ta có đánh giá $0<x-y<\frac{52}{7}$. Kết hợp với (2), ta được $x-y=7$ và $x^2+xy+y^2=13.$

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x-y=7 \\ x^2+xy+y^2=13 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3 \\ y=-4 \end{cases} \\ \begin{cases} x=4 \\ y=-3 \end{cases} \end{array}\right.$

Bài 124. Ta có $b^2+c^2=a^2 \Rightarrow (b+c)^2-2bc=a^2 \Rightarrow (b+c)^2-4(a+b+c)=a^2$

$\Rightarrow (b+c-2)^2=(a+2)^2$.

Vì $b>c\geq 1$ nên $b+c-2\geq 1$ dó đó

$b+c-2=a+2 \Rightarrow a=b+c-4 \Rightarrow b^2+c^2=(b+c-4)^2 \Leftrightarrow (b-4)(c-4)=8$.

Vì $b-4>c-4\geq -3$ nên có các trường hợp sau

TH1: $\begin{cases} b-4=8 \\ c-4=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=12 \\ c=5 \end{cases} \Rightarrow a=13$.

TH2: $\begin{cases} b-4=4 \\ c-4=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=8 \\ c=6 \end{cases} \Rightarrow a=10$.

Bài 125. Điều kiện $x \neq 0$.

Đặt $a = x + \sqrt{2018} \Rightarrow x = a - \sqrt{2018}$

Xét $b = \dfrac{7}{x} - \sqrt{2018} = \dfrac{7}{a-\sqrt{2018}} - \sqrt{2018} = \dfrac{7 - a\sqrt{2018} + 2018}{a - \sqrt{2018}}$

$\Rightarrow b(a-\sqrt{2018}) = 2025 - a\sqrt{2018}$

$\Rightarrow ab - 2015 = (b-a)\sqrt{2018}$

Với $a, b \in Z$

$\Rightarrow ab - 2025 \in Z \Rightarrow (a-b)\sqrt{2018} = 0$

$\Rightarrow a = b$

$\Rightarrow a = b = \pm\sqrt{2025} = \pm 45$

+ $a = 45 \Rightarrow x = 45 - \sqrt{2018}$

+ $a = -45 \Rightarrow x = -45 - \sqrt{2018}$

Bài 126. $(x-2018)^2 = y^4 - 6y^3 + 11y^2 - 6y \Leftrightarrow (x-2018)^2 + 1 = (y^2 - 3y + 1)^2$

$\Leftrightarrow (x-2018)^2 - (y^2-3y+1)^2 = 1 \Leftrightarrow (y^2 - 3y - x + 2019)(y^2 - 3y + x - 2017) = 1$

Vì cặp $x; y$ nguyên nên:

TH1: $\begin{cases} y^2 - 3y - x + 2019 = 1 \\ y^2 - 3y + x - 2017 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2018 \\ y^2 - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2018; y = 0 \\ x = 2018; y = 3 \end{array}\right.$.

TH2: $\begin{cases} y^2 - 3y - x + 2019 = -1 \\ y^2 - 3y + x - 2017 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2018 \\ y^2 - 3y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2018; y = 1 \\ x = 2018; y = 2 \end{array}\right.$.

Vậy phương trình có các nghiệm $(x; y) \in \{(2018;0), (2018;1), (2018;2), (2018;3)\}$

Bài 127. Đặt $b = qa; c = q^2 a \,(q > 1)$ thì ta được $a(1 + q + q^2) = 91 = 13.7$.

Trường hợp 1: Nếu q là số tự nhiên thì ta được

$\begin{cases} a = 1 \\ 1 + q + q^2 = 91 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ q = 9 \end{cases} \Rightarrow a = 1; b = 9; c = 81.$

$\begin{cases} a = 7 \\ 1 + q + q^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 \\ q = 3 \end{cases} \Rightarrow a = 7; b = 21; c = 63.$

$\begin{cases} a = 13 \\ 1 + q + q^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 13 \\ q = 2 \end{cases} \Rightarrow a = 13; b = 26; c = 52.$

Trường hợp 2: Nếu q là số hữu tỷ thì giả sử $q=\frac{x}{y}(x\ge 3; y\ge 2)$.

Khi đó $a(1+q+q^2)=91 \Leftrightarrow a(x^2+xy+y^2)=91y^2\ (x^2+xy+y^2\ge 19)$

Ta có $c=\frac{ax^2}{y^2}\in\mathbb{N}\Rightarrow\frac{a}{y^2}\in\mathbb{N}\Rightarrow a=ty^2\Rightarrow x^2+xy+y^2=91\Rightarrow x=6; y=5.$

và $a=25; b=30; c=36.$

Vậy có 8 bộ số $(a;b;c)$ thỏa mãn $(1;9;81),(81;9;1),(7;21;63),(63;21;7);...$

Bài 128. Ta có: $x(x+1)=n(n+2)\Leftrightarrow x^2+x+1=(n+1)^2$ (1)

Với $x\in N^*$ thì: $x^2<x^2+x+1<(x+1)^2$ nên x^2+x+1 không phải là số chính phương mà $(n+1)^2$ là số chính phương với $\forall n\in Z$, do đó (1) không xảy ra.

Vậy với mọi số nguyên n cho trước, không tồn tại số nguyên dương x sao cho $x(x+1)=n(n+2)$

Bài 129.

1) Đặt $M=\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}\quad (x\ge 0)$

Ta có $M^3=2+3\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}\right)^2\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}+3\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}\left(\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}\right)^2=2+3.M.\sqrt[3]{1-x}\le 2+3M$ (Vì $\sqrt[3]{1-x}\le 1\ \forall x\ge 0$)

$\Rightarrow M^3-3M-2\le 0$

$\Leftrightarrow (M+1)(M^2-M-2)\le 0$

$\Leftrightarrow (M+1)^2(M-2)\le 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} M=-1\\ M\le 2\end{array}\right.$

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}\\ b=\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}\end{cases}\ (a\ge 1, b\le 1)$

+) Với $M=-1$, ta có $\begin{cases} a+b=-1\\ a^3+b^3=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=-1-b\\ -(1+3b+3b^2+b^3)+b^3=2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases} a=-1-b\\ b^2+b+1=0\end{cases}\Rightarrow$ hệ vô nghiệm

+) Với $M\le 2\Leftrightarrow a+b\le 2\Leftrightarrow (a+b)^3\le 8\Leftrightarrow a^3+b^3+3ab(a+b)\le 8$

$\Leftrightarrow ab(a+b)\le 2\Leftrightarrow ab(a+b)\le a^3+b^3\Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2\ge 0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} a=b\\ a+b\ge 0\end{array}\right.$

Nếu $a = b \Leftrightarrow 2a^3 = 2 \Leftrightarrow a = 1 \Leftrightarrow x = 0$

Nếu $a + b \geq 0 \Rightarrow 0 \leq M \leq 2$. Vì M nguyên nên $M = \{0;1;2\}$

- $M = 0 \Rightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ a^3 + b^3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ 0 = 2 \end{cases} \Rightarrow$ hệ vô nghiệm
- $M = 1 \Rightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ a^3 + b^3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - b \\ a^2 - ab + b^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - b \\ 1 - 2b + b^2 - b + b^2 + b^2 = 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - b \\ 3b^2 - 3b - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} b = \dfrac{3+\sqrt{21}}{6} \\ b = \dfrac{3-\sqrt{21}}{6} \end{array}\right. \\ a = 1 - b \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = \dfrac{3-\sqrt{21}}{6} \\ b = \dfrac{3+\sqrt{21}}{6} \end{cases} \\ \begin{cases} a = \dfrac{3+\sqrt{21}}{6} \\ b = \dfrac{3-\sqrt{21}}{6} \end{cases} \end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện ta được $\begin{cases} a = \dfrac{3+\sqrt{21}}{6} \\ b = \dfrac{3-\sqrt{21}}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \sqrt{x} = \dfrac{9+2\sqrt{21}}{9} \\ 1 - \sqrt{x} = \dfrac{9-2\sqrt{21}}{9} \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{28}{27}$ (TM)

- $M = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ a^3 + b^3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 - b \\ a^2 - ab + b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 4b + b^2 - 2b + b^2 + b^2 = 1 \\ a = 2 - b \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$ (TM)

Vậy với $x = 0$ hoặc $x = \dfrac{28}{27}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 130. Giả thiết $\Leftrightarrow 3(x-3)^2 - 18y^2 + 2z^2 + 3y^2z^2 = 54\,(1)$

+) Lập luận để $z^2 \vdots 3 \Rightarrow z \vdots 3 \Rightarrow z^2 \vdots 9 \Rightarrow z^2 \geq 9\,(*)$

$(1) \Leftrightarrow 3(x-3)^2 + 2z^2 + 3y^2(z^2 - 6) = 54\,(2)$

$(2) \Rightarrow 54 = 3(x-3)^2 + 2z^2 + 3y^2(z^2-6) \geq 3(x-3)^2 + 2.9 + 3y^2.3$

$(x-3)^2 + 3y^2 \leq 12$

$\Rightarrow y^2 \leq 4 \Rightarrow y^2 = 1; y^2 = 4$ vì y nguyên dương

Nếu $y^2 = 1 \Leftrightarrow y = 1$ thì (1) có dạng:

$3(x-3)^2 + 5z^2 = 72 \Rightarrow 5z^2 \leq 72 \Rightarrow z^2 \leq \dfrac{72}{5} \Rightarrow z^2 = 9 \Rightarrow z = 3$ (vì có(*))

Khi đó $3(x-3)^2 = 27 \Rightarrow (x-3)^2 = 9$, x nguyên dương nên tìm được $x = 6$

Nếu $y^2 = 4 \Leftrightarrow y = 2$ (vì y nguyên dương) thì (1) có dạng:

$3(x-3)^2 + 14z^2 = 126 \Rightarrow 14z^2 \le 126 \Rightarrow z^2 \le 9 \Rightarrow z^2 = 9 \Rightarrow z = 3$ (vì z nguyên dương)

Suy ra $(x-3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3$ (vì x nguyên dương)

Đáp số $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}; \begin{cases} x = 6 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$

Bài 131.

a) Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn $x^3 - y^3 = 95\left(x^2 + y^2\right)$

• **Phân tích và lời giải.** Đặt $\mathrm{d} = \left(\mathrm{x}, \mathrm{y}\right)$ khi đó $x = da; y = db$ với $a, b \in N^*$ và $\left(a, b\right) = 1$.

Và phương trình trở thành $\mathrm{d}\left(\mathrm{a} - \mathrm{b}\right)\left(\mathrm{a}^2 + \mathrm{ab} + \mathrm{b}^2\right) = 95\left(\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2\right)$

Vì $\left(\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2, \mathrm{a}^2 + \mathrm{ab} + \mathrm{b}^2\right) = 1$ nên $\mathrm{a}^2 + \mathrm{ab} + \mathrm{b}^2 = \left(\mathrm{a} - \mathrm{b}\right)^2 - 3\mathrm{ab}$ là ước của $95 = 5.19$, ước này chia 3 dư 1 hoặc 0 và lớn hơn 1 nên chỉ có thể là 19, như vậy $\left(\mathrm{a} - \mathrm{b}\right)^2 - 3\mathrm{ab} = 19$

Từ đó ta được $\begin{cases} a - b = 1 \\ a.b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow d = 65 \Rightarrow \begin{cases} x = 195 \\ y = 130 \end{cases}$

Vậy cặp số nguyên dương thỏa mãn bài toán là $\left(x; y\right) = \left(195; 130\right)$

b) Tìm các số thực x, y thỏa mãn $\dfrac{x^2 - 4}{x} + \dfrac{y^2 - 4}{y} + 8 = 4\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1}\right)$.

• **Phân tích và lời giải.** Từ hệ thức bài toán cho ta có điều kiện xác định là $x > 1; y > 1$. Hệ thức đã cho có chứa cả biến ở mẫu và chứa cả căn thức bậc hai, do đó để tìm được các x, y thỏa mãn ta sẽ biến đổi hệ thức đã cho về dạng tổng các bình phương. Ta có

$$\frac{x^2 - 4}{x} + \frac{y^2 - 4}{y} + 8 = 4\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1}\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 4}{x} - \frac{4x\sqrt{x-1}}{x} + 4 + \frac{y^2 - 4}{y} - \frac{4\sqrt{y-1}}{y} + 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{x}\left(x^2 - 4 + 4x\sqrt{x-1} + 4x\right) + \frac{1}{y}\left(y^2 - 4 + 4y\sqrt{y-1} + 4y\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{x}\left(x - 2\sqrt{x-1}\right)^2 + \frac{1}{y}\left(y - 2\sqrt{y-1}\right)^2 = 0$$

Vì $x > 1; y > 1$ nên ta có

$$\frac{1}{x}\left(x - 2\sqrt{x-1}\right)^2 + \frac{1}{y}\left(y - 2\sqrt{y-1}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2\sqrt{x-1} = 0 \\ y - 2\sqrt{y-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Thử lại ta thấy $(x;y)=(2;2)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 132. Để ý rằng $2x+y=(3x+2y)-(x+y)$ nên phương trình đã cho được viết lại thành

$$(x+y)(3x+2y)^2=(3x+2y)-(x+y)-1$$

Đặt $a=x+y;b=3x+2y$. Khi đó ta có $ab^2=b-a-1$ hay $a(b^2+1)=b-1$.

Từ đó suy ra $b-1$ chia hết cho b^2+1. Do đó ta được $b^2+1-(b-1)(b+1)$ chia hết cho b^2+1 hay 2 chia hết cho b^2+1. Suy ra $b^2+1\in\{1;2\}$ nên $b\in\{-1;0;1\}$.

+ Với $b=-1$ ta được $a=-1$, khi đó ta được $(x;y)=(1;-2)$.

+ Với $b=0$ ta được $a=-1$, khi đó ta được $(x;y)=(2;-3)$.

+ Với $b=1$ ta được $a=0$, khi đó ta được $(x;y)=(1;-1)$.

Vậy các cặp số nguyên $(x;y)=(1;-2),(1;-2),(2;-3)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 133. Trước hết ta chứng minh bổ đề: Với mọi số nguyên tố có dạng $p=4k+3$ thì ta luôn có

$$a^2+b^2\,\vdots\,p\Leftrightarrow\begin{cases}a\,\vdots\,p\\ b\,\vdots\,p\end{cases}(a,b\in Z)$$

Thật vậy, ta xét hai trường hợp sau

+ Trường hợp 1. Nếu một trong hai số a và b chia hết cho p thì ta suy ra điều cần chứng minh.

+ Trường hợp 2. Nếu cả hai số a và b cùng khoog chia hết cho p. Khi đó ta có $(a;p)=(b;p)=1$.

Theo định lí Fecmat ta có $\begin{cases}a^{p-1}\equiv 1\pmod p\\ b^{p-1}\equiv 1\pmod p\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^{4k+2}\equiv 1\pmod p\\ b^{4k+2}\equiv 1\pmod p\end{cases}\Rightarrow a^{4k+2}+b^{4k+2}\equiv 2\pmod p$

Mặt khác ta có $a^{4k+2}+b^{4k+2}=(a^2)^{2k+1}+(b^2)^{2k+1}$ chia hết cho a^2+b^2 nên chia hết cho p.

Từ đó suy ra 2 chia hết cho p, mà p là số nguyên tố nên ta được $p=2$. Điều này mâu thuẫn vì p là số nguyên tố lẻ.

Như vậy trường hợp 2 không xẩy ra hay bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán. Do 4617 chia hết cho 19 nên $12x^2+26xy+15y^2\,\vdots\,19$ hay ta được

$$\begin{aligned}&12x^2-12xy+15y^2+38xy\,\vdots\,19 \Leftrightarrow 12x^2-12xy+15y^2\,\vdots\,19\\ &\Leftrightarrow 3\left(4x^2-4xy+5y^2\right)\vdots\,19 \Leftrightarrow 4x^2-4xy+5y^2\,\vdots\,19\\ &\Leftrightarrow \left(4x^2-4xy+y^2\right)+4y^2\,\vdots\,19 \Leftrightarrow \left(2x-y\right)^2+\left(2y\right)^2\vdots\,19\end{aligned}$$

Do 19 là số nguyên tố có dạng $4k+3$ nên áp dụng bổ đề trên ta suy ra được

$$\begin{cases}2x-y\,\vdots\,19\\2y\,\vdots\,19\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x-2y\,\vdots\,19\\2y\,\vdots\,19\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x\,\vdots\,19\\2y\,\vdots\,19\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\,\vdots\,19\\y\,\vdots\,19\end{cases}$$

Từ đó ta được $4x^2-4xy+5y^2\,\vdots\,19^2$. Điều này dẫn đến mâu thuẫn vì 4617 không chia hết cho 19^2.

Vậy không tồn tại cặp số nguyên $\left(x;y\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 134. Ta có $x^4+2x^2=y^3 \Leftrightarrow x^4+2x^2+1=y^3+1 \Leftrightarrow \left(x^2+1\right)^2=\left(y+1\right)\left(y^2-y+1\right)$.

Gọi $d=\left(y+1;y^2-y+1\right)$. Khi đó ta có $\left(y+1\right)^2\vdots\,d$ và $y^2-y+1\,\vdots\,d$ nên ta được

$$\left(y+1\right)^2-\left(y^2-y+1\right)\vdots\,d \Rightarrow 3y\,\vdots\,d$$

Do d là nguyên tố nên ta có hai trường hợp

+ Khi $3\,\vdots\,d$ ta được $\left(x^2+1\right)^2=\left(y+1\right)\left(y^2-y+1\right)\vdots\,9$ nên $\left(x^2+1\right)^2\vdots\,9 \Rightarrow x^2+1\,\vdots\,3$. Điều này vô lý vì số chính phương chia cho 3 không thể có số dư là 2.

+ Khi $3\,\vdots\,d$ ta được $y\,\vdots\,d$, kết hợp với $y+1\,\vdots\,d$ ta suy ra được $d=1$.

Do đó $\left(y+1;y^2-y+1\right)=1$.

Khi đó do $\left(y+1\right)\left(y^2-y+1\right)$ là số chính phương nên ta đặt $y+1=a^2;y^2-y+1=b^2$ trong đó a, b là các số nguyên dương và $\left(a;b\right)=1$. Tứ đó ta được

$$b^2=\left(a^2-1\right)^2-\left(a^2-1\right) \Leftrightarrow 4b^2=4a^4-12a^2+12 \Leftrightarrow \left(2b-2a^2+3\right)\left(2b+2a^2+3\right)=3$$

Vì $\left(2b\right)^2>\left(2a^2-3\right)^2 \Rightarrow 2b>2a^2-3$ nên ta xét các trường hợp sau

+ Trường hợp 1. Với $\begin{cases}2b-2a^2+3=1\\2b+2a^2-3=3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}b=1\\a^2=2\end{cases}$, hệ không có nghiệm nguyên.

+ Trường hợp 2. Với $\begin{cases}2b-2a^2+3=3\\2b+2a^2-3=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=1\\a^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\b=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y+1=1\\y^2-y+1=1\end{cases} \Leftrightarrow x=y=0$.

Thử lại vào phương trình ban đầu ta thấy thỏa mãn. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $(0;0)$.

Bài 135. Nhận xét: $a;\, b$ là các số nguyên thỏa mãn $a^2+b^2 \vdots 3$ thì $a;\, b \vdots 3$ thật vậy, vì $a^2 \equiv 0,1 \pmod 3;\, b^2 \equiv 0,1 \pmod 3$.

suy ra $a^2+b^2 \equiv 0 \pmod 3 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 \equiv 0 \pmod 3 \\ b^2 \equiv 0 \pmod 3 \end{cases} \Leftrightarrow a,\, b \vdots 3$.

