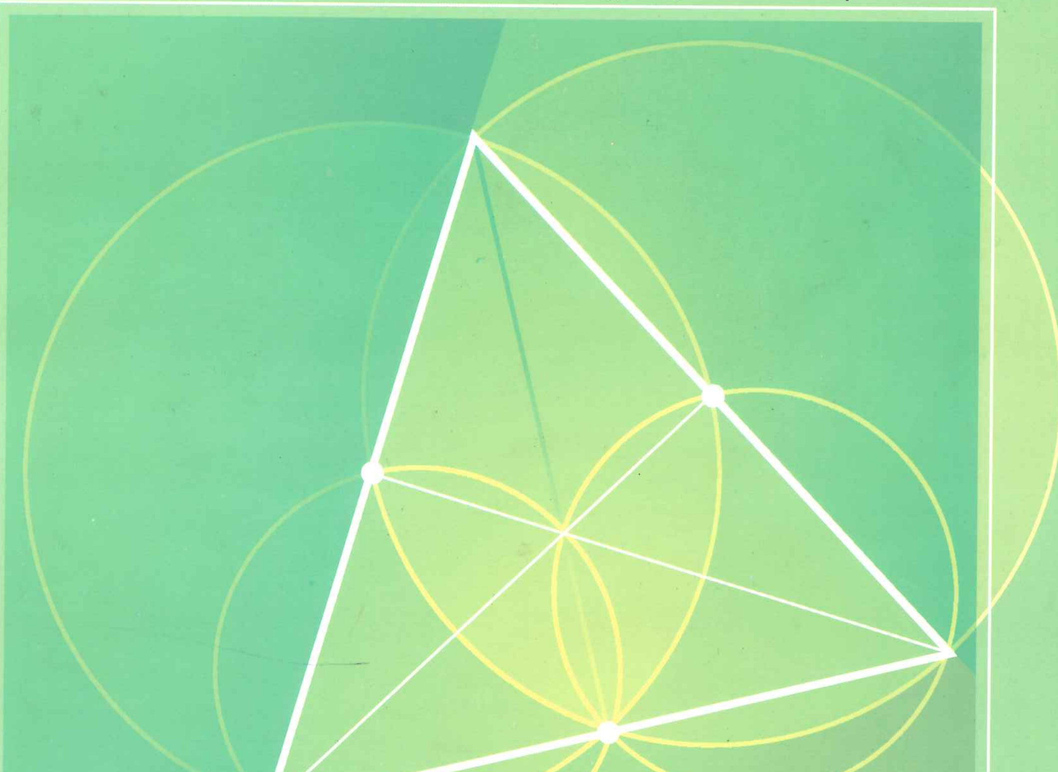
PHAN CUNG ĐỨC (Chủ biên) - NGUYỄN VŨ LƯƠNG
PHẠM QUANG ĐỨC - NGUYỄN NGỌC THẮNG
ĐỖ THANH SƠN - NGUYỄN THÙY LINH

CÁC BÀI GIẢNG VỀ HÌNH HỌC PHẲNG

(Dành cho học sinh trung học cơ sở)



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
KHỐI THPT CHUYÊN TOÁN - TIN

PHAN CUNG ĐỨC (Chủ biên), NGUYỄN VŨ LƯƠNG, PHẠM QUANG ĐỨC
NGUYỄN NGỌC THẮNG, ĐỖ THANH SƠN, NGUYỄN THÙY LINH

CÁC BÀI GIẢNG VỀ HÌNH HỌC PHẲNG

(DÀNH CHO HỌC SINH TRUNG HỌC CƠ SỞ)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Lời nói đầu

Cuốn sách này giới thiệu các bài giảng về hình học phẳng của các giáo viên khối chuyên Toán - Tin thuộc trường Đại học Khoa học Tự nhiên Hà Nội, dành cho các em học sinh bậc Trung học cơ sở. Các bài giảng tập trung vào năm chủ đề chính: "Đa giác và đường tròn", "Thẳng hàng và đồng quy", "Diện tích", "Cực trị hình học" và "Bất đẳng thức hình học". Ở mỗi bài giảng đều có phần tóm tắt các kiến thức cơ bản, phần phát triển nâng cao và nhất là phần xây dựng các phương pháp giải toán. Các ví dụ được chọn với mức độ khó tăng dần, minh họa trực tiếp các phương pháp tương ứng và được giải rõ ràng, chi tiết. Sau mỗi bài giảng đều có nhiều bài tập với các gợi ý lời giải. Để bạn đọc tiện theo dõi, các ví dụ và bài tập được đánh số thứ tự theo chương. Trong cuốn sách này, chúng tôi sử dụng các kiến thức cơ bản đã có trong sách giáo khoa để đưa ra một số kết quả quan trọng, cần thiết cho việc giải các bài toán khó hơn. Các kết quả này được xem là các bài tập mẫu cho các em học sinh có học lực trung bình. Bạn đọc có thể tìm thấy ở đây một số dạng bài toán quen thuộc chưa được trình bày đầy đủ trong các sách nâng cao và thường gặp trong các kỳ thi tuyển vào các trường chuyên, lớp chọn. Đặc biệt các em học sinh khá giỏi được làm quen với một vài dạng toán nâng cao, từng gặp trong các kỳ thi học sinh giỏi Quốc gia và Quốc tế. Hy vọng rằng sau khi đọc kỹ cuốn sách này, các thầy cô giáo, các bậc phụ huynh và các em học sinh sẽ có thêm một tài liệu tham khảo bổ ích và lý thú. Nhất là các em còn ngại môn hình sẽ có thêm một người bạn thân, giúp các em tự tin vượt qua mọi khó khăn khi giải các bài tập khó.

Trong quá trình biên soạn cuốn sách này, chúng tôi nhận được rất nhiều sự động viên, góp ý của các đồng nghiệp thuộc khối chuyên Toán - Tin, Khoa Toán - Cơ - Tin, Ban chủ nhiệm khoa và lãnh đạo trường Đại học Khoa học Tự nhiên. Chúng tôi xin được nói lời cảm ơn sâu sắc tới các tập thể và cá nhân nói trên.

Lần đầu ra mắt bạn đọc, chắc chắn cuốn sách này vẫn còn nhiều thiếu sót. Chúng tôi rất mong nhận được sự góp ý của các bạn đọc để cuốn sách có nội dung hoàn thiện hơn. Xin chân thành cảm ơn. Các ý kiến góp ý xin gửi về địa chỉ:

Khối THPT chuyên Toán - Tin,
Trường Đại học Khoa học Tự nhiên,
334 Đường Nguyễn Trãi, Thanh Xuân, Hà Nội.

Mục Lục

Chương 1

Đa giác và đường tròn

1.1 Đa giác nội tiếp

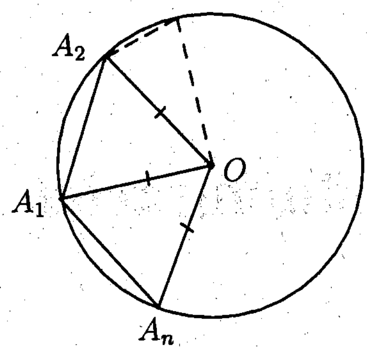
1.1.1 Xác định đường tròn

Đường tròn tâm O, bán kính R là tập hợp các điểm M sao cho $OM = R$ và được ký hiệu là (O, R). Trong phần này, chúng ta sẽ nhắc lại một vài phương pháp xác định đường tròn theo các điều kiện cho trước.

1, Cho hai điểm A, B. Có bao nhiêu đường tròn đi qua hai điểm đó? Lấy điểm O tuỳ ý thuộc đường trung trực của đoạn AB thì $OA = OB = R$. Vậy có vô số đường tròn (O, R) đi qua hai điểm đã cho. Dễ dàng chứng minh rằng trong các đường tròn đó, đường tròn có tâm là trung điểm của đoạn AB có bán kính bé nhất.

2, Cho ΔABC. Như đã biết, ba đường trung trực của ba cạnh BC, CA, AB đồng quy tại O và $OA = OB = OC = R$. Có duy nhất đường tròn (O, R) đi qua ba điểm A, B, C. (O, R) được gọi là đường tròn ngoại tiếp ΔABC hoặc ΔABC nội tiếp trong (O, R).
Để xác định tâm O của đường tròn ngoại tiếp ΔABC, ta phải xác định giao điểm của hai đường trung trực. Trong trường hợp may mắn hơn, nếu tìm được điểm O cách đều các đỉnh thì đó chính là tâm đường tròn ngoại tiếp. Chẳng hạn nếu ΔABC vuông tại A thì O là trung điểm của cạnh huyền BC.

3, Cho n - giác $A_1, A_2 \ldots A_n$ $(n \geq 3)$. Nếu các đỉnh của đa giác cùng nằm trên đường tròn (O, R) thì đa giác nội tiếp được và (O, R) là đường tròn ngoại tiếp đa giác(hình $H1.1$). Để chứng minh đa giác $A_1, A_2 \ldots A_n$ $(n \geq 3)$ nội tiếp được, chúng ta thường làm như sau:



Hình 1.1.

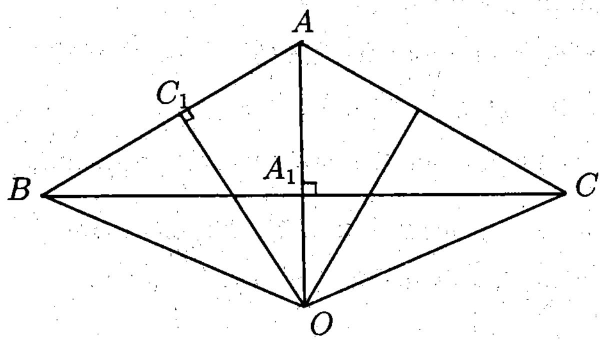
- Tìm điểm O cách đều các đỉnh của đa giác.
- Xuất phát từ ba đỉnh của đa giác. Xác định đường tròn (O, R) ngoại tiếp tam giác tương ứng và chứng minh các đỉnh còn lại cũng thuộc đường tròn đó.
- Xuất phát từ bốn đỉnh của đa giác, chẳng hạn A_1, A_2, A_3, A_4 sao cho tứ giác $A_1A_2A_3A_4$ nội tiếp và sử dụng các tiêu chuẩn tứ giác nội tiếp (xem phần 2) để lần lượt chứng minh các tứ giác $A_2A_3A_4A_5 \ldots$ nội tiếp được.

