Chương IV. GIỚI HẠN

A. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

§1. DÃY CÓ GIỚI HẠN 0

1. Định nghĩa dãy số giới hạn 0

Định nghĩa:

Ta nói rằng **dãy số (u_n) có giới hạn là 0** (hay có giới hạn 0) nếu mọi số hạng của dãy đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn một số dương nhỏ tuỳ ý cho trước kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Khi đó ta viết $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n) = 0$, viết tắt là $\lim(u_n) = 0$ hoặc $\lim u_n = 0$ hoặc $u_n \to 0$

Nhận xét: Dãy số (u_n) có giới hạn 0 khi và chỉ khi dãy số $(|u_n|)$ có giới hạn 0

2. Một số dãy số có giới hạn 0 thường gặp

Sử dụng định nghĩa, người ta chứng minh được rằng

a. $\lim\frac{1}{n} = 0$; $\lim\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$; $\lim\frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0$;

Nói rộng hơn $\lim\frac{1}{\sqrt[k]{n}} = 0$ (k là số nguyên dương cho trước);

b. Dãy không đổi (u_n), với $u_n = 0$ có giới hạn 0.;

c. Nếu $|q| < 1$ thì $\lim q^n = 0$.

Các bạn được sử dụng kết quả này khi làm bài mà không phải chứng minh.

> **Thí dụ 1.**
>
> a. $\lim\frac{1}{3^n} = \lim\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$,
>
> b. $\lim\frac{2^n}{(-5)^n} = \lim\left(-\frac{2}{5}\right)^n = 0$, c) $\lim\frac{3^n}{\pi^n} = \lim\left(\frac{3}{\pi}\right)^n = 0$.

Định lý: Cho hai dãy số (u_n) và (v_n). Nếu $\begin{cases}|u_n| \le v_n \\ \lim v_n = 0\end{cases}$ thì $\lim u_n = 0$.

> **Thí dụ 2.** Chứng minh $\lim\frac{\sin(2n+3)}{5^n} = 0$.

Lời giải

Ta có: $\left|\frac{\sin(2n+3)}{5^n}\right| \le \frac{1}{5^n} = \left(\frac{1}{5}\right)^n$ và $\lim\left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$. Theo định lý trên ta có đpcm.

§2. DÃY CÓ GIỚI HẠN

1. Định nghĩa dãy số giới hạn

Xét dãy số (u_n) với $u_n = 9 + \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow u_n - 9 = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Ta có: $\lim(u_n - 9) = \lim\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Ta nói rằng dãy số đã cho có giới hạn là 9.

Một cách tổng quát, ta có:

Định nghĩa: Ta nói rằng **dãy số** (u_n) **có giới hạn là số thực** L nếu $\lim(u_n - L) = 0$

Khi đó ta viết $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n) = L$, viết tắt là $\lim(u_n) = L$ hoặc $\lim u_n = L$ hoặc $u_n \to L$.

Thí dụ 3. Chứng minh:

a. $\lim\frac{3.2^n - (1)^n}{2^n} = 3$; b. $\lim\frac{\sin\pi n + 4\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n}} = 4$

c. $\lim(u_n) = c$ với $u_n = c$ (c là hằng số).

Lời giải

a. Ta có $\lim\left(\frac{3.2^n + (-1)^n}{2^n} - 3\right) = \lim\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0 \Leftrightarrow \lim\frac{3.2^n - (1)^n}{2^n} = 0$

b. Ta có $\lim\left(\frac{\sin\pi n + 4\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n}} - 4\right) = \lim\frac{\sin\pi n}{\sqrt[3]{n}}$.

Ta có $\left|\frac{\sin\pi n}{\sqrt[3]{n}}\right| \le \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ và $\lim\frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0 \Rightarrow \lim\frac{\sin\pi n}{\sqrt[3]{n}} = 0$

$\Leftrightarrow \lim\left(\frac{\sin\pi n + 4\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n}} - 4\right) = 0 \Leftrightarrow \lim\frac{\sin\pi n + 4\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n}} = 4$ (đpcm)

c. Ta có $\lim(u_n - c) = \text{lin}(c - c) = \lim 0 = 0 \Leftrightarrow \lim(u_n) = c$ (đpcm).

2. Một số định lý

Định lý 1: Giả sử $\lim u_n = L$. Khi đó

a. $\lim|u_n| = |L|$ và $\lim\sqrt[3]{u_n} = \sqrt[3]{L}$.

b. Nếu $u_n \ge 0$ với mọi n thì $L \ge 0$ và $\lim\sqrt{u_n} = \sqrt{L}$.

Định lý 2: Giả sử $\lim u_n = L$, $\lim v_n = M$ và c là hằng số. Khi đó

a. các dãy số $(u_n + v_n)$, $(u_n - v_n)$, $(u_n.v_n)$, $(c.u_n)$ có giới hạn và

- $\lim(u_n + v_n) = L + M$
- $\lim(u_n - v_n) = L - M$
- $\lim(u_n.v_n) = L.M$
- $\lim(c.u_n) = c.L$.

b. Nếu $M \neq 0$ thì dãy số $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ có giới hạn và $\lim\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \frac{L}{M}$

Định lý 3: (Định lý kẹp về giới hạn)

Cho ba dãy số (v_n), (u_n), (w_n) và số thực L.

Nếu với mọi n ta có $\begin{cases} v_n \le u_n \le w_n \\ \lim v_n = \lim w_n = L \end{cases}$ thì (u_n) có giới hạn và $\lim u_n = L$.

Định lý 4: (Vai-ơ-xtơ-rat-xơ)

a. Dãy số tăng và bị chặn trên thì có giới hạn.

b. Dãy số giảm và bị chặn dưới thì có giới hạn.

3. Kết quả đáng nhớ

a. $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. ($e \approx 2,718281828459\ldots$)

b. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn ($|q| < 1$) là: $S = u_1 + u_1q + u_1q^2 + \ldots = \frac{u_1}{1-q}$

4. Các thí dụ

Thí dụ 1. Với k là số nguyên dương và c là hằng số, ta có: $\lim\frac{c}{n^k} = c\lim\frac{1}{n^k} = 0$

Thí dụ 2. $\lim\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{\sin(1+3n)}{n^2}} = \frac{3}{2}$ vì $\frac{9}{4}+\frac{\sin(1+3n)}{n^2} > 0$

và $\lim\left(\frac{9}{4}+\frac{\sin(1+2n)}{n^2}\right) = \frac{9}{4}$.

Thí dụ 3. Tìm các giới hạn sau đây:

a. $\lim\frac{2n^3+n^2-7}{9n^3-3n^2+n+1}$, b. $\lim\frac{13n^2-3n+2}{n^5+4n^2+1}$.

Lời giải

(Chia cho luỹ thừa bậc cao nhất của n trong mẫu thức của phân thức)

a. Chia tử thức và mẫu thức cho n^3 ta có:

$$\lim\frac{2n^3+n^2-7}{9n^3-3n^2+n+1} = \lim\frac{2+\frac{1}{n}-\frac{7}{n^3}}{9-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}} = \frac{2+0-0}{9-0+0+0} = \frac{2}{9}$$

b. Chia tử thức và mẫu thức cho n^5 ta có :

$$\lim\frac{13n^2-3n+2}{n^5+4n^2+1} = \lim\frac{\frac{13}{n^3}-\frac{3}{n^4}+\frac{2}{n^5}}{1+\frac{4}{n^3}+\frac{1}{n^5}} = \frac{0-0+0}{1+0+1} = 0.$$

Thí dụ 4. Tìm $\lim\left(\frac{n+1}{n}\right)^{3n+2}$.

Lời giải

Ta có:

$$\bullet\left(\frac{n+1}{n}\right)^{3n+2}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n+2}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}=\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{3}.\quad(1)$$

$$\bullet \lim\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=1+0+0=1.\quad(2)$$

$$\bullet \lim\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{3}=\lim\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]=e.e.e=e^3\quad(3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $\lim\left(\frac{n+1}{n}\right)^{3n+2}=1.e^3=e^3$.

Thí dụ 5. **Tính tổng** $S=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots$

Lời giải

Rõ ràng S là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1=\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{2}$ nên áp dụng công thức $S=\frac{u_1}{1-q}$ ta có $S=\frac{0,5}{1-0,5}=1$

Bạn biết thêm : Một cách minh hoạ hình học tổng trên.

Xét tam giác ABC có diện tích bằng 1.

Gọi $A_1, A_2, A_3, \ldots$ theo thứ tự là trung điểm AC, A_1C, A_2C,… và $B_1, B_2, B_3\ldots$ theo thứ tự là trung điểm BC, B_1C, B_2C,… ta có :

– Diện tích tam giác ABB_1 bằng $\frac{1}{2}$

– Diện tích tam giác AB_1A_1 bằng $\frac{1}{2^2}$

– Diện tích tam giác $A_1B_1B_2$ bằng $\frac{1}{2^3}$

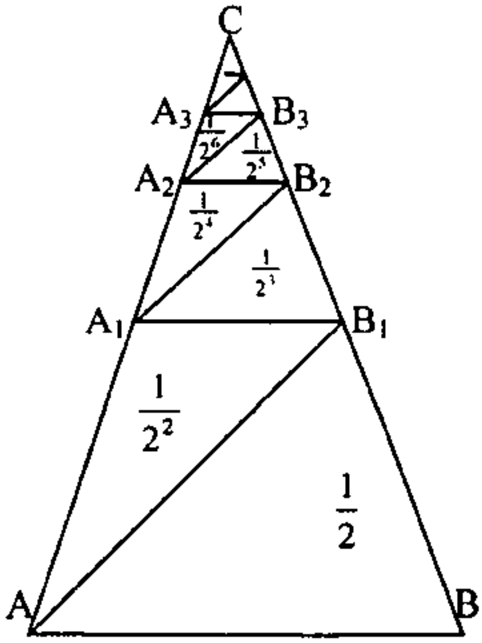
– Diện tích tam giác $A_1B_2A_2$ bằng $\frac{1}{2^4}$

– Diện tích tam giác $A_2B_2B_3$ bằng $\frac{1}{2^5}$

....

Tiếp diễn quá trình trên mãi mãi ta có

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots=1$$



Thí dụ 6. Đổi mỗi số thập phân vô hạn tuần hoàn sau thành phân số:

a. 0,33333…, b. 7,28282828….

Lời giải

a. Viết lại $0{,}3333\ldots = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \ldots$

$\Rightarrow$ 0,3333... là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = \frac{3}{10}$, $q = \frac{1}{10}$ nên

$$0{,}3333\ldots = \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{3}$$

b. Viết lại $7{,}28282828\ldots = 7 + 0{,}28282828\ldots$

Ta có: $0{,}28282828 = \frac{28}{100} + \frac{28}{100^2} + \frac{28}{100^3} + \frac{28}{100^4} + \ldots$

$\Rightarrow$ 0,28282828... là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = \frac{28}{100}$ $q = \frac{1}{100}$

nên $0{,}28282828\ldots = \frac{\frac{28}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{28}{99}$

Từ đó suy ra $7 + 0{,}28282828\ldots = 7 + \frac{28}{99} = \frac{721}{99}$ hay $7{,}28282828\ldots = \frac{721}{99}$.

Thí dụ 7. Gọi C là đường tròn đường kính AB = 2a (a là số thực dương cho trước)

C_1 là đường gồm hai nửa đường tròn đường kính $\frac{AB}{2}$,

C_2 là đường gồm bốn nửa đường tròn đường kính $\frac{AB}{2^2}$, ...