Phương trình tương đương với $\left(6x^2+9y^2\right)-\left(x^2+y^2\right)=28\cdot 9^3$.

suy ra $x^2+y^2 \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow \begin{cases} x^2 \equiv 0 \pmod 3 \\ y^2 \equiv 0 \pmod 3 \end{cases} \Rightarrow x=3x_1;\, y=3y_1\ (x_1;\, y_1 \in \mathbb{Z})$.

Thay vào phương trình ta thu được $5\cdot 9x_1^2+8\cdot 9\cdot y_1^2=28\cdot 9^3$

$$\Leftrightarrow 5\cdot x_1^2+8\cdot y_1^2=28\cdot 9^2.$$

Lập luận tương tự ta thu được $x_1=3x_2;\, y_1=3y_2\ (x_2;\, y_2 \in \mathbb{Z})$.

Và nhận được phương trình $5\cdot 9x_2^2+8\cdot 9\cdot y_2^2=28\cdot 9^2$

$$\Leftrightarrow 5\cdot x_2^2+8\cdot y_2^2=28\cdot 9.$$

Tương tự ta có $x_2=3x_3;\, y_2=3y_3\ (x_3;\, y_3 \in \mathbb{Z})$ và thu được $5\cdot x_3^2+8\cdot y_3^2=28$.

Từ phương trình suy ra $y_3^2 \le \dfrac{28}{8} \le 2^2$.

Suy ra $\left[\begin{array}{l} y_3^2=0 \Rightarrow x_3^2=\dfrac{28}{5} \\ y_3^2=1 \Rightarrow x_3^2=2^2 \end{array}\right. \Rightarrow x_3^2=2^2;\, y_3^2=1$.

$\Rightarrow x_2^2=9\cdot 2^2;\, y_2^2=9$.

$\Rightarrow x_1^2=9^2\cdot 2^2;\, y_1^2=9^2 \Rightarrow x^2=9^3\cdot 2^2;\, y^2=9^3$.

Đáp số: $x=2\cdot 3^3;\, y=3^3$, $x=2\cdot 3^3;\, y=-3^3$, $x=-2\cdot 3^3;\, y=3^3$, $x=-2\cdot 3^3;\, y=-3^3$.

Bài 136. Phương trình tương đương với

$$(x+y+1)(xy+x+y)=2(x+y+1)+3$$

$$\Leftrightarrow (x+y+1)(xy+x+y-2)=3.$$

$$\Rightarrow x+y+1 \text{ là ước của } 3.$$

+ Giải $\begin{cases} x+y+1=1 \\ xy+x+y-2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ xy=5 \end{cases}$ (vô nghiệm).

+ Giải $\begin{cases} x+y+1=-1 \\ xy+x+y-2=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-2 \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$.

+ Giải $\begin{cases} x+y+1=3 \\ xy+x+y-2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$.

+ Giải $\begin{cases} x+y+1=-3 \\ xy+x+y-2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-4 \\ xy=5 \end{cases}$ (vô nghiệm).

Vậy $(x;y)=(1;-1),(1;1)$.

Bài 137. Ta có:

$(1+x^2)(1+y^2)+4xy+2(x+y)(1+xy)=25. \Leftrightarrow (xy+1)^2+2(x+y)(1+xy)+(x+y)^2=25$

$\Leftrightarrow (xy+1+x+y)^2=25 \Leftrightarrow (x+1)^2(y+1)^2=25$

Vì x, y không âm nên (x + 1)(y + 1) = 5 ta có (x; y) = (0; 4) ; (4; 0)

Bài 138. a) Gọi $x_1, x_2 \in Z$ là nghiệm của phương trình (1), Theo Vi-ét ta có:

$$\begin{cases} x_1+x_2=a+5 \\ x_1x_2=5a+2 \end{cases} \quad (*)$$

Từ (*) ta có $\begin{cases} 5x_1+5x_2=5a+25 \\ x_1x_2=5a+2 \end{cases}$

$\Rightarrow (x_1-5)(x_2-5)=2=1.2=2.1=(-1).(-2)=(-2).(-1)$

Suy ra a = 8 hoặc a = 2

b) Ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=-a \\ x_1x_2=198-a \end{cases} \Rightarrow x_1+x_2-x_1x_2=-198$

$$\Leftrightarrow (x_1-1)(x_2-1)=199$$

Do 199 là số nghuyên tố nên:

$(x_1-1)(x_2-1)=1.199=199.1=(-1).(-199)=(-199).(-1) \Rightarrow a=198$ hoặc a = -2

Bài 139. Đặt $u=x+y$, $v=x.y$.

Ta có: $x^3+y^3+1=3xy \Leftrightarrow (x+y)^3-3xy(x+y)+1-3xy=0$

Hay $u^3-3uv+1-3v=0 \Leftrightarrow (u+1)(u^2-u+1)-3v(u+1)=0 \Leftrightarrow (u+1)(u^2-u+1-3v)=0$.

Vì $x,y>0 \Rightarrow u=x+y>0 \Rightarrow u+1\neq 0$

Vậy $u^2-u+1-3v=0 \Rightarrow v=\frac{1}{3}(u^2-u+1)$

Ta phải tìm x,y nguyên dương sao cho: $\begin{cases} x+y=u \\ x.y=\frac{1}{3}(u^2-u+1) \end{cases}$

Suy ra x, y là hai nghiệm của phương trình bậc hai:

$$X^2-uX+\frac{1}{3}(u^2-u+1)=0$$

Ta có $\Delta=-\frac{1}{3}(u-2)^2<0$ nếu $u\neq 2$. Vậy ta phải có: $u=x+y=2 \Rightarrow x=y=\frac{u}{2}=1$.

Bài 140. Ta có:

$$PT \Leftrightarrow y^4 + 2y^3 + 3y^2 + 2y = x^2 + x$$
$$\Leftrightarrow (y^4 + 2y^3 + y^2) + 2(y^2 + y) + 1 = x^2 + x + 1$$
$$\Leftrightarrow (y^2 + y)^2 + 2(y^2 + y) + 1 = x^2 + x + 1$$
$$\Leftrightarrow (y^2 + y + 1)^2 = x^2 + x + 1$$

Đặt $t = y^2 + y + 1$ thì $t \in \mathbb{N}$ và $t \geq 1$, ta được:

$$t^2 = x^2 + x + 1 \Leftrightarrow 4t^2 = 4x^2 + 4x + 4$$
$$\Leftrightarrow 4t^2 - (2x+1)^2 = 3$$
$$\Leftrightarrow (2t - 2x - 1)(2t + 2x + 1) = 3$$

Chú ý rằng $2t + 2x+1 \geq 3$ nên ta có $2t + 2x + 1 = 3$ và $2t - 2x - 1 = 1$

Suy ra phương trình có nghiệm nguyên không âm là $x = 0$; $y = 0$

Bài 141. Đặt $p = x + y; q = x - y$ thì $x = \dfrac{p+q}{2}, y = \dfrac{p-q}{2}$

Thay vào (1) ta được $28p = 3\left(p^2 + 3q^2\right)$ (1)

Từ (2) suy ra: $28p \vdots 3$ mà $(28,3) = 1$ nên $p \vdots 3$, đặt $p = 3k$.

Thay vào (2): $28k = 3\left(3k^2 + q^2\right) \Rightarrow k \vdots 3$ đặt $k = 3m$ ta được

$m\left(28 - 27m\right) = q^2 \Rightarrow m = 0$ hoặc $m = 1$.

Nếu $m = 0 \Rightarrow x = y = 0$

Nếu $m = 1 \Rightarrow x = 5, y = 4$ hoặc $x = 4, y = 5$

Vậy $(x,y) \in \{(0;0),(5;4),(4;5)\}$

Bài 142. Phương trình đã cho tương đương với:

$$17y^2 + 34xy + 51\left(x + y\right) - 1734 = 6 - x^2$$

Vế trái của phương trình chia hết cho 17.

Đặt $x = 17k + r\left(n \in N, 0 \leq r \leq 16\right)$

Dễ thấy $x^2 - 6 = \left(17k + r\right)^2 - 6$ không chia hết cho 17.

Vậy phương trình không có nghiệm nguyên.

Bài 143. Chú ý rằng mọi số hữu tỉ đều biểu diễn được duy nhất dưới dạng liên phân số:

$$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_n}}}}}$$

Với $q_0 \in Z; q_1, q_2, ..., q_n \in N^*$ và $q_n \geq 2$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x^2y + x + xy^2 + 2y}{xy+1} = \frac{38}{7} \Leftrightarrow (x+y) + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{y}} = 5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}}$$

Từ đó suy ra $x = 2, y = 3$.

Bài 144.

Ta viết lại phương trình: $(x+y+1)(xy+x+y) = 2(x+y+1)+3 \Leftrightarrow (x+y+1)(xy+x+y-2) = 3$

$\Rightarrow x+y+1$ là ước của 3

+ Giải $\begin{cases} x+y+1=1 \\ xy+x+y-2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ xy=5 \end{cases}$ (Vô nghiệm)

+ Giải $\begin{cases} x+y+1=-1 \\ xy+x+y-2=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-2 \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$

+ Giải $\begin{cases} x+y+1=3 \\ xy+x+y-2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

+ Giải $\begin{cases} x+y+1=-3 \\ xy+x+y-2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-4 \\ xy=5 \end{cases}$ (Vô nghiệm)

Vậy: $(x;y) = (1;-1),(1;1)$

Bài 145.

Ta viết lại phương trình:

$4x^2 + 2x(4y+1) + 3y^2 + y + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 2.2x.\left(\frac{4y+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{4y+1}{2}\right)^2 + 3y^2 + y + 2 - \left(\frac{4y+1}{2}\right)^2 = 0$

Hay: $\left(2x+\frac{4y+1}{2}\right)^2-\left(\frac{4y^2+4y+1}{4}\right)=-2$

$\left(2x+\frac{4y+1}{2}\right)^2-\left(\frac{2y+1}{2}\right)^2=-2 \Leftrightarrow (2x+y)(2x+3y+1)=-2$

Ta có các trường hợp xả yra:

TH1: $\begin{cases}2x+y=1\\2x+3y+1=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+y=1\\2x+3y=-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-2\\x=\frac{3}{2}\end{cases}$ (loại)

TH2: $\begin{cases}2x+y=-1\\2x+3y+1=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+y=-1\\2x+3y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=1\\x=-1\end{cases}$(thỏa mãn)

TH3: $\begin{cases}2x+y=-2\\2x+3y+1=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+y=-1\\2x+3y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\frac{1}{2}\\x=-\frac{3}{4}\end{cases}$ (loại)

TH4: $\begin{cases}2x+y=2\\2x+3y+1=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+y=-1\\2x+3y=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-\frac{1}{2}\\x=-\frac{1}{4}\end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;1)$

Bài 146.

Ta viết lại phương trình: $(x-y)(x^2+xy+y^2)=91=13.7$

Vì $(13,7)=1$ và $x^2+xy+y^2>0$ suy ra các khả năng có thể xảy ra là:

$\begin{cases}x-y=7\\x^2+xy+y^2=13\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x-y=13\\x^2+xy+y^2=7\end{cases}$

Ta tìm được nghiệm: $(x;y)=(6;5);(-5;-6);(4;-3);(3;-4)$

Bài 147.

Ta viết lại phương trình: $x^3+x+1=y(x+2)$, để ý rằng $x=-2$ không phả là nghiệm của phương trình nên suy ra $y=\frac{x^3+x+1}{x+2} \Leftrightarrow y=\frac{x^2(x+2)-2x(x+2)+5(x+2)-9}{x+2}$ hay $y=x^2-2x+5-\frac{9}{x+2}$, để $x;y\in Z \Rightarrow x+2\in U(9)$. Từ đó ta tìm được các nghiệm của phương trình là: $(x;y)=(-11;149);(7;39);(-5;43);(-3;29);(-1;-1);(1;1)$.

Bài 148.
Sử dụng hằng đẳng thức: $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$ ta có: $(*)$ tương đương với $(x-y)^3+3xy(x-y)=xy+8$. Đặt $x-y=a, xy=b$ với $a,b\in Z$ phương trình trở thành: $a^3+3ab=b+8\Leftrightarrow a^3-8=-b(3a-1)\Rightarrow a^3-8\vdots 3a-1$
Suy ra $27(a^3-8)\vdots 3a-1\Leftrightarrow 27a^3-1-215\vdots 3a-1$. Do $27a^3-1=(3a-1)(9a^2+3a+1)\vdots 3a-1$, suy ra điều kiện cần là: $215\vdots 3a-1$, chú ý rằng $215=43.5$.Từ đó ta tìm được $a=2,b=0$ suy ra các cặp nghiệm của phương trình là: $(x;y)=(0;-2);(2;0)$.
Chú ý: Với các phương trình đưa được về ẩn $x-y;xy$ hoặc $x+y;xy$ ta dung phép đặt ẩn phụ để chuyển thành bài toán chia hết.
Bài 149.
Từ giả thiết ta suy ra $x^2-2\vdots xy+2$ hay $y(x^2-2)\vdots xy+2$. Ta có phân tích sau: $y(x^2-2)=x(xy+2)-2(x+y)$ suy ra $2(x+y)\vdots xy+2$ hay $2(x+y)=k(xy+2)$ với $k\in N^*$.
*Nếu $k\geq 2$ thì $2(x+y)=k(xy+2)\geq 2(xy+2)\Leftrightarrow x+y\geq xy+2\Leftrightarrow (x-1)(y-1)+1\leq 0$.
Điều này vô lí do $x,y\geq 1$. Vậy $k=1\Leftrightarrow 2(x+y)=xy+2\Leftrightarrow (x-2)(y-2)=2$. Từ đó tìm được $(x;y)=(3;4);(4;3)$.
Bài 150. Đặt $z=y-2$, phương trình đã cho trở thành:
$(x+2)^2z+(z+2)^2x+26=0\Leftrightarrow (x+z+8)(xz+4)=6$ từ đó suy ra $x+z+8\in U(6)$. Giải các trường hợp ta thu được cặp số $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện là:
$(x;y)=(1;-1);(-3;3);(-10;3);(1;-8)$.
Bài 151. Đặt $d=(x,y);d\geq 1$ suy ra $x=ad;y=bd$ với $(a,b)=1$. Từ phương trình ta có: $d(a-b)(a^2+ab+b^2)=95(a^2+b^2)$. Vì $(a,b)=1$ nên $(a^2+ab+b^2;a^2+b^2)=(ab;a^2+b^2)=1$
Suy ra $a^2+ab+b^2\in U(95)$. Nếu $a^2+b^2+ab\vdots 5\Rightarrow 4(a^2+b^2+ab)\vdots 5\Rightarrow (2a+b)^2+3b^2\vdots 5$. Một số chính phương chia 5 chỉ có thể dư 0; 1; 4. Suy ra $a,b\vdots 5$ điều này trái với giả thiết $(a,b)=1$.
Vậy $a^2+ab+b^2=19$, do $a>b>0\Rightarrow b=2;a=3$ là cặp số duy nhất thỏa mãn: Từ đó tính được cặp nghiệm của phương trình là: $(x;y)=(195;130)$.
Bài 152. Ta viết lại giả thiết thành:

$$(x^2+2)^2=(y^2+3)^2+(y^4+x^2y^2+5y^2)(x^2+2)^2-(y^2+3)^2=y^2(x^2+y^2+5)$$

Hay $(x^2+y^2+5)(x^2-2y^2-1)=0\Leftrightarrow x^2-2y^2=1\Leftrightarrow (x-1)(x+1)=2y^2$

Suy ra $(x-1)(x+1)\vdots 2$ hay $x-1$ hoặc $x+1$ chia hết cho 2. Mặt khác ta có: $x+1-(x-1)=2\vdots 2$ nên cả 2 số $x+1, x-1$ đều chia hết cho 2. Do đó $(x-1)(x+1)\vdots 4\Rightarrow y\vdots 2$, mà y là số nguyên tố nên $y^2\vdots 2\Rightarrow y=2$. Thay vào ta tìm được $x=3$.

Bài 153. Đặt $(x,y)=d\geq 1$ suy ra $x=ad, y=bd$ với $a>b,(a,b)=1$ thay vào phương trình ta có: $a^3d^3-b^3d^3=13(a^3d^3-b^3d^3)\Leftrightarrow d(a-b)(a^2+ab+b^2)=13(a^2+b^2)\Rightarrow 13(a^2+b^2)\vdots(a^2+ab+b^2)$

Ta lại có: $(a^2+b^2, a^2+ab+b^2)=(a^2+b^2, ab)=1$

Thật vậy giả sử $(a^2+b^2, ab)=d_1 \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2 \vdots d_1 \\ ab \vdots d_1 \end{cases}$ giả sử $a \vdots d_1 \Rightarrow b \vdots d_1$

Mà $(a,b)=1 \Rightarrow d_1=1$. Như vậy ta có: a^2+b^2 không chia hết cho a^2+ab+b^2

Suy ra $13 \vdots a^2+ab+b^2 \Rightarrow a^2+ab+b^2=13 \Rightarrow a=3, b=1 \Rightarrow x=15, y=5$

Bài 154. Đặt $x^2=a, y^2=b$ ta viết lại phương trình thành $\dfrac{16a^2+b^2+14b+49}{(a+b+7)^2}=\dfrac{16}{17}$

Hay $\dfrac{16a^2+b^2+14b+49}{(a+b+7)^2}=\dfrac{16}{17} \Leftrightarrow 16(a+b+7)^2=17.16a^2+17(b+7)^2$ hay

$256a^2-32(b+7)+(b+7)^2=0 \Leftrightarrow (16a-b-7)^2=0 \Leftrightarrow 16a-b-7=0$ hay $16x^2-y^2=7$

Tức là $(4x-y)(4x+y)=7$ do x, y là số tự nhiên nên ta suy ra $\begin{cases} 4x-y=1 \\ 4x+y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$

Bài 155. Dễ thấy với $x=0$ hoặc $y=0$ không thỏa mãn.

Xét $|x|,|y| \geq 1$ do vai trò như nhau, giả sử $|x| \geq |y|$

Khi đó ta có $x^2-xy+y^2 \leq 3x^2 \Rightarrow y^2 \leq 8 \Rightarrow y \in \{\pm 1; \pm 2\}$.

+ Nếu $y=1 \Rightarrow x^2-x+6=x^2 \Rightarrow x=6$.

+ Nếu $y=-1 \Rightarrow x^2+x+6=x^2 \Rightarrow x=-6$.

+ Nếu $y=2 \Rightarrow x^2-2x+4=4x^2-5 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$ loại.

+ Nếu $y=-2 \Rightarrow x^2+2x+4=4x^2-5 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$ loại.

Đáp số: $(x;y)=(6;1),(-6;-1),(1;6),(-1;-6)$.