4, Cho hai điểm A, B cố định và điểm M chuyển động sao cho $\angle AMB = 90^o$. Khi đó M phải thuộc đường tròn đường kính AB có tâm O là trung điểm đoạn AB.

1.1.2 Ví dụ minh họa

Ví dụ 1.1. Cho ΔABC với $AB = AC = a$, góc $\angle BAC = 120^o$. Xác định đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

Giải

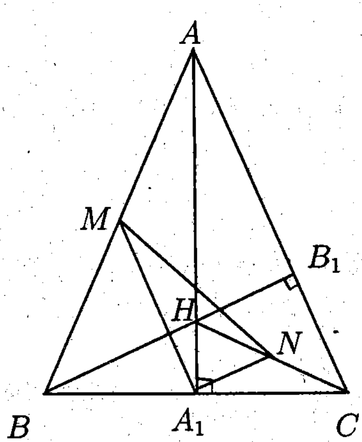


Hình 1.2.

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Hai đường trung trực của BC và AB cắt nhau tại $O \Rightarrow OA = OB = OC = R$.
Vì $AB = AC$ nên ΔABC cân tại $A \Rightarrow AO$ là tia phân giác của $\angle BAC \Rightarrow \angle BAO = 60^o$. Mặt khác, ΔABO cân tại O nên ΔOAB đều. Tương tự ta có ΔOAC đều, do đó $AB = BO = OC = CA \Rightarrow$ tứ giác $ABOC$ là hình thoi.

Vậy O là điểm đối xứng với A qua BC và bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC là $R = a$. □

Ví dụ 1.2. Cho ΔABC có $AB = AC$ và H là trực tâm. Gọi A_1, M, N là trung điểm BC, AB và CH. Xác định đường tròn ngoại tiếp ΔA_1MN.



Hình 1.3.

Giải

A_1N là đường trung bình của $\Delta BHC \Rightarrow A_1N \| BH$.

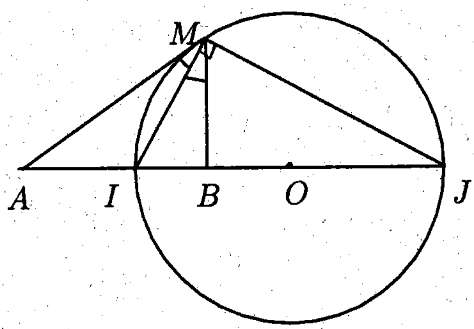
A_1M là đường trung bình của $\Delta ABC \Rightarrow A_1M \| BC$.

Mà $BB_1 \perp AC$ (gt) $\Rightarrow \angle MA_1N = 90^o$.

Vậy đường tròn ngoại tiếp ΔA_1MN là đường tròn đường kính MN. □

Ví dụ 1.3. *(Đường tròn A-pô-lô-ni-uýt).* Cho hai điểm A, B cố định và số thực $k > 0$. Tìm tập hợp điểm M thoả mãn $\dfrac{MA}{MB} = k$.

Giải



Hình 1.4.

Xét hai trường hợp:

- $k = 1 \Rightarrow MA = MB \Rightarrow M \in (\Delta)$, với (Δ) là đường trung trực của đoạn AB.
- $k \neq 1$:
  Gọi I, J là giao điểm của các phân giác trong, ngoài của góc $\angle AMB$ với đường thẳng AB thì

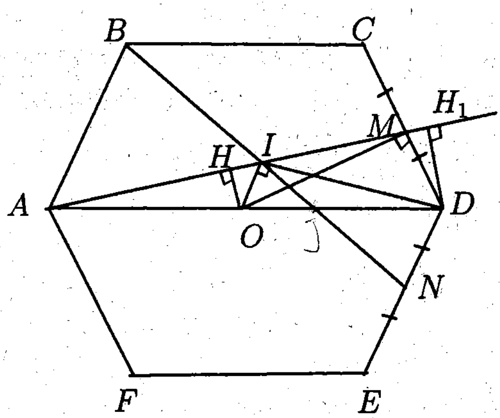
$$\frac{IA}{IB} = \frac{JA}{JB} = \frac{MA}{MB} = k \text{ (tính chất phân giác).}$$

I, J cố định và $\angle IMJ = 90^o$.

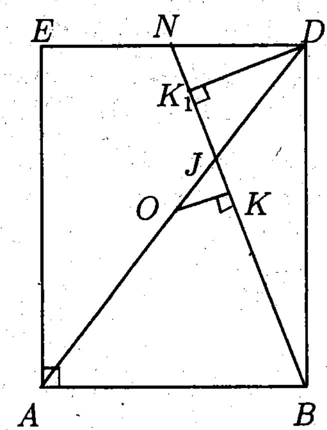
Vậy quỹ tích của M là đường tròn đường kính IJ. Đường tròn này được gọi là đường tròn A-pô-lô-ni-uýt. (Phần đảo để bạn đọc tự giải). □

Ví dụ 1.4. Cho lục giác đều $ABCDEF$. Gọi O là tâm của nó và M, N là trung điểm của $CD, DE \cdot AM$ cắt BN tại I. Chứng minh rằng năm điểm M, I, O, N, D cùng thuộc một đường tròn.

Giải



Hình 1.5.



Hình 1.6.

Do tính chất của lục giác đều nên $OM \perp CD$, $ON \perp DE \Rightarrow M, N$ thuộc đường tròn đường kính OD. Do O cách đều AM và BN nên IO là phân giác trong của góc $\angle AIN$.

Kẻ OH, $DH_1 \perp AM \Rightarrow DH_1 = 2OH$. (1)

Kẻ $OK, DK_1 \perp BN$. Trong hình chữ nhật $ABDE$, đặt J là giao điểm của AD và BN thì $\dfrac{JA}{JD} = 2 \Rightarrow \dfrac{JD}{JO} = 2$. Mặt khác

$$\frac{DK_1}{OK} = \frac{JD}{JO} = 2 \Rightarrow DK_1 = 2OK. \quad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow DH_1 = DK_1 \Rightarrow D$ cách đều AM và $BN \Rightarrow ID$ là phân giác ngoài của góc $\angle AIN \Rightarrow \angle OID = 90^0$. Vậy 5 điểm $IOMDN$ cùng thuộc đường tròn đường kính OD.

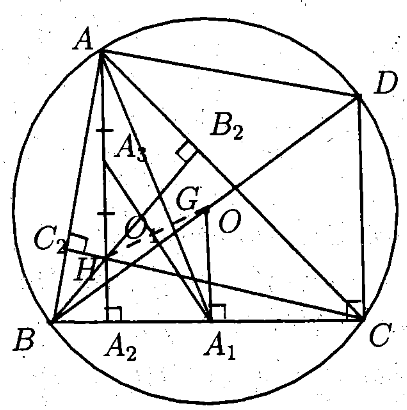
□

Ví dụ 1.5. (Đường thẳng Ơ-le và đường tròn Ơ-le của tam giác). Cho ΔABC. Gọi H, G, O là trực tâm, trọng tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác đó.

a, Chứng minh rằng H, G, O thẳng hàng và G chia trong đoạn OH theo tỉ số $\frac{1}{2}$. (Đường thẳng chứa H, G, O được gọi là đường thẳng Ơ-le của tam giác ΔABC).

b, Gọi A_1, B_1, C_1 là trung điểm các cạnh BC, CA, AB; A_2, B_2, C_2 là chân các đường cao tương ứng. A_3, B_3, C_3 là trung điểm của HA, HB, HC. Chứng minh rằng 9 điểm trên luôn nằm trên một đường tròn. Xác định tâm và bán kính của đường tròn đó. (Đường tròn này được gọi là đường tròn Ơ-le của ΔABC hay còn gọi là đường tròn 9 điểm của tam giác).

Giải



Hình 1.7.

a, Vẽ đường kính $BD \Rightarrow CD \| A_1O$ và $CD = 2A_1O$. Vì $CD \| AH$ và $DA \| CC_2$ (cùng $\perp AB$) nên tứ giác $ADCH$ hình bình hành $\Rightarrow AH = CD \Rightarrow AH = 2OA_1$. Gọi G' là giao điểm của AA_1 và OH thì

$$\frac{G'A}{G'A_1} = \frac{AH}{OA_1} = 2 \Rightarrow G \equiv G'$$

Vậy O, G, H thẳng hàng và $\dfrac{GO}{GH} = \dfrac{1}{2}$.
b, Do HA_3OA_1 là hình bình hành nên A_1A_3 cắt OH tại O_1 là trung điểm của OH.

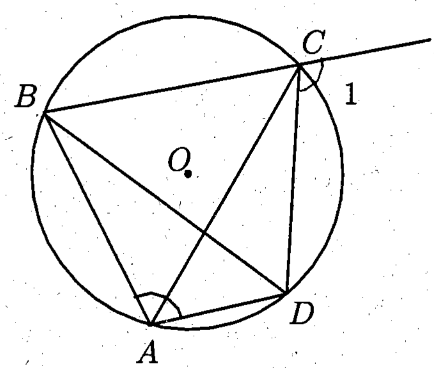
Xét đường tròn tâm O_1 đường kính A_1A_3. Do $\angle A_1A_2A_3 = 90^o$ nên $A_2 \in (O_1)$. Gọi R_1 là bán kính đường tròn (O_1) ta có $R_1 = \dfrac{A_1A_3}{2} = \dfrac{OA}{2} = \dfrac{R}{2}$ (do AOA_1A_3 là hình bình hành) với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Lập luận tương tự đối với các đoạn B_1B_3 và C_1C_3, ta có chín điểm $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3$ cùng thuộc đồng tròn $(O_1, \dfrac{R}{2})$. □

1.1.3 Tứ giác nội tiếp

Trong mục này, chúng ta đưa ra một số tiêu chuẩn để tứ giác $ABCD$ nội tiếp được. Sau mỗi tiêu chuẩn đều có các ví dụ minh họa.
Tiêu chuẩn 1. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp được khi và chỉ khi

$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^o.$$

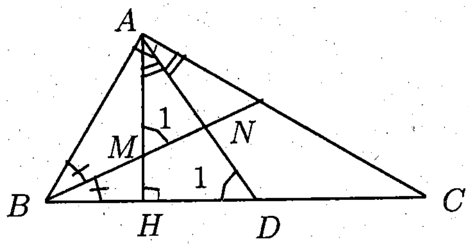


Hình 1.8.