C_n là đường gồm 2^n nửa đường tròn đường kính $\frac{AB}{2^n}$,...

Gọi p_n là độ dài của C_n và S_n diện tích hình phẳng giới hạn bởi C_n và đoạn thẳng AB

a. Tính p_n và C_n.

b. Tìm giới hạn của các dãy số (p_n) và (S_n).

Lời giải

a. Mỗi đường tròn đường kính $\frac{AB}{2^n}$ có bán kính là $r_n = \frac{AB}{2^{n+1}} = \frac{2a}{2^{n+1}} = \frac{a}{2^n}$ suy ra

- Nửa chu vi của nó là πr_n hay $\frac{\pi a}{2^n} \Rightarrow p_n = \frac{2^n.\pi a}{2^n} = \pi a$
- Diện tích của nó là πr_n^2 hay $\pi\left(\frac{a}{2^n}\right)^2 \Rightarrow S_n = 2^n\pi\left(\frac{a}{2^n}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{2^n}$

b.

- Thấy rằng (p_n) là dãy số không đổi và $\lim p_n = \lim \pi a = \pi a$ (bằng nửa độ dài đường tròn đường kính AB).

• Thấy rằng (S_n) là cấp số nhân lùi vô hạn có $S_1 = \dfrac{\pi a^2}{2}$, công bội là $q = \dfrac{1}{2}$

Bởi vậy, theo định nghĩa tổng của cấp số nhân lùi vô hạn ta có:

$$\lim S_n = \frac{u_1}{1-q} = \frac{\dfrac{\pi a^2}{2}}{1-\dfrac{1}{2}} = \pi a^2.$$ (bằng diện tích đường tròn đường kính AB).

> **Thí dụ 8.** Cho $|q| < 1$, $|Q| < 1$. Biết rằng:
>
> $a = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \ldots$
>
> $b = 1 + Q + Q^2 + \ldots + Q^{n-1} + \ldots$
>
> Tính tổng $S = 1 + qQ + q^2Q^2 + \ldots + q^nQ^n + \ldots$

Lời giải

Thấy rằng:

• a là tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = 1$ và có công bội là q

• b là tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = 1$ và có công bội là Q

• S là tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = 1$ và có công bội là qQ

Theo công thức tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn ta có

$$+\ a = \frac{1}{1-q} \Rightarrow q = 1 - \frac{1}{a}. \qquad (1)$$

$$+\ b = \frac{1}{1-Q} \Rightarrow Q = 1 - \frac{1}{b} \qquad (2)$$

$$+\ S = \frac{1}{1-qQ} \qquad (3)$$

Thay (1), (2) vào (3) có: $S = \dfrac{1}{1-\left(1-\dfrac{1}{a}\right)\left(1-\dfrac{1}{b}\right)} = \dfrac{ab}{ab-(a-1)(b-1)} = \dfrac{ab}{a+b-1}$

§3. DÃY DẦN TỚI VÔ CỰC

1. Các định nghĩa

Định nghĩa 1: Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn là $+\infty$ nếu mọi số hạng của dãy số đều lớn hơn một số dương lớn tuỳ ý cho trước kể từ một số hạng nào đó trở đi. Khi đó ta viết:

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = +\infty$, viết tắt là $\lim(u_n) = +\infty$

hoặc $\lim u_n = +\infty$ hoặc $u_n \to +\infty$.

Định nghĩa 2: Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn là $-\infty$ nếu mọi số hạng của dãy số đều nhỏ hơn một số âm bé tuỳ ý cho trước kể từ một số hạng nào đó trở đi. Khi đó ta viết:

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = -\infty$, viết tắt là $\lim(u_n) = -\infty$

hoặc $\lim u_n = -\infty$ hoặc $u_n \to -\infty$.

Thí dụ 1.

- $\lim n = +\infty$; $\lim \sqrt{n} = +\infty$; $\lim \sqrt[3]{n} = +\infty$; $\lim 2^n = +\infty$
- $\lim(1 - 2n) = -\infty$; $\lim \sqrt[3]{-n} = -\infty$; $\lim 2^n = +\infty$

Chú ý:

+ Các dãy số có giới hạn là $+\infty$ và $-\infty$ được gọi chung là các dãy số có giới hạn vô cực hay dần đến vô cực.

+ Dãy số có giới hạn là số thực L được gọi là dãy số có giới hạn hữu hạn.

2. Vài quy tắc tìm giới hạn vô cực

Vì $+\infty$ và $-\infty$ không phải là các số thực nên không áp dụng được các định lý trong §2.

Ta thừa nhận các quy tắc sau:

<table>
<tr><td rowspan="5"><u>Quy tắc 1</u>
Nếu $\lim u_n = \pm\infty$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim(u_n v_n)$ được cho trong bảng bên:</td><td>$\lim u_n$</td><td>$\lim v_n$</td><td>$\lim(u_n v_n)$</td></tr>
<tr><td>$+\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$-\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td rowspan="5"><u>Quy tắc 2</u>
Nếu $\lim u_n = \pm\infty$ và $\lim v_n = L \neq 0$ thì $\lim(u_n v_n)$ được cho trong bảng bên:</td><td>$\lim u_n$</td><td>Dấu của L</td><td>$\lim(u_n v_n)$</td></tr>
<tr><td>$+\infty$</td><td>+</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$+\infty$</td><td>−</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$-\infty$</td><td>+</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$-\infty$</td><td>−</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td rowspan="5"><u>Quy tắc 3</u>
Nếu $\lim u_n = L \neq 0$, $\lim v_n = 0$ và $v_n \neq 0$ thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n}$ được cho trong bảng bên:</td><td>Dấu của L</td><td>Dấu của v_n</td><td>$\lim(u_n v_n)$</td></tr>
<tr><td>+</td><td>+</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>+</td><td>−</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>−</td><td>+</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>−</td><td>−</td><td>$+\infty$</td></tr>
</table>

Chú ý: • Nếu $\lim v_n = 0$ và $v_n \neq 0$ thì $\lim \dfrac{1}{|v_n|} = +\infty$.

• Nếu $\lim |u_n| = +\infty$ thì $\lim \dfrac{1}{|u_n|} = 0$.

Thí dụ 2. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim \dfrac{3 + n^2}{1 - 2n}$; b. $\lim \dfrac{2n^3 - n + 3}{5n^2 + 3n + 1}$

Lời giải

Chia cả tử thức và mẫu thức cho luỹ thừa bậc cao nhất của n trong mỗi phân thức ta có:

a. $\lim \dfrac{3 + n^2}{1 - 2n} = \lim \dfrac{\dfrac{3}{n} + n}{\dfrac{1}{n} - 2} = -\infty$ (vì $\lim\left(\dfrac{3}{n} + n\right) = +\infty$, $\lim\left(\dfrac{1}{n} - 2\right) = -2$)

$$\text{b. } \lim\frac{2n^3-n+3}{5n^2+4n-1}=\lim\frac{2n-\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}{5+\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}}=+\infty$$

(vì $\lim\left(2n-\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}\right)=0$, $\lim\left(5+\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}\right)=5$).

$$\text{c. } \lim\frac{13-2n^2+3n^3}{1-7n^3}=\lim\frac{\frac{13}{n^3}-\frac{2}{n}+3}{\frac{1}{n^3}-7}=\frac{0-0+3}{0-7}=-\frac{3}{7}$$

Nhận xét: Bằng cách chia tử và mẫu cho lũy thừa bậc cao nhất của n trong mẫu thức như cách làm trong thí dụ trên ta thu được kết quả sau:

Gọi $\alpha=\lim\frac{a_pn^p+a_{p-1}n^{p-1}+\ldots+a_1n+a_0}{b_qn^q+b_{q-1}n^{q-1}+\ldots+b_1n+b_0}$ (p, q là số nguyên dương)	$p<q$	$p=q$	$P>q$
	$\alpha=0$	$\alpha=\frac{a_p}{b_q}$	$\alpha=\infty$

Thí dụ 3. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$;

b. $\lim\left(\frac{1}{n-\sqrt{n^2+1}}-\frac{1}{n+\sqrt{n^2+1}}\right)$

Lời giải

a. Ta có $\lim\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$ (vì $\lim\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)=+\infty$)

$$\text{b. } \lim\left(\frac{1}{n-\sqrt{n^2+1}}-\frac{1}{n+\sqrt{n^2+1}}\right)=\lim\frac{2\sqrt{n^2+1}}{\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)}$$

$$=\lim\frac{2\sqrt{n^2+1}}{-1}=\lim\left(-2\sqrt{n^2+1}\right)=-\infty$$

Thí dụ 4. Tìm $\lim\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{2n.\sqrt{1+3+5+\ldots+(2n-1)}}$.

Lời giải

Ta có: $\lim\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{2n.\sqrt{1+3+5+\ldots+(2n-1)}}=\lim\frac{n(n+1)(2n+1)}{6.2n.\sqrt{n^2}}$

$$=\lim\frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^2}=\lim\frac{n\left(\frac{1}{n}+1\right)\left(\frac{2}{n}+1\right)}{12}=+\infty.$$

Thí dụ 5. Tìm $\lim\sqrt{2.3^n - n + 5}$.

Lời giải

Theo Thí dụ 5§1 chương I : $(1 + a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2$,

Với a = 2 có: $(1 + 2)^n \geq 1 + 2n + 2n(n - 1)$ hay $3^n \geq 1 + 2n^2$ suy ra

$$2.3^n - n + 5 \geq 2(1 + 2n^2) - n + 5 = 4n^2 - n + 7 = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 + 3n^2 + \frac{23}{4} > 1\ \forall n \in N^*$$

Suy ra $0 \leq \frac{1}{\sqrt{2.3^n - n + 5}} \leq \frac{1}{\sqrt{4n^2 - n + 7}}$. (1)

Lại có $\lim\frac{1}{\sqrt{4n^2 - n + 7}} = 0$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $\lim\frac{1}{\sqrt{2.3^n - n + 5}} = 0 \Rightarrow \lim\sqrt{2.3^n - n + 5} = +\infty$.

Thí dụ 6. Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn bằng 6 và tổng của hai số hạng đầu bằng $\frac{9}{2}$. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân ấy.

Lời giải

Gọi u_1, q theo thứ tự là số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đã cho.

Tổng của cấp số nhân bằng 6 nghĩa là $S = \frac{u_1}{1-q} = 6 \Rightarrow u_1 = 6(1 - q)$ (1)

Tổng hai số hạng đầu bằng $\frac{9}{2}$ nghĩa là $u_1 + u_1q = \frac{9}{4} \Leftrightarrow u_1(1 + q) = \frac{9}{4}$ (2)

Thay (1) vào (2) có $6(1 - q)(1 + q) = \frac{9}{2} \Leftrightarrow 1 - q^2 = \frac{3}{4}$

$$\Leftrightarrow q^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow q = \pm\frac{1}{2}.$$

Thay vào (1): * Với $q = \frac{1}{2}$ có $u_1 = 6(1 - \frac{1}{2}) = 3$

* Với $q = -\frac{1}{2}$ có $u_1 = 6(1 + \frac{1}{2}) = 9$

Vậy ta có hai cặp số hạng đầu và công bội của cấp số nhân thoả mãn yêu cầu bài toán là: $(u_1 = 3; q = \frac{1}{2})$, $(u_1 = 9; q = -\frac{1}{2})$.

Thí dụ 7. Cho dãy số (u_n) : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} - 3, \text{khi } n \geq 2 \end{cases}$ (1)

a. Chứng minh dãy (v_n) xác định bởi $v_n = u_n + 6$ là một cấp số nhân.

b. Tìm $\lim u_n$.