Bài 156. Từ điều kiện $x+y-z=2$ suy ra $z=x+y-2$ thay vào điều kiện ban đầu ta có:
$3x^2+2y^2-(x+y-2)^2=13$. Hay $2x^2+y^2-2xy-4x+4y-9=0$
$\Leftrightarrow y^2-2y(x-2)+2x^2-4x-9 \Leftrightarrow y^2-2y(x-2)+(x-2)^2+2x^2-4x-9-(x-2)^2=0$
$\Leftrightarrow (y-x+2)^2+x^2=13=4+9$, suy ra $x^2=4$ hoặc $x^2=9$ $\Leftrightarrow x=2$ hoặc $x=3$.
Nếu $x=2$ suy ra $y=3$ $\Rightarrow z=3$, nếu $x=3$ suy ra $(y+1)^2=4 \Rightarrow y=1 \Rightarrow z=2$.
Vậy có hai bộ 3 số $(x;y;z)$ thỏa mãn điều kiện là $(2;3;3)$ hoặc $(3;1;2)$.
Bài 157. Ta thấy $x=y=0$ là một nghiệm của phương trình.

Với $x, y \neq 0$ giả sử $(x, y) = d \Rightarrow \begin{cases} x = md \\ y = nd \\ (m,n) = 1 \end{cases}$ thay vào phương trình ta được:

$m^2d^2(md+nd) = (md-nd)^2 n^2d^2 \Leftrightarrow m^2(m+n) = n^2d(m-n)^2 \Rightarrow m^2(m+n) \vdots n^2$

Do $(m,n) = 1 \Rightarrow \begin{cases} (m^2, n^2) = 1 \\ (m+n, n^2) = 1 \end{cases} \Rightarrow n^2 = 1 \Rightarrow n = \pm 1.$

Nếu $n = 1 \Rightarrow m^2(m+1) \vdots (m-1)^2 \Rightarrow m+1 \vdots (m-1)^2 \Rightarrow m+1 \vdots m-1 \Rightarrow m \in \{3; 2; 0; -1\}$ từ đó tìm được các cặp nghiệm $(x; y) = (27; 9), (24; 12)$.

Nếu $n = -1 \Rightarrow m^2(m-1) = d(m+1)^2 \Rightarrow m-1 \vdots m+1 \Rightarrow m \in \{-3; -2; 0; 1\}$, kiểm tra không có giá trị nào thỏa mãn.

Bài 158. Dễ thấy với $x = 0$ hoặc $y = 0$ không thỏa mãn.

Xét $|x|, |y| \geq 1$ do vai trò như nhau, giả sử $|x| > |y|$

Khi đó ta có $x^2 - xy + y^2 \leq 3x^2$

Suy ra $x^2y^2 = x^2 - xy + y^2 + 5 \leq 8x^2 \Rightarrow y^2 \leq 8 \Rightarrow y \in \{\pm 1, \pm 2\}$.

+ Nếu $y = 1 \Rightarrow x^2 - x + 6 = x^2 \Rightarrow x = 6.$

+ Nếu $y = -1 \Rightarrow x^2 + x + 6 = x^2 \Rightarrow x = -6$

+ Nếu $y = 2 \Rightarrow x^2 - 2x + 4 = 4x^2 - 5 \Rightarrow x \notin Z$ loại

+ Nếu $y = -2 \Rightarrow x^2 + 2x + 4 = 4x^2 - 5 \Rightarrow x \notin Z$ loại

Đáp số: $(x; y) = (6; 1), (-6; -1), (1; 6), (-1; -6)$.

Bài 159: Đặt $u = x + y$; $v = xy$, ta có:

$uv^2 - v + u - 3 = 0,$ ta phải có:

$\Delta_v = 1 - 4u(u-3) \geq 0 \Rightarrow u \leq 3 \Rightarrow u \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Đáp số: $(0; 3), (3; 0), (1; 1)$

Bài 160. Ta viết lại phương trình thành:

$2^{3x} - y^3 = 37 \Leftrightarrow (2^x - y)(2^{2x} + 2^x.y + y^2) = 1.37 \Rightarrow \begin{cases} 2^x - 7 = 1 \\ 2^{2x} + 2^x.y + y^2 = 37 \end{cases}$

Thay $2^x = y + 1$ ta có:

$(y+1)^2 + (y+1)y + y^2 = 37 \Leftrightarrow y^2 + y = 12 \Leftrightarrow y(y+1) = 3.4 \Rightarrow y = 3, x = 2$

Vậy phương trình có nghiệm là (x; y) = (3; 2)

Bài 161. Ta thấy cặp số (0; 0) là một nghiệm của phương trình trên

Nếu n = 1 thì $\sqrt{x} = y \Rightarrow x = y^2 (x \leq 0)$ vậy nghiệm của phương trình trên (x; y) là (t^2; t) với $t \in N$

Nếu n = 2 thì $\sqrt{x+\sqrt{x}} = y \Rightarrow x+\sqrt{x} = y^2 \Rightarrow \sqrt{x} = y^2 - x \Rightarrow \sqrt{x}$ **là số tự nhiên**

$\Rightarrow \sqrt{x} = t$ với $t \in N$ Khi đó t(t + 1) = y^2 nhưng $t^2 < t(t+1) < (t+1)^2$ nên $t^2 < y^2 < (t+1)^2$

Điều này không xảy ra với t > 0 và phương trình chỉ có nhiệm (0; 0)

Với $n \geq 3$ ta có $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+...+\sqrt{x}}}} = y^2 - x$ trong đó vế trái là n - 1 dấu căn ; đặt

$y^2 - x = y_1$ là số nguyên dương. Tiếp tục làm như vậy như thế n - 2 lần dẫn đến

$\sqrt{x+\sqrt{x}} = y^2{}_{n-2} - x$

Như vậy ta lại trở về trường hợp thứ 2 và chỉ có nghiệm (0;0).

CHỦ ĐỀ 7. PHẦN NGUYÊN TRONG SỐ HỌC

Bài 1: Từ điều kiện bài ra ta có: $x < -2 + \frac{1}{3} \Rightarrow x < -1 \Rightarrow -2 < x < -1 \Rightarrow [x] = -2$

Bài 2: Từ điều kiện bài ra ta có: $-5,5 < x < -5 \Rightarrow [x] = -6$

Bài 3: Ta có: $\frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = 2\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)$; $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

$$\Rightarrow 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)$$

Cho n nhận các giá trị từ 2 đến 10^6, ta được:

$$1 + 2\left(\sqrt{10^6} - \sqrt{2}\right) < x < 1 + 2\left(\sqrt{10^6} - 1\right) = 1999$$

mà: $1 + 2\left(\sqrt{10^6} - \sqrt{2}\right) > 1 + 2000 - 2\sqrt{2} > 2001 - 3 = 1998$

$$\Rightarrow 1998 < x < 1999 \Rightarrow [x] = 1998$$

Bài 4 Ta có: $x > 1$

Kí hiệu $x_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$ (có n dấu căn).

Ta có $x_1 = \sqrt{2} < \sqrt{4} = 2$

$x_2 = \sqrt{6 + x_1} < \sqrt{2 + 2} = 2$

$x_3 = \sqrt{2 + x_2} < \sqrt{2 + 2} = 2$

…

$x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}} < \sqrt{2 + 2} < 2$.

Như vậy $1 < x_n < 2$, do đó $[x_n] = 1$.

Bài 5. Ta có: $x > 1$

Kí hiệu $x_n = \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + ... + \sqrt[3]{6}}}$ (có n dấu căn).

Ta có $x_1 = \sqrt[3]{6} < \sqrt[3]{8} = 2$

$x_2 = \sqrt[3]{6 + x_1} < \sqrt[3]{6 + 2} = 2$

$x_3 = \sqrt[3]{6 + x_2} < \sqrt[3]{6 + 2} = 2$

…

$x_n = \sqrt[3]{6 + x_{n-1}} < \sqrt[3]{6 + 2} = 2$.

Như vậy $1 < x_n < 2$, do đó $[x_n] = 1$.

Bài 6: Ta có: $n(n+1)(n+2)(n+3)=(n^2+3n)(n^2+3n+2)=(n^2+3n)^2+2(n^2+3n)$

$(n^2+3n)^2<n(n+1)(n+2)(n+3)<(n^2+3n+1)^2$

$\Rightarrow n^2+3n<\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)}<n^2+3n+1$

$\Rightarrow \left[\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)}\right]=n^2+3n$

$\Rightarrow S=(1^2+2^2+...+n^2)+3(1+2+...+n)$

Ta có các công thức : $1+2+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$;

$$1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$\Rightarrow S=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\dfrac{3n(n+1)}{2}$

Bài 7: Ta biểu thị: $x=[x]+\{x\}\Rightarrow[n+x]=[[x]+n+\{x\}]$, mà: $0\le\{x\}<1$

Còn: n + $[x]$ là số nguyên nên $[[x]+n+\{x\}]$ = n + $[x]$ Hay: $[n+x]$ = n + $[x]$

Bài 8: Ta biểu thị: $x=[x]+\{x\}$ và $y=[y]+\{y\}$

$\Rightarrow x+y=[x]+[y]+\{y\}+\{x\}$

mà: $0\le\{x\}+\{y\}<2\Rightarrow[x]+[y]\le[x+y]\le[x]+[y]+1$

Bài 9:

- Xét n là số chẵn $(n=2k)$ thì: $\left[\dfrac{n}{2}\right]+\left[\dfrac{n+1}{2}\right]=[k]+\left[k+\dfrac{1}{2}\right]$ = 2k = n

- Xét n là số lẻ $(n=2k+1)$ thì: $\left[\dfrac{n}{2}\right]+\left[\dfrac{n+1}{2}\right]=\left[k+\dfrac{1}{2}\right]+[k+1]$ = 2k + 1 = n

Vậy ta luôn có: $\left[\dfrac{n}{2}\right]+\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$ = n

Bài 10: Đặt $k=\left[\sqrt{4n+2}\right]$; $m=\left[\sqrt{4n+1}\right]$.

Ta có: $k\ge m$

Do $k=\left[\sqrt{4n+2}\right]$ nên $k\le\sqrt{4n+2}\Rightarrow k^2\le4n+2$.

Giả sử $k^2=4n+2$, điều này vô lý vì số chính phương chia cho 4 không thể dư 2. Từ đó suy ra: $k^2<4n+2\Rightarrow k^2\le4n+1\Rightarrow k\le\sqrt{4n+1}\Rightarrow k\le\left[\sqrt{4n+1}\right]=m$.

Bài 11: Trước hết ta chứng minh: $\sqrt{4n+1}<\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<\sqrt{4n+2}$

Từ đó suy ra $\left[\sqrt{4n+1}\right]\le\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]\le\left[\sqrt{4n+2}\right]$

Mà từ kết quả bài số 10: $\left[\sqrt{4n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+2}\right]$ ta có điều phải chứng minh.

Bài 12: Đặt $\{a\}=d$ thì $0\le d\le1$.

- Nếu $0\le d<\dfrac{1}{2}$ thì $\left[a+\dfrac{1}{2}\right]=\left[[a]+d+\dfrac{1}{2}\right]=[a]+\left[d+\dfrac{1}{2}\right]=[a]$;

$[2a]=\left[2([a]+d)\right]=2[a]+[2d]=2[a]$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

- Nếu $\frac{1}{2}\le d<1$ thì $\left[a+\frac{1}{2}\right]=\left[[a]+d+\frac{1}{2}\right]=[a]+\left[d+\frac{1}{2}\right]=[a]+1$;

$[2a]=\left[2([a]+d)\right]=2[a]+[2d]=2[a]+1$. Suy ra điều phải chứng minh.

Bài 13: Áp dụng kết quả bài tập 12 ta có: $\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]-[x]$

$\Rightarrow S=[n]-\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{n}{4}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]-\left[\frac{n}{8}\right]+........+\left[\frac{n}{2^{2019}}\right]-\left[\frac{n}{2^{2020}}\right]=[n]-\left[\frac{n}{2^{2020}}\right].$

Vậy: $S=[n]-\left[\frac{n}{2^{2020}}\right].$

Bài 14: Với: $x=[x]+\{x\}$ mà: $m\{x\}\ge 0$

Khi đó: $[mx]=\left[m[x]+m\{x\}\right]=m[x]+\left[m\{x\}\right]$

Vì: $0\le m\{x\}<m\Rightarrow 0\le\left[m\{x\}\right]\le m-1$

Suy ra $m[x]\le[mx]\le m[x]+m-1$ với mọi giá trị m nguyên dương

Bài 15: Đặt: S = $[x]+[2x]+[3x]+.....+[100x]$, áp dụng kết quả bài 14

Cho m nhận các giá trị từ 1 đến 100 rồi cộng lại ta được:

$$5050[x]\le S\le 5050[x]+4950\Rightarrow 5050[x]\le 313096\le 5050[x]+4950$$

$$\Rightarrow\begin{cases}[x]\le 61{,}99\\ [x]\ge 61{,}02\end{cases}\Rightarrow 61{,}02\le[x]\le 61{,}99$$

Điều này chứng tỏ không có x thoả mãn

Bài 16: Phương trình tương đương $-4\le x+0,7<-3\Leftrightarrow -4,7\le x<-3,7$

Bài 17: Sử dụng tính chất: $[n+x]=n+[x]$, ($n\in Z$)

Với mọi giá trị n nguyên ta có:

$$[x+1]+[x+2]+[x+3]=6+3[x]\Rightarrow 3[x]+6=4$$

$\Rightarrow [x]=-\frac{2}{3}$ vô lý hay không có x thoả mãn.

Bài 18: Từ đặc điểm phương trình ta có: $3x\in Z\Rightarrow x=\frac{4k}{3}$, ($k\in Z$)

$$\Rightarrow 4\left[\frac{4k}{3}\right]=4k\Leftrightarrow\left[\frac{4k}{3}\right]=k\Leftrightarrow\left[k+\frac{k}{3}\right]=k\Leftrightarrow\left[\frac{k}{3}\right]=0\Rightarrow k=0;1;2$$

$\Rightarrow x=0;\frac{4}{3};\frac{8}{3}.$

Bài 19:

Đặt: $\frac{15x-7}{5}=t$, ($t\in Z$) $\Rightarrow x=\frac{5t+7}{15}\Rightarrow\left[\frac{30t+117}{120}\right]=t$

$\Rightarrow 0\le\frac{30t+117}{120}-t<1\Rightarrow -\frac{1}{30}\le t<\frac{117}{90}$

Do: t nguyên $t=0;1\Rightarrow x=\frac{7}{15};\frac{4}{5}.$

Bài 20: Đặt: $\frac{2x-1}{3} = y \Rightarrow x = \frac{3y+1}{2}$ Thay vào phương trình đã cho

ta được: $[y] + \left[y+\frac{1}{2}\right] = \frac{5y-1}{2} \Rightarrow [2y] = \frac{5y-1}{2}$

Giải tương tự như bài 19 ta được: $y = -\frac{3}{5};-\frac{1}{5};\frac{1}{5};\frac{3}{5};1$

Vậy nghiệm phương trình là: $S = \left\{-\frac{2}{5};\frac{1}{5};\frac{4}{5};\frac{7}{5};2\right\}$

Bài 21: Phương trình được biến đổi thành: $[x].\{x\} = [x] + \{x\} - 1$

$\Rightarrow ([x]-1)(\{x\}-1) = 0$ do: $\{x\}-1<0$

Nên: $[x] - 1 = 0 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow 1 \le x < 2$

Bài 22: Đặt: $x = a+\{x\},\ (a=[x])$

Phương trình đã cho trở thành: $3\left[\frac{x}{2}\right] = a-2 \Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right] = \frac{a-2}{3}$

$a = 3k+2, (k\in Z) \Rightarrow \left[\frac{3k+2+\{x\}}{2}\right] = k \Rightarrow \left[k+\frac{k+2+\{x\}}{2}\right] = k$

$\Rightarrow 0 \le \frac{k+2+\{x\}}{2} < 1 \Rightarrow -1 \le k+\{x\} < 0 \Rightarrow k=-1$

$x = -1+\{x\} \Rightarrow -1 \le x < 0$

Bài 23: Đặt: $x = a+\{x\},\ (a=[x])$

$\Rightarrow [x-1] = [a-1+\{x\}] = a-1$

và: $\left[\frac{x}{2}+1\right] = \left[\frac{x+2}{2}\right] = \left[a-1+\frac{4-a+\{x\}}{2}\right] = a-1+\left[\frac{4-a+\{x\}}{2}\right]$

$\Rightarrow 0 \le \frac{4-a+\{x\}}{2} < 1 \Rightarrow 2+\{x\} < a \le 4+\{x\} \Rightarrow 0 \le \{x\} < a-2 \le 2+\{x\} < 3$

$\Rightarrow a-2 \in \{1;2\} \Rightarrow a \in \{3;4\}$

$\Rightarrow 3 \le x < 5$

Bài 24: Phương trình được biến đổi thành $[x] = x^2(x^2-2)$

+ Xét: $x^2 \le 2 \Rightarrow -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2} \Rightarrow [x] \in \{0;-1\}$

Nếu: $[x] = 0 \Rightarrow x = 0$

Nếu: $[x] = -1 \Rightarrow x = -1$

+ Xét: $x^2 > 2 \Rightarrow [x] > \sqrt{2} \Rightarrow x(x^2-2) = \frac{[x]}{x} \le 1$

$\Rightarrow x^2 - 2 \le \frac{1}{x} < 1 \Leftrightarrow x < \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{2} < x < \sqrt{3} \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1+\sqrt{2}}$

Bài 25: Phương trình được biến đổi thành:

$x^3 - (x-\{x\}) = 3 \Rightarrow x^3 - x = 3-\{x\} \Rightarrow 2 < x^3 - x \le 3$

Nếu: $x \ge 2 \Rightarrow x^3 - x = x(x^2-1) \ge 6 > 3$ (loại)

Nếu: $x \le -1 \Rightarrow x^2 - 1 \ge 0 \Rightarrow x^3 - x = x(x-1) \le 0 < 2$ (loại)

Nếu: $-1 < x \le 0 \Rightarrow x^3 - x \le -x < 1 < 2$ (loại)

Nếu: $0 \le x \le 1 \Rightarrow x^3 - x < x^3 \le 1 < 2$ (loại)

Vậy: $1 < x < 2 \Leftrightarrow [x] = 1 \Rightarrow x^3 = 4 \Rightarrow x = \sqrt[3]{4}$

Bài 26: Ta có: $x^2 + \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \left[x^2 + \frac{1}{2}\right] > 0$

Còn: $-x^2 + 3x = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \le \frac{9}{4} \Rightarrow \left[-x^2 + 3x\right] \le 2$

$\Rightarrow \left[-x^2 + 3x\right] = \left[x^2 + \frac{1}{2}\right] = n \in \{0;1;2\}$

Nếu: $n = 0 \Rightarrow x < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

Nếu: $n = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \le x < 1$

Nếu: $n = 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{6}}{2} \le x < \frac{\sqrt{10}}{2}$

Vậy: $S = \left[0;\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2};1\right] \cup \left[\frac{\sqrt{6}}{2};\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$

Bài 27: Giả sử $n = kq + r \ (0 \le r < k)$. Ta cần chứng minh: $\left[\frac{2r}{k}\right] \ge \left[\frac{r}{k}\right] + \left[\frac{r+2}{k}\right] = \left[\frac{r+2}{k}\right]$.

Với r = 0 hay r = 1 thì $\left[\frac{2r}{k}\right] = \left[\frac{r+2}{k}\right] = 0$ vì k > 3.

Với $r \ge 2$ thì $\frac{2r}{k} \ge \frac{r+2}{k} \Leftrightarrow \left[\frac{2r}{k}\right] \ge \left[\frac{r+2}{k}\right]$.