Hệ quả. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp được $\Leftrightarrow \angle A = \angle C_1$.

Ví dụ 1.6. Cho ΔABC vuông ở A. Kẻ đường cao AH và phân giác trong AD của góc $\angle HAC$. Phân giác trong của góc $\angle ABC$ cắt AH, AD ở M, N. Chứng minh rằng $\angle BND = 90^o$.

Giải



Hình 1.9.

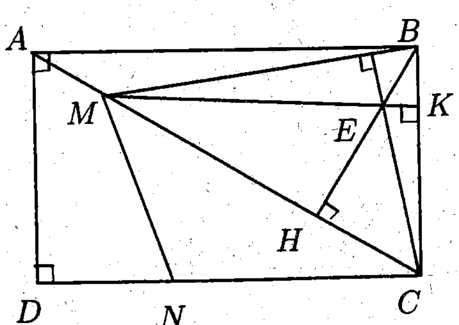
Để chứng minh $\angle BND = 90^o$, ta chứng minh tứ giác $HMND$ nội tiếp được.

Ta có $\angle ABC = \angle HAC$ (vì cùng phụ góc $\angle BAH$) $\Rightarrow \angle D_1 = \angle M_1$(vì cùng phụ hai góc bằng nhau) $\Rightarrow$ tứ giác $HMND$ nội tiếp được (theo hệ quả). Vậy $\angle BND = 90^o$ (theo tiêu chuẩn 1). □

Ví dụ 1.7. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Kẻ $BH \perp AC$. Lấy M, N thuộc các đoạn AH, DC sao cho $\dfrac{AM}{AH} = \dfrac{DN}{DC}$. Chứng minh rằng tứ giác $BMNC$ nội tiếp được.

Giải

Để chứng minh $BMNC$ nội tiếp, ta cần chỉ ra góc $\angle BMN = 90^0$.



Hình 1.10.

Kẻ $MK \perp BC \Rightarrow MK \| AB$, MK cắt BH tại E thì E là trực tâm $\Delta BMC \Rightarrow CE \perp BM$. (1)

Áp dụng định lý Talét với ΔHAB ta có $\dfrac{ME}{AB} = \dfrac{HM}{HA}$.

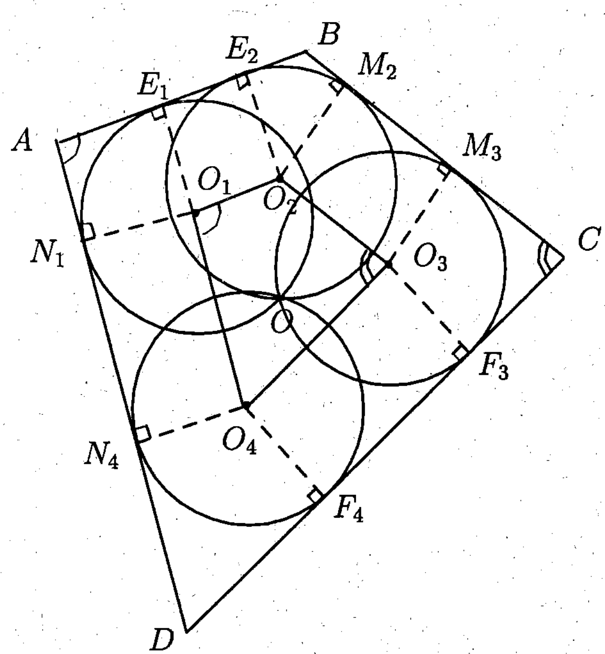
Mặt khác, từ giả thiết $\dfrac{AM}{AH} = \dfrac{DN}{DC}$, ta có

$$\frac{HM}{HA} = \frac{CN}{CD} \Rightarrow \frac{ME}{AB} = \frac{NC}{CD} \Rightarrow ME = NC. \quad (2)$$

Từ (1), (2) và $NC \| ME$ suy ra $MNCE$ là hình bình hành $\Rightarrow NM \| CE$. Từ đó ta có $NM \perp MB$ và tứ giác $MNCB$ nội tiếp được (tiêu chuẩn 1).

□

Ví dụ 1.8. Cho tứ giác $ABCD$. Giả sử trong tứ giác vẽ được bốn đường tròn bằng nhau, đồng quy tại điểm O và mỗi đường tròn tiếp xúc với hai cạnh liên tiếp của tứ giác. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ nội tiếp được.



Hình 1.11.

Giải

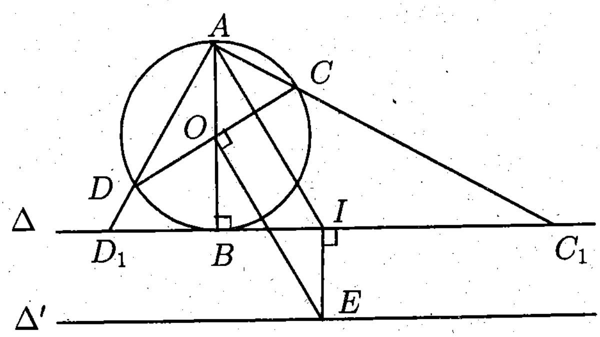
Đánh số thứ tự tâm bốn đường tròn theo chiều của tứ giác $ABCD$ là O_1, O_2, O_3, O_4. Gọi tên các tiếp điểm như ở hình vẽ (H 1.11).

Các tứ giác $O_1E_1E_2O_2, O_2M_2M_3O_3$, $O_3F_3F_4O_4$, $O_4N_2N_1O_1$ là các hình chữ nhật (theo giả thiết của bài toán) $\Rightarrow$ hai tứ giác $ABCD$ và $O_1O_2O_3O_4$ có các cặp cạnh tương ứng song song $\Rightarrow \angle A = \angle O_1$, $\angle C = \angle O_3$.

Mặt khác, do bốn đường tròn bằng nhau và đồng quy tại O nên $OO_1 = OO_2 = OO_3 = OO_4 = r$ (bán kính các đường tròn bằng nhau) $\Rightarrow$ tứ giác $O_1O_2O_3O_4$ nội tiếp trong $(O, r) \Leftrightarrow \angle O_1 + \angle O_3 = 180^0 \Rightarrow \angle A + \angle C = 180^o$. Theo tiêu chuẩn 1 ta có đpcm. □

Ví dụ 1.9. Cho đường tròn tâm O đường kính AB cố định và CD là đường kính tuỳ ý. Gọi (Δ) là tiếp tuyến của (O) qua B. AC, AD cắt (Δ) tại C_1, D_1. Chứng minh tứ giác CDD_1C_1 nội tiếp được trong đường tròn tâm E và E luôn thuộc một đường thẳng cố định khi CD chuyển động.

Giải



Hình 1.12.

$$\angle C_1 = \frac{1}{2}\text{sđ}(\overset{\frown}{ADB} - \overset{\frown}{BC}) = \frac{1}{2}\text{sđ}\ \overset{\frown}{AC}.$$

$\angle ADC$ góc nội tiếp chắn cung $\overset{\frown}{AC} \Rightarrow \angle C_1 = \angle ADC \Rightarrow$ tứ giác CDD_1C_1 nội tiếp được (theo hệ quả).

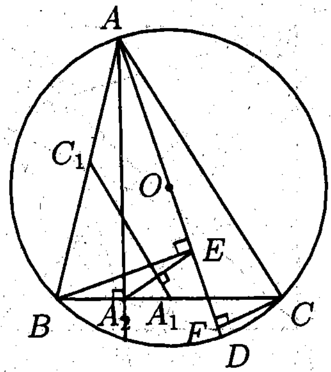
Gọi I là trung điểm đoạn $C_1D_1 \Rightarrow AI = IC_1 = ID_1$ (tính chất tam giác vuông) $\Rightarrow \angle IAD_1 = \angle D_1AI$, $\angle C_1 = \angle IAC_1 \Rightarrow \angle IAD_1 + \angle ADC = 90^o$ $\Rightarrow AI \perp CD$. $\angle ID_1A$

Gọi E là tâm đường tròn ngoại tiếp của tứ giác CDD_1C_1 thì E là giao của hai trung trực IE và OE.

Dễ thấy $AIEO$ là hình bình hành do các cặp cạnh đối diện song song nên $IE \overset{\parallel}{=} AO$. Do đó, E luôn cách (Δ) cố định một khoảng không đổi bằng AO nên E thuộc đường thẳng (Δ') cố định cách (Δ) một khoảng không đổi (đpcm). □

Ví dụ 1.10. Cho ΔABC. Kẻ đường cao AA_2, trung tuyến AA_1 và đường kính AD của đường tròn (O) ngoại tiếp ΔABC. Kẻ $BE, CF \perp AD$. Chứng minh rằng nếu cho B, C cố định thì tâm đường tròn ngoại tiếp ΔA_2EF không phụ thuộc vị trí đỉnh A.

Giải



Hình 1.13.

Gọi C_1 trung điểm $AB \Rightarrow$ tứ giác ABA_2E luôn nội tiếp trong đường tròn tâm C_1, đường kính AB. Ta có:

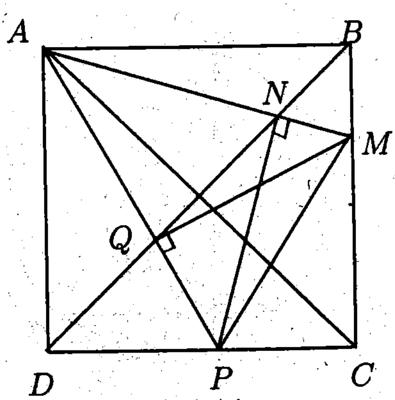
$$\angle BAA_2 = \angle BEA_2 \text{ (góc nội tiếp)},$$
$$\angle ABC = \angle ADC \text{ (góc nội tiếp)}$$
$$\Rightarrow \angle BEA_2 = \angle FCD \text{ (cùng phụ hai góc bằng nhau)}.$$
$$BE \| CF \text{ (giả thiết)}$$
$$\Rightarrow A_2E \| CD \Rightarrow A_2E \perp AC;$$
$$AC \| A_1C_1 \text{ (đường trung bình)}$$
$$\Rightarrow A_2E \perp A_1C_1.$$

Từ đó ta có C_1A_1 là đường trung trực của A_2E. Gọi B_1 là trung điểm AC, tương tự chứng minh trên ta có B_1A_1 là trung trực của A_2F.