Lời giải

a. Ta có $v_n = u_n + 6 \Leftrightarrow u_n = v_n - 6$ (2)

Thay (2) vào (1) có $v_{n+1} - 6 = \dfrac{v_n - 6}{2} - 3 \Leftrightarrow v_{n+1} = \dfrac{v_n}{2} \Rightarrow (v_n)$ là cấp số nhân với công bội $q = \dfrac{1}{2}$ và $v_1 = 1 + 6 = 7$.

Bởi thế (v_n) có số hạng tổng quát là $v_n = 7.\dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Thay vào (2) ta có $u_n = \dfrac{7}{2^{n-1}} - 6$. Đó là số hạng tổng quát của dãy số (u_n).

b. $\lim u_n = \lim\left(\dfrac{7}{2^{n-1}} - 6\right) = 0 - 6 = -6$. Vậy $\lim u_n = -6$.

BÀI TẬP

Bài 1. Tìm các giới hạn sau

a. $\lim\dfrac{1+n-2n^2}{2-n+n^2}$, b. $\lim\dfrac{1+4n}{1+n^2-5n^3}$, c. $\lim\dfrac{13n^2+8n-1}{4n^3+n+3}$.

Bài 2. Tìm các giới hạn sau :

a. $\lim\dfrac{1+2+3+...+n}{1+n^3}$, b. $\lim(\sqrt{n+\sin^2(n+1)} - \sqrt{n-\cos^2(n+1)})$

Bài 3. Tìm các giới hạn sau :

a. $\lim\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{2n+1}$, b. $\lim\dfrac{2^n+1}{3^n+2^{n+1}}$, c. $\lim\sqrt{3.4^n - n + 1}$.

Bài 4. Cho dãy số (u_n): $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3} + 4, \text{khi } n \geq 2 \end{cases}$

a. Gọi (v_n) là dãy xác định bởi $v_n = u_n + \alpha$. Tìm α để (v_n) là một cấp số nhân.

b. Tìm $\lim u_n$.

Bài 5. Biểu thị mỗi số thập phân vô hạn tuần hoàn sau dưới dạng phân số

a. 2,22222….; b. 5,123123123…

Bài 6. Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. Hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ có đỉnh là trung điểm các cạnh của hình vuông ABCD, hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ có đỉnh là trung điểm các cạnh của hình vuông $A_1B_1C_1D_1$,…, hình vuông $A_nB_nC_nD_n$ có đỉnh là trung điểm các cạnh của hình vuông $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}D_{n-1}$,….Gọi p_1, p_2,… p_n,…và S_1, S_2,…, S_n,… theo thứ tự là chu vi và diện tích các hình vuông $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$,…, $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}D_{n-1}$,….

a. Tìm giới hạn các dãy số (p_n) và (S_n).

b. Tìm các tổng $p_1 + p_2 + … + p_n + …$ và $S_1 + S_2 + … + S_n + …$

Bài 7. Cho $a \in (0; \dfrac{\pi}{4})$. Tính tổng $1 - \tan^2 a + \tan^4 a + … + (-1)^{(n-1)}\tan^{2(n-1)} a + …$

Bài 8. Cho $|q|<1$. Tính các tổng sau:

a. $1 + 2q + 3q^2 + \ldots + nq^{n-1} + \ldots$

b. $1 + 4q + 9q^2 + \ldots + n^2q^{n-1} + \ldots$

c. $1 + 8q + 27q^2 + \ldots + n^3q^{n-1} + \ldots$

B. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ. HÀM SỐ LIÊN TỤC

§4. KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. Các định nghĩa

a. Giới hạn tại một điểm

Giả sử x_0 là một điểm thuộc khoảng (a; b), f(x) là một hàm số xác định trên khoảng (a; b) có thể không xác định tại x_0.

Định nghĩa 1 (giới hạn hữu hạn)

Ta nói rằng **hàm số f có giới hạn là số thực L khi** x **dần đến** x_0 (hoặc **tại điểm** x_0) nếu với mọi dãy số (x_n) trong tập hợp $(a; b)\setminus\{x_0\}$ (tức là $x_n \in (a; b)$ và $x_n \neq x_0$) mà $\lim x_n = x_0$ ta đều có $\lim f(x_n) = L$.

Khi đó ta viết: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ hoặc $f(x) \to L$ khi $x \to x_0$.

(Theo định nghĩa đó :

- Nếu f(x) = c (hằng số) thì $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} c = c$.
- Nếu f(x) = x thì $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.)

Định nghĩa 2 (giới hạn vô cực)

Ta nói rằng **hàm số f có giới hạn là vô cực khi** x **dần đến** x_0 (hoặc **tại điểm** x_0) nếu với mọi dãy số (x_n) trong tập hợp $(a; b)\setminus\{x_0\}$ (tức là $x_n \in (a; b)$ và $x_n \neq x_0$) mà $\lim x_n = x_0$ ta đều có $\lim f(x_n) = \infty$.

Khi đó ta viết $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ hoặc $f(x) \to \infty$ khi $x \to x_0$.

b. Giới hạn tại vô cực

Định nghĩa 3 (tại vô cực)

- Giả sử hàm số f(x) xác định trên khoảng $(a; +\infty)$

Ta nói rằng **hàm số f có giới hạn là số thực L khi** x **dần đến** $+\infty$ nếu với mọi dãy số (x_n) trong khoảng $(a; +\infty)$ (tức là $x_n > a$ với mọi n) mà $\lim x_n = +\infty$ ta đều có $\lim f(x_n) = L$.

Khi đó ta viết: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ hoặc $f(x) \to L$ khi $x \to +\infty$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ được định nghĩa tương tự.

c. Giới hạn một bên

Định nghĩa 4 (giới hạn phải)

Giả sử f(x) là một hàm số xác định trên khoảng $(x_0; b)$ $(x_0 \in \mathbb{R})$.

Ta nói rằng hàm số f có **giới hạn phải** là số thực L khi x dần đến x_0 (hoặc tại điểm x_0) nếu với mọi dãy số (x_n) trong khoảng $(x_0; b)$ mà $\lim x_n = x_0$ ta đều có $\lim f(x_n) = L$.

Khi đó ta viết: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$ hoặc $f(x) \to L$ khi $x \to x_0^+$.

Định nghĩa 5 (giới hạn trái)

Giả sử f(x) là một hàm số xác định trên khoảng $(a; x_0)$ $(x_0 \in R)$.

Ta nói rằng hàm số f có **giới hạn trái** là số thực L khi x dần đến x_0 (hoặc tại điểm x_0) nếu với mọi dãy số (x_n) trong khoảng $(a; x_0)$ mà $\lim x_n = x_0$ ta đều có $\lim f(x_n) = L$.

Khi đó ta viết $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$ hoặc $f(x) \to L$ khi $x \to x_0^-$.

Nhận xét: Hàm số f có $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ khi và chỉ khi nó có $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$

Điều nói trên đúng cả giới hạn vô cực.

II. Định lý và quy tắc

1. Giới hạn hữu hạn

Định lý 1: Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M$ $(L, M \in R)$. Khi đó

a. $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x) + g(x)\right] = L + M$;

b. $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x) - g(x)\right] = L - M$;

c. $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x)g(x)\right] = LM$. Đặc biệt, nếu c là hằng số thì $\lim\limits_{x \to x_0} \left[c.f(x)\right] = c.L$.

d. Nếu $M \neq 0$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$

(Giới hạn của tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm số tại một điểm bằng tổng, hiệu, tích, thương các giới hạn của chúng tại điểm đó.(trong trường hợp thương, giới hạn cuả mẫu phải khác không)).

Nhận xét: Nếu k là số nguyên dương và a là hằng số thì với mọi $x_0 \in R$, ta có:

$$\lim_{x \to x_0} ax^k = ax_0^k$$

Định lý 2: Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$. Khi đó

a. $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |L|$;

b. $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{L}$;

c. Nếu $f(x) \geq 0$ với mọi $x \neq x_0$ thì $L \geq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$

Định lý 3: (kẹp) Giả sử f, h và g là ba hàm số xác định trên khoảng (a; b) chứa điểm x_0 (có thể không xác định tại x_0).

Nếu $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ với mọi $x \in (a; b) \setminus \{x_0\}$ và $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L$ $(L \in R)$

thì $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = L$.

Chú ý:

Ba định lý vừa nêu trên đây đúng cả khi thay $x \to x_0$ bởi $x \to +\infty$ hoặc $x \to -\infty$.

Ba định lý vừa nêu trên đây không áp dụng được cho giới hạn vô cực.

Định lý 4: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1.$

2. Giới hạn vô cực

Khi gặp giới hạn vô cực, bạn có thể áp dụng các quy tắc sau :

Quy tắc 1	$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_n v_n)$
Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L \neq 0$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)g(x)]$ được cho trong bảng bên:	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Quy tắc 2	$\lim u_n$	Dấu của L	$\lim(u_n v_n)$
Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \neq 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ và $g(x) \neq 0$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ được cho trong bảng bên:	$+\infty$	+	$+\infty$
	$+\infty$	−	$-\infty$
	$-\infty$	+	$-\infty$
	$-\infty$	−	$+\infty$

Chú ý 1:

- Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ và $g(x) \neq 0$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{|g(x)|} = +\infty$
- Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{|f(x)|} = 0$

Chú ý 2: Một số kết quả thường sử dụng

- $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{x^k} = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x^k} = 0$, với mọi số nguyên dương k cho trước
- $\lim\limits_{x\to +\infty} x^k = +\infty$; $\lim\limits_{x\to -\infty}(x^k) = \begin{cases} +\infty, \text{ khi } k \text{ chẵn} \\ -\infty, \text{ khi } k \text{ lẻ} \end{cases}$

§5. CÁC KỸ THUẬT TÌM GIỚI HẠN

I. Kỹ thuật tìm giới hạn dạng xác định

Kĩ thuật 1. Áp dụng trực tiếp định lý và qui tắc

Thí dụ 1. Tìm các giới hạn sau

a. $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2 - x + 5)$, b. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-3}{x+1}$, c. $\lim\limits_{x\to 1}(x - \sqrt{5x^2+4})$

Lời giải

a. $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2 - x + 5) = 3.2^2 - 2 + 5 = 15$

b. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-3}{x+1} = \dfrac{4^2-3}{4+1} = \dfrac{15}{5} = 3$

c. $\lim\limits_{x\to 1}(x-\sqrt{5x^2+4}) = 1-\sqrt{5.1+4} = 1-3 = 2.$

Thí dụ 2. Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{2x^2-5x+2}{1-2x}$;   b. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+2x-8}{x^2+4x}$.

Lời giải

a. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{2x^2-5x+2}{1-2x} = \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{(2x-1)(x-2)}{1-2x} = \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(2-x) = \dfrac{3}{2}.$

b. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+2x-8}{x^2+4x} = \lim\limits_{x\to -4}\dfrac{(x-2)(x+4)}{x(x+4)} = \lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x-2}{x} = \dfrac{3}{2}.$

Lời bình 1: Giới hạn của hàm số tại điểm x = a không phụ thuộc hàm số tại điểm ấy. Trong thí dụ vừa nêu, hàm số có giới hạn mặc dầu tại đó hàm số không tồn tại.