Bài 28: $k_i \ge 1 \Rightarrow \frac{k_1 + k_2 + ... + k_n}{n} \ge 1$ Do đó:

$$\left[\frac{k_1 + ... + k_n}{n}\right] + (n-1) \le \frac{k_1 + ... + k_n}{n} + (n-1)\frac{k_1 + ... + k_n}{n} = k_1 + ... + k_n.$$

Bài 29 : Giả sử $a = bq + r; 0 \le r < b \Rightarrow \frac{a}{b} = q + \frac{r}{b} \Rightarrow q \le \frac{a}{b} < q + 1 \Rightarrow \left[\frac{a}{b}\right] = q$

Bài 30: $[na] = n[a] + [n\{a\}] \ge n[a]$.

Nếu $\{a\} < \frac{1}{n}$ thì $0 \le n\{a\} < 1 \Rightarrow [n\{a\}] = 0 \Rightarrow [na] = n[a]$.

Bài 31:

$$a)\ S=\left(\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+\left[\sqrt{3}\right]\right)+\left(\left[\sqrt{4}\right]+...+\left[\sqrt{8}\right]\right)+\left(\left[\sqrt{9}\right]+...+\left[\sqrt{15}\right]\right)+\left(\left[\sqrt{16}\right]+...+\left[\sqrt{24}\right]\right).$$

Theo cách chia nhóm như trên, nhóm 1 có ba số, nhóm 2 có năm số, nhóm 3 có bảy số, nhóm 4 có chín số.

Các số thuộc nhóm 1 bằng 1, các số thuộc nhóm 2 bằng 2, các số thuộc nhóm 3 bằng 3, các số thuộc nhóm 4 bằng 4.

Vậy $A=1.3+2.4+3.7+4.9=70$.

b) Ta có các công thức : $1+2+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$;

$$1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Với k = 0, 1, …,2n thì: $n^2\le n^2+k<(n+1)^2\Rightarrow n\le\sqrt{n^2+k}<n+1$.

Do đó $\left[\sqrt{n^2}\right]=\left[\sqrt{n^2+1}\right]=...=\left[\sqrt{n^2+2n}\right]=n$

Có (2k + 1) số có giá trị bằng *n* nên: $\left[\sqrt{n^2}\right]+\left[\sqrt{n^2+1}\right]+...+\left[\sqrt{n^2+2n}\right]=n(2n+1)$

Nhóm tương tự câu a) ta được:

$$A=\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+...++\left[\sqrt{n^2-1}\right]$$
$$=\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+...+\left[\sqrt{(n-1)^2+2(n-1)}\right]$$
$$=\left(\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+\left[\sqrt{3}\right]\right)+\left(\left[\sqrt{4}\right]+...+\left[\sqrt{8}\right]\right)+...+\left(\left[\sqrt{(n-1)^2}\right]+...+\left[\sqrt{(n-1)^2+2(n-1)}\right]\right)$$

Do đó:

$$A=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\left[\sqrt{k^2}\right]+\left[\sqrt{k^2+1}\right]+...+\left[\sqrt{k^2+2k}\right]\right)=\sum_{k=1}^{n-1}2k^2+\sum_{k=1}^{n-1}k$$
$$=2.\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(4n^2-3n-1)}{6}.$$

Bài 33: Ta có : $\sqrt[k+1]{\dfrac{k+1}{k}}>1, k=1,2,...,n$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho (k + 1) số dương, ta có:

$$\sqrt[k+1]{\frac{k+1}{k}}=\sqrt[k+1]{\underbrace{1.1...1}_{k\ so\ 1}.\frac{k+1}{k}}<\frac{k+\frac{k+1}{k}}{k-1}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{k}=1+\frac{1}{k(k+1)}$$

Suy ra: $1<\sqrt[k+1]{\frac{k+1}{k}}<1+\frac{1}{k(k+1)}\Rightarrow n<\sum_{k=1}^{n}\sqrt[k+1]{\frac{k+1}{k}}<n+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}\Rightarrow n<T<n+1$

(vì ta dễ chứng minh được $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=1-\frac{1}{n+1}<1$)

Vậy $[T]=n.$

Bài 33: Cho số tự nhiên k sao cho: $m+\frac{k-1}{n}\le x<m+\frac{k}{n};[x]=m$, khi đó :

$$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+...+\left[x+\frac{n-k}{n}\right]=(n-k+1)[x]=m(n+1-k)$$

Và $\left[x+\frac{n-k+1}{n}\right]+...+\left[x-\frac{n-1}{n}\right]=(k-1)(m+1)$

Mà $[nx]=mn+k-1$. Từ đó suy ra:

$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+...+\left[x-\frac{n-1}{n}\right]=m(n-k+1)+(k-1)(m+1)=mn+k-1=[nx].$

Bài 34 : Trước hết ta nhận xét rằng nếu a là số hữu tỉ thì $\{a\}$ cũng là số hữu tỉ nên nếu ta chứng minh được các phân số trong tổng A đôi một khác nhau thì A chính là tổng của m phân số tối giản có mẫu là m :

$$\frac{0}{m},\frac{1}{m},...,\frac{m-1}{m}\ (do\ 0\le\{a\}<1).$$

Thật vậy, giả sử có n_1,n_2 sao cho: $\left\{\frac{n_1a+b}{m}\right\}=\left\{\frac{n_2a+b}{m}\right\}$ với $0\le n_1,n_2<m$

Thì $\frac{n_2a+b}{m}=\frac{n_1a+b}{m}=\frac{a(n_2-n_1)}{m}\in Z$, vô lý do $(a,m)=(m,n_2-n_1)=1.$

Vậy $A=\frac{0}{m}+\frac{1}{m}+...+\frac{m-1}{m}=\frac{m(m-1)}{2m}=\frac{m-1}{2}.$

Bài 35 : Với k = 1, 2, 3,…, m – 1, ta có :

$$\left\{\frac{(m-k)n}{m}\right\}=\left\{n-\frac{kn}{m}\right\}=\left\{-\frac{kn}{m}\right\}=1-\left\{\frac{kn}{m}\right\}\ do\ \frac{kn}{m}\notin Z.$$

Suy ra: $\left\{k.\frac{n}{m}\right\}+\left\{\frac{(m-k)n}{m}\right\}=1.$

Khi đó: $n=\left[\frac{kn}{m}+\frac{(m-k)n}{m}\right]=\left[\frac{kn}{m}\right]+\left[\frac{(m-k)n}{m}\right]+1.$

Suy ra: $\left[k.\frac{n}{m}\right]+\left[\frac{(m-k)n}{m}\right]=n-1.$

Cho k lần lượt bằng 1,2,…,m – 1 rồi lấy tổng ta được:

$$\sum_{k=1}^{m-1}\left[k.\frac{n}{m}\right]+\left[\frac{(m-k)n}{m}\right]=(n-1)(m-1)\Rightarrow\sum_{k=1}^{m-1}\left[\frac{kn}{m}\right]=\frac{(n-1)(m-1)}{2}.$$

Tương tự: $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{km}{n}=\frac{(m-1)(n-1)}{2}$ (đpcm)

Cách 2. Áp dụng kết quả bài 34 cho b = 0, a = n ta được:

$$\left\{\frac{n}{m}\right\}+\left\{\frac{2n}{m}\right\}+....+\left\{\frac{(m-1)n}{m}\right\}=\frac{m-1}{2}$$

Suy ra: $\left[\frac{n}{m}\right]+\left[\frac{2n}{m}\right]+...+\left[\frac{(m-1)n}{m}\right]=\frac{n}{m}+\frac{2n}{m}+...+\frac{(m-1)n}{m}-\frac{m-1}{2}$

$$=\frac{n(m-1)}{2}-\frac{m-1}{2}=\frac{(m-1)(n-1)}{2}\ \text{(đpcm)}$$

Bài 36 : Đặt $x_1=\left(\sqrt{29}-\sqrt{21}\right)^2=50-2\sqrt{609};$

$$x_2=\left(\sqrt{29}+\sqrt{21}\right)^2=50+2\sqrt{609}.$$

x_1,x_2 Là nghiệm của phương trình $x^2-100x+64=0$

Đặt $S_n=x_1^n+x_2^n$. Ta có:

$$x_1^2 - 100x_1 + 64 = 0 \Rightarrow x_1^{n+2} - 100x_1^{n+1} + 64x_1^n = 0 \qquad (1)$$
$$x_2^2 - 100x_2 + 64 = 0 \Rightarrow x_2^{n+2} - 100x_2^{n+1} + 64x_2^n = 0 \qquad (2)$$

Cộng (1) và (2) ta được: $S_{n+2} - 100S_{n+1} + 64S_n = 0$ và $\left[x_2^{1000}\right] = S_{1000} - 1$.

Do đó: $S_{n+2} = 100S_{n+1} - 64S_n \equiv 36S_n \equiv 6^2 S_n \equiv 6^4 S_{n-2} \equiv ... \equiv 6^{n+2} S_0 \pmod{100}$

Suy ra: $S_{1000} = 6^{1000}.2 \pmod{100}$.

Nhưng $6^{1000} = \left(6^5\right)^{200} = (76)^{200} \equiv 76 \pmod{100}$ nên $S_{1000} \equiv 52 \pmod{100}$.

Vậy $\left[\left(\sqrt{29} + \sqrt{21}\right)^{2000}\right]$ có hai chữ số tận cùng bằng 51.

Bài 37 : S là tổng hữu hạn vì với k đủ lớn thì $\frac{n+2^k}{2^{k+1}} < 1$, khi đó $\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] \approx 0$ với $k \ge k_0$ nào đó.

Áp dụng tính chất $\left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x] - [x]$ cho $\left[\frac{n}{2^{k+1}} + \frac{1}{2}\right]$, sau cộng lại ta được S = n.

Bài 38. Đặt $\{x\} = a\left(0 \le a < 1\right)$ ta có:

$$\begin{aligned} &[x] + [2x] + [4x] + [8x] + [16x] + [32x] \\ &= 63[x] + [2a] + [4a] + [8a] + [16a] + [32a] \\ &= 63[x] + k \ \left(0 \le k < 62, k \in Z\right) \end{aligned}$$

Giả sử $63[x] + k = 12345$ thì $k = 60; [x] = 195$.

Mà $[kx] = \left[k[x] + ka\right] \le k[x] - ka < k[x] + k \Rightarrow k[x] \le k[x] - k - 1 \left(k \ge 1\right)$

$\Rightarrow [x] + [2x] + [4x] + [8x] + [16x] + [32x] \le 63[x] + 57$, vô lý.

Bài 39 : Gọi $\left[\sqrt{n}\right] = t$, giả sử n = kt. Ta có :

$$t \le \sqrt{n} < t + 1 \Rightarrow t^2 \le n < (t+1)^2 \Rightarrow t \le k < t + 2 + \frac{1}{t}$$

$t = 1; k = 1, 2, 3$ thì n = 1, 2, 3.

$t \ge 2 \Rightarrow t \le k < t + 3 \Rightarrow k = t; \text{t+1}; \text{t+ 2} \Rightarrow n = t^2; t(t+1); t(t+2)$.

Bài 40 : $|x-1|(|x+1|-1)=\{x\}, x\neq 0.$

Xét các trường hợp: $x>1; x<-1; -1\leq x<1.$

$$S=\{0;-2;-\sqrt{5}\}.$$

Bài 41 : Ký hiệu $K=\left[\sqrt[3]{n-\frac{1}{27}}+\frac{1}{3}\right]$, do $n>1\Rightarrow K\geq 1$.

Ta có $K\leq\sqrt[3]{n-\frac{1}{27}}+\frac{1}{3}<K+1\Leftrightarrow\left(K-\frac{1}{3}\right)^3\leq n-\frac{1}{27}<\left(K+\frac{2}{3}\right)^3$

$$\Leftrightarrow K^3-K^2+\frac{K}{3}-\frac{1}{27}\leq n-\frac{1}{27}\leq K^3+2K^2+\frac{4}{3}K+\frac{8}{27}$$

$$\Leftrightarrow K^3+\frac{K}{3}\leq n+K^2<K^3+3K^2+\frac{4}{3}K+\frac{1}{3}\Leftrightarrow K^3<n+K^2<(K+1)^3$$

suy ra $n+K^2=n+\left[\sqrt[3]{n-\frac{1}{27}}+\frac{1}{3}\right]^2$ không biểu diễn được dưới dạng lập phương của một số nguyên dương.

Bài 42: Xét $\frac{k^2+k+1}{k(k+1)}=\frac{k^2}{k(k+1)}+\frac{k+1}{k(k+1)}=\frac{k}{(k+1)}+\frac{1}{k}=1-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k}(k\in N)$

Thay k lần lượt từ 1 ta có

$$\left[\frac{3}{1.2}+\frac{7}{2.3}+\ldots\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}\right]=\left[n+1-\frac{1}{n+1}\right]=\left[n+\frac{n}{n+1}\right]=n \text{ (đpcm)}$$

CHỦ ĐỀ 8. NGUYÊN LÝ ĐIRICHLET TRONG SỐ HỌC

Bài 1. Ta hãy tưởng tượng mỗi cây thông là một "thỏ", như vậy có 800.000 "thỏ" được nhốt vào không quá 500.000 "chiếc lồng". Lồng 1 ứng với cây thông có 1 chiếc lá trên cây, lồng 2 ứng với cây thông có 2 chiếc lá trên cây v.v... Số thỏ lớn hơn số lồng, theo nguyên tắc Đirichlet ít nhất có 1 lồng nhốt không ít hơn 2 thỏ nghĩa là có ít nhất 2 cây thông có cùng số lá.

Bài 2. Một năm có 12 tháng. Ta phân chia 40 học sinh vào 12 tháng đó. Nếu mỗi tháng có không quá 3 học sinh được sinh ra thì số học sinh không quá: 3.12 = 36 mà 36 < 40 (vô lý).

Vậy tồn tại một tháng có ít nhất 4 học sinh trùng tháng sinh (trong bài này 40 thỏ là 40 học sinh, 12 lồng là 12 tên tháng).

Bài 3. Ta sẽ thành lập dãy số mới gồm 5 số sau đây:

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

- Nếu một trong cách $S_i\left(i = 1,...,5\right)$ chia hết cho 5 thì bài toán đã được chứng minh.

- Nếu không có số nào chia hết cho 5 thì khi đem chia các số S_i cho 5 sẽ được 5 số dư có giá trị từ 1 đến 4.

Có 5 số dư mà chỉ có 4 giá trị (5 thỏ, 4 lồng). Theo nguyên tắc Đirichlet ít nhất phải có 2 số dư có cùng giá trị. Hiệu của chúng chia hết cho 5. Hiệu này chính là tổng các a_i liên tiếp nhau hoặc là a_i nào đó.

Bài 4.

Xét dãy số 1,11,111,..., $\underbrace{111....11}_{p\,\text{chữ số}\,1}$

Ta chứng minh trong dãy trên phải có số chia hết cho p. Giả sử kết luận ấy không đúng, tức là không có bất kỳ số nào của dãylại chia hết cho p.

Cho tương ứng mỗi số dư của phép chia cho p . Tập hợp số dư có thể thuộc tập hợp {1, 2, 3,..., p – 1} (Do 0 không thể thuộc tập hợp này). Ta lại có p số trong dãy số trên. Vì vậy theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất hai số có cùng số dư khi chia cho p. Giả sử các số đó là 111...11 (m chữ số 1) và số 111....11 (n chữ số 1) với $\left(1 \le n < m \le p\right)$. Từ đó ta có

$$(\underbrace{111...11}_{m\ \text{chữ số}\,1} - \underbrace{111...11}_{n\ \text{chữ số}\,1}) \vdots p,\ hay\ \underbrace{111...1}_{m-n\ \text{chữ số}\,1}\underbrace{000...0}_{n\,\text{chữ so}\ 0} \vdots p\ Hay\ \underbrace{111...1}_{m-n\ \text{chữ số}\,1}.10^n \vdots p \quad (1)$$

Do p là sô nguyên tố lớn hơn 5 nên (p; 10) = 1, Vì thế từ (1) ta suy ra $\underbrace{111...1}_{m-n \text{ chữ số } 1} \vdots p$ (2)

$\underbrace{111...1}_{m-n \text{ chữ số } 1}$ là một số thuộc dãy trên nên từ (2) suy ra mâu thuẫn với giả thiết. Vậy giả sử phản chứng là sai. Ta suy ra điều phải chứng minh.

Bài 5. Từ 20 số đầu tiên của dãy bao giờ ta cũng có thể tìm được 2 số mà chữ số hàng đơn vị là 0, và trong hai số đó ít nhất phải có một số có chữ số hàng chục khác 9. Giả sử N là số đó, và ta gọi S là tổng các chữ số của N.

Ta có dãy số mới N, N + 1, N + 2,... N + 9, N + 19 là 11 số vẫn nằm trong 39 số cho trước mà tổng các chữ số của chúng là S, S + 1, S + 2, ... S + 9, S + 10. Đó là 11 số tự nhiên liên tiếp, ắt phải có một số chia hết cho 11.

Bài 6. Để làm xuất hiện số "thỏ" và số "lồng ta làm như sau:

Trong tập hợp các số dư trong phép chia cho 100 ta lấy ra từng cặp số sao cho tổng các cặp đó bằng 100 và thành lập thành các nhóm sau:

(0 ; 0), (1 ; 99), (2 ; 98), (3 ; 97), (4 ; 96), (5 ; 95), (6 ; 94)... (49 ; 51), (50 ; 50). Chú ý rằng sẽ có 50 cặp như vậy, ta thêm vào cặp (0, 0) sẽ có 51 cặp (51 lồng).

- Đem chia 52 số tự nhiên cho 100 sẽ có 52 số dư (52 thỏ).

- Có 52 số dư mà chỉ có 51 nhóm, theo nguyên tắc Dirichlet ít nhất cũng phải có 2 số dư cùng rơi vào một nhóm.

Rõ ràng là cặp số tự nhiên ứng với cặp số dư này chính là hai số tự nhiên có tổng hoặc hiệu chia hết cho 100. (đpcm)

Bài 7. Trước hết ta chú ý rằng:

29^m có tận cùng là 1 nếu m là số chẵn

29^m có tận cùng là 9 nếu m là số lẻ.

Ta hãy xét 10^5 lũy thừa của 29 với các số mũ chẵn khác nhau. Có hai khả năng xảy ra:

a. Trong đó nếu có số mũ 2k nào mà 29^{2k} có tận cùng là 00001 thì bài toán đã được chứng minh.

b. Không có số mũ 2k nào để 29^{2k} có tận cùng là 00001.

Từ b, ta thấy rằng:

Số các số có 5 chữ số tận cùng khác nhau nhỏ hơn 10^5 (kể từ 5 chữ số tận cùng 00002, 00003, ... 99 999, 10^5).

trong khi đó số các số khác nhau mà ta đang xét là 10^5 số. Theo nguyên tắc Dirichlet ít nhất phải có hai lũy thừa nào đó có 5 chữ số tận dùng là như nhau.

Giả sử $A_1 = 29^{2k_1} = M_1 \,.\, 10^5\ \overline{abcd_1}$

$A_2 = 29^{2k_2} = M_2 \,.\, 10^5\ \overline{abcd_1}$

Có thể giả sử $k_1 > k_2$ mà không làm mất tính chất tổng quát của bài toán. Thế thì ta có:

$$A_1 - A_2 = 29^{2k_1} - 29^{2k_2} = (M_1 - M_2)\,10^5$$

$$A_1 - A_2 = 29^{2k_1} - 29^{2k_2} = 29^{2k_2}\left(29^{2(k_1-k_2)} - 1\right)$$

Vì 29^{2k_2} có tận cùng là 1 và $A_1 - A_2 = (M_1 - M_2)10^5$ có tận cùng không ít hơn 5 số 0 nên suy ra $\left(29^{2(k_1-k_2)} - 1\right)$ phải có tận cùng không ít hơn 5 chữ số 0, từ đó suy ra $29^{2(k_1-k_2)}$ có tận cùng là 00001 (số các chữ số 0 ít nhất là 4).