Vậy A_1 là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta A_2EF \Rightarrow A_1$ cố định (đpcm). □

Tiêu chuẩn 2. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp được $\Leftrightarrow \angle ADB = \angle ACB$.

Ví dụ 1.11. Cho hình vuông $ABCD$. Qua đỉnh A vẽ hai tia tuỳ ý lập với nhau một góc 45^o sao cho một tia cắt BC, BD ở M, N và tia kia cắt CD, BD ở P, Q. Chứng minh các điểm C, M, N, P, Q cùng nằm trên một đường tròn.



Hình 1.14.

Giải

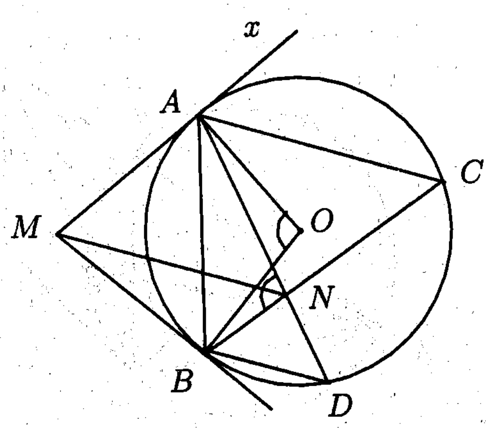
$\angle MAQ = \angle MBQ = 45^o$ (giả thiết) nên tứ giác $ABMQ$ nội tiếp được (tiêu chuẩn 2). Do $\angle ABM = 90^o$ (giả thiết) nên $\angle MQP = 90^o$ (tiêu chuẩn 1). Tương tự, $\angle MNP = 90^o$. Vậy 5 điểm C, M, N, P, Q thuộc đường tròn đường kính $MP \Rightarrow$ (đpcm). □

Nhận xét: Ta có thể lập luận do hai tứ giác $CMQP$ và $CMNP$ đều nội tiếp nên ngũ giác $CMNQP$ nội tiếp. Từ đó ta có đpcm.

Ví dụ 1.12. Cho đường tròn tâm O và hai điểm A, B thuộc (O) sao cho AB không phải là đường kính. Hai tiếp tuyến với (O) qua A và B cắt nhau ở M. Kẻ hai cát tuyến tuỳ ý AC và BD sao cho $AC \| BD$ và AD cắt BC tại N. Chứng minh rằng $MN \| AC$.

Giải

Tứ giác $MAOB$ nội tiếp được $\Rightarrow \angle AMB + \angle AOB = 180^o$. Ta có:



Hình 1.15.

$$\angle ANB = \frac{1}{2}\text{sđ}(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}) = \text{sđ } \overset{\frown}{AB} \quad (\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}).$$

$\Rightarrow \angle AOB = \angle ANB = \text{sđ } \overset{\frown}{AB}$.

$\Rightarrow \angle AMB + \angle ANB = 180^o$

$\Rightarrow$ $MANB$ nội tiếp được (Tiêu chuẩn 1)

$\Rightarrow \angle AMN = \angle ABN$ (Tiêu chuẩn 2)

$\angle ABN = \angle ABC = \angle xAC$ (góc giữa tia tiếp tuyến và dây cung)

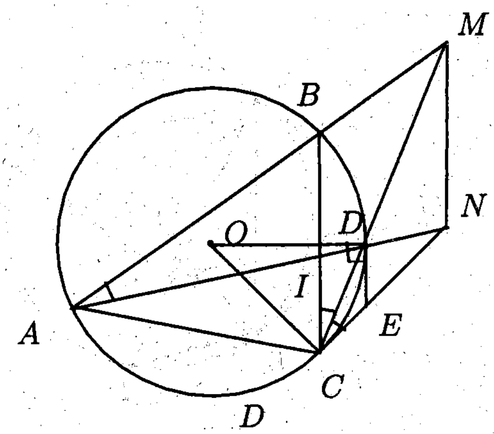
$\Rightarrow \angle AMN = \angle xAC$.

Vậy $MN \| AC$ vì có hai góc bằng nhau ở vị trí đồng vị. □

Ví dụ 1.13. Cho đường tròn (O) và dây cung $\overset{\frown}{BC}$ không phải là đường kính. A tuỳ ý thuộc cung lớn $\overset{\frown}{BC}$. D là trung điểm cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$. Hai tiếp tuyến với (O) qua C, D cắt nhau ở E. Giả thiết AB cắt CD ở M, AD cắt CE ở N, AD cắt BC ở I. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{CE} = \frac{1}{CN} + \frac{1}{CI}.$$

Giải



Hình 1.16.

Ta có: $\angle AMC = \frac{1}{2}\text{sđ}(\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{BD}) = \frac{1}{2}\text{sđ}(\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{CD})$,

$\angle ANC = \frac{1}{2}\text{sđ}(\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{CD})$

$\Rightarrow \angle AMC = \angle ANC$

$\Rightarrow$ tứ giác $AMNC$ nội tiếp được (tiêu chuẩn 2).

$\Rightarrow \angle CMN = \angle CAN$ (tiêu chuẩn 2)

$\Rightarrow \angle CMN = \angle MCN$ (cùng bằng $\angle NAC$).

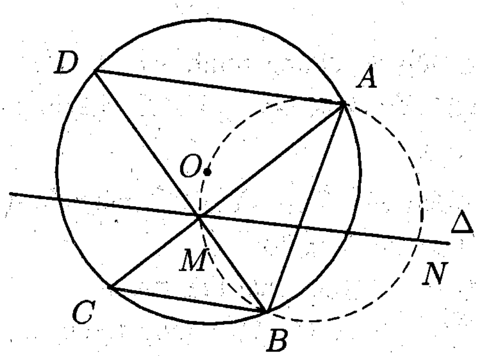
Mặt khác, $\angle DCB = \angle DCN$ (giả thiết) $\Rightarrow \angle CMN = \angle MCB \Rightarrow MN \| BC$. Do $EC = ED$ (hai tiếp tuyến qua E) nên $\angle ECD = \angle EDC \Rightarrow DE \| BC$. Áp dụng định lý Talét ta có:

$$\frac{DE}{MN} + \frac{DE}{IC} = \frac{CE}{CN} + \frac{NE}{NC} = 1$$
$$\Rightarrow \frac{1}{DE} = \frac{1}{MN} + \frac{1}{IC}$$

Do $EC = ED, NM = NC \Rightarrow$ (đpcm). □

Ví dụ 1.14. Cho đường tròn (O) và hai điểm A, B cố định thuộc (O) (AB không phải là đường kính). Kẻ hai cát tuyến tuỳ ý $AD \| BC$. AC cắt BD ở M. Chứng minh đường thẳng (Δ) qua M và song song với BC luôn đi qua một điểm cố định.

Giải



Hình 1.17.

Vì $AD \| BC \Rightarrow$ tứ giác $ABCD$ là hình thang nội tiếp được $\Rightarrow ABCD$ là hình thang cân $\Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$. Do đó

$$\angle AMB = \frac{1}{2}\text{sđ}(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}) = \text{ sđ } \overset{\frown}{AB} = \angle AOB$$

$\Rightarrow AOMB$ nội tiếp được (tiêu chuẩn 2).

Gọi (O_1) là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AOMB$ thì (O_1) cố định (vì (O_1) là đường tròn ngoại tiếp ΔOAB cố định). Gọi N là giao điểm thứ hai của (Δ) và (O_1). Ta có:

$\angle AMN = \angle MAD$, $\angle BMN = \angle MBC$ (so le trong),

$\angle MAD = \angle MBC$ (tiêu chuẩn 2)

$\Rightarrow \angle AMN = \angle BMN \Rightarrow MN$ là phân giác của $\angle AMB$.

Vậy (Δ) đi qua điểm N là trung điểm cung $\overset{\frown}{AB}$ cố định. Từ đó ta có đpcm. □

Chú ý: So sánh ví dụ 1.12 và ví dụ 1.14, ta thấy với cùng một bài toán có thể có nhiều cách diễn đạt khác nhau.

Ví dụ 1.15. Trên một đường thẳng cho ba điểm theo thứ tự A, B, C vẽ hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ có đường kính AB và đường kính BC. (Δ) là tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn với các tiếp điểm tương ứng D_1, D_2. (Δ') là tiếp tuyến với (O_2) qua C. BD_1 cắt (Δ') tại E. AD_1 cắt ED_2 tại M. AD_2 cắt BD_1 tại H. Chứng minh rằng $AE \perp MH$.

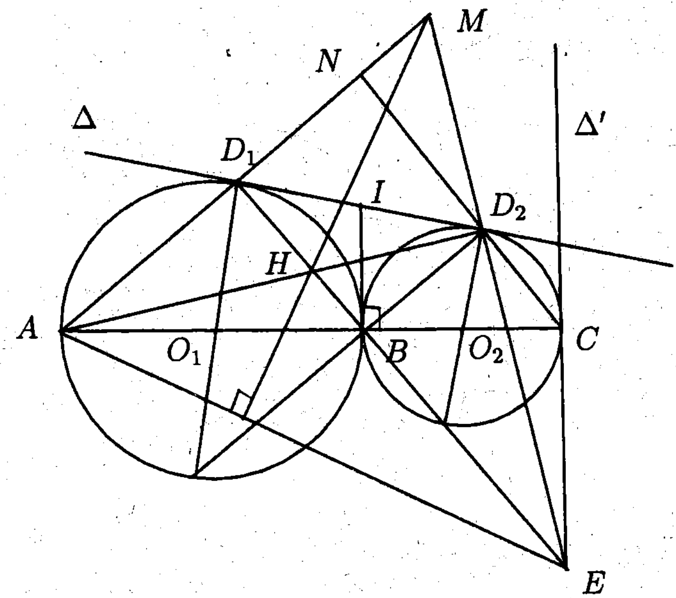
Giải

Vì $ED_1 \perp MA$ nên để chứng minh $AE \perp MH$, ta phải chứng minh $AD_2 \perp ME$ và khi đó H là trực tâm ΔMAE. Từ đó, ta có tứ giác AD_1D_2E nội tiếp được.