Thí dụ 3(P)**.** Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x-5}{7x^2+5x-2}$;   b. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-1}{3x-2\sqrt{x^2+5}}$

Lời giải

a. Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to -1}(4x-9) = -13 < 0\\ \lim\limits_{x\to -1}(7x^2+5x-2) = 0\end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x-5}{7x^2+5x-2} = -\infty.$

b. Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2}(x-1) = 1 > 0\\ \lim\limits_{x\to 2}(3x-2\sqrt{x^2+5}) = 0\end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-1}{3x-2\sqrt{x^2+5}} = +\infty.$

Thí dụ 4(P)**.** Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ với $f(x) = \begin{cases}x-3, \text{ khi } x < 1\\ x = -13, \text{ khi } x = 1\\ 1-\sqrt{7x^2+2}, \text{ khi } x > 1\end{cases}$;

b. $\lim\limits_{x\to -2}g(x)$ với $g(x) = \begin{cases}\dfrac{3x-2}{x+1}, \text{ khi } x < -2\\ x+10, \text{ khi } x \geq -2\end{cases}$.

Lời giải

a. Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-}f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(x-3) = -2\\ \lim\limits_{x\to 1^+}f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(1-\sqrt{7x^2+2}) = -2\end{cases}$

Vậy $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}f(x) = -2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}f(x) = -2$

b. Ta có $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -2^-} g(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{3x-2}{x+1} = 8 \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} (x+10) = 8 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to -2} g(x) = 8.$

Lời bình 2: Giới hạn của hàm số và giá trị của hàm số tại điểm lấy giới hạn có thể bằng nhau, có thể khác nhau (đó cũng là lẽ tự nhiên). Trong thí dụ trên:

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) \neq f(1) = -13;\ \lim\limits_{x\to -2} g(x) = g(-2) = 8.$

Thí dụ 5[(P)].

a. Tìm các giới hạn của hàm số $g(x) = \begin{cases} \dfrac{3x-2}{x+1}, \text{khi } x < 0 \\ x+10, \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$ tại $x = 0$.

b. Tìm m để hàm số $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3+1}{x+1}, \text{khi } x < -1 \\ mx^2 - x + m^2, \text{khi } x \geq -1 \end{cases}$ có giới hạn tại $x = -1$.

Lời giải

a. Ta có: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{3x-2}{x+1} = -2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x+10) = 10 \end{cases}.$

Thấy rằng $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ nên hàm số không có giới hạn tại $x = 0$.

b. Ta có: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} h(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x^3+1}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^-} (x^2 - x + 1) = 3 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} h(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} (mx^2 - x + m^2) = m^2 + m + 1 \end{cases}$

Hàm số có giới hạn tại $x = -1$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} h(x)$

$\Leftrightarrow 3 = m^2 + m + 1 \Leftrightarrow m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow \{m = 1;\ m = -2\}$

Lời bình 3. Mặc dầu hàm số xác định tại điểm x = a, nhưng giới hạn của hàm số tại điểm ấy chưa chắc đã tồn tại. Câu a) trong thí dụ trên muốn nói với bạn điều đó.

Thí dụ 6[(P)]. Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^2 - x + 1}{x^2 + 2x + 3}$; b. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3 - 5x + 3}{3x^2 + 4x - 1}$; c. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{5+x}{4 + 5x - 2x^3}$

Lời giải

a. Chia cả tử thức và mẫu thức cho x^2, ta có:

$$\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{7x^2 + 2x + 3} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{7 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} = \frac{2 - 0 + 0}{7 + 0 + 0} = \frac{2}{7}.$$

b. Chia cả tử thức và mẫu thức cho x^2, ta có:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-5x+3}{3x^2+4x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}{3+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{3}=+\infty$$

c. Chia cả tử thức và mẫu thức cho x^2, ta có:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5+x}{4+5x-2x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{5}{x^3}+\frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x^3}+\frac{5}{x^2}-2}=\frac{0}{-2}=0$$

Nhắc lại: Để tính giới hạn tại vô cực, bạn có thể chia cho luỹ thừa bậc cao nhất của x có trong mẫu thức.

Thí dụ 7[(P)]. Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-4x}{x^2+1}$ b. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-9x+4x^3}{3-2x^2}$

Lời giải

a. Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4-4x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-\frac{4}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty.$

Tương tự $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4-4x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty.$

Thấy rằng: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4-4x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4-4x}{x^2+1}=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-4x}{x^2+1}=+\infty$

b. Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-9x+4x^3}{3-2x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x^3}-\frac{9}{x^2}+4x}{\frac{3}{x^2}-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x)=-\infty$

Tương tự $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-9x+4x^3}{3-2x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x)=+\infty$

Thấy rằng $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-9x+4x^3}{3-2x^2}\neq\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-9x+4x^3}{3-2x^2}$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-9x+4x^3}{3-2x^2}$ không tồn tại.

Thí dụ 8[(P)]. (kẹp) Tìm giới hạn $K=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3\sin 2x+2\cos 3x}{2x^2+2x+1}$.

Lời giải

Với mọi $x \in R$ có $0 \le \dfrac{|2\sin 3x + 3\cos 2x|}{2x^2+2x+1} \le \dfrac{3+2}{2x^2+x+1} = \dfrac{5}{2x^2+x+1}$

Ta có $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5}{2x^2+x+1} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{|2\sin 3x + 3\cos 2x|}{2x^2+2x+1} = 0 \Rightarrow K = 0.$

II. Kĩ thuật tìm giới hạn dạng vô định

1. Dạng $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}$: $\lim\limits_{x\to\Delta} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, trong đó $\lim\limits_{x\to\Delta} f(x) = \lim\limits_{x\to\Delta} g(x) = 0$, hoặc $\begin{cases} \lim\limits_{x\to\Delta} f(x) = \pm\infty \\ \lim\limits_{x\to\Delta} g(x) = \pm\infty \end{cases}$

2. Dạng $0.\infty$: $\lim\limits_{x\to\Delta} [f(x)g(x)]$, trong đó $\lim\limits_{x\to\Delta} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\Delta} g(x) = \pm\infty$.

3. Dạng $\infty-\infty$: $\lim\limits_{x\to\Delta} [f(x)-g(x)]$, trong đó $\left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\Delta} f(x) = \lim\limits_{x\to\Delta} g(x) = +\infty \\ \text{hoặc } \lim\limits_{x\to\Delta} f(x) = \lim\limits_{x\to\Delta} g(x) = -\infty \end{array}\right.$

($\lim\limits_{x\to\Delta}$ được hiểu Δ thay cho một trong các kí tự x_0, x_0^+, x_0^-, $+\infty$, $-\infty$)

Để tìm giới hạn các dạng trên, bạn phải khử dạng vô định. Các bạn theo dõi một số kỹ thuật thường dùng để khử dạng vô định trong mỗi thí dụ dưới đây.

Kĩ thuật 2. Khử nhân tử chung

Thí dụ 9(P). (dạng $\dfrac{0}{0}$). Tìm $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{1+x^3}{1-x^2}$

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{1+x^3}{1-x^2} = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{(1+x)(1+x+x^2)}{(1+x)(1-x)} = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{1+x+x^2}{1-x} = -\dfrac{1}{2}$.

Thí dụ 10(P). (dạng $\dfrac{0}{0}$) Tìm $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{3x^2+5x-2}{x^3-3x+2}$

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{3x^2+5x-2}{x^3-3x+2} = \lim\limits_{x\to-2} \dfrac{(x+2)(3x-1)}{(x+2)(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to-2} \dfrac{3x-1}{(x-1)^2} = -\dfrac{7}{9}$.

Thí dụ 11. (dạng $0.\infty$) Tìm $\lim\limits_{x\to1^+} (1-x)\sqrt{\dfrac{x+5}{x^2+2x-3}}$.

Lời giải

Với mọi $x > 1$ ta có $(1-x)\sqrt{\dfrac{x+5}{x^2+2x-3}} = -(x-1)\sqrt{\dfrac{x+5}{(x-1)(x+3)}}$

$$= -\sqrt{\frac{(x-1)^2(x+5)}{(x-1)(x+3)}} = -\sqrt{\frac{(x-1)(x+5)}{x+3}}$$

Nên $\lim\limits_{x\to 1^+}(1-x)\sqrt{\dfrac{x+5}{x^2+2x-3}} = -\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{\dfrac{(x-1)(x+5)}{x+3}} = 0.$

Kĩ thuật 3. Nhân biểu thức liên hợp

Hằng đẳng thức	Liên hợp với a−b	Liên hợp với a + b
$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$	$a+b$	$a-b$
$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$	a^2-ab+b^2	a^2-ab+b^2
$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$	A liên hợp với B thì B liên hợp với A	

Thí dụ 12(P). (dạng $\dfrac{0}{0}$) Tìm $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{2x+\sqrt{3x^2+1}}$.

Lời giải

Nhân cả tử thức và mẫu thức với $2x-\sqrt{3x^2+1}$ (biểu thức liên hợp của mẫu thức)

ta có $\dfrac{(x^2-1)(2x-\sqrt{3x^2+1})}{(2x+\sqrt{3x^2+1})(2x-\sqrt{3x^2+1})} = \dfrac{(x^2-1)(2x-\sqrt{x^2+1})}{4x^2-(3x^2+1)}$

$$= \frac{(x^2-1)(2x-\sqrt{x^2+1})}{x^2-1} = 2x-\sqrt{3x^2+1}.$$

Suy ra $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{2x+\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to -1}(2x-\sqrt{3x^2+1}) = -4.$

Thí dụ 13(P). (dạng $\dfrac{0}{0}$) Tìm $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x-5\sqrt{x-1}}{3-\sqrt{x+4}}$.

Lời giải

Ta có:

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x-1}}{3-\sqrt{x+4}} = \lim_{x\to 5}\frac{(\sqrt{2x-1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-1})(3+\sqrt{x+4})}{(3-\sqrt{x+4})(3+\sqrt{x+4})(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-1})}$$

$$= \lim_{x\to 5}\frac{2x(3+\sqrt{x-1})}{5-x} = +\infty \left(\text{vì } \begin{cases} \lim\limits_{x\to 5}[2x(3+\sqrt{x-1})] = 50 > 0 \\ \lim\limits_{x\to 5}(5-x) = 0 \end{cases}\right)$$

Thí dụ 14(P). (dạng $\dfrac{0}{0}$) Tìm $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{12x+1}}{4x}$

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{12x+1}}{4x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1^3-(12x+1)}{4x[1+\sqrt[3]{12x+1}+\sqrt[3]{(12x+1)^2}]}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-3}{1+\sqrt[3]{12x+1}+\sqrt[3]{(12x+1)^2}} = \frac{-3}{1+1+1} = -1$$

Nên $\lim\limits_{x\to 1^+}(1-x)\sqrt{\dfrac{x+5}{x^2+2x-3}} = -\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{\dfrac{(x-1)(x+5)}{x+3}} = 0.$

Kĩ thuật 3. Nhân biểu thức liên hợp

Hằng đẳng thức	Liên hợp với a–b	Liên hợp với a + b
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$	$a + b$	$a - b$
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$	$a^2 - ab + b^2$	$a^2 - ab + b^2$
$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$	A liên hợp với B thì B liên hợp với A	

Thí dụ 12(P)**.** (dạng $\dfrac{0}{0}$) Tìm $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{2x+\sqrt{3x^2+1}}$.

Lời giải

Nhân cả tử thức và mẫu thức với $2x-\sqrt{3x^2+1}$ (biểu thức liên hợp của mẫu thức)

ta có $\dfrac{(x^2-1)(2x-\sqrt{3x^2+1})}{(2x+\sqrt{3x^2+1})(2x-\sqrt{3x^2+1})} = \dfrac{(x^2-1)(2x-\sqrt{x^2+1})}{4x^2-(3x^2+1)}$

$$= \frac{(x^2-1)(2x-\sqrt{x^2+1})}{x^2-1} = 2x-\sqrt{3x^2+1}.$$

Suy ra $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{2x+\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to -1}(2x-\sqrt{3x^2+1}) = -4.$

Thí dụ 13(P)**.** (dạng $\dfrac{0}{0}$) Tìm $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x-5\sqrt{x-1}}{3-\sqrt{x+4}}$.