Ta tìm được số $k = 2(k_1 - k)$ thỏa mãn đề bài (đpcm).

Bài 8. Gọi A là nhà toán học nào đó trong số 17 nhà toán học, thì nhà toán học A phải trao đổi với 16 nhà toán học còn lại về 3 vấn đề. Như vậy nhà toán học A phải trao đổi ít nhất với 6 nhà toán học về một vấn đề nào đó. Vì nếu chỉ trao đổi với số ít hơn 6 nhà toán học về một vấn đề thì số nhà toán học được trao đổi với A ít hơn 16. (Các bạn có thể diễn tả theo khái niệm "thỏ" và "lồng" để thấy ở đây đã áp dụng nguyên tắcDirichlet lần thứ nhất.)

- Gọi các nhà toán học trao đổi với nhà toán học A về một vấn đề nào đó (giả sử vấn đề I) là A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 . Như vậy có 6 nhà toán học trao đổi với nhau về 3 vấn đề (không kể trao đổi với A). Như vậy có 6 nhà toán học A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 trao đổi với nhau về 3 vấn đề, I, II, III.

Có hai khả năng xảy ra:

a. Nếu có 2 nhà toán học nào đó cùng trao đổi với nhau về vấn đề I thế thì có 3 nhà toán học (kể cả A) trao đổi với nhau về vấn đề I. Bài toán được chứng minh.

b. Nếu không có nhà toán học nào trong 6 nhà toán học A_1, A_2 ... A_6 trao đổi về vấn đề I thì ta có 6 nhà toán học chỉ trao đổi với nhau về 2 vấn đề II và III. Theo nguyên tắcDirichlet có ít nhất 3 nhà toán học cùng trao đổi với nhau về một vấn đề II hoặc III. Bài toán cũng được chứng minh.

Bài 9. Để tôn trọng ta cần thay đổi ngôn ngữ ***thỏ, chuồng*** là ***học sinh , phòng***.

Phòng 1: Chứa các em mắc 1 lỗi.

Phòng 2: Chứa các em mắc 2 lỗi.

……………………………………

Phòng 14: Chứa các em mắc 14 lỗi.

Phòng 15: Chứa các em không mắc lỗi.

Theo giả thiết *phòng 14* chỉ có em A. Còn lại 14 phòng chứa 29 em. Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại một phòng chứa ít nhất 3 em. Từ đó có điều phải chứng minh.

Bài 10. Có 5 người nên số người quen nhiều nhất của mỗi người là 4.

Phòng 0: Chứa những người không có người quen.

Phòng 1: Chứa những người có 1 người quen.

………………………………………………………

Phòng 4: Chứa những người có 4 người quen.

Để ý rằng *phòng 0* & *phòng 4* không thể cùng có người.

Thực chất 5 người chứa trong 4 phòng.

Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại một phòng chứa ít nhất 2 người. Từ đó có điều phải chứng minh.

Bài 11. Xét một thời điểm bất kỳ của lịch thi đấu (mỗi đội thi đấu tối đa 9 trận).

Phòng 0: Chứa các đội chưa đấu trận nào.

Phòng 1: Chứa các đội đã thi đấu 1 trận.

……………………………………………….

Phòng 9: Chứa các đội đã thi đấu 9 trận.

Để ý rằng *phòng 0* và *phòng 9* không thể cùng có đội thi đấu.

Thực chất 10 đội chứa trong 9 phòng.

Theo nguyên lý Dirichlet ta suy ra điều phải chứng minh.

Bài 12. Xét n+ 1 số sau: $a_1 = 5; a_2 = 55; ...; a_{n+1} = 55...5$ (n+1 chữ số 5).

Theo nguyên lý Dirichlet : với n+1 số trên ắt tồn tại hai số có cùng số dư khi chia cho n. Hiệu của hai số này là số có dạng: 55…50…0 gồm toàn chữ số 5 và chữ số 0 và chia hết cho n. Đó là điều phải chứng minh!

Bài 13. Xét 2012 số $a_1 = 8; a_2 = 88; ...; a_{2012} = 88...8$ (2012 chữ số 8). Tương tự ví dụ 4 sẽ tồn tại số có dạng 88…80…0 (n chữ số 8 và k chữ số 0) chia hết cho 2011.

Mà: 88…80…0 = 88…8.10^k và (10^k,2011) = 1 suy ra số: 88…8 chia hết cho 2011. Điều phải chứng minh! (*Lưu ý: 2011 là số nguyên tố*)

Bài 14. Xét 2011 số sau: n; n^2 ; n^3;…; n^{2011}.

Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất hai số có cùng số dư khi chia cho 2010.Giả sử hai số đó là n^i và n^j với $1 \le i < j \le 2011$. Khi đó $n^j - n^i = n^i(n^{j-i} - 1) = n^i(n^k - 1)$ chia hết cho 2010 (k = j - i là số nguyên dương). Vậy $n^k - 1$ chia hết cho 2010 (vì (n^i, 2010) =1).

Bài 15. Ta xét phép chia 1007 số trên cho 2011 và xếp vào:

Nhóm 0: Các số chia hết cho 2011 (dư 0)

Nhóm 1: Các số chia cho 2011 dư 1 hoặc 2010.

Nhóm 2: Các số chia cho 2011 dư 2 hoặc 2009.

……………………………………………….

Nhóm 1005: Các số chia cho 2011 dư 1005 hoặc 1006.

Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại một nhóm chứa ít nhất hai số. Theo cách xếp nhóm thì hoặc là tổng hoặc là hiệu của hai số này sẽ chia hết cho 2011.

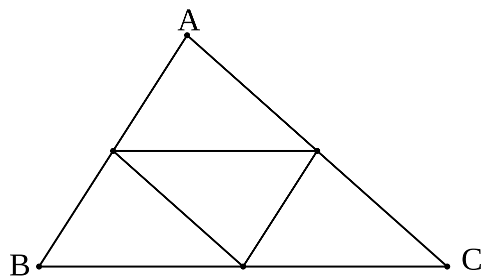
Bài 16. Sắp thứ tự n + 1 số đã cho $1 \le a_1 < a_2 < ... < a_{n+1} < 2n$ (Nhóm 1). Xét thêm n số:

$b_1 = a_2 - a_1; b_2 = a_3 - a_1; ...; b_n = a_{n+1} - a_1$. Ta có: $1 \le b_1 < b_2 < ... < b_n < 2n$ (Nhóm 2).

Tập 2n số của cả 2 nhóm trên (trừ a_1 của nhóm 1) nhận 2n -1 giá trị (*chuồng).*

Theo nguyên lý Dirichlet có 2 số bằng nhau nhưng không cùng một nhóm 1 hoặc nhóm 2 tức là phải thuộc 2 nhóm. Từ đó suy ra điều phải chứng minh!

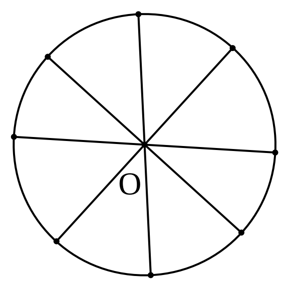
Bài 17.



Các đường trung bình của ΔABC chia nó thành bốn tam giác đều có cạnh là $0,5$. Theo nguyên tắc Dirichlet, ắt tồn tại ít nhất là 2 điểm rơi vào cùng một tam giác nhỏ. Ta có khoảng cách giữa 2 điểm này nhỏ hơn $0,5$.

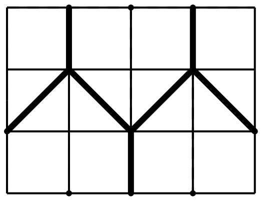
Bài 18. Chia hình vuông đã cho thành 25 hình vuông con bằng nhau có cạnh là 0,2. Suy ra theo nguyên tắc Dirichlet, ắt tồn tại ít nhất là 3 điểm nằm trong một hình vuông con. Ta có bán kính của đường tròn ngoại tiếp hình vuông này bằng $\frac{1}{5\sqrt{2}} < \frac{1}{7}$. Suy ra 3 điểm đã cho nằm trong hình tròn bán kính là $\frac{1}{7}$.

Bài 19.



Chia hình tròn (O, R) thành 8 phần bằng nhau. Do đó mỗi hình quạt có diện tích bằng 1. Theo nguyên tắc Dirichlet, ắt có ít nhất là một hình quạt chưa nhiều hơn 2 điểm.
Xét 3 điểm phân biệt trong hình quạt đã cho. Dễ thấy tam giác tạo bởi 3 điểm này có diện tích bé hơn 1.

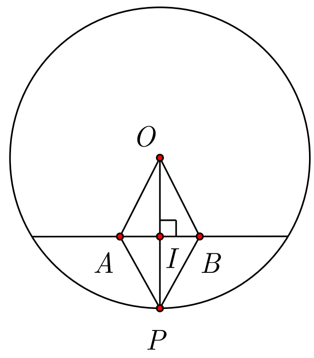
Bài 20.



Chia sân thành 5 hình như hình vẽ. Áp dụng nguyên tắc Dirichlet, ta suy ra kết quả cần chứng minh.

Bài 21. Dựng $\left(0;\sqrt{3}\right)$. P là một điểm thược $\left(0;\sqrt{3}\right)$. Dựng hình thoi $OAPB$ có đường chéo OP cạnh là 1.

Gọi I là giao điểm của hai đường chéo, ta có: $OI=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



$$\Rightarrow AI^2=AO^2-OI^2=1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow AI=\frac{1}{2}\Rightarrow AB=1$$

Vậy ΔAOB đều có cạnh bằng 1.

Giả sử ngược lại, mọi cặp hai điểm có khaongr cách giữa chúng bằng 1 mà đều được tô bằng hai màu khác nhau.

Không matas tính chất tổng quát, ta giả sử điểm O được tô bằng màu xanh, điểm A được tô bằng màu đỏ và điểm B được tô bằng màu vàng.

Bởi vì $PA=PB=1$ suy ra P phải được tô bằng màu xanh.

Với cách lập luận như vậy ta suy ra, tất cả các điểm trên đường $\left(0;\sqrt{3}\right)$ đều được tô cùng một màu xanh. Mặt khác dễ dàng tìm được trên $\left(0;\sqrt{3}\right)$ hai điểm mà khoảng cách giữa chúng bằng 1, nên theo giả sử chúng được tô bằng hai màu khác nhau. Vô lý.

Điều vô lý đó chứng tỏ có hai điểm được tô cùng một màu mà khoảng cách của chúng bằng 1.

Bài 22. Gọi các điểm đã cho là $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{100}$

Kí hiệu: $M=\left\{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{33}\right\}$, $N=\left\{A_{34}, A_{35}, A_{36}, \ldots, A_{66}\right\}$, $P=\left\{A_{67}, A_{68}, A_{69}, \ldots, A_{100}\right\}$

Tập M gồm 33 điểm, tập N gồm 33 điểm và tập P gồm 34 điểm. Trường hợp của bài toán: yêu cầu chứng minh có thể xảy ra nếu như:

Mỗi điểm trong tập hợp M chỉ được nối với các điểm của tập hợp N hoặc P.

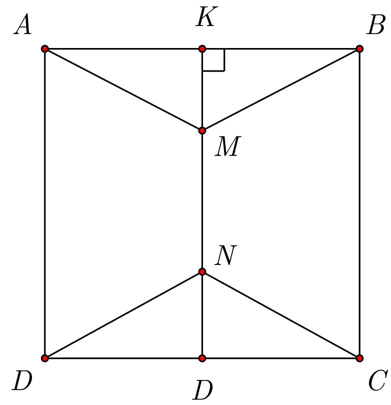
Ccacs điểm của tập hợp N chỉ được nối với các điểm của tập hợp P hoặc tập M.

Các điểm của tập hợp P chỉ được nối với các điểm có trong tập M hoặc tập N (2 tập này có 66 điểm).

Thật vậy, giả sử (A_i, A_j, A_k, A_l) là 4 điểm bất kỳ trong số 100 điểm. Theo nguyên tắc Dirichlet awrt phải có ít nhất là 2 điểm cùng thuộc vào cùng 1 tập hợp (M, N hoặc P)

Do đó với cách phân chia trên đây, 2 điểm này không được nối với nhau.

Bài 23. Gọi K, I lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD.
Trên đoạn KI lấy điểm M và N sao cho:



$KM = NI = 8$

Ta có: $MN = KI - KM - NI = 35 + \sqrt{3} - 16 = 19 + \sqrt{3}$

còn $AM = BM = DN = CN$

$= \sqrt{\left(\dfrac{35+\sqrt{3}}{2}\right) + 8^2} > 20$

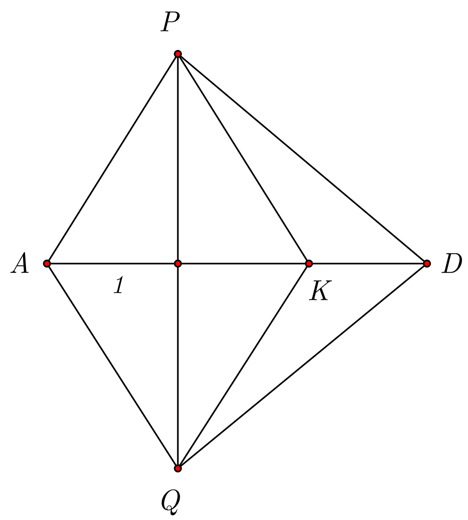
Do đó nếu ta vẽ các đường trong có tâm là A, B, C, D, M, N bán kính là 10 thì các đường tròn này không cắt nhau.

Bởi vì chỉ có 5 điểm phân biệt nằm trong hình vuông, do đó ắt tồn tại ít nhất là một hình tròn không chứa điểm nào trong số 5 điểm đã cho.

Nhận thấy, tâm của đường tròn này có khoảng các tới 5 điểm đã cho lớn hơn 10.

Bài 24. Dựng một tam giác đều có cạnh bằng 1. Nếu cả ba đỉnh được to bởi cùng một màu (xanh hoặc đỏ) thì bài toán được chứng minh.
Trong trường hợp ngược lại, xét tam giác đều ABC có cạnh $AB = 1$ mà A và B được tô bằng hai màu khác nhau.

Lấy điểm D của mặt phẳng sao cho $AO = BO = 2$. Vì A, B khác màu nên D cùng màu với chỉ một trong hai điểm A hoặc B.



Suy ra tồn tại đoạn t hẳng $AD = 2$ hoặc $BD = 2$ có 2 mút được tô bằng hai màu khác nhau. Giả sử là đoạn thẳng AD. Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng AD thì K cùng màu với một trong hai điểm A hoặc D. Giả sử K và A cùng có màu xánh.

Vẽ các tam giác đều APK và AQK.

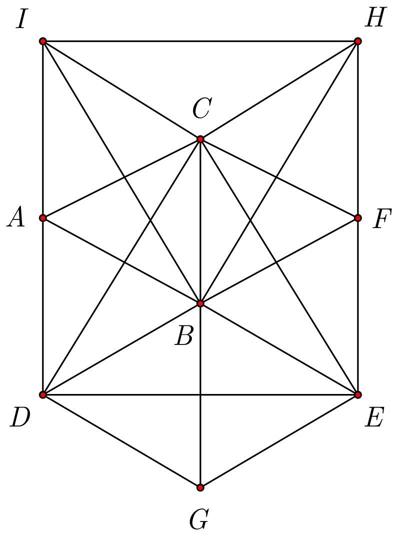
Nếu P và Q có màu xanh thì ta có tam giác đều APK và AQK có cạnh bằng 1 và ba đỉnh được tô bằng cùng màu xanh.

Nếu P và Q có màu đỏ thì tam giác PQD có 3 đỉnh được tô cùng màu đỏ. Dễ thấy, tam giác PQD đều có cạnh là $\sqrt{3}$.

Bài 25.

Cách 1. Có thể giải như bài 808

Cách 2: có thể giải như cách sau đây:



Vẽ tam giác ABC nếu cả ba đỉnh A, B, C được tô cùng một màu thì ta có ngay điều phải chứng minh.

Nếu A, B, C được tô bởi 2 màu khác nhau, theo nguyên tắc Dirichlet, ắt phải có hai đỉnh được tô cùng một màu. Giả sử các đỉnh A và B được tô cùng màu đen, khi đó C được tô bằng màu đỏ..

Dựng lục giác đều $ADGEFC$ có tâm là B.

Ta có tam giác ADB đều. Nếu D được tô màu đen ta có ngay điều phải chứng minh. Còn nếu D được tô màu đỏ, lại xét tam giác CDE đều. Nếu E được tô bằng màu đỏ thì tam giác CDE có ba đỉnh được tô cùng màu đỏ, thỏa mãn.

Có nếu ngược lại E được tô bằng màu đen, lại xét tam giác BEF đều. Nếu F được tô bằng màu đen thì ta có BEF có ba đỉnh được tô cùng màu đen, thỏa mãn.

Giả sử ngược lại F được tô bằng màu đỏ, thì lại xét tam giác CFH đều.

Nếu điểm H được tô bằng màu đỏ thì ta có tam giác CFH có ba đỉnh được to bằng màu đỏ, thỏa mãn. Còn giả sử ngược lại H được tô bằng màu đen thì lại vẽ tam giác đều BHI. Nếu I được tô bằng màu đen thì tam giác BHI có ba đỉnh được tô bằng màu đen, thỏa mãn. Giả sử ngược lại, I được tô bằng màu đỏ thì xét tam giác IDF. Dễ thấy tam giác IDF đều, theo trên ta có ba đỉnh I, D, F được tô bởi cùng màu đỏ, thỏa mãn.

Tóm lại: ta chứng tỏ được rằng, tồn tại tam giác đều mà ba đỉnh được tô bởi cùng một màu.

Bài 26. Lấy một điểm O bất kỳ trên mặt phẳng. Qua O dựng các đường thẳng song song với 2000 đường thẳng đã cho. Tại O ta có 4000 góc đôi một đối đỉnh có tổng số đo bằng $360°$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài 27. Giả sử xy là một đường thẳng bất kỳ vuông góc với l. Ta đánh dấu các đoạn thẳng theo thứ tự $1,2,3,\ldots,8000$. Chiếu các đoạn thẳng này lên hai đường thẳng xy và l.

Kí hiệu a_i và b_i ($i=1,2,\ldots,8000$) tương ứng là độ dài của các đoạn thẳng đã cho trên các đường thẳng xy và l.

Ta có $a_i+b_i\ge 1$ với mọi $i=1,2,\ldots,8000$

Do đó $(a_1+a_2+\ldots a_{8000})+(b_1+b_2+\ldots b_{8000})\ge 8000=4000+4000$

Suy ra: hoặc là $a_1+a_2+\ldots a_{8000}\ge 4000$

hoặc là $b_1+b_2+\ldots b_{8000}\ge 4000$

Ta có 8000 đoạn thẳng có thể chiếu vuông góc lên đường kính của đường trong với độ dài 4000.

Nếu các hình chiếu của các đoạn thẳng đã cho lên đường thẳng l mà không có các điểm chung thì ta có: $a_1+a_2+\ldots a_{8000}<4000$.