Gọi N là giao điểm của CD_2 và AM. Xét tiếp tuyến chung của (O_1) và (O_2) qua B cắt (Δ) tại I, ta có:

$ID_1 = IB$, $ID_2 = IB$ (tính chất tiếp tuyến).

$\Rightarrow BI = ID_1 = ID_2 \Rightarrow \Delta BD_1D_2$ vuông tại B, $D_1E \| CN$ (cùng vuông góc với BD_2).



Hình 1.18.

Do đó $\angle BAD_1 = \angle BD_1D_2$ (góc giữa tia tiếp tuyến và dây cung), $\angle BD_1D_2 = \angle D_1D_2N$ (so le trong) $\Rightarrow \angle CAD_1 = \angle D_1D_2N \Rightarrow AD_1D_2C$ nội tiếp được (hệ quả) (1)

Xét tứ giác ED_1D_2C có $ED_1 \| CD_2$, $\angle BEC = \angle IBD_1$ (đồng vị) $\Rightarrow \angle ED_1D_2 = \angle D_1EC \Rightarrow$ tứ giác ED_1D_2C là hình thang cân nên luôn nội tiếp được (2).

Từ (1), (2) $\Rightarrow A, D_1, D_2, C, E$ cùng thuộc một đường tròn $\Rightarrow$ tứ giác AD_1D_2E nội tiếp được. Từ đó ta có đpcm. □

Tiêu chuẩn 3.

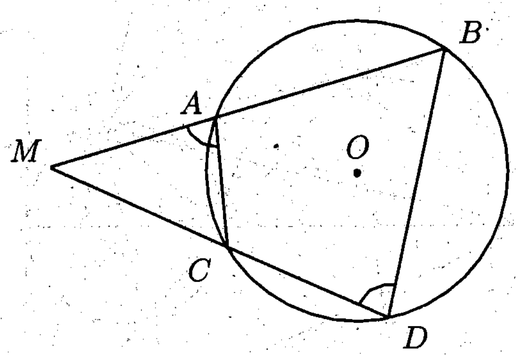
Chúng ta sẽ xây dựng thêm một tiêu chuẩn cần và đủ để tứ giác nội tiếp được. Phương pháp này sẽ được xem xét kỹ hơn ở chương "Hệ thức lượng trong đường tròn" ở phần hình học lớp 10. Sau đây là nội dung chi tiết của tiêu chuẩn đó.

Điều kiện cần: Cho đường tròn (O) và điểm M không thuộc đường tròn đó. Từ M kẻ hai cát tuyến tuỳ ý MAB và MCD. Chứng minh rằng:

$$MA \cdot MB = MC \cdot MD.$$

Chứng minh.

Xét trường hợp M nằm ngoài (O):



Hình 1.19.

Do tứ giác $ABDC$ nội tiếp được nên

$$\angle MAC = \angle MDB \Rightarrow \Delta MAC \sim \Delta MDB(\text{g.g})$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MB} \quad (\text{đpcm}).$$

Trường hợp M nằm trong (O), cách chứng minh tương tự. □

Điều kiện đủ: Cho hai đường thẳng (Δ_1) và (Δ_2) cắt nhau tại M. Trên (Δ_1) lấy hai điểm A, B và trên (Δ_2) lấy hai điểm C, D sao cho hai điều kiện sau thoả mãn:

i, $MA \cdot MB = MC \cdot MD$,

ii, Hoặc điểm M nằm ngoài các đoạn AB và CD (khi đó nói rằng A, B và C, D nằm cùng một phía đối với M) hoặc điểm M nằm trong các đoạn AB, CD (khi đó nói rằng A, B và C, D cùng khác phía với M).

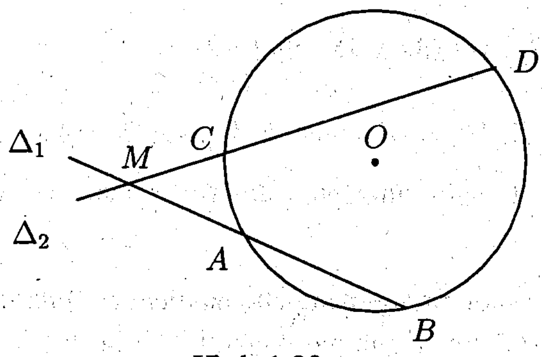
Khi đó 4 điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.

Chứng minh.

Xét trường hợp A, B và C, D nằm cùng phía đối với M.

Xét đường tròn (O) ngoại tiếp $\triangle ABC$ và giả sử (Δ_2) cắt (O) tại D'. Khi đó theo điều kiện cần luôn có $MA \cdot MB = MC \cdot MD'$.

Kết hợp với điều kiện 1 của điều kiện đủ $\Rightarrow MD = MD'$. Từ đó với điều kiện 2 suy ra D trùng với $D' \Rightarrow$ (đpcm).

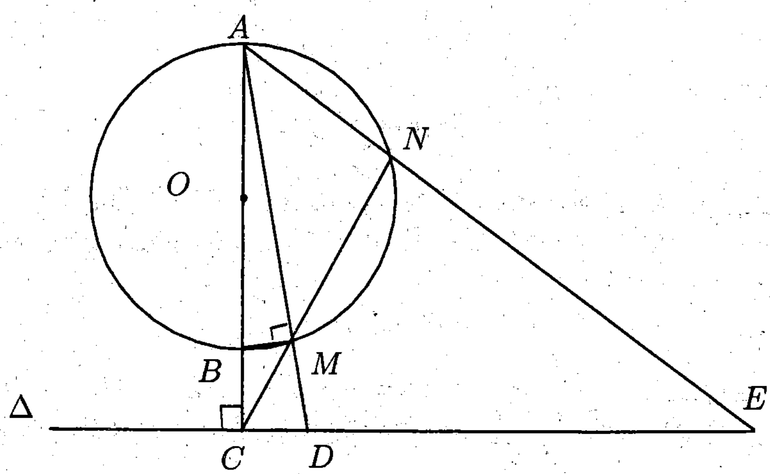


Hình 1.20.

Trường hợp A, B và C, D nằm về 2 phía đối với M, việc chứng minh xin dành cho độc giả. □

Ví dụ 1.16. Cho đường tròn tâm O đường kính AB và đường thẳng (Δ) nằm ngoài (O), vuông góc với AB tại C. Kẻ cát tuyến CMN tuỳ ý đối với (O). AM, AN cắt (Δ) tại D, E. Chứng minh tứ giác $MNED$ luôn nội tiếp được.

Giải



Hình 1.21.

Vì $\angle AMB = 90^o$ (góc nội tiếp) $\Rightarrow$ tứ giác $BCDM$ nội tiếp được $\Rightarrow$

$AB \cdot AC = AM \cdot AD$ (theo tiêu chuẩn 3).

Tương tự

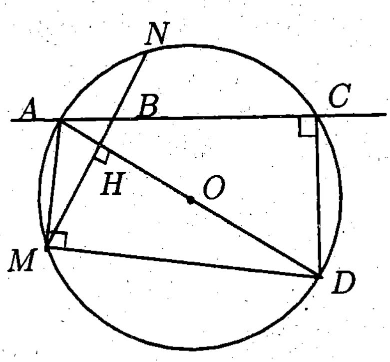
$$AB.AC = AN.AE \Rightarrow AM \cdot AD = AN \cdot AE.$$

Do M, D và N, E nằm cùng phía đối với A nên theo tiêu chuẩn 3 ta có đpcm. □

Ví dụ 1.17. Trên một đường thẳng cho ba điểm cố định theo thứ tự A, B, C. Vẽ đường tròn (O) tuỳ ý qua hai điểm A, C. Cát tuyến qua B, vuông góc với OA cắt (O) ở M, N. Chứng minh các điểm M, N cùng thuộc một đường tròn cố định.

Giải

Gọi H là giao điểm của MN và OA. Vì $OA \perp MN$ nên $AM = AN$.



Hình 1.22.

Ta chứng minh độ dài đoạn AM không đổi. Vẽ đường kính AD ta có $\angle AMD = \angle ACD = 90^o$. Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông MAB, luôn có:

$$AM^2 = AH \cdot AD.$$

Do tứ giác $HBCD$ nội tiếp được nên $AH \cdot AD = AB \cdot AC$ (tiêu chuẩn 3.) Vậy M, N thuộc đường tròn cố định tâm A có bán kính không đổi

$$R = \sqrt{AB \cdot AC}.$$

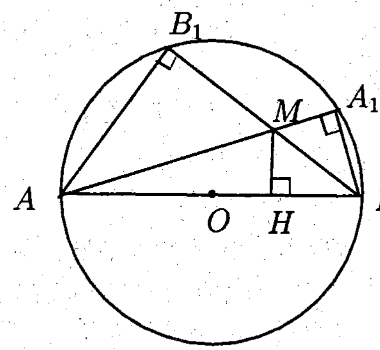
□

Ví dụ 1.18. Cho đường tròn (O, R). AB là đường kính tuỳ ý. Lấy điểm M tuỳ ý trong đường tròn. AM, BM cắt (O) tại A_1, B_1. Chứng minh biểu thức

$$AM \cdot AA_1 + BM \cdot BB_1$$

nhận giá trị không đổi.

Giải



Hình 1.23.