Lời giải

Ta có:

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x-1}}{3-\sqrt{x+4}} = \lim_{x\to 5}\frac{(\sqrt{2x-1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-1})(3+\sqrt{x+4})}{(3-\sqrt{x+4})(3+\sqrt{x+4})(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-1})}$$

$$= \lim_{x\to 5}\frac{2x(3+\sqrt{x-1})}{5-x} = +\infty \left(\text{vì } \begin{cases}\lim\limits_{x\to 5}[2x(3+\sqrt{x-1})] = 50 > 0\\ \lim\limits_{x\to 5}(5-x) = 0\end{cases}\right)$$

Thí dụ 14(P)**.** (dạng $\dfrac{0}{0}$) Tìm $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{12x+1}}{4x}$

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{12x+1}}{4x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1^3-(12x+1)}{4x[1+\sqrt[3]{12x+1}+\sqrt[3]{(12x+1)^2}]}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-3}{1+\sqrt[3]{12x+1}+\sqrt[3]{(12x+1)^2}} = \frac{-3}{1+1+1} = -1$$

Kĩ thuật 4. Đổi biến

Thí dụ 18[P]**.** (Dạng $\infty - \infty$) Tìm giới hạn $K = \lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2} - \sqrt{x^2-2x})$

Lời giải

Viết lại $K = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{3}{x}} - \sqrt{1-\dfrac{2}{x}}\right)\right]$. Đặt $\dfrac{1}{x} = y$.

Khi $x \to \infty \Leftrightarrow y \to 0$, ta có:

$$K = \lim_{y\to0}\frac{\sqrt[3]{1+3y}-\sqrt{1-2y}}{y} = \lim_{y\to0}\left(\frac{\sqrt[3]{1+3y}-1}{y} - \frac{\sqrt{1-2y}-1}{y}\right) = 1 + 1 = 2$$

Tóm lại: $K = 2$.

Thí dụ 19[P]**.** (Dạng $\dfrac{0}{0}$) Tìm $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[4]{2x-1}+\sqrt[5]{x-2}}{x-1}$.

Lời giải

Đặt $x = t + 1$, $x \to 1$ khi và chỉ khi $t \to 0$, ta có

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[4]{2x-1}+\sqrt[5]{x-2}}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{\sqrt[4]{1+2t}+\sqrt[5]{t-1}}{t} = \lim_{t\to0}\left(\frac{\sqrt[4]{1+2t}-1}{t} - \frac{\sqrt[5]{1-t}-1}{t}\right)$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{5} = \frac{7}{10}.$$

Tóm lại $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[4]{2x-1}+\sqrt[5]{x-2}}{x-1} = \dfrac{7}{10}$.

Thí dụ 20.(Dạng $0.\infty$) Tìm $\lim\limits_{x\to5}(5-x)\tan\dfrac{\pi x}{10}$.

Lời giải

Đặt $x = 5 - t$. Khi $x \to 5 \Leftrightarrow t \to 0$. Ta có:

$$\lim_{t\to0} t.\tan\frac{\pi(5-t)}{10} = \lim_{t\to0} t.\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi t}{10}\right) = \lim_{t\to0}\frac{t}{\tan\frac{\pi t}{10}} = \frac{10}{\pi}\lim_{t\to0}\frac{\frac{\pi t}{10}}{\operatorname{tg}\frac{\pi t}{10}} = \frac{10}{\pi}\cdot1$$

Tóm lại: $\lim\limits_{x\to5}(5-x)\tan\dfrac{\pi x}{10} = \dfrac{10}{\pi}$

Lời bình: Với mọi $a \neq 0$, bằng cách đặt $x = a - t$, bạn có kết quả:

$$\lim_{x\to a}(a-x)\tan\frac{\pi x}{2a} = \frac{2a}{\pi}.$$

III. Phương pháp gọi số hạng vắng

Bản chất khử dạng không xác định $0/0$ của bài toán tìm giới hạn là làm xuất hiện nhân tử chung để:

* Hoặc là khử nhân tử chung đưa về dạng xác định.

* Hoặc là đưa về dạng "cơ bản", quen thuộc đã biết rõ kết quả hoặc cách giải.

Trong các bài tập khó, các hạng tử cấu thành nhân tử chung thường thiếu vắng. Để giải quyết bài toán, **điểm mấu chốt** là khôi phục các hạng tử **thiếu vắng** đó. Việc khôi phục, gọi lại các hạng tử đó như thế nào, bằng cách nào, sẽ được trình bày trong ba phương pháp dưới đây.

Kĩ thuật 5. Gọi số hạng vắng bằng hệ số bất định

Thí dụ 21(P). Tìm $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x^3}-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}$

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x^3}-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sqrt{5-x^3}-2}{x^2-1}-\dfrac{\sqrt[3]{x^2+7}-2}{x^2-1}\right)$ (1)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x^3}-2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x^3}{(x^2-1)(\sqrt{5-x^3}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-(x^2+x+1)}{(x+1)(\sqrt{5-x^3}+2)}=-\frac{3}{8} \qquad (2)$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2+7}-2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{(x^2-1)(\sqrt[3]{(x^2+7)^2}+2\sqrt[3]{x^2+7}+4)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt[3]{(x^2+7)^2}+2\sqrt[3]{x^2+7}+4}=\frac{1}{12} \qquad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1) có: $A=-\dfrac{3}{8}-\dfrac{1}{12}=\dfrac{-11}{24}$.

Lời bình 1: Trong lời giải trên ta đã thêm bớt 2 vào tử thức của f(x). Ba câu hỏi đặt ra:

(1). Tại sao phải có số 2?

(2). Tại sao lại là số 2?

(3). Tìm số 2 như thế nào?

Trả lời ba câu hỏi đó ta có phương pháp giải loại toán này.

* Trả lời câu hỏi 1: Số 2 là hạng tử đã bị xoá. Muốn giải, ta phải khôi phục nó.

* Trả lời câu hỏi 3: Cách tìm số 2, thực hiện theo các bước sau đây:

Bước 1: Với mọi $c\in R$, luôn có : $f(x)=\left(\dfrac{\sqrt{5-x^3}-c}{x^2-1}-\dfrac{\sqrt[3]{x^2+7}-c}{x^2-1}\right)$

Bước 2: Trong các số c đó, ta tìm số c sao cho x^2-1 cùng có nhân tử chung với $f_1(x)=\sqrt{5-x^3}-c$ và $f_2(x)=\sqrt[3]{x^2+7}-c$. Điều đó xảy ra khi và chỉ khi c là nghiệm của tuyển:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} f_1(1)=0 \\ f_2(1)=0 \end{cases} \\ \begin{cases} f_1(-1)=0 \\ f_2(-1)=0 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=2 \\ \begin{cases} c=\sqrt{6} \\ c=2 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow c=2.$$

Đó cũng là câu trả lời tại sao lại là số 2.

Qua thí dụ trên, chúng ta nêu lên thuật toán như sau:

• ***Thuật toán 1:*** Giả sử $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ có giới hạn dạng $\dfrac{0}{0}$

Bước 1: Phân tích $f(x)=\dfrac{f_1(x)+c}{g(x)}+\dfrac{f_2(x)-c}{g(x)}$.

Bước 2 (Tìm c): Gọi α_i (i = 1; 2;...) là nghiệm của g(x) = 0.

Khi đó c là nghiệm của hệ $\begin{cases} f_1(\alpha_i)+c=0 \\ f_2(\alpha_i)-c=0 \end{cases}$ (i = 1; 2;...)

Với c tìm được thì $\lim\limits_{x\to\alpha_i}\dfrac{f_1(x)+c}{g(x)}$ và $\lim\limits_{x\to\alpha_i}\dfrac{f_2(x)-c}{g(x)}$ sẽ hoặc là dạng xác định, hoặc là dạng quen thuộc.

Sau khi tìm được c, việc trình bày lời giải như đã làm.

Thí dụ 22. Tìm $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{8-x}}{x}$.

Lời giải

Bước 1: (Phân tích) $\forall c\in R$, luôn có: $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x+1}-c}{x}-\dfrac{2\sqrt[3]{1-\frac{x}{8}}-c}{x}$

Bước 2: (Tìm c). Nghiệm của mẫu thức là x = 0.

Suy ra c là nghiệm của hệ $\begin{cases} \sqrt{0+1}-c=0 \\ \sqrt{1-\frac{0}{8}}-c=0 \end{cases} \Leftrightarrow c=1$. Vậy

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{8-x}}{x}=2\left(\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}-\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{1-\frac{x}{8}}-1}{x}\right)=2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{24}\right)=\frac{13}{12}$$

Lời bình 2: Ở phương pháp 1, nhân tử chung được khử để đưa giới hạn về dạng xác định, hoặc dạng quen thuộc, hoặc dạng "cơ bản".

Thí dụ 23(P). Tìm $K=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin 3x}-\sqrt{\cos 2x}}$.

Lời giải

Gọi $A = \sqrt{1 + x\sin 3x} - \sqrt{\cos 2x} = (\sqrt{1 + x\sin 3x} - 1) + (1 - \sqrt{\cos 2x})$

$$= \frac{(\sqrt{1 + x\sin 3x} - 1)(\sqrt{1 + x\sin 3x} + 1)}{\sqrt{1 + x\sin 3x} + 1} - \frac{(1 - \sqrt{\cos 2x})(1 + \sqrt{\cos 2x})}{1 + \sqrt{\cos 2x}}$$

$$= \frac{x\sin 3x}{\sqrt{1 + x\sin 3x} + 1} + \frac{1 - \cos 2x}{\sqrt{\cos 2x} + 1} = \frac{x\sin 3x}{1 + \sqrt{1 + x\sin 3x}} + \frac{2\sin^2 x}{1 + \sqrt{\cos 2x}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{A}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x\sin 3x}{x^2(1 + \sqrt{1 + x\sin 3x})} + \frac{2\sin^2 x}{x^2(1 + \sqrt{\cos 2x})}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{3}{1 + \sqrt{1 + x\cos 3x}}\right) + \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{2}{1 + \sqrt{\cos 2x}}\right)$$

$$= 1.\frac{3}{2} + 1.1 = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1 + x\sin 3x} - \sqrt{\cos 2x}} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{A} = \frac{2}{5}.$$

Thí dụ 24[P]**.** (Chúng ta trở lại bài này trong phương pháp hai bằng thí dụ 28).

Tìm $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$.

Lời giải

Ta có: $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\left(\frac{\sqrt{1+2x} - 1}{x} - \frac{\sqrt[3]{1+3x} - 1}{x}\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\left(\frac{2}{\sqrt{1+2x} + 1} - \frac{3}{\sqrt[3]{(1+3x)^2} + \sqrt[3]{1+3x} + 1}\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x.}\cdot\frac{2(\sqrt[3]{(1+3x)^2} + \sqrt[3]{1+3x} + 1) - 3(\sqrt{1+2x} + 1)}{(\sqrt{1+2x} + 1)(\sqrt[3]{(1+3x)^2} + \sqrt[3]{1+3x} + 1)}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\dfrac{\sqrt[3]{(1+3x)^2} - 1}{x} + 2\dfrac{\sqrt[3]{1+3x} - 1}{x} - 3\dfrac{\sqrt{1+2x} - 1}{x}}{(\sqrt{1+2x} + 1)(\sqrt[3]{(1+3x)^2} + \sqrt[3]{1+3x} + 1)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2(\sqrt[3]{1+3x} + 1)\dfrac{\sqrt[3]{1+3x} - 1}{x} + 2\dfrac{\sqrt[3]{1+3x} - 1}{x} - 3\dfrac{\sqrt{1+2x} - 1}{x}}{(\sqrt{1+2x} + 1)(\sqrt[3]{(1+3x)^2} + \sqrt[3]{1+3x} + 1)}$$

$$= \frac{2(1+1).1 + 2.1 - 3.1}{(1+1)(1+1+1)} = \frac{1}{2}.$$ Tóm lại $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

Kĩ thuật 6. Gọi số hạng vắng bằng tách bộ phận kép

Áp dụng cho dạng $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt[m]{f(x)}-\sqrt[n]{g(x)}}{(x-a)^k}$.