Vì vậy trên l tìm được một điểm là hình chiếu của các điểm thuộc ít nhất là hai trong số các đoạn thẳng đã cho.

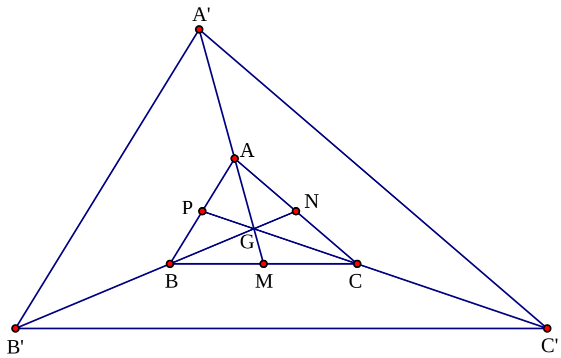
Khi đó đường thẳng vuông góc với l dựng qua điểm này sẽ có điểm chung với ít nhất hai đoạn thẳng trong số 8000 đoạn thẳng đã cho.

Bài 28. Xét hình vuông cạnh $2x2$, do hình vuông này có mỗi hình vuông nhỏ luôn chung cạnh hoặc chung đỉnh nên tồn tại nhiều nhất 1 số chẵn, nhiều nhất 1 số chia hết cho 3 do đó có ít nhất 2 số lẻ không chia hết cho 3. Bảng $10x10$ được chia thành 25 hình vuông có cạnh $2x2$ nên có ít nhất 50 số lẻ không chia hết cho 3. Từ 1 đến 0 có 3 số lẻ không chia hết cho 3 là 1, 5, 7. Áp dụng nguyên lí Dirichlet ta được một trong ba số trên xuất hiện ít nhất $\left[\frac{50}{3}\right]+1=17$ lần

Bài 29. Chia các cạnh của hình chữ nhật thành n đoạn và 2n đoạn bằng nhau ,mỗi đoạn có độ dài $\frac{1}{n}$. Nối các điểm chia bằng các đường thẳng song songvới các cạnh của hình chữ nhật ta được $n.2n=2n^2$ hình vuông nhỏ với cạnh là $\frac{1}{n}$. Nếu mỗi hình vuông chứa không quá 3 điểm thì tổng số điểm đã cho không quá $3.2n^2 = 6n^2$ (trái với giả thiết). Do đó phải tồn tại 1 hình vuông chứa không ít hơn 4 điểm. Rõ ràng hình vuông cạnh $\frac{1}{n}$ nội tiếp đường tròn bán kính là $\frac{\sqrt{2}}{2n}$ và đường tròn này được chứa trong đường tròn đồng tâm bán kính $\frac{1}{n}$.

Bài 30.

Lấy năm điểm tùy ý sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng trên mặt phẳng. Khi đó vì chỉ dùng có hai màu để tô các đỉnh, mà theo nguyên lí Dirichlet phải tồn tại ba điểm trong số đó cùng màu. Giả sử đó là ba điểm A, B, C có màu đỏ. Như vậy ta có tam giác ABC với ba đỉnh màu đỏ. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Chỉ có hai khả năng xảy ra:



+ Nếu G có màu đỏ. Khi đó A, B, C, G cùng đỏ và bài toán đã được giải.

+ Nếu G có màu xanh. Kéo dài GA, GB, GC các đoạn $AA' = 3GA,\ BB' = 3GB,\ CC' = 3GC$. Khi đó gọi M, N, P tương ứng là các trung điểm của BC, CA, AB thì

$A'A = 3AG = 6GM \Rightarrow A'A = 2AM$.

Tương tự $B'B = 2BN,\ CC' = 2CP$. Do đó các tam giác A′BC, B′AC, C′AB tương ứng nhận A, B, C là trọng tâm. Mặt khác, ta cũng có các tam giác ABC và A′B′C′ có cùng trọng tâm G. Có hai trường hợp sau có thể xảy ra:

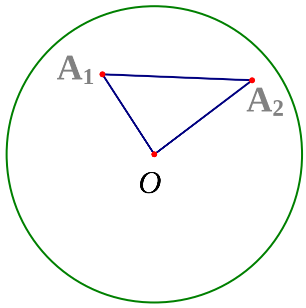
- Nếu A′, B′, C′ cùng xanh. Khi đó tam giác A′B′C′ và trọng tâm G có cùng màu xanh.
- Nếu ít nhất một trong các điểm A′, B′, C′ có màu đỏ. Không mất tính tổng quát giả sử A′ đỏ. Khi đo tam giác A′BC và trọng tâm A màu đỏ.

Vậy trong mọi khả năng luôn tồn tại một tam giác mà ba đỉnh và trọng tâm cùng màu.

CHỦ ĐỀ 9 . SỬ DỤNG NGUYÊN LÝ CỰC HẠN TRONG SỐ HỌC

Bài 1: Nhận xét: ít nhất 7 điểm trong số 8 điểm đã cho là khác tâm O.

Gọi các điểm đó là $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8$.



Ta có góc nhỏ nhất trong số các góc $\widehat{A_iOA_k}$ $(i \neq k, 1 \leq i, k \leq 8)$ là không lớn hơn $\frac{360°}{7} < 60°$.

Giả sử $\widehat{A_1OA_2}$ là bé nhất.

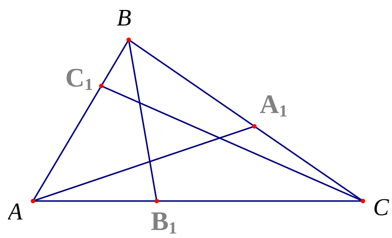
Xét ΔA_1OA_2, vì $\widehat{A_1OA_2} < 60°$

nên $\widehat{OA_1A_2} > 60°$ hoặc $\widehat{OA_2A_1} > 60°$

Suy ra, hoặc $OA_2 > A_1A_2$ hoặc $OA_1 > A_1A_2$

Mà $OA_1 \leq 1$ hoặc $OA_2 \leq 1 \Rightarrow A_1A_2 < 1$.

Bài 2. Không mất tính tổng quát, giả sử $\widehat{C} \leq \widehat{B} \leq \widehat{A}$. Xét hai trường hợp:



TH1: Tam giác ABC có ba góc nhọn, khi đó: $\widehat{A} \geq 60°$ và $\widehat{A} < 90°$.

Ta có: $h_b \leq BB_1 \leq 1$, $h_c \leq CC_1 \leq 1$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}c.h_c = \frac{1}{2}.\frac{h_b.h_c}{\sin A} \leq \frac{1}{2\sin 60°} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow S_{ABC} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

TH2: Tam giác ABC không là tam giác nhọn, khi đó: $\widehat{A} \geq 90°$

$$\Rightarrow AB \leq BB_1 \leq 1,\ AC \leq CC_1 \leq 1 \Rightarrow S_{ABC} \leq \frac{1}{2}AB.AC \leq \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Bài 3: Chia hình vuông đã cho thành 16 hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh bằng 1; vì có 33 điểm chứa trong 16 hình vuông, do đó theo nguyên tắc Dirichlet ắt phải có ít nhất là một hình vuông chứa không ít hơn ba điểm.

Khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ tron hình vuông đơn vị đã cho không thể vượt qua độ dài đường chéo của nó bằng $\sqrt{2}$.

Gọi O_1,O_2,O_3 là ba điểm cùng nằm trong một hình vuông đơn vị nào đó. Vẽ ba đườn tròn tâm O_1,O_2,O_3 cùng bán kính là $\sqrt{2}$. Chắc chắn cả ba điểm O_1,O_2,O_3 đều nằm trong cả ba đường tròn này, nghĩa là chúng nằm trong phần chung của ba hình tròn có tâm tại chính các điểm O_1,O_2,O_3.

Bài 4. Nối hai điểm bất kì trong số 2000 điểm đã cho bằng 1 đoạn thẳng. Ta có tất cả 1999000 đoạn thẳng như vậy. Gọi AB là đoạn thẳng có độ dài bé nhất.

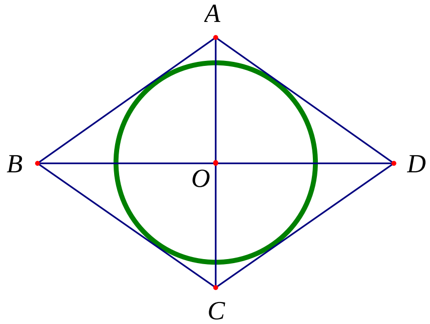
Vẽ đường tròn tâm O đường kính AB $\Rightarrow$ 1998 điểm còn lại nằm ngoài đường tròn tâm O. Gọi C là điểm trong số 1998 điểm còn lại thỏa mãn góc ACB là lớn nhất trong số các góc nhìn 2 điểm A và B.

Xét ΔABC. Ta có đường tròn ngoại tiếp ΔABC không chứa điểm nào trong số 1997 điểm còn lại.

Bài 5. Không mất tính tổng quát, ta giả sử: $OC \le OA,\ OB \le OD$

Gọi $B_1,\ C_1$ lần lượt là các điểm đối xứng của B và C qua O.

$\Rightarrow OB = OB_1,\ OC = OC_1$



Bởi vì BC là tiếp tuyến của (O)

nên B_1C_1 cũng tiếp xúc với (O)

Mặt khác, AD cũng tiếp xúc với (O)

$\Rightarrow A \equiv C_1,\ D \equiv B_1$

$\Rightarrow OA = OC,\ OB = OD$

$\Rightarrow ABCD$ là hình bình hành.

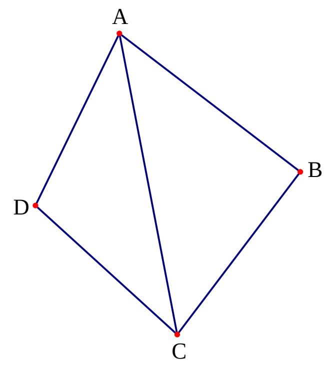
Mặt khác, $ABCD$ ngoại tiếp (O)

$\Rightarrow AB + CD = AD + BC \Rightarrow 2AB = 2AD \Rightarrow AB = AD \ \Rightarrow ABCD$ là hình thoi.

Bài 6. Vẽ các đường chéo của lục giác đều. Các đường chéo này chia lục giác đều thành 6 tam giác bằng nhau mỗi cạnh tam giác có độ dài bằng 1. Theo nguyên lí Dirichlet thì trong 19 điểm luôn tồn tại bốn điểm nằm tròn một tam giác đều.

Giả sử bốn điểm cùng nằm trong một tam giác đều là A, B, C, D. Ta xét các vị trí của bốn điểm A, B, C, D theo các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Bốn điểm A, B, C, D tạo thành một tứ giác lồi.

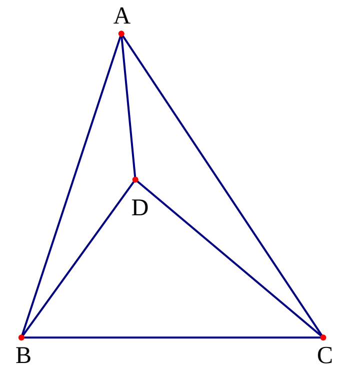


Khi đó ta có $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D}=360^0$.

Như vậy trong bốn góc trên tồn tại một góc nhỏ hơn hoặc bằng 90^0, giả sử đó là góc A. Khi đó ta có $\widehat{DAC}+\widehat{CAB}\le 90^0$ nên một trong hai góc $\widehat{DAC};\widehat{CAB}$ có một góc không lớn hơn 45^0.

Như vậy một trong hai tam giác ADC và ABD có một góc không lớn hơn 45^0.

- Trường hợp 2: Trong bốn điểm A, B, C, D có một điểm nằn trong tam giác có ba đỉnh là ba điểm còn lại. Giả sử điểm D nằm trong tam giác ABC.



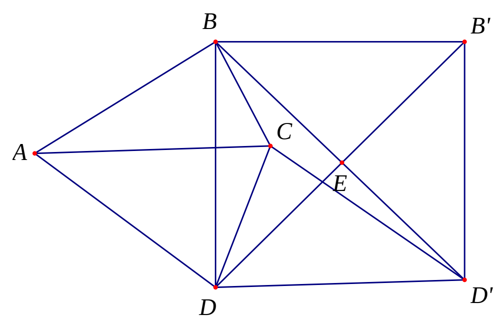
+ Nếu $\widehat{BDC}\ge 90^0$ thì ta được $\widehat{DBC}+\widehat{DCB}\le 90^0$ nên một trong hai góc $\widehat{DBC};\widehat{DCB}$ không lớn hơn 45^0. Suy ra tam giác BCD thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Nếu $\widehat{BDC}<90^0$ thì ta được $\widehat{BAC}<90^0$, do đó $\widehat{CAD}+\widehat{BAD}<90^0$

Từ đó ta được một trong hai góc $\widehat{CAD};\widehat{BAD}$ không lớn hơn 45^0 hay một trong hai tam giác ADC và ADB thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Mặt khác ta giác đều có cạnh bằng một nên bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đều là $\frac{\sqrt{3}}{3}$.Mà $\frac{\sqrt{3}}{3}<\frac{3}{5}$ nên ta có điều phải chứng minh.

Bài 7. Giả sử: $r_{ABC}=r_{BCD}=r_{CDA}=r_{DAB}$



Vẽ các hình bình hành $ABB'C$, $ADD'C$ suy ra tứ giác $BB'D'C$ là hình bình hành.

Do đó: $\Delta ABC=\Delta B'CB;\ \Delta ADC=\Delta D'CD$

$\Rightarrow r_{ABC} = r_{B'CB}; r_{ADC} = r_{D'CD}$

Mặt khác: $\Delta ABD = \Delta CB'D'$(c.c.c) $\Rightarrow r_{ABD} = r_{CB'D'}$

Theo giả thiết:

$r_{ABC} = r_{BCD} = r_{CDA} = r_{DAB} \Rightarrow r_{B'CB} = r_{CB'D'} = r_{D'CD} = r_{CBD}$

Gọi E là giao điểm của BD' và DB'. Ta chứng minh $C \equiv E$.

Giả sử C khác E $\Rightarrow E$ thuộc vào một trong 4 tam giác $EBD, EBB', EB'D', ED'D$.

Giả sử C thuộc vào miền tam giác $BDE \Rightarrow r_{BCD} = r_{BED} = r_{B'ED} = r_{CB'D'}$ (vô lý).

Điều vô lí chứng tỏ E trùng với C $\Rightarrow B, C, D'$ thẳng hàng và D, C, B' thẳng hàng.

Ta có: $D'C \,//\, AD \Rightarrow BC \,//\, AD$

Vì : $CB' \,//\, AB \Rightarrow DC \,//\, AB$

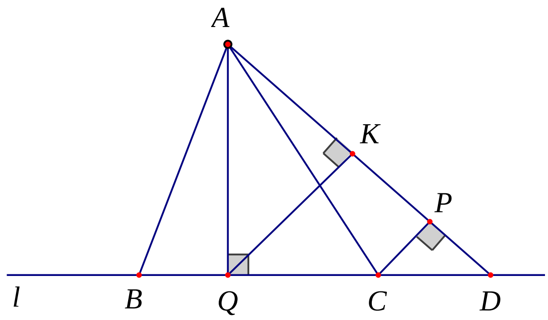
Suy ra $ABCD$ là hình bình hành.

Xét tiếp: $S_{ABD} = S_{ADC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$ (vì $ABCD$ là hình bình hành).

$\Leftrightarrow r_{ABD} . \frac{AB + BD + DA}{2} = r_{ADC} . \frac{AD + DC + CA}{2} \Leftrightarrow AB + BD + DA = AD + DC + CA \Leftrightarrow BD = CA$

Vậy $ABCD$ là hình chữ nhật.

Bài 8. Bằng phương pháp chứng minh phản chứng: Giải sử ngược lại các đường thẳng đã cho không đi qua một điểm. Xét các giao điểm tạo nên bởi 2000 đường thẳng đã cho. Xét tất cả các khoảng cách khác 0 hạ từ giao các giao điểm này đến các đường thẳng đã cho. Giả sử A là một giao điểm trong số đó và gọi AQ là khoảng cách nhỏ nhất trong số đó vẽ từ A đến 1 đường thẳng l trong số 2000 đường thẳng.



Qua A theo giả thiết, phải có ít nhất là 3 đường thẳng này cắt l lần lượt tại B, C và D.

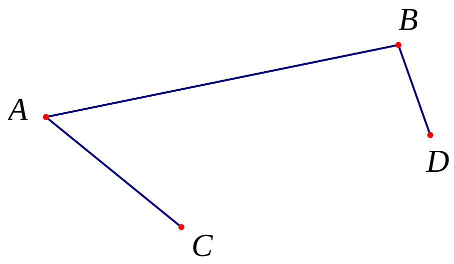
Vẽ $AQ \perp l$, thì hai trong ba điểm B, C, D phải nằm về cùng một phía với điểm Q, chẳng hạn là C và D.

Giả sử $QC < QD$; vẽ $CP \perp AD$, vẽ $QK \perp AD$.

Suy ra: $CP < QK < AQ$. Vô lí, vì trái với giả sử AQ là khoảng cách bé nhất. Điều vô lí đó chứng tỏ 2000 đường thẳng đã cho đồng quy tại 1 điểm.

Cách khác: Lấy hai đường thẳng bất kì a,b cắt nhau tại M thì bất cứ đường thẳng tùy ý nào cũng phải qua M. Vậy 2000 đường thẳng trên sẽ đồng quy.

Bài 9. Giả sử ngược lại với cách nối đó, chúng ta nhận được một đường thẳng gấp khúc khép kín.



Gọi AB là mắt lớn nhất của đường gấp khúc khép kín này.

Giả sử AC, BD là hia mắt kề với mắt AB.

Ta có:

- AC < AB nên B không là điểm gần nhất của A.
- BD < AB nên A không là điểm gần nhất của B.

Chứng tỏ rằng A và B không được nối với nhau. Vô lí!

Điều vô lí này chứng tỏ không thể nhận được một đường gấp khúc nào khép kín với cách nối như vậy.

Cách khác: Nếu có đoạn nối AB thì B là điểm gần nhất của A (các khoảng cách khác nhau). Vậy không tồn tại đoạn nối A với 1998 điểm còn lại. Như vậy các đoạn nối không thể tạo thành đường gấp khúc (đường gấp khúc không tồn tại kể cả khi có 2 đoạn).

Bài 10. Giả sử ngược lại 2000 điểm đã cho không thẳng hàng.

Dựng qua mỗi cặp hai điểm trong số 2000 điểm này một đường thẳng. Số các đường thẳng được nối như vậy là hoàn toàn xác định, hữu hạn. Xét các khoảng cách khác 0 nhỏ nhất từ 2000 điểm đã cho đến các đường thẳng vừa dựng. Số các khoảng cách như vậy tồn tại và hữu hạn.

Gọi khoảng cách từ A đến đường thẳng BC là bé nhất (A, B, C là ba điểm trong số 2000 điểm đã cho). Theo giả thiết, trên BC còn có 1 điểm thứ 3 là D khác B và C.

Vẽ $AQ \perp BC$, khoảng cách AQ là bé nhất (theo giả sử), ta có trong ba điểm B, C, và D phải có ít nhất 2 điểm nằm về cùng một phía với của điểm Q, giả sử là C và D.