$\angle AB_1B = \angle AA_1B = 90^o$ (góc nội tiếp). Kẻ $MH \perp AB \Rightarrow AB_1MH$ nội tiếp

$$\Rightarrow BM \cdot BB_1 = BH \cdot BA. \tag{1}$$

Tương tự:

$$AM \cdot AA_1 = AH \cdot AB. \tag{2}$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow AM \cdot AA_1 + BM \cdot BB_1 = AB(AH + BH)$. Do M nằm trong (O) nên H nằm trong $AB \Rightarrow AH + BH = AB$. Vậy

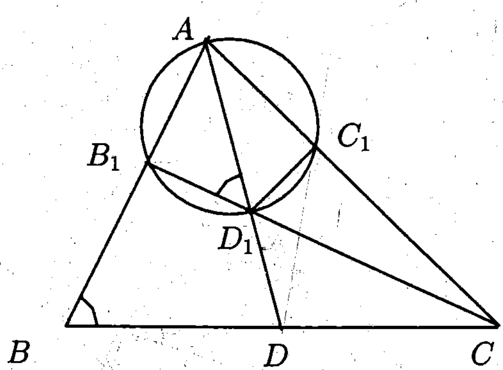
$$AM \cdot AA_1 + BM \cdot BB_1 = AB^2 = 4R^2 (\text{const}).$$

□

Ví dụ 1.19. Cho ΔABC và D là trung điểm của BC. Giả thiết tồn tại đường tròn đi qua B, D cắt AB, AD tại B_1, D_1 sao cho C, B_1, D_1 thẳng hàng và điểm B_1 nằm trên cạnh AB. Chứng minh rằng:

$$CB < \sqrt{2} \cdot CA.$$

Giải



Hình 1.24.

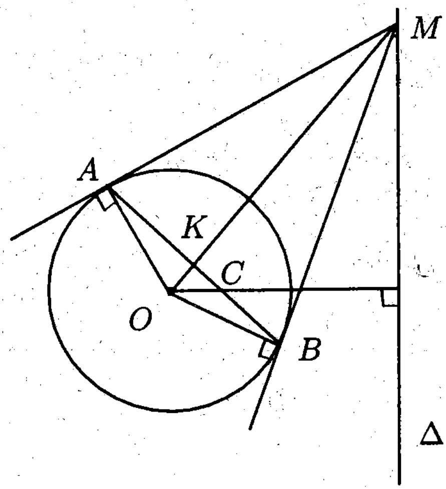
Dựng tia Dx cùng phía với C đối với đường thẳng AD và hợp với tia D_1A một góc bằng $\angle ACB$. Vì tứ giác $AB_1D_1C_1$ nội tiếp được nên $\angle ABD = \angle AD_1B_1 \Rightarrow \angle AD_1x < \angle AD_1C \Rightarrow$ tia Dx nằm giữa hai tia D_1A, D_1C. Tia Dx cắt cạnh AC tại điểm C_1. Từ đó theo tiêu chuẩn 3 ta có

$$CC_1 \cdot CA = CD1 \cdot CB_1 = CD \cdot CB$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}CB^2 = CC1 \cdot CA < CA^2$$
$$\Rightarrow CB < \sqrt{2}CA.$$

□

Ví dụ 1.20. Cho đường tròn (O, R) và đường thẳng (Δ) nằm ngoài (O). Điểm M chuyển động trên (Δ). Từ M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB đối với (O) và A, B là các tiếp điểm. Chứng minh đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.

Giải



Hình 1.25.

Kẻ $OH \perp (\Delta) \Rightarrow H$ cố định. AB cắt OH tại C thì C nằm trong OH. Do $MK \perp AB$ nên tứ giác $MHCK$ nội tiếp được nên

$$OC \cdot OH = OK \cdot OM \qquad (1)$$

Mặt khác theo hệ thức lượng trong tam giác vuông AOM, ta có

$$OK \cdot OM = OA^2 = R^2. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow OC \cdot OH = R^2$ (const).
Do O, H cố định và C nằm trong đoạn OH nên đường thẳng AB đi qua điểm C cố định $\Rightarrow$ (đpcm). □

1.1.4 Định lý Ptôlêmê và tứ giác nội tiếp

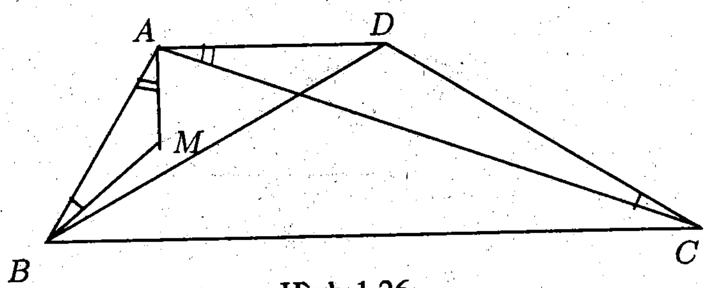
1, Định lý

Cho tứ giác $ABCD$. Chứng minh rằng:

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD$$

Đẳng thức chỉ xảy ra khi tứ giác nội tiếp được. (Kết quả của bài toán này được gọi là định lý Ptôlêmê.)

Chứng minh.
Dựng các góc $\angle MBA = \angle ACD$ và $\angle CAD = \angle MAB$ như hình vẽ .



Hình 1.26.

Ta có:

$$\Rightarrow \Delta ABM \sim \Delta ACD\,(g.g)$$
$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AM}{AD} = \frac{BM}{CD}$$
$$\Rightarrow AB \cdot CD = AC \cdot BM \quad (1)$$

Mặt khác ta lại có:

$$\angle MAD = \angle BAC \text{ và } \frac{AM}{AD} = \frac{AB}{AC}.$$

$$\Rightarrow \Delta AMD \sim \Delta ABC\,(c.g.c)$$
$$\Rightarrow \frac{MD}{BC} = \frac{AD}{AC}$$
$$\Rightarrow AD \cdot BC = AC \cdot MD \quad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC(MB + MD)$.
Nhưng theo bất đẳng thức tam giác thì

$$MB + MD \geq BD$$

dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi B, M, D thẳng hàng theo thứ tự. Suy ra

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD.$$

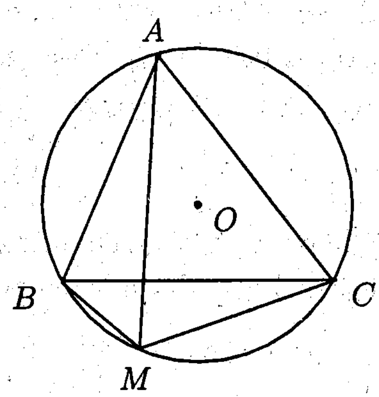
Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \angle ABD = \angle ACD \Leftrightarrow ABCD$ nội tiếp được theo tiêu chuẩn 2.
Định lý Ptôlêmê đã được chứng minh. □

2, Ví dụ minh họa

Ví dụ 1.21. Cho đường tròn (O) và ΔABC đều, nội tiếp trong đường tròn đó. Xét điểm M tuỳ ý thuộc cung $\overset{\frown}{BC}$. Chứng minh rằng

$$MA = MB + MC.$$

Giải



Hình 1.27.

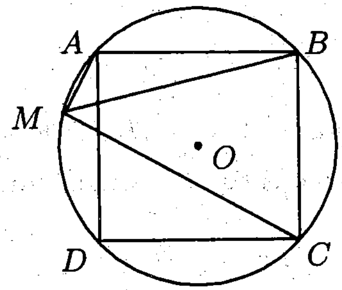
Tứ giác ABMC nội tiếp được nên theo định lý Ptôlêmê ta có:

$$MA \cdot BC = AB \cdot MC + AC \cdot MB = AB(MC + MB)$$
$$\Rightarrow MA = MB + MC \text{ (đpcm).}$$

□

Ví dụ 1.22. Cho hình vuông $ABCD$. M tuỳ ý thuộc cung $\overset{\frown}{ADC}$ của đường tròn ngoại tiếp hình vuông. Chứng minh rằng $MA + MC = \sqrt{2}MB$.

Giải



Hình 1.28.

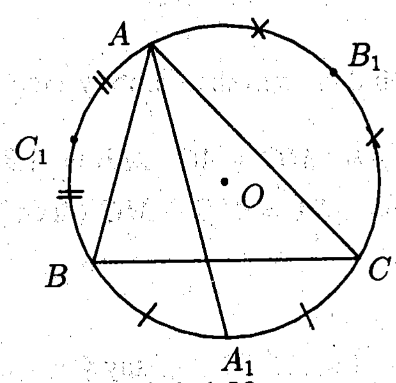
Tứ giác MABC nội tiếp được nên theo định lý Ptôlêmê ta có:

$$MA \cdot BC + MC \cdot AB = MB \cdot AC$$
$$\Leftrightarrow (MA + MC)AB = MB \cdot AB\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow MA + MC = \sqrt{2}MB \quad \text{(đpcm)}.$$

□

Ví dụ 1.23. Cho $\triangle ABC$. Gọi A_1, B_1, C_1 là trung điểm các cung $\overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CA}, \overset{\frown}{AB}$ của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Chứng minh rằng:

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 > AB + BC + CA.$$



Hình 1.29.

Giải

Tứ giác ABA_1C nội tiếp được nên theo định lý Ptôlêmê ta có

$$\Rightarrow AB \cdot A_1C + AC \cdot A_1B = AA_1 \cdot BC.$$

Do A_1 là trung điểm cung $\overset{\frown}{BC}$ nên $A_1B = A_1C$

$$\Rightarrow AA_1 = \frac{(AB + AC)A_1B}{BC} = \frac{AB + AC}{2} \cdot \frac{A_1B + A_1C}{BC}$$

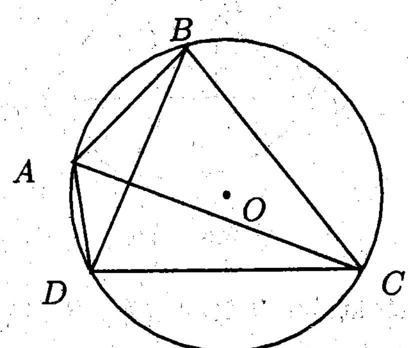
Xét ΔA_1BC ta có $A_1B + A_1C > BC \Rightarrow AA_1 > \dfrac{AB + AC}{2}$. Hoàn toàn tương tự ta có

$$BB_1 > \frac{BA + BC}{2}; CC_1 > \frac{CA + CB}{2}.$$

Cộng 3 bất đẳng thức trên ta có đpcm. □

Ví dụ 1.24. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp được và $\angle BAD$ tù. Giả thiết CA, CB, CD là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng trong tam giác đó góc ứng với cạnh có độ dài bằng AC là góc nhọn.

Giải



Hình 1.30.