{n, m, k là các số tự nhiên, $1 \le k \le \min(n, m)$ }

Thí dụ 25[(P)]. Tìm $K=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{8x^3+x^2+6x+9}-\sqrt[3]{9x^2+27x+27}}{x^3}$

Lời giải

Gọi $A = 8x^3 + x^2 + 6x + 9 = 8x^3 + (x + 3)^2 \Rightarrow A-(x + 3)^2 = 8x^3$.
Gọi $B = 9x^2 + 27x + 27 = x^3-(x + 3)^3 \Rightarrow (x + 3)^3-B = x^3$

Viết lại: $K=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{A}-(x+3)}{x^3}+\dfrac{(x+3)-\sqrt[3]{B}}{x^3}\right)$ (1)

Gọi $K_1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{A}-(x+3)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{A-(x+3)^2}{x^3(\sqrt{A}+x+3)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x^3}{x^3(\sqrt{A}+x+3)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8}{(\sqrt{A}+x+3)}=\dfrac{8}{\sqrt{9}+3}=\dfrac{4}{3}$ (2)

Gọi $K_2=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+3)-\sqrt[3]{B}}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+3)^3-B}{x^3[(x+3)^2+(x+3)\sqrt[3]{B}+\sqrt[3]{B^2}]}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x^3[(x+3)^2+(x+3)\sqrt[3]{B}+\sqrt[3]{B^2}]}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{[(x+3)^2+(x+3)\sqrt[3]{B}+\sqrt[3]{B^2}]}$

$=\dfrac{1}{3^2+3\sqrt[3]{27}+\sqrt[3]{27^2}}=\dfrac{1}{9+9+9}=\dfrac{1}{27}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra: $K=K_1+K_2=\dfrac{4}{3}+\dfrac{1}{27}=\dfrac{37}{27}$. Tóm lại $K=\dfrac{37}{27}$.

Qua thí dụ trên ta rút ra thuật toán như sau:

• ***Thuật toán 2:*** Để tìm $K=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt[m]{f(x)}-\sqrt[n]{g(x)}}{(x-a)^k}$ có dạng $\dfrac{0}{0}$

{ n, m, k là các số tự nhiên, $1 \le k \le \min(n, m)$ }

Ta biến đổi:

$$\dfrac{\sqrt[m]{f(x)}-\sqrt[n]{g(x)}}{(x-a)^k}=\dfrac{\sqrt[m]{f_1(x)+[h(x)]^m}-h(x)}{(x-a)^k}+\dfrac{h(x)-\sqrt[n]{g_1(x)+[h(x)]^n}}{(x-a)^k}$$

$$=\dfrac{f_1(x)}{(x-a)^kQ_f(x)}+\dfrac{g_1(x)}{(x-a)^kQ_g(x)}$$

($Q_f(x)$, $Q_g(x)$ theo thứ tự là biểu thức liên hợp của $\sqrt[n]{f(x)} - h(x)$, $h(x) - \sqrt[n]{g(x)}$)

Suy ra $K = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f_1(x)}{(x-a)^k Q_h(x)} + \lim\limits_{x\to a} \dfrac{g_1(x)}{(x-a)^k Q_g(x)}$.

Thí dụ 26(P). Tìm giới hạn $K = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos 2x - 2x} - \sqrt[4]{\sqrt{1+2x^2} - 4x}}{x^2}$.

Lời giải

Gọi $A = \cos 2x - 2x = 1 - 2x + x^2 - x^2 - (1 - \cos 2x) = (1-x)^2 - x^2 - 2\sin^2 x$

$\Leftrightarrow A - (1-x)^2 = -x^2 - 2\sin^2 x$

Gọi $B = \sqrt{1+2x^2} - 4x = 1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4 - x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 1 + \sqrt{1+2x^2}$

$= (1+x)^4 - x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 1 + \sqrt{1+2x^2}$.

$\Leftrightarrow (1+x)^4 - B = x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 1 - \sqrt{1+2x^2}$

Viết lại $K = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{A} - (1-x)}{x^2} + \dfrac{(1-x) - \sqrt[4]{B}}{x^2}\right)$ (1)

Gọi $K_1 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{A} - (1-x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{A - (1-x)^2}{x^2(\sqrt{A} + 1 - x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-x^2 - 2\sin^2 x}{x^2(\sqrt{A} + 1 - x)}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-1 - 2\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2}{(\sqrt{A} + 1 - x)} = \dfrac{-1 - 2.1}{\sqrt{1-0} + 1 - 0} = -\dfrac{3}{2}$ (2)

Gọi $K_2 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-x) - \sqrt[4]{B}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-x)^4 - B}{x^2\left[(1-x)^3 + (1-x)^2\sqrt[4]{B} + (1-x)\sqrt{B} + \sqrt[4]{B^3}\right]}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 1 - \sqrt{1+2x^2}}{x^2\left[(1-x)^3 + (1-x)^2\sqrt[4]{B} + (1-x)\sqrt{B} + \sqrt[4]{B^3}\right]}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - 4x + 6 - \dfrac{\sqrt{1+2x^2} - 1}{x^2}}{\left[(1-x)^3 + (1-x)^2\sqrt[4]{B} + (1-x)\sqrt{B} + \sqrt[4]{B^3}\right]}$

$= \dfrac{0 - 0 + 6 - 1}{1 + 1.1 + 1.1 + 1.1} = \dfrac{5}{4}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $K = K_1 + K_2 = \dfrac{5}{4} - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{1}{4}$. Tóm lại $K = -\dfrac{1}{4}$.

Thí dụ 27(P). Tìm $K = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{\sqrt{(1+2x)(1+x^2)} - \sqrt{(1+3x)(1+3x^2)}}$.

Lời giải

Ta có: $\dfrac{1}{K_2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{(1+2x)(1+x^2)} - \sqrt[3]{(1+3x)(1+3x^2)}}{x^3}$

Gọi $A = (1+2x)(1+x^2) = 2x^3 + (x+1)^2 \Rightarrow A - (x+1)^2 = 2x^3,\ \lim\limits_{x\to 0} A = 1$

Gọi $B = (1+3x)(1+3x^2) = 8x^3 + (x+1)^3 \Rightarrow (x+1)^3 - B = -8x^3, \lim\limits_{x\to 0} B = 1$

Viết lại $\dfrac{1}{K_2} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{A}-(x+1)}{x^3} + \dfrac{(x+1)-\sqrt[3]{B}}{x^3}\right)$ (1)

Gọi $I = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{A}-(x+1)}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{A-(x+1)^2}{x^3(\sqrt{A}+x+1)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3}{x^3(\sqrt{A}+x+1)}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{(\sqrt{A}+x+1)} = 1$ (2)

Gọi $J = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)-\sqrt[3]{B}}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)^3 - B}{x^3[(x+1)^2+(x+1)\sqrt[3]{B}+\sqrt[3]{B^2}]}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-8x^3}{x^3[(x+1)^2+(x+1)\sqrt[3]{B}+\sqrt[3]{B^2}]}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-8}{[(x+1)^2+(x+1)\sqrt[3]{B}+\sqrt[3]{B^2}]} = -\dfrac{8}{3}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra : $\dfrac{1}{K_2} = I + J = 1 - \dfrac{8}{3} = -\dfrac{5}{3} \Leftrightarrow K_2 = -\dfrac{3}{5}$

Chú ý:

1. Biểu thức $h(x)$ được nội suy trong $f(x)$, $g(x)$. Việc phân tách bộ phận kép $h(x)$ chỉ làm trên nháp, không cần trình bày trên bài làm. (Các bạn theo dõi thí dụ 28)

2. Các hạng tử của $h(x)$ chứa số mũ từ 0 đến $k-1$ có mặt vừa vặn trong các biểu thức của $f(x)$, $g(x)$. Đó là tín hiệu để gọi $h(x)$. Cần biết rằng một vài số hạng có thể ẩn (bị trung hoà bởi các số hạng) trong $f_1(x)$, $g_1(x)$ [thí dụ (4), (6)].

Thí dụ 28. (Trở lại Thí dụ 24).

Tìm giới hạn $K = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$ (1)

Lời giải

Viết lại $K = \lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sqrt{1+2x}-(1+x)}{x^2} + \dfrac{(1+x)-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}\right]$

$$= \lim_{x\to 0}\left\{\frac{-x^2}{\sqrt{1+2x}+1+x} + \frac{x^2(x+3)}{x^2\left[(1+x)^2+(1+x)\sqrt[3]{1+3x}+\sqrt[3]{(1+3x)^2}\right]}\right\}$$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{8-x}}{x}$ $\left(\frac{13}{12}\right)$ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{x}-1}$ $\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{5-x^2}}{x-1}$ $\left(\frac{7}{12}\right)$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x}}{x-1}$ $\left(\frac{1}{2}\right)$ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-\sqrt{3x-2}}{x-1}$ $\left(\frac{3}{2}\right)$ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x-3}+\sqrt[4]{2x-3}}{x-2}$ $\left(\frac{5}{6}\right)$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{-1}{\sqrt{1+2x}+1+x}+\frac{x+3}{(1+x)^2+(1+x)\sqrt[3]{1+3x}+\sqrt[3]{(1+3x)^2}}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}+\frac{3}{1+1+1}=\frac{1}{2}.\ \text{Tóm lại } K=\frac{1}{2}.$$

Kĩ thuật 7. Cọi số hạng vắng bằng tái hiện hệ thức cơ bản

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}=\frac{a}{n} \qquad (5)$$

Thí dụ 29[(P)]. Tìm $K=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^2+1998)\sqrt[7]{1-2x}-1998}{x}$.

Lời giải

Biến đổi:

$$\frac{(x^2+1998)\sqrt[7]{1-2x}-1998}{x}=\frac{(x^2+1998)\sqrt[7]{1-2x}-(x^2+1998)+(x^2+1998)-1998}{x}$$

$$= (x^2+1998)\frac{\sqrt[7]{1-2x}-1}{x}+x$$

$$\Rightarrow K=\lim_{x\to 0}\left[(x^2+1998)\frac{\sqrt[7]{1-2x}-1}{x}+x\right]=\lim_{x\to 0}(x^2+1998)\frac{\sqrt[7]{1-2x}-1}{x}+\lim_{x\to 0}x$$

$$=1998\left(-\frac{2}{7}\right)+0=-\frac{3996}{7}.\ \text{Tóm lại } K=-\frac{3996}{7}$$

Lời bình 3: Trong thí dụ trên, điểm mấu chốt là bớt – thêm $(x^2 + 1998)$ vào tử thức làm xuất hiện nhân tử $\dfrac{\sqrt[7]{1-2x}-1}{x}$ dẫn đến sự thành công của lời giải.