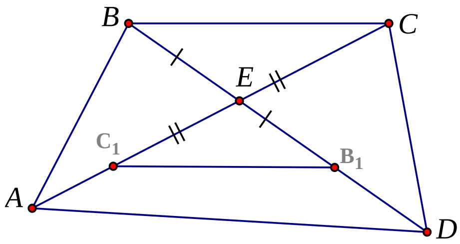
Giả sử $CQ < DQ$; vẽ $CR \perp AD$, dễ thấy $CR < AQ$ (vô lí).

Điều vô lí chứng tỏ 2000 điểm đã cho thẳng hàng.

Cách khác: Lấy hai điểm cố định A, B bất kì thì một trong số 1998 điểm còn lại cũng đều nằm trên đường thẳng AB. Vậy 2000 điểm đã cho thẳng hàng.

Bài 11. Không mất tính tổng quát, ta giả sử rằng: $CE \le AE,\ BE \le DE$.

Gọi B_1, C_1 tương ứng là các điểm đối xứng của B và C qua tâm E, ta có cảm giác C_1EB_1 nằm trong miền tam giác AED.



Giả sử đoạn thẳng AD không trùng với đoạn thẳng C_1B_1. Khi đó đường tròn nội tiếp tam giác C_1EB_1 nằm bên trong đường tròn nội tiếp tam giác AED, đồng dạng (phối cảnh) với đường tròn này với tâm đồng dạng E, hệ số đồng dạng lớn hơn 1.

Như vậy: $r_{AED} > r_{C_1EB_1} = r_{CEB}$ (r_{AED} là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác AED); vô lí vì trái với giả thiết $r_{AED} = r_{CEB}$, điều đó chứng tỏ $A \equiv C_1,\ D \equiv B_1$.

Khi đó $OA = OC,\ OB = OD \Rightarrow$ $ABCD$ là hình bình hành.

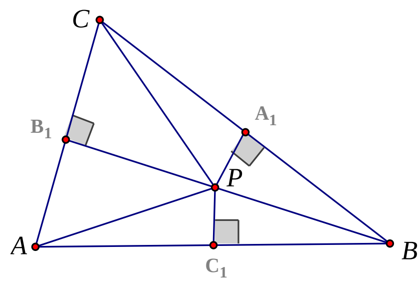
Trong hình bình hành $ABCD$ có $p_1r = S_{AEB} = S_{BEC} = p_1r$ (trong đó, p_1, p_2 là nửa chu vi của các tam giác AEB, BEC).

Suy ra: $p_1 = p_2 \Leftrightarrow \dfrac{AB + BE + EA}{2} = \dfrac{BC + CE + EB}{2} \Leftrightarrow AB = BC$ (vì $AE = CE$)

Hình bình hành $ABCD$ có $AB = BC$ nên $ABCD$ là hình thoi.

Bài 12. Dựng $PA_1,\ PB_1,\ PC_1$ tương ứng vuông góc với các cạnh $BC,\ CA,\ AB$. Vì tam giác ABC có ba góc nhọn nên các điểm $A_1,\ B_1,\ C_1$ tương ứng nằm trong đoạn $BC,\ CA,\ AB$. Nối PA, PB, PC ta có:

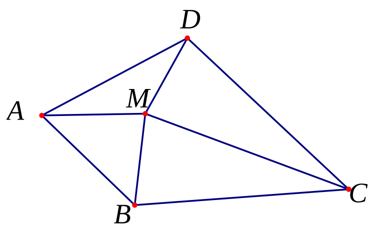
$$\widehat{APC_1} + \widehat{C_1PB} + \widehat{BPA_1} + \widehat{A_1PC} + \widehat{CPB_1} + \widehat{B_1PA} = 360^\circ$$



Suy ra góc lớn nhất trong các góc này không thể nhỏ hơn 60°. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $\widehat{APC_1}$ là góc lớn nhất, khi đó: $\widehat{APC_1} \ge 60^\circ$. Xét tam giác APC_1 vuông tại C_1 ta có:

$$\frac{PC_1}{AP} = cos\widehat{APC_1} \le cos60^\circ = \frac{1}{2}$$

Từ đó ta có: $AP \ge 2PC_1$.



Nếu thay PA bằng khoảng cách lớn nhất trong các khoảng cách từ P đến các đỉnh và thay PC_1 bằng khoảng cách nhỏ nhất trong cách khoảng cách từ P đến các cạnh thì bất đẳng thức càng được thỏa mãn.

Bài 13. Gọi M là một điểm bất kì bên trong tứ giác $ABCD$.

Ta có: $\widehat{AMB}+\widehat{BMC}+\widehat{CMD}+\widehat{DMA}=360°$

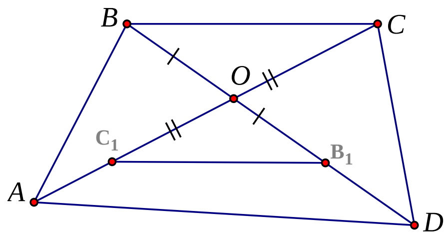
Do đó góc lớn nhất trong bố góc này không nhỏ hơn $90°$. Không mất tính tổng quát, giả sử góc BMC lớn nhất.

$\Rightarrow \widehat{BMC}\ge 90° \Rightarrow M$ nằm trong đường tròn đường kính BC.

Bài 14. Không mất tính tổng quát, ta giả sử: $AO\ge CO,\ DO\ge BO$.

Gọi $B_1,\ C_1$ tương ứng là các điểm đối xứng của B và C qua O

$\Rightarrow OB=OB_1,\ OC=OC_1$



Tam giác B_1OC_1 nằm trong tam giác AOD.

Ta có: chu vi (ΔAOD) $\ge$ chu vi (ΔB_1OC_1) $=$ chu vi (ΔBOC) = chu vi (ΔAOD).

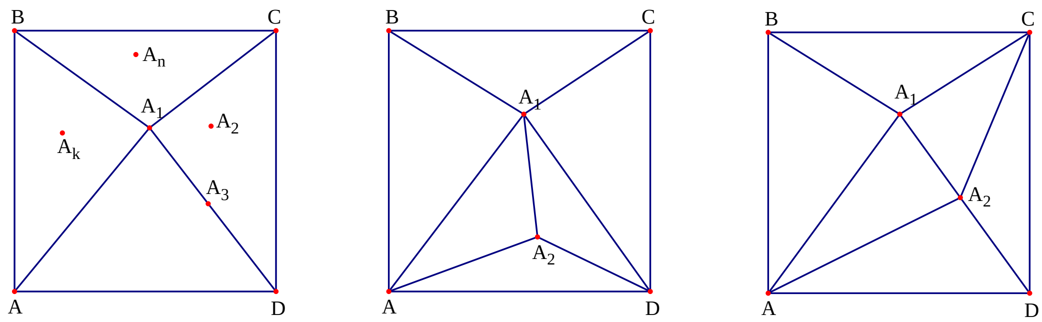
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow B_1\equiv D,\ C_1\equiv A$.

Khi đó, tứ giác $ABCD$ có: $OA=OC, OB=OD\ \Rightarrow ABCD$ là hình bình hành.

Mặt khác: Chu vi (ΔAOB) $=AB+BO+OA$, chu vi $(\Delta BOC)=BC+BO+OA$.

Suy ra $AB=BC$. Vậy $ABCD$ là hình thoi.

Bài 15.



Gọi A, B, C, D là bốn đỉnh hình vuông và $A_1; A_2; ...; A_n$ là n điểm nằm trong hình vuông.

Nối A_1 với 4 đỉnh A, B, C, D. Khi đó ta được 4 hình tam giác.

+ Nếu A_2 nằm trong một trong 4 tam giác đó (giả sử A_2 nằm trong tam giác ADA_1) Ta nối A_2 với A, D và A_1. Sau khi nối xong thì số tam giác tăng thêm 2.

+ Nếu A_2 nằm trên cạnh chung nối A_2 với A và C. Khi đó số tam giác cũng tăng thêm 2.

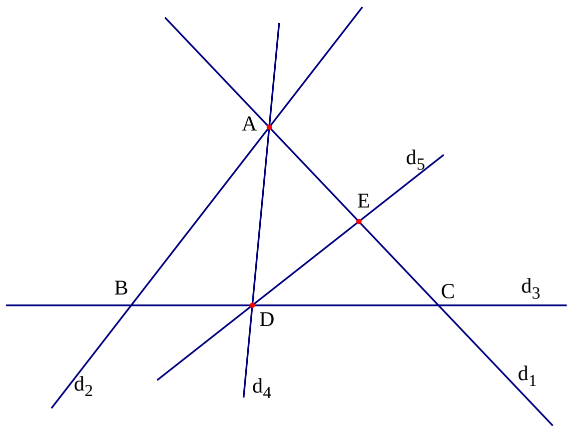
Như vậy trong mọi trường hợp, số tam giác sẽ tăng thêm 2. Với các điểm $A_3; A_4; ...; A_n$ ta làm tương tự.

Cuối cùng số tam giác được tạo thành là $4+2(n-1)=2n+2$ tam giác. Các tam giác trên đều có đỉnh là đỉnh của hình vuông hoặc n điểm đã cho. Khi đó, tổng diện tích của $2n+2$ tam giác này bằng diện tích hình vuông(bằng 1).

Theo nguyên lý cực hạn thì tồn tại tam giác có diện tích nhỏ nhất trong $2n+2$ tam giác ấy. Gọi diện tích này là S thì $S \le \frac{1}{2(n+1)}$. Ta có điều cần chứng minh.

Bài 16.

Giả sử tất cả các đường thẳng đã cho không đồng quy tại một điểm. Xét giao điểm A của hai đường thẳng tùy ý trong n đường thẳng đã cho. Kí hiệu hai đường thẳng này là d_1 và d_2. Với mỗi đường thẳng d_3 không đi qua điểm A ta xét khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng d_3. Trong số các cặp điểm A và đường thẳng d_3 như vậy ta chọn cặp điểm A và đường thẳng d_3 mà khoảng cách từ A đến d_3 là nhỏ nhất.

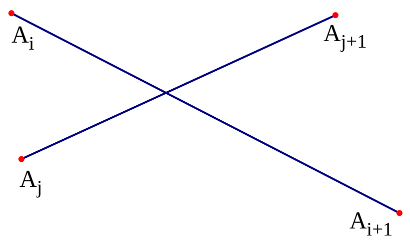


Giả sử đường thẳng d_3 cắt hai đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt tại B và C. Theo giả thiết của bài toán thì tồn tại đường thẳng d_4 đi qua A và cắt đường thẳng d_3 lại D. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử D thuộc đoạn BC. Qua D tồn tại đường thẳng d_5 cắt phần trong của đoạn thẳng AB hoặc AC. Giả sử đường thẳng d_5 cắt AC tại E nằm trong đoạn AC. Khi đó khoảng cách từ E đến đường thẳng d_3 nhỏ hơn khoảng cách từ A đến đường thẳng d_3, điều này mâu thuẫn với khoảng cách từ A đến d_3 là nhỏ nhất.

Vậy tất cả các đường thẳng đã cho đồng quy tại một điểm.

Bài 17.

Xét hệ tất cả các đường gấp khúc khép kín gồm có n khúc với n đỉnh chính là n điểm đã cho. Vì số đường gấp khúc là hữu hạn nên tồn tại một đường có tổng độ dài bé nhất. Gọi đường gấp khúc có tổng độ dài bé nhất là $A_1A_2...A_nA_1$. Khi đó nó chính là một đường gấp khúc cần tìm và không có hai cạnh nào của đường cắt nhau.



Thật vậy, ta giả sử hai cạnh của đường gấp khúc cắt nhau tại O là A_iA_{i+1} và A_jA_{j+1}.

Từ đó ta có $A_iA_{i+1} + A_jA_{j+1} > A_iA_j + A_{i+1}A_{j+1}$. Theo bất đẳng thức tam giác thì đường gấp khúc nhày khép kín và $A_1A_2...A_iA_jA_{j-1}...A_{i+1}A_{j+1}A_{j+2}...A_nA_1$ có tổng đội dài ngắn hơn đường gấp khúc đã chọn. Điều này mâu thuẫn. Do đó bài toán được chứng minh.

Bài 18. Giả sử sáu số nguyên dương $a_1;a_2;a_3;a_4;a_5;a_6$ thỏa mãn thỏa mãn yêu cầu bài toán

Ta có $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6$ và $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 79$

Ta có nhận xét, nếu $a_4 \geq 12$ thì $a_5 \geq 2a_4 = 24$ và $a_6 \geq 2a_5 = 48$.

Khi đó $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 > 12 + 24 + 48 > 79$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Do đó ta được $a_4 < 12$.

Để ý là trừ số đầu tiên thì các số còn lại trong dãy số trên là bội của số đứng trước nó, do đó ta có một cách chọn bốn số đầu tiên là $a_1 = 1; a_2 = 2; a_3 = 4; a_4 = 8$.

Ta có $a_5 = ma_4 = 8m$ và $a_6 = na_5 = 8mn$ với m, n là các số nguyên dương lớn hơn 1.

Mặt khác ta lại có $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 79$. Từ đó ta được

$$1 + 2 + 4 + 8 + 8m + 8mn = 79 \Rightarrow m(1+n) = 8$$

Giải phương trình nghiệm nguyên trên kết hợp với điều kiện số thứ sáu của dãy lớn nhất ta được $m = 2; n = 3$ nên ta được $a_6 = 48$.

Vậy dãy số cần tìm là 1; 2; 4; 8; 16; 48.

Bài 19. Gọi 21 số đó là $a_1; a_2; a_3; ...; a_{21}$. Không mất tính tổng quát ta giả sử $a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_{21}$. Khi đó ta được $a_{21} = 2014$.

Theo bài ra ta có $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{11} > a_{12} + a_{13} + ... + a_{21}$

Nên ta được $a_1 > (a_{12} - a_2) + (a_{13} - a_3) + ... + (a_{21} - a_{11})$.

Do $a_1; a_2; a_3; ...; a_{21}$ là 21 số guyên đôi một khác nhau và $a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_{21}$ nên ta suy ra được $a_{12} - a_2 \ge 10$; $a_{13} - a_3 \ge 10$; ...; $a_{21} - a_{11} \ge 10$.

Do đó ta được $a_1 > 100$ nên suy ra $a_1 \ge 101$. Theo bài ra trong 21 số trên có một số là 101 nên từ các kết quả trên ta suy ra được $a_1 = 101$.

Và ta có $101 > (a_{12} - a_2) + (a_{13} - a_3) + ... + (a_{21} - a_{11})$

Do đó $100 \ge (a_{12} - a_2) + (a_{13} - a_3) + ... + (a_{21} - a_{11})$ nên $a_{12} - a_2 = a_{13} - a_3 = ... = a_{21} - a_{11} = 10$

Từ đó ta được $a_{11} = a_{21} - 10 = 2014 - 10 = 2004$.

Từ $a_{11} = 2004$ đến $a_{21} = 2014$ có 11 số nguyên khác nhau nên ta được

$$a_{12} = 2005; a_{13} = 2006; ...; a_{20} = 2013$$

Từ đó ta được $a_2 = a_{12} - 10 = 2005 - 10 = 1995; a_3 = a_{13} - 10 = 2006 - 10 = 1996; ...; a_{10} = 2004$.

Vậy 19 số cần tìm là 19 số nguyên liên tiếp từ 1995 đến 2013.

Bài 20. Giả sử n là số tự nhiên chia 17 dư 10, khi đó $n \neq 0$ và n có dạng $n = 17k + 10$ với $k \in N$.

Gọi 100 số tự nhiên được chọn là $17k_1 + 10; 17k_2 + 10; 17k_3 + 10; ...; 17k_{100} + 10$.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $k_1 < k_2 < k_3 < ... < k_{100}$.

Nếu $k_{100} \geq 118$ thi khi đó $17k_{100} + 10 \geq 17.118 + 10 = 2016$. Do đó $k_{100} \leq 117$.

Ta sẽ chứng minh $k_3 \leq 20$. Thật vậy, giả sử $k_3 \geq 21$.

Khi đó từ $k_1 < k_2 < k_3 < ... < k_{100}$ suy ra $k_4 \geq k_3 + 1; k_5 \geq k_4 + 1; k_6 \geq k_5 + 1; ...; k_{100} \geq k_{99} + 1$

Nên từ $k_3 \geq 21$ suy ra $k_4 \geq 21 + 1 = 22; k_5 \geq 22 + 1 = 23; k_6 \geq 23 + 1 = 24; ...; k_{100} \geq 117 + 1 = 118$, điều này trái với $k_{100} \geq 118$. Do đó $k_3 \leq 20$. Vì $k_3 \leq 20$ nên suy ra $k_2 \leq 19; k_1 \leq 18$.

Với kết quả trên ta chon ba số nhỏ nhất trong 100 số trên là $17k_1 + 10; 17k_2 + 10; 17k_3 + 10$.
Khi đó ta được

$$17k_1 + 10 + 17k_2 + 10 + 17k_3 + 10 \leq (17.18 + 10) + (17.19 + 10) + (17.20 + 10) = 999$$

Vậy ta luôn chọn được ba số có tổng không lớn hơn 999. bài toán được chứng minh.

CHỦ ĐỀ 10. CÁC BÀI TOÁN SỬ DỤNG NGUYÊN LÝ BẤT BIẾN

Bài 1: Sau mỗi lần xé số mảnh tăng thêm 5, nên số mảnh sau mỗi lần xé có dạng 5k + 1 và 1995 khác dạng 5k + 1 còn 2011 có dạng 5k +1

Bài 2: Không

Bài 3: Gọi các số trên bảng là $a_1;a_2;....;a_k$ xét tích sau: $\left(2a_1-1\right)\left(2a_2-1\right)...\left(2a_k-1\right)$.Khi xóa đi 2 số $a_i;a_j$ thì tích mất đi 2 thừa số $\left(2a_i-1\right)\left(2a_j-1\right)$ nhưng lai nhân thêm thừa số : $2\left(a_i+a_j-2a_ia_j\right)-1=\left(2a_i-1\right)\left(2a_j-1\right)$, nên giá trị tuyệt đối của tích trên không đổi…Đáp số: còn lai số n và 2n – 1 = 0 nên n = $\frac{1}{2}$

Bài 4: Tính bất biến trong bài là tính chẵn hay lẻ của tổng hay hiệu hai đống kẹo. Tổng số kẹo của hai đống giảm đi hoặc số kẹo của đống thứ nhất giảm đi, như vậy trò chơi phải kết thúc , nên người thứ hai sẽ thắng.

Bài 5. Chẳng hạn như số ban đầu trên bảng là số

$$x=10a+b,\ a\in\left\{1;\ 2;\ 3;...;\ 9\right\};\ b\in\left\{0;\ 1;\ 2;\ 3;...;\ 9\right\}$$

Số mới thu được sau các thao tác như đề bài là $y=a+7b$

Ta thấy $y=x-9a+6b$

Số ban đầu ghi trên bảng là 6^{100} chia hết cho 3.

Theo như trên thì sau một số bước thực hiện thao tác như đề bài, số mới thu được cũng là một số cũng chia hết cho 3.

Vậy nên sau một số bước thực hiện thao tác như đề bài, thì không thể nào thu được 100^6, là một số không chia hết cho 3.

Bài 5. Gọi S là tổng của tất cả các số trên bảng. Lúc đầu ta có $S=1+2+3+\ldots+2n=n\left(2n+1\right)$ là một số lẻ vì n là một số lẻ. Ta cần tìm đại lượng bất biến.