Theo định lý Ptôlêmê ta có:

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD.$$

Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacốpki

$$\Rightarrow AC \cdot BD \leq \sqrt{AB^2 + AD^2}\sqrt{CB^2 + CD^2}.$$

Do $\angle BAD$ tù nên $AB^2 + AD^2 < BD^2$ và từ đó

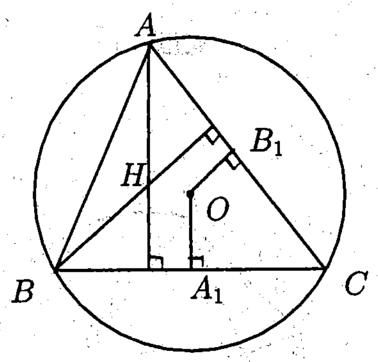
$$AC \cdot BD < BD\sqrt{CB^2 + CD^2}$$
$$\Leftrightarrow CB^2 + CD^2 > CA^2,$$

Từ đó ta có đpcm. □

Ví dụ 1.25. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp trong đường tròn (O, R) với H là trực tâm. Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp của ΔABC. Chứng minh rằng:

$$HA + HB + HC = 2(R + r).$$

Giải



Hình 1.31.

Sử dụng kết quả đã biết là $AH = 2OA_1$ (A_1, B_1, C_1 là trung điểm các cạnh BC, CA, AB) nên ta phải chứng minh

$$OA_1 + OB_1 + OC_1 = R + r.$$

Do tứ giác OA_1CB_1 nội tiếp được nên theo định lý Ptôlêmê, ta có:

$$OB_1 \cdot A_1C + OA_1 \cdot B_1C = CO \cdot A_1B_1 = R \cdot \frac{c}{2}$$
$$\Rightarrow R \cdot \frac{c}{2} = \frac{a}{2} \cdot OB_1 + \frac{b}{2} \cdot OA_1$$

(trong đó a, b, c là độ dài các cạnh của ΔABC)

Tương tự như vậy và từ đó ta có

$$\begin{aligned}
p \cdot R &= \frac{b+c}{2}OA_1 + \frac{c+a}{2}OB_1 + \frac{a+b}{2}OC_1 \\
&= p(OA_1 + OB_1 + OC_1) - (\frac{a}{2}OA_1 + \frac{b}{2}OB_1 + \frac{c}{2}OC_1) \\
&= p(OA_1 + OB_1 + OC_1) - S_{ABC} \\
&= p(OA1 + OB1 + OC1) - p \cdot r \\
\Rightarrow R &= (OA_1 + OB_1 + OC_1) - r
\end{aligned}$$

Vậy ta có đpcm. □

1.2 Tiếp tuyến của đường tròn

1.2.1 Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

1, Khảo sát vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

Cho đường tròn (O, R) và đường thẳng d. Ta kí hiệu h là khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng d.

- $h > R$: (O) và d không có điểm chung. Trong trường hợp này, ta nói d nằm ngoài (O).
- $h = R$: (O) và d có điểm chung duy nhất. Trong trường hợp này, ta nói d là tiếp tuyến của (O) và điểm chung là tiếp điểm.
- $h < R$: (O) cắt d có đúng hai điểm chung. Trong trường hợp này, ta nói d cắt (O) và d là một cát tuyến.

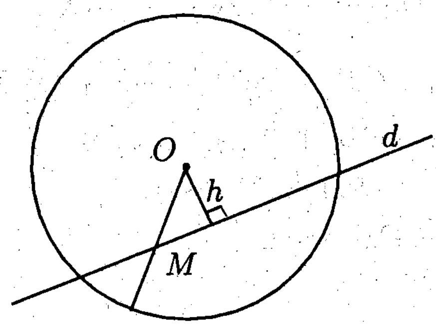
2, Một số dạng toán thường gặp

a. Chứng minh đường thẳng và đường tròn có điểm chung

Để chứng minh đường thẳng và đường tròn có điểm chung, ta chứng minh $h \leq R$.

Ví dụ 1.26. Cho đường tròn (O, R) và điểm M nằm trong đường tròn. Chứng minh rằng đường thẳng d đi qua M cắt đường tròn.

Giải

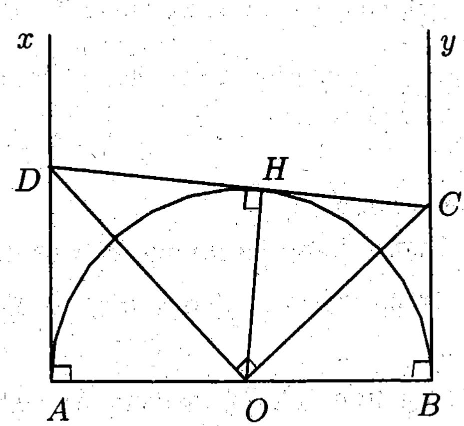


Hình 1.32.

Thật vậy, gọi khoảng cách từ O đến d là h, ta có $h \leq OM$. Mặt khác, M nằm trong đường tròn nên $OM < R$. Do đó, $h < R$ hay đường thẳng d cắt đường tròn. □

Ví dụ 1.27. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Ax, By là các nửa đường thẳng cùng vuông góc với AB và nằm cùng phía đối với AB. Trên By ta lấy điểm C và trên Ax ta lấy điểm D sao cho $\angle COD = 90^o$. Chứng minh rằng CD tiếp xúc với nửa đường tròn đó.

Giải



Hình 1.33.

Gọi H là hình chiếu của O trên đường thẳng CD. Vì ΔOCD vuông tại O nên H nằm trên đoạn CD.

Ta có $\angle DAO = \angle DHO = 90^o \Rightarrow$ tứ giác $ADHO$ nội tiếp được $\Rightarrow$ $\angle ADO = \angle AHO$. Tương tự, ta có $\angle BCO = \angle BHO$. Từ đó ta có

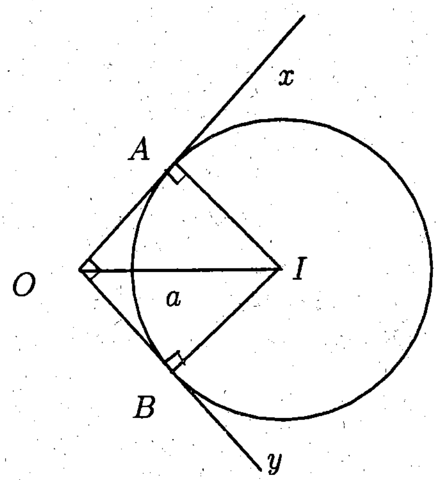
$$\begin{aligned}\angle AHB &= \angle AHO + \angle BHO\\ &= \angle ADO + \angle BCO\\ &= 180^o - (\angle DOA + \angle COB) = 90^o\end{aligned}$$

Từ đó ta có đpcm. □

b. Tính các đại lượng hình học

Ví dụ 1.28. Cho $\angle xOy = 90^o$ và đường tròn tâm I tiếp xúc với hai cạnh của góc. Tính bán kính đường tròn biết $IO = a$.

Giải



Hình 1.34.

Gọi A, B lần lượt là tiếp điểm của đường tròn với Ox, Oy. Theo tính chất của tiếp tuyến ta có $IA \perp Ox, IB \perp Oy$, $\angle AOI = \angle BOI = \dfrac{xOy}{2} = 45^o$.

Xét tam giác vuông OAI có:

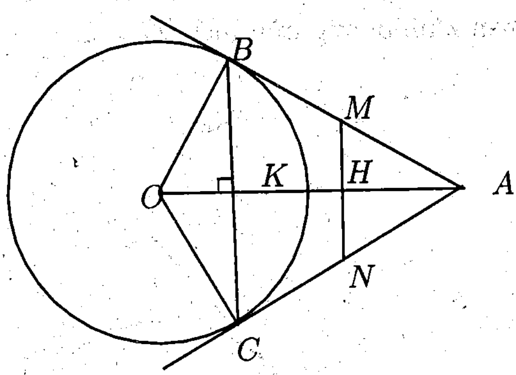
$$\angle AOI = 45^o \Rightarrow \Delta OAI \text{ cân}$$

$$\Rightarrow OI^2 = 2AI^2 \Rightarrow R = AI = \frac{OI\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

□

Ví dụ 1.29. Cho đường tròn (O, R) và điểm A cách tâm đường tròn một khoảng $2R$. Từ A kẻ hai đường thẳng lần lượt tiếp xúc với (O) tại B, C. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, AC Tính khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng MN.

Giải



Hình 1.35.

Gọi K là giao điểm của BC và AO. Theo tính chất tiếp tuyến ta có $AB = AC$ và $AB \perp OB$, $AC \perp OC$. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABO ta có:

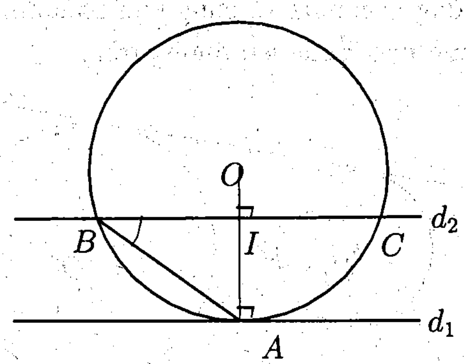
$$OK \cdot OA = BO^2 \Rightarrow OK = \frac{BO^2}{OA} = \frac{R}{2} \Rightarrow KA = \frac{3R}{2}.$$

Ta lại có MN là đường trung bình của ΔABC nên gọi H là giao điểm của MN và AO ta có $HK = \frac{1}{2}AK = \frac{3R}{4} \Rightarrow OH = \frac{R}{2} + \frac{3R}{4} = \frac{5R}{4}$.

Vậy khoảng cách từ O đến MN bằng $\frac{5R}{4}$. □

Ví dụ 1.30. Cho hai đường thẳng d_1, d_2 song song và cách nhau một khoảng h. Đường tròn bán kính $R = \frac{3}{2}h$ tiếp xúc với d_1 tại A, cắt d_2 tại B, C. Tính độ dài BC và $\operatorname{tg} ABC$.

Giải



Hình 1.36.

Gọi O là tâm của đường tròn. Ta chứng minh đường thẳng d_2 và O nằm cùng một phía đối với đường thẳng d_1. Thật vậy, giả sử d_2 và O nằm về hai nửa mặt phẳng bờ d_1. Gọi a, b lần lượt là khoảng cách từ O đến d_1, d_2. Vì (O) tiếp xúc với d_1 tại A nên $a = R$. Ta có $b = a + h > R \Rightarrow (O)$ không cắt đường thẳng d_2 (mâu thuẫn với giả thiết).