Qua thí dụ trên, ta nêu lên thuật toán như sau :

• ***Thuật toán 3:*** Giả sử $F(x)=\dfrac{P(x)\sqrt[n]{1+ax}+Q(x)}{x}$. Để tìm $\lim\limits_{x\to 0}F(x)$, ta biến đổi:

$$F(x)=\frac{P(x)\sqrt[n]{1+ax}-P(x)}{x}+\frac{P(x)+Q(x)}{x}=P(x)\frac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}+F_1(x)$$

$$\left(\text{với } F_1(x)=\frac{P(x)+Q(x)}{x}\right)$$

Suy ra: $\lim\limits_{x\to 0}F(x)=\dfrac{a}{n}\lim\limits_{x\to 0}P(x)+\lim\limits_{x\to 0}F_1(x)$.

Hạng tử vắng ở đây là P(x), đã "xưng danh"trong biểu thức giới hạn.

Lời bình 4: Khác với phương pháp 1, nhân tử chung trong phương pháp "Tái hiện hệ thức cơ bản" không giản ước. Khi tìm giới hạn, lim P(x) là một số xác định.

Lời bình 5: Thông thường ẩn x ở mẫu thức trong hệ thức cơ bản bị triệt tiêu khi F(x) có dạng thương các căn thức. (xem Thí dụ 30)

. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}\ \left(-\dfrac{5}{24}\right)$ $\quad\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}\ \left(\dfrac{1}{2}\right)$

Thí dụ 30[(P)]. Tìm giới hạn $A = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}\sqrt[3]{1+\frac{x}{2}}\sqrt[4]{1+\frac{x}{3}} - \sqrt[4]{1-x}}{\frac{3}{2}\sqrt{4+x} - \sqrt[3]{8-x} - \sqrt[4]{1-x}}$

Lời giải

Gọi tử thức là T, mẫu thức là M, ta có:

$$T = \sqrt{1+x}\sqrt[3]{1+\frac{x}{2}}\sqrt[4]{1+\frac{x}{3}} - \sqrt[4]{1-x}$$

$$\Leftrightarrow T = \sqrt{1+x}\sqrt[3]{1+\frac{x}{2}}\sqrt[4]{1+\frac{x}{3}} - \sqrt[3]{1+\frac{x}{2}}\sqrt[4]{1+\frac{x}{3}} + \sqrt[3]{1+\frac{x}{2}}\sqrt[4]{1+\frac{x}{3}}$$

$$- \sqrt[4]{1+\frac{x}{3}} + \sqrt[4]{1+\frac{x}{3}} - 1 - \sqrt[4]{1-x} + 1$$

$$\Leftrightarrow T = \sqrt[3]{1+\frac{x}{2}}\sqrt[4]{1+\frac{x}{3}}\left(\sqrt{1+x} - 1\right) + \sqrt[4]{1+\frac{x}{3}}\left(\sqrt[3]{1+\frac{x}{2}} - 1\right)$$

$$+ \left(\sqrt[4]{1+\frac{x}{3}} - 1\right) - \left(\sqrt[4]{1-x} - 1\right)$$

Áp dụng cơ bản (5) có : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{T}{x} = \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \dfrac{1}{3.4} + \dfrac{1}{4} = 1.$

Tương tự: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{M}{x} = \dfrac{5}{24}$. Suy ra: $A = \dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{T}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{M}{x}} = \dfrac{24}{5}$

Chú ý: Chúng ta cũng sử dụng phương pháp này để tái hiện các "giới hạn cơ bản–quen thuộc" còn lại được tích hợp trong các thí dụ về sau.

Kĩ thuật 8. Áp dụng các giới hạn cơ bản - quen thuộc

Thí dụ 31[(P)]. Tìm các giới hạn sau:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2x}$, 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(-x)}{\sin 5x}$.

Lời giải

1. Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{\sin 3x}{3x}\right) = \dfrac{3}{2}\lim\limits_{3x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x} = \dfrac{3}{2}\cdot 1 = \dfrac{3}{2}$

2. Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(-x)}{\sin 5x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{-1}{5}\cdot\dfrac{\frac{\sin(-x)}{-x}}{\frac{\sin 5x}{5x}}\right) = \dfrac{-1}{5}\cdot 1 = \dfrac{-1}{5}$

Lời bình: Chứng minh tương tự với mọi $a \neq 0, b \neq 0$ ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b},\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}.$$

Thí dụ 32[(P)]**.** Tìm các giới hạn sau:

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 20x}{11x}$, 2. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 9x}{\tan 6x}$

Lời giải

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 20x}{11x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{20}{11}\cdot\frac{\tan 20x}{20x}\cdot\frac{11x}{\tan 11x}\right) = \frac{20}{11}\cdot 1\cdot 1 = \frac{20}{11}.$

2. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 9x}{\tan 6x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{9}{6}\cdot\frac{\tan 9x}{9x}\cdot\frac{6x}{\tan 6x}\right) = \frac{9}{6}\cdot 1\cdot 1 = \frac{3}{2}.$

Lời bình: Chứng minh tương tự với mọi $ab \neq 0$ ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b};\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$$

Thí dụ 33[(P)]**.** Tìm $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}$.

Lời giải

Ta có: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{3x}{2}}{x^2} = \frac{9}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}}\right)^2 = \frac{9}{2}\cdot 1^2 = \frac{9}{2}$

Lời bình: Chứng minh tương tự với mọi $a \neq 0$ ta có: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{x^2} = \frac{a^2}{2}$.

Thí dụ 34[(P)]**.** Tìm $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{2x^2+1}}{1-\cos x}$.

Lời giải

Viết lại: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{2x^2+1}}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\sqrt{2x^2+1}}{x^2}\cdot\frac{x^2}{1-\cos x}\right)$ (1)

Ta có: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{2x^2+1}}{x^2} = -\frac{2}{2} = -1$, $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2\sin^2 x} = \frac{1}{2}$.

Thay vào (1) có $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{2x^2+1}}{1-\cos x} = -\frac{1}{2}$.

Thí dụ 35. Tìm giới hạn $K = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x.\cos 2x.\cos 3x}{x^2}$.

Lời giải

Viết lại: $1 - \cos x\cos 2x\cos 3x = (1 - \cos x) + (\underline{\cos x} - \underline{\cos x}\cos 2x) +$

$+ (\underline{\cos x\cos 2x} - \underline{\cos x\cos 2x}\cos 3x)$

$= (1 - \cos x) + \cos x(1 - \cos 2x) + \cos x\cos 2x(1 - \cos 3x)$

$$\Rightarrow K = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2} + \cos x\frac{1-\cos 2x}{x^2} + \cos x\cos 2x\frac{1-\cos 3x}{x^2}\right)$$

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{x^2} = \dfrac{a^2}{2}, \lim\limits_{x\to 0}\cos bx = 1$ $(a \neq 0, b \neq 0)$

Suy ra $K = \dfrac{1^2}{2} + 1.\dfrac{2^2}{2} + 1.1.\dfrac{3^2}{2} = 7.$

Thí dụ 36. Tìm giới hạn $K = \lim\limits_{n\to\infty}(\cos\dfrac{a}{2}\cos\dfrac{a}{2^2}\cos\dfrac{a}{2^3}\ldots\cos\dfrac{a}{2^n})$

Lời giải

Gọi $A = \cos\dfrac{a}{2}\cos\dfrac{a}{2^2}\cos\dfrac{a}{2^3}\ldots\cos\dfrac{a}{2^n}$

Trường hợp 1: $a = k2\pi$, ta có $A = 0 \Rightarrow K = 0$ (1)

Trường hợp 2: $a \neq k2\pi$, $\sin\dfrac{a}{2^n} \neq 0$

Ta có: $\cos\dfrac{a}{2^n} = \dfrac{\sin\dfrac{a}{2^{n-1}}}{2\sin\dfrac{a}{2^n}}$ nên A được viết lại

$$A = \frac{\sin a}{2\sin\frac{a}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{a}{2}}{2\sin\frac{a}{2^2}}\cdot\frac{\sin\frac{a}{2^2}}{2\sin\frac{a}{2^3}}\cdot\ldots\cdot\frac{\sin\frac{a}{2^{n-2}}}{2\sin\frac{a}{2^{n-1}}}\cdot\frac{\sin\frac{a}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{a}{2^n}} = \frac{\sin a}{2^n\sin\frac{a}{2^n}}.$$

Chú ý rằng khi $n \to \infty$ thì $\dfrac{a}{2^n} \to 0$ nên suy ra:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin a}{2^n\sin\frac{a}{2^n}} = \frac{\sin a}{a}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a}{2^n}}{\sin\frac{a}{2^n}} = \frac{\sin a}{a} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) kết luận : $K = 0$, nếu $a = k2\pi$; $K = \dfrac{\sin a}{a}$, nếu $a \neq k2\pi$.

Thí dụ 37. Tìm giới hạn $K = \lim\limits_{n\to\infty}\left(2^n\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}_{\text{n-dấu căn}}\right)$

Lời giải

Gọi $A_1 = \sqrt{3} = 2\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\cos\frac{\pi}{3.2^1}$

$$A_2 = \sqrt{2 + A_1} = \sqrt{2(1+\cos\frac{\pi}{3.2^1})} = \sqrt{2.2\cos^2\frac{\pi}{3.2^2}} = 2\cos\frac{\pi}{3.2^2}$$

$$A_3 = \sqrt{2 + A_2} = \sqrt{2(1+\cos\frac{\pi}{3.2^2})} = \sqrt{2.2\cos^2\frac{\pi}{3.2^3}} = 2\cos\frac{\pi}{3.2^3}$$

$$A_4 = \sqrt{2 + A_3} = \sqrt{2(1+\cos\frac{\pi}{3.2^3})} = \sqrt{2.2\cos^2\frac{\pi}{3.2^4}} = 2\cos\frac{\pi}{3.2^4}$$

. . . .

$$A_{n-1} = \sqrt{2 + A_{n-2}} = \sqrt{2(1+\cos\frac{\pi}{3.2^{n-2}})} = \sqrt{2.2\cos^2\frac{\pi}{3.2^{n-1}}} = 2\cos\frac{\pi}{3.2^{n-1}}$$

$$A_n = \sqrt{2 + A_{n-1}} = \sqrt{2(1-\cos\frac{\pi}{3.2^{n-1}})} = \sqrt{2.2\sin^2\frac{\pi}{3.2^n}} = 2\sin\frac{\pi}{3.2^n}$$

Chú ý rằng khi $n \to \infty$ thì $\frac{\pi}{3.2^{n-1}} \to 0$ nên suy ra:

$$\lim_{n\to\infty} 2^n A_n = \lim_{n\to\infty}(2^{n+1}\sin\frac{\pi}{3.2^n}) = \frac{2\pi}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{3.2^n}}{\frac{\pi}{3.2^n}} = \frac{2\pi}{3}$$. Tóm lại $K = \frac{2\pi}{3}$.

BÀI TẬP

Bài 9. Tìm các giới hạn sau

1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{5-x^2}}{x-1}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-2}{\sin(x-1)}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sin x}$

4(P). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{4x^2+1}}{1-\cos 4x}$

5(P). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+7x^2}-\sqrt{\cos 4x}}$

6(P). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$

7. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{3x^2+5}}{\operatorname{tg}(x-1)}$

8(P). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos 4x}}$.

Bài 10. Tính các giới hạn sau:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{98}{83}\left(\frac{1-\cos 3x\cos 5x\cos 7x}{\sin^2 7x}\right)$

b(P). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{3+2x+x^2-2\cos 2x}-\sqrt[4]{2+4x+x^3-\sqrt{1+2x^2}}}{x^2}$.