Hai số bị xóa đi là a và b, không mất tính tổng quát ta giả sử $a>b$.

Khi đó số được thay vào là $\left|a-b\right|=a-b$.

Như vậy sau mỗi lần thực hiện thuật toán như trong đầu bài đã nói thì S sẽ bị giảm đi một một đại lượng có giá trị bằng $a+b-(a-b)=2b$ là một số chẵn. Vì thế tính chẵn lẻ của S được giữ nguyên sau mỗi lần thực hiện xáo hai số trên bảng. Trong trường hợp trên thì S luôn là một số lẻ và vì thế khi trên bảng còn lại một số thì số đó là số lẻ .

Bài 7. Với dãy số tự nhiên từ 1 đến 100 ta có tổng $1+2+3+...+100=\dfrac{(100+1).100}{2}=5050$

Tiến hành xóa hai số a, b bất kì trong dãy số trên và viết lại một số là a^3+b^3. Khi đó tổng dãy số trên bảng tăng một đại lượng $(a^3+b^3)-(a+b)$.

Ta thấy $1+2+3+...+100=5050$ chia 3 có số dư là 1.

Lại thấy $(a^3+b^3)-(a+b)=(a-1)a(a+1)+(b-1)b(b+1)$.

Do đó đại lượng tăng lên luôn chia hết cho 3. Như vậy sau mỗi lần tiến hành trò chơi thì tổng dãy số trên bảng luôn chia cho 3 có số dư là 1. Mà ta lại có 9876543212016 chia hết cho 3. Do đó sau một số lần tiến hành trò chơi thì trên bảng không thể còn lại số 9876543212016.

Bài 8. Cách đi của người đi sau như sau: Khi người đi trước bốc 2^k viên sỏi.

+ Nếu k là số lẻ thì 2^k chia 3 dư 2, người đi sau bốc 1 viên sỏi.

+ Nếu k là số chẵn thì 2^k chia 3 dư 1. người đi sau bốc 2 viên sỏi.

Như vậy người đi trước luôn đối mặt với tình huống số viên sỏi còn lại chia hết cho 3 và không bao giờ bốc được viên sỏi cuối cùng. Vậy người đi sau luôn thắng.

Bài 9. Để đảm bảo thắng cuộc, ở nước đi cuối cùng của mình người bốc sỏi đầu tiên phải để lại trong hộp 11 viên sỏi. Ở nước đi trước đó phải để lại trong hộp $11+(20+11)=42$ viên sỏi.

Suy ra người bốc sỏi đầu tiên phải đảm bảo trong hộp lúc nào cũng còn $11+31k$ viên sỏi.

Ta có $(2010-11):31=65$ dư 15. Như vậy người bốc sỏi đầu tiên ở lần thứ nhất của mình phải bốc 15 viên.

Tiếp theo, khi đối phương bốc k viên sỏi ($k=1, 2, ..., 20$) thì người bốc sỏi đầu tiên phải bốc $31-k$ viên sỏi, cuối cùng sẽ để lại 11 viên sỏi cho đối phương.

Bài 10.

Ta có $\frac{1}{z}=\frac{1+x+y}{xy}=\frac{1}{xy}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$. Khi đó ta được $\frac{1}{z}+1=\frac{1}{xy}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+1=\left(\frac{1}{x}+1\right)\left(\frac{1}{y}+1\right)$.

Như vậy sau mỗi lần xóa đi $\frac{1}{x}+1$ và $\frac{1}{y}+1$ thì ta thay bằng số $\frac{1}{z}+1=\left(\frac{1}{x}+1\right)\left(\frac{1}{y}+1\right)$.

Như vậy tích các số sau mỗi lần xóa và thay số mới là không đổi.

Do đó nếu k là số cuối cùng thì ta được $\frac{1}{k}+1=\left(\frac{1}{\frac{1}{1}}+1\right)\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}+1\right)...\left(\frac{1}{\frac{1}{2013}}+1\right)=2014!$

Từ đó ta được $k=\frac{1}{2014!-1}$.

Bài 11. Trước hết ta tô màu xen kẽ các ô hình quạt, như vậy ta có 5 ô được tô màu và 5 ô không được tô màu. Nếu di chuyển một viên bi ở ô màu và một viên bi ở ô không màu sang ô liền kề thì tổng số viên bi ở các ô màu cũng như ô không màu là không thay đổi. Nếu di chuyển hai viên bi ở mỗi ô màu sang ô không màu thì tổng số viên bi ở ô màu bị giảm đi 2. Còn nếu di chuyển hai viên bi ở hai ô không màu sang ô liền kề thì tổng số viên bi ở ô màu được tăng lên 2. Như vậy sau mỗi lần thực hiện trò chơi thỉ tổng số viên bi ở các ố màu không thay đổi tính chẵn lẻ so với lúc đầu. Mà ban đầu tổng số viên bi trong các ô màu là 5, như vây sau hữu nhạn lần thực hiện trò chơi thì tổng số viên bi trong các o màu luôn là số lẻ. Do đó tổng số viên bi trong các ô màu luôn khác 0 và khác 10. Như vậy sau một số lần thực hiện trò chơi ta không thể được tất cả các viên bi về cùng một ô được.

Bài 12. Tô màu các ô của hình vuông như hình vẽ dưới đây với màu đen(Đ) và màu trắng(T)

Đ	T	Đ
T	Đ	T
Đ	T	Đ

Đặt B là tổng các số ở các ô màu đen và W là tổng các số ở các ô màu trắng. Ta thấy vì mỗi lần thực hiện thuật toán T ta cộng thêm 2 số ở 2 ô cạnh nhau với một số nguyên nên dễ thấy rằng hiệu $B-W$ là không đổi

Nhưng với giả thuyết của bài toán thì ở hình a là $B-W=5$, còn ở hình b thì $B-W=-1$. Điều này trái với quy tắc bất biến ở trên. Vậy sau những lần thực hiện thuật toán T thì từ hình a ta không thể nhận được hình b

Bài 13. Ta tô các ô trên bàn cờ xen kẽ các màu đen trắng như bàn cờ vua(hình vẽ)

Đ	T	Đ	T	Đ	T	Đ	T
T	Đ	T	Đ	T	Đ	T	Đ
Đ	T	Đ	T	Đ	T	Đ	T
T	Đ	T	Đ	T	Đ	T	Đ
Đ	T	Đ	T	Đ	T	Đ	T
T	Đ	T	Đ	T	Đ	T	Đ
Đ	T	Đ	T	Đ	T	Đ	T
T	Đ	T	Đ	T	Đ	T	Đ

Do sự " bình đẳng màu " nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử rằng ô dưới cùng bên trái có màu trắng. Từ cách đi của con mã ta nhận thấy rằng sau mỗi nước đi con mã sẽ sang một ô khác màu với ô mà nó đang đứng . Vì thế sau một số lẻ nước đi con mã sẽ ở ô màu đen , sau một số chẵn nước đi con mã sẽ ở ô màu trắng . Đây là tính bất biến của chúng ta .

Trở lại bài toán ta thấy rằng đi từ ô dưới cùng bên trái lên ô trên cùng bên phảI cần đi 63 nước đi. Vì thế ô trên cùng bên phải sẽ cần mang màu đen(Theo như tính bất biến). Điều này là vô lý. Vậy quân mã không thể đi từ ô dưới cùng bên trái nên ô trên cùng bên phải như yêu cầu của đầu bài được .

Nhận xét Bài toán đã được giải quyết nhưng xung quanh bài toán này vẫn còn rất nhiều điều cần phải suy nghĩ. Chẳng hạn như khi xét bàn cờ X.X với X là một số lẻ thì liệu có một cách đi từ ô dưới cùng bên trái lên ô trên cùng bên phải và thoả mãn các yêu cầu của bài toán hay không?

Bài 14. Đây là một bài toán về lý thuyết số nhưng ta vẫn sẽ dùng bất biến để giải nó.

Tính bất biến này như sau: Ta thấy S sẽ không thay đổi số dư khi chia cho 4 nếu như ta đổi dấu của 4 số hạng liên tiếp

Thật vậy, nếu có 2 số dương và 2 số âm thì sẽ không có chuyện gì thay đổi, nếu có 1 số khác dấu 3 số còn lại thì khi đổi dấu thì giá trị của S sẽ thay đổi 4 hoặc -4 và điều này không ảnh hưởng gì tới số dư của S khi chia cho 4 cả, cuối cùng nếu 4 số cùng dấu thì khi đổi dấu S sẽ thay đổi một đại lượng là 8 hay -8 điều này dĩ nhiên cũng không ảnh hưởng gì tới số dư của S khi chia cho 4 .

Bây giờ quay lại bài toán, thực hiện thuật toán đổi dấu của 4 số hạng liên tiếp sao cho cuối cùng đưa tất cả n số thành số dương. Khi đó $S = n$ và theo tính bất biến thì S chia hết cho 4 (vì ban đầu $S = 0$ chia hết cho 4). Vậy n chia hết cho 4 và ta đã có kết luận cho bài toán .

Bài 15. Đường thẳng không đi qua điểm nào trong 2011 điểm trên nên khi d cắt một đoạn thẳng nào đó thì nó chia mặt phẳng thành hai nửa mà 2011 điểm trên nằm ở hai nửa mặt phẳng đối nhau và một nửa chứa chẵn số điểm, nửa còn lại chứa lẻ số điểm(do 2011 là số lẻ). Mặt khác khi nối chẵn số điểm ở nửa bên này với lẻ số điểm bên kia ta sẽ chứng minh được là số đoạn thẳng nối được là một số chẵn. Thật vậy, giả sử d chia các điểm trên nửa thứ nhất có m điểm(m chẵn) và nửa mặt phẳng kia chứa n điểm(n lẻ). Cứ một điểm bên nửa này nối được một đoạn thẳng với nửa bên kia nên số đoạn thẳng nối được là m.n, do m chẵn nên m.n chẵn. Bài toán được chứng minh.

Bài 16. Trước hết ta chỉ ra dược $a_k \in \{-1;+1\}, b_k \in \{-1;+1\}, a_k + b_l \in \{-2;0;+2\}$ $(k, l \in \{1,2,...n\})$.

+ Nếu đổi dấu của số ở một ô vuông thuộc hàng k và cột l thì các số a_k và b_l cũng đổi dấu theo, các số còn lại (của dãy $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$) không đổi dấu. Hơn nữa, khi đó tổng $a_k + b_l$ không đổi, hoặc tăng thêm 4 hoặc giảm đi 4.

+ Mỗi bảng với một cách điền số nào đó, đều được suy ra từ bảng gồm toàn số $+1$ bằng cách thực hiện đổi dấu một số phần tử. Tổng $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ của bảng sau khi đổi kém tổng $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ của bảng toàn số 1 một số là bội của 4.

+ Khi đó tổng của bảng sau khi đổi $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + b_1 + b_2 + \cdots + b_n \equiv 2n \pmod 4$

Do n lẻ nên $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + b_1 + b_2 + \cdots + b_n \equiv 2 \pmod 4$

Vậy với mọi cách điền số ta luôn có $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + b_1 + b_2 + \cdots + b_n \neq 0$.

Bài 17. Nhận thấy m và n khác 1, 2, 5. Chia hình chữ nhật m.n thành m.n ô vuông đơn vị và đánh số các hàng từ dưới lên, đánh số các cột từ trái qua phải. Ta gọi ô $(p;q)$ là ô nằm ở hàng thứ p và cột thứ q. Hai hiên gạch hình móc câu có thể ghép được thành các hình dưới đây.

X	O	O	O
X	O	X	O
X	X	X	O

O	O	O	
O	X	O	
	X	O	X
	X	X	X

Do đó để lát được hình chữ nhật m.n thì tích m.n phải chia hết cho 12. Nếu một trong hai số m và n chia hết cho 4 thì có thể lát được hình chữ nhật m.n. Thật vậy, nếu m chia hết cho 4 và n chia hết cho 3 thì hình chữ nhật m.n có thể chia thành các hình chữ nhật 4.3 và do đó có lát được. Nếu m chia hết cho 4 và n không chia hết cho 3 thì ta có thể viết n về dạng $n = 3a + 4b$ với a và b là các số nguyên dương, khi đó bảng m.n có thể lát được.

Bây giờ ta chứng minh một trong hai số m và n chia hết cho 4. Giả sử ngược lại cả m và n cùng chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4. Để chứng minh được điều này không xẩy ra ta cần tạo ra một bất biến. Để tạo ra bất biến ta điền vào các ô của hình chữ nhật theo quy tắc sau: Xét ô $(p;q)$. Nếu hai tọa độ p và q cùng chia hết cho 4 thì ta điền vào ô $(p;q)$ số 1, nếu chỉ p hoặc q chia hết cho 4 thì ta điền vào ô $(p;q)$ số 2. Với các điền như vậy thì ta thu được bất biến là tổng các số trong các ô ở hình thứ nhất và hình số hai đều là số lẻ. Do m và n là số chẵn nên tổng các số trong các ô ở hình chữ nhật m.n là số chẵn. Muốn lát được hình chữ nhật m.n thì tổng số hình thứ nhất và hình thứ hai phải là số chẵn. Khi đó m.n chia hết cho 24, điều này không xảy ra vì m, n không chia hết cho 4.

Bài 18.

- Với bảng thứ nhất ta thay các dấu cộng trong bảng bằng $+1$ và các dấu trừ trong bảng bằng -1. Rõ ràng tích tất cả các số trong các ô vuông hoặc tính chẵn lẻ của các dấu trừ hoặc tính chẵn lẻ của tổng các số không phải là bất biến. Mặc dù tích các số trong tất cả các ô vuông của bảng không phải là bất biến nhưng có thể tích các số trong một số ô vuông cố định lại là bất biến. Để tìm các ô vuông cố định này ta cần tìm tập hợp các ô vuông sao cho khi thực hiện biến đổi số ô vuông có thể đảo dấu luôn là số chẵn. Dễ thấy tập hợp các ô vuông được đánh dấu x trong bảng sau có tính chất như thế:

	x	x	x	x	
x					x
x					x
x					x
x					x
	x	x	x	x	

Tại trạng thái xuất phát tích tất cả các số trong các ô vuông được đánh dấu nói trên là -1. Do tính nàu là bất biến nên sau một số phép biến đổi ta không thể đưa bảng về trạng thái khong có dấu trừ được(vì khi đó tích tất cả các ố được dánh dấu là $+1$).

- Với bảng thứ hai ta lập luận tương tự bảng thứ nhất.

- Với bảng thứ ba ta thay các dấu cộng trong bảng bằng $+1$ và các dấu trừ trong bảng bằng -1. Rõ ràng tích tất cả các số trong các ô vuông hoặc tính chẵn lẻ của các dấu trừ hoặc tính chẵn lẻ của tổng các số không phải là bất biến. Mặc dù tích các số trong tất cả các ô vuông của bảng không phải là bất biến nhưng có thể tích các số trong một số ô vuông cố định lại là bất biến. Để tìm các ô vuông cố định này ta cần tìm tập hợp các ô vuông sao cho khi thực hiện biến đổi số ô vuông có thể đảo dấu luôn là số chẵn. Dễ thấy tập hợp các ô vuông được đánh dấu x trong bảng sau có tính chất như thế:

	x	x	x	x	
x					x
x					x
	x				x
		x			x
			x	x	

Tại trạng thái xuất phát tích tất cả các số trong các ô vuông được đánh dấu nói trên là -1. Do tính này là bất biến nên sau một số phép biến đổi ta không thể đưa bảng về trạng thái khong có dấu trừ được (vì khi đó tích tất cả các ố được dánh dấu là $+1$).

Bài 19. Giả sử ba số trên bảng là a,b,c, khi thay a,b bằng $x=\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ và $y=\frac{|a-b|}{\sqrt{2}}$.

Khi đó ta có $x^2+y^2=\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{|a-b|}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2}{2}=a^2+b^2$.

Như vậy sau khi xoá 2 số a,b thay bởi hai số mới $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ và $\frac{|a-b|}{\sqrt{2}}$ thì tổng bình phương hai số mới không đổi. Do đó tổng bình phương của ba số trên bảng không đổi và bằng $2+4+\frac{1}{2}=\frac{13}{2}$.

Mặt khác tổng bình phương ba số $\frac{1}{2\sqrt{2}};\ \sqrt{2};\ 1+\sqrt{2}$ là $\left(\frac{1}{8}+2+3+2\sqrt{2}\right)\neq\frac{13}{2}$. Vậy không thể đồng thời trên bảng ba số $\frac{1}{2\sqrt{2}};\ \sqrt{2};\ 1+\sqrt{2}$

Bài 20. Trong quá trình biến đổi, giả sử trên bảng có dãy số $a_1;\ a_2;\ ...;\ a_n$

Ta xét biểu thức sau: $P=\left|(a_1-2)(a_2-2)...(a_n-2)\right|$. Ta chứng minh su mỗi lần xóa thì giá trị biểu thức P giảm đi hai lần.

Giả sử ta xóa đi hai số a và b khi đó tích P mất đi thừa số $(a-2)(b-2)$ nhưng khi thay bằng $a+b-\frac{1}{2}ab$ thì tích P có thêm thừa số $\left|a+b-\frac{1}{2}ab-2\right|=\frac{|(a-2)(b-2)|}{2}$ giảm đi một nửa nên P giảm đi một nửa. Khi xóa đi hai số và thay bằng một số nên sau mỗi lần xóa trên bảng giảm đi một số.

Mà trên bảng có 2014 số nên sau 2013 lần xóa thì P giảm đi 2^{2013} lần.

Khi đó ta có giá trị $P=|(1-2)(2-2)...(2014-2)|=0$

Giả sử số còn lại trên bảng là x khi đó ta có $P=|x-2|=0 \Rightarrow x=2$

Vậy số cuối cùng trên bảng là 2.

Bài 21. Trong dãy số trên có số $\frac{403}{2015}=\frac{1}{5}$.

Nếu xóa hai số a và b bất kì và thay bằng số mới là $c=a+b-5ab$, như vậy sau mỗi lần xóa dãy trên giảm đi một số. Như vậy sau 2014 lần xóa trên bảng còn lại một số.

Đến một lúc nào đó ta sẽ xóa $\frac{1}{5}$ và một số b thì ta thay bằng $c=\frac{1}{5}+b-5.\frac{1}{5}b=\frac{1}{5}$

Như vậy cứ xóa số $\frac{1}{5}$ thì lại xuất hiện số $\frac{1}{5}$. Vậy số cuối cùng còn lại là $\frac{1}{5}$

Mục lục

CHUYÊN ĐỀ SỐ HỌC

TÀI LIỆU THAM KHẢO

STT	Tên tác giả	Năm xuất bản	Tên tài liệu tham khảo	Tên nhà xuất bản	Nơi xuất bản
1	Vũ Hữu Bình	2012	*Nâng cao và phát triển 6, 9*	Nhà xuất bản giáo dục	Nhà xuất bản giáo dục
2	Nguyễn Vũ Thanh	2006	*Chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi toán THCS Số học (tái bản lần thứ hai)*	Nhà xuất bản giáo dục	Nhà xuất bản giáo dục
3	Văn Phú Quốc	2015	*Đột phá đỉnh cao bồi dưỡng học sinh giỏi chuyên đề số học*	NXB ĐH Quốc Gia HàNội	Tại nhà sách Khang Việt Q1 TP Hồ Chí Minh.
4	Nguyễn Công Lợi		*Các chuyên đề số học bồi dưỡng học sinh giỏi THCS*		