Vậy d_2 và O nằm cùng một phía đối với đường thẳng d_1.

Vì $R > h$ nên O và d_1 nằm về hai phía đối với đường thẳng d_2. Gọi I là giao của OA, BC. Ta có $OA \perp d_1 \Rightarrow AO \perp d_2 \Rightarrow I$ là trung điểm của BC. Xét tam giác vuông ABI ta có:

$$IB^2 = BO^2 - IO^2 = R^2 - (R-h)^2 = \frac{9h^2}{4} - \frac{h^2}{4} = 2h^2$$

$$\Rightarrow IB = h\sqrt{2}, \operatorname{tg} ABC = \frac{AI}{BI} = \frac{h}{h\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

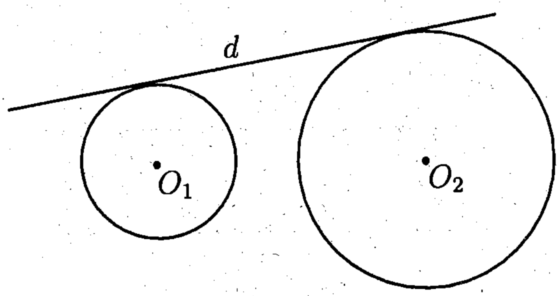
Vậy $BC = 2BI = 2h\sqrt{2}$, $\operatorname{tg} ABC = \frac{1}{\sqrt{2}}$ □

1.2.2 Tiếp tuyến chung của hai đường tròn

1, Định nghĩa

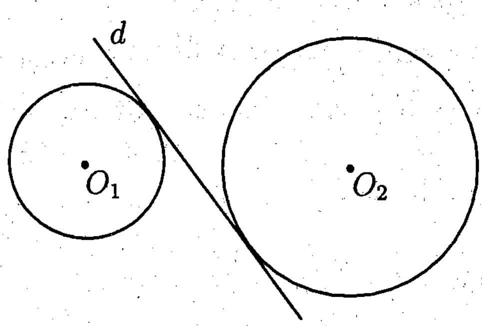
Cho hai đường tròn (O_1, R_1), (O_2, R_2). Đường thẳng d được gọi là tiếp tuyến chung của hai đường tròn nếu d tiếp xúc với cả hai đường tròn. Nói cách khác, d vừa là tiếp tuyến của (O_1, R_1), vừa là tiếp tuyến của (O_2, R_2).

- Nếu cả hai đường tròn nằm về cùng một phía đối với d thì ta nói d là tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn.



Hình 1.37.

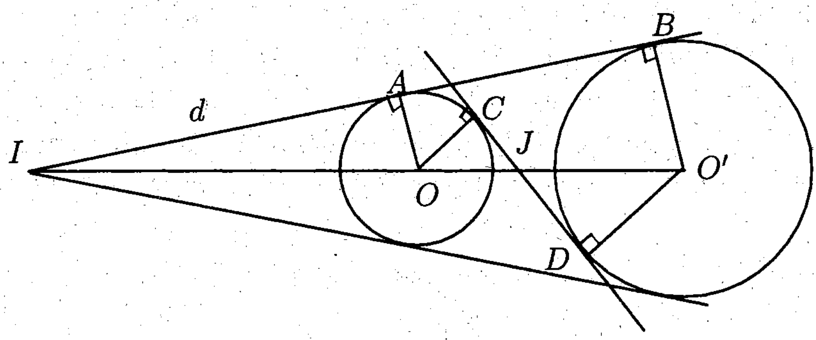
- Nếu hai đường tròn nằm khác phía đối với d thì ta nói d là tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn.



Hình 1.38.

2, Ví dụ minh họa

Ví dụ 1.31. Cho hai đường tròn tâm O, O' nằm ngoài nhau. Chứng minh rằng có đúng hai tiếp tuyến chung ngoài, hai tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn đó.



Hình 1.39.

Giải

Gọi R, R' lần lượt là bán kính của (O), (O'). Xét trường hợp $R \neq R'$, không mất tổng quát giả sử $R < R'$. Giả sử d là tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn, tiếp xúc với hai đường tròn $(O), (O')$ lần lượt tại A, B. Ta có: $OA \perp d, O'B \perp d$. Vì $OA < OB$ nên đường thẳng AB không song song với OO' hay d giao với đòng thẳng OO'. Đặt $I = d \cap OO'$. Vì $R < R'$ và O, O' nằm về cùng một phía đối với đường thẳng d nên hai điểm O, A lần lượt thuộc các đoạn IO', IB. Áp dụng định lý Talét cho tam giác IBO' ta có

$$\frac{IA}{IB} = \frac{IO}{IO'} = \frac{OA}{O'B} = \frac{R}{R'} \Rightarrow \frac{IO}{IO'} = \frac{R}{R'} \qquad (*)$$

Do đó, ta có điểm I được xác định duy nhất. Do $IO' > OO' > R'$ $\Rightarrow IO > R$ hay I nằm ngoài hai đường tròn. Mặt khác, từ I ngoài đường tròn, kẻ được đúng hai tiếp tuyến tới O. Áp dụng định lý Talét dễ dàng chứng minh được, hai đường thẳng này tiếp xúc với (O) thì tiếp xúc với O'. Vậy có đúng hai tiếp tuyến chung ngoài của $(O), (O')$.

Giả sử Δ là tiếp tuyến chung trong của $(O), (O')$. Vì hai đường tròn (O), (O') nằm về hai phía của đường thẳng Δ nên Δ cắt OO' tại điểm J, J nằm trong đoạn OO'. Gọi C, D là tiếp điểm của Δ với $(O), (O')$, ta có

$OC, O'D$ cùng vuông góc với Δ. Áp dụng định lý Talét ta có:

$$\frac{JO}{JO'} = \frac{OC}{O'D} = \frac{R}{R'} \Rightarrow \frac{JO}{JO'} = \frac{R}{R'} \qquad (**)$$

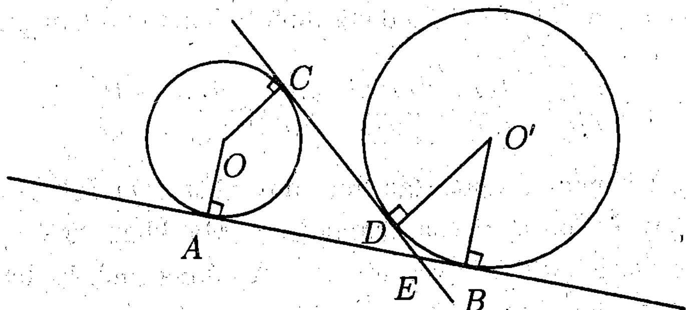
$\Rightarrow$ điểm J hoàn toàn xác định trong đoạn OO'. Mặt khác, $R + R' < OO' = JO + JO'$ nên từ $(**)$ ta có $JO > R, JO' > R'$ hay J nằm ngoài đường tròn (O), (O'). Từ J nằm ngoài đường tròn (O) kẻ được đúng hai tiếp tuyến tới (O). Áp dụng định lý Talét dễ dàng chứng minh được hai đường thẳng này cũng tiếp xúc với (O'). Vậy có đúng hai tiếp tuyến chung trong của $(O), (O')$.

Trường hợp $R = R'$ bạn đọc tự chứng minh. □

Nhận xét: Kết quả của bài toán trên, đặc biệt hai biểu thức $(*), (**)$ được áp dụng rất nhiều đối với các bài toán có liên quan đến tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

Ví dụ 1.32. Cho hai đường tròn $(O), (O')$ nằm ngoài nhau. Gọi AB là một tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn. CD là một tiếp tuyến chung trong của chúng (A, B, C, D là các tiếp điểm). Chứng minh rằng $AB > CD$.

Giải



Hình 1.40.

Vì CD là tiếp tuyến trong của hai đường tròn $(O), (O')$ nên hai đường tròn $(O), (O')$ nằm về hai nửa mặt phẳng bờ CD (theo định nghĩa) $\Rightarrow A, B$ nằm khác phía đối với đường thẳng CD. Do đó đường thẳng CD cắt đoạn AB, giả sử tại điểm E.

AB là tiếp tuyến ngoài của OO' nên $(O), (O')$ thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ AB (theo định nghĩa) $\Rightarrow C, D$ nằm cùng phía đối với bờ $AB \Rightarrow E$ nằm ngoài đoạn CD.

Không mất tổng quát, giả sử C, D, E theo thứ tự như hình vẽ, ta có $CD < CE = AE < AB \Rightarrow$ (đpcm).

□

1.2.3 Vị trí tương đối của hai đường tròn

1, Định nghĩa

Cho hai đường tròn (O), (O')

- Hai đường tròn được gọi là *ngoài nhau* nếu mọi điểm của đường tròn này nằm ngoài đường tròn kia và ngược lại.
- Hai đường tròn được gọi là *lồng nhau (đựng nhau)* nếu tồn tại một đường tròn mà mọi điểm thuộc nó nằm trong đường tròn kia.
- Hai đường tròn có hai điểm chung phân biệt được gọi là hai đường tròn *cắt nhau*.
- Hai đường tròn có một điểm chung duy nhất được gọi là hai đường tròn *tiếp xúc*.
  Điểm chung của hai đường tròn được gọi là *tiếp điểm*. Tiếp điểm và tâm của hai đường tròn thẳng hàng.

  Tiếp tuyến tại tiếp điểm của đường tròn này cũng là tiếp tuyến của đường tròn kia.

  Có hai kiểu tiếp xúc: *tiếp xúc trong* nếu tiếp điểm nằm ngoài đoạn nối tâm, *tiếp xúc ngoài* nếu tiếp điểm nằm trong đoạn nối tâm.

2, Dấu hiệu nhận biết

Cho hai đường tròn $(O, R), (O', R')$ có $OO' = l$.

- Hai đường tròn nằm ngoài nhau $\Leftrightarrow R + R' < l$.
- Hai đường tròn tiếp xúc ngoài nhau $\Leftrightarrow R + R' = l$.
- Hai đường tròn cắt nhau