Bài 11. Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{\dfrac{x+2}{x}} - \sqrt[3]{\dfrac{x+3}{x}}\right)$; b. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{8x^3+3x^2} - \sqrt{4x^2-x}\right)$

Bài 12(P). Tìm $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin 3x + 2\cos x}{3x^2+x+13}$

Bài 13. a. Tìm $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$; b. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\cos x} - \tan x\right)$;

c. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2}{\sin 2x} - \cot x\right)$ *(Đại học Luật Hà Nội, 88-89).*

Bài 14. Tìm $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x.\cos 2x.\cos 3x...\cos nx}{x^2}$. (n là số tự nhiên)

Bài 15. Cho $a \neq k\pi$. Tìm các giới hạn sau:

1. $K = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{4\cos^2\frac{a}{2}} + \dfrac{1}{4^2\cos^2\frac{a}{2^2}} + \cdots + \dfrac{1}{4^n\cos^2\frac{a}{2^n}}\right)$

2. $K = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\dfrac{1}{2}\tan\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2^2}\tan\dfrac{a}{2^2}\right)^2 + ... + \left(\dfrac{1}{2^n}\tan\dfrac{a}{2^n}\right)^2\right]$

§6. HÀM SỐ LIÊN TỤC

Định nghĩa 1 (hàm số liên tục tại một điểm)

Giả sử hàm số f xác định trên khoảng (a; b) và $x_0 \in (a; b)$. Hàm số f được gọi là **liên tục tại điểm** x_0 nếu

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Hàm số không liên tục tại x_0 được gọi là gián đoạn tại điểm x_0.

Định nghĩa 2 (hàm số liên tục trên một đoạn)

a. Giả sử hàm số f xác định trên khoảng (a; b). Ta nói rằng hàm số f được gọi là **liên tục trên khoảng** (a; b) nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng đó.

b. Giả sử hàm số f xác định trên đoạn [a; b]. Ta nói rằng hàm số f được gọi là **liên tục trên đoạn** [a; b] nếu nó liên tục khoảng (a; b) và

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a),\ \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b).$$

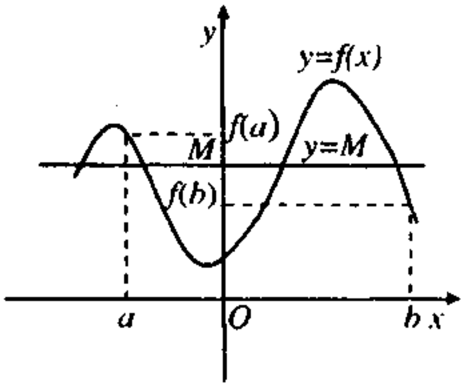
Nhận xét (*):

• Tổng, hiệu, tích, thương của các hàm liên tục tại một điểm là hàm liên tục tại điểm đó (trong trường hợp thương, giá trị của mẫu thức tại điểm ấy phải khác 0)

• **Hàm đa thức và hàm phân thức hữu tỉ (thương của hai hàm đa thức) liên tục trên từng tập xác định của chúng.**

Định lí 1: Các hàm số lượng giác y = sinx, y = cosx, y = tanx, y = cotx liên tục trên tập xác định của chúng.

Định lí 2: (giá trị trung gian của hàm số liên tục). Giả sử hàm số f xác định trên đoạn [a; b]. Nếu f(a) ≠ f(b) thì với mỗi số thực M nằm giữa f(a) và f(b), tồn tại ít nhất một điểm c∈(a; b) sao cho f(c) = M.



Ý nghĩa

Giả sử hàm số f xác định trên đoạn [a; b] và M là số thực nằm giữa f(a) và f(b), thì đường thẳng y = M cắt đồ thị hàm số y = f(x) ít nhất tại một điểm có hoành độ c∈(a; b).

* Đồ thị hàm số liên tục là một đường liền nét.

* ***Hệ quả:*** Giả sử hàm số f xác định trên đoạn [a; b].

Nếu f(a).f(b) < 0 thì tồn tại ít nhất một điểm c∈(a; b) sao cho f(c) = 0.

(Hệ quả là một dấu hiệu nhận biết hàm liên tục có nghiệm)

Thí dụ 1. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1}, \text{khi } x \neq -1 \\ -2, \text{khi } x = -1 \end{cases}$ tại điểm x = −1

Lời giải

Với mọi x ≠ −1 ta có $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1} \Leftrightarrow f(x) = x - 1$

Ta có $\begin{cases} f(-1) = -2 \\ \lim\limits_{x\to-1} f(x) = \lim\limits_{x\to-1}(x-1) = -2 \end{cases}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to-1} f(x) = f(-1) \Rightarrow$ f(x) là hàm số liên tục tại x = −1.

Thí dụ 2. Xét tính liên tục của hàm số f(x) = |x|.

Lời giải

Tập xác định : R

Ta có $f(x) = \begin{cases} -x, \text{khi } x < 0 \\ x, \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$

⇒ Hàm số liên tục với mọi điểm x ≠ 0 (nhận xét) (1)

Lại có f(x) = 0 và $\begin{cases} \lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-}(-x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} x = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to0} f(x) = 0 = f(0)$

⇒ Hàm số liên tục tại x = 0 (2)

Từ (1), (2) kết luận hàm số liên tục trên R.

Thí dụ 3[P]. Chứng minh hàm số $f(x) = \sqrt{4-3x-x^2}$ liên tục trên đoạn [−4; 1].

Lời giải

Ta có $4 - 3x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 1$

$\Rightarrow$ Hàm số đã cho xác định trên đoạn $[-4; 1]$.

- Với mọi $x_0 \in (1; 4)$ ta có

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\sqrt{4-3x-x^2} = \sqrt{\lim_{x\to x_0}(4-3x-x^2)}$$

$$= \sqrt{4-3x_0-x_0^2} = f(x_0). \quad (1)$$

- $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0 = f(1)$. (2)

- $\lim_{x\to 4^-} f(x) = 0 = f(4)$. (3)

Từ (1), (2), (3) kết luận hàm số đã cho liên tục trên đoạn $[-4; 1]$.

Thí dụ 4[P]. Tìm các điểm gián đoạn của hàm số :

a. $f(x) = \dfrac{13x}{\sqrt{4x^2+4x+1}}$ b. $f(x) = \dfrac{\tan x}{x+1}$

c. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x^3-x}, \text{khi } 0 \neq x \neq 1 \\ 2, \text{khi } x = 0 \text{ hoặc } x = 1 \end{cases}$

Lời giải

a. Viết lại $f(x) = \dfrac{13x}{\sqrt{(2x+1)^2}} = \dfrac{13x}{|2x+1|}$.

Ta có x_0 là điểm gián đoạn của hàm số $\Leftrightarrow 2x_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -\dfrac{1}{2}$

b. Ta có x_0 là điểm gián đoạn của hàm số $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x_0 = -1 \end{array}\right.$

c. Theo nhận xét (*) suy ra f(x) chỉ có thể gián đoạn tại x = 0 hoặc x = 1.

- $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^3-x} = \lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2(x-1)} = \lim_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x^2} = 2 = f(1)$

$\Rightarrow x = 1$ là điểm liên tục, không phải là điểm gián đoạn của hàm số.

- $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\dfrac{x+1}{x^2} = +\infty \neq f(1) \Rightarrow x = 0$ là điểm gián đoạn của hàm số.

Thí dụ 5[P]. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{\pi x}{2}, \text{khi } x \leq 1 \\ \dfrac{x^2-1}{2(x-1)}, \text{khi } x > 1 \end{cases}$.

Lời giải

Với mọi $x \neq 1$, ta có f(x) là hàm liên tục (nhận xét (*)) (1)

Lại có $f(1) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ và $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \sin\frac{\pi x}{2} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x+1}{2} = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1 = f(1) \Rightarrow$ Hàm số liên tục tại $x = 1$. (2)

Từ (1), (2) kết luận hàm số liên tục trên R.

Thí dụ 6(P). Chứng minh phương trình $3x^5 - x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1; 0)$.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = 3x^5 - x + 1$. Rõ ràng f(x) là hàm liên tục trên đoạn $[-1; 0]$.

Lại có $f(-1) = -1 < 0$, $f(0) = 1 > 0$. Theo hệ quả thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (-1; 0)$ sao cho $f(c) = 0$ hay phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1; 0)$. (đpcm).

Thí dụ 7. Tìm a, b để hàm số $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 3, \text{ khi } x < 1 \\ 5, \text{ khi } x = 1 \\ 2x - 3b, \text{ khi } x > 1 \end{cases}$ liên tục tại $x = 1$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(ax^2 + bx + 3) = a - b + 3$,

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(2x - 3b) = 2 - 3b$

Hàm số f(x) liên tục tại $x = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$.

Điều đó xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a - b + 3 = 5 \\ 2 - 3b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$.

Vậy $(a = -b = 1)$ là cặp số duy nhất thoả mãn yêu cầu bài toán.

Thí dụ 8(P). Gọi $g(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \ldots + \frac{x^n}{2^n} + \ldots$

Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} g(x), \text{ khi } |x| < 1 \\ \sqrt{5x - 1}, \text{ khi } |x| \geq 1 \end{cases}$.

Lời giải

- Với $|x| < 1$ ta có $1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \ldots + \frac{x^n}{2^n} + \ldots$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = 1$, $q = \frac{x}{2}$ nên $g(x) = \dfrac{1}{1-\frac{x}{2}} = \dfrac{2}{2-x}$.

Theo nhận xét (*) $\Rightarrow$ g(x) là hàm số liên tục với mọi x mà $|x| < 1$

$\Rightarrow$ f(x) liên tục với mọi x mà $|x| < 1$. (1)

• Với mọi x, x_0 mà $|x| > 1$, $|x_0| > 1$ ta có:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \sqrt{5x-1} = \sqrt{5x_0 - 1} = f(x_0)$$

$\Rightarrow$ f(x) liên tục với mọi x, mà $|x|>1$. (2)

• Tại x = 1:

* $f(1) = g(1) = \sqrt{5-1} = 2$ (3)

* $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \sqrt{5x-1} = \sqrt{4} = 2.$ (4)

* $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{2}{2-x} = \dfrac{2}{1} = 2.$ (5)

Từ (3), (4), (5) $\Rightarrow \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = f(1)$

$\Rightarrow$ f(x) liên tục tại x = 1 (6)

Từ (1), (2), (6) kết luận $\Rightarrow$ f(x) là hàm số liên tục trên R.

BÀI TẬP

Bài 16. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ trên đoạn [–2; 2].

Bài 17. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{x^2-x-2}, \text{khi } -1 \neq x \neq 2 \\ \dfrac{1}{2}, \text{khi } x = -1 \text{ hoặc } x = 2 \end{cases}$

Bài 18. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+4x}-1}{x}, \text{khi } x \neq 0 \\ 2, \text{khi } x = 0 \end{cases}$ tại x = 0

Bài 19. Tìm a để hàm số sau đây là liên tục $f(x) = \begin{cases} ax+2, \text{khi } x \geq 1 \\ x, x < 1 \end{cases}$ trên R.

Bài 20. Chứng minh phương trình $x^3 - 3x + 1 = 0$ có ba nghiệm phân biệt thuộc (–2; 2).

Bài 21. Chứng minh phương trình $2x^5 + 3x + 2 = 0$ có nghiệm.

Bài 22. Chứng minh rằng:

Nếu $2a + 3b + 6c = 0$ thì phương trình $a\tan^2x + b\tan x + c = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $\left(k\pi; \dfrac{\pi}{4} + k\pi\right)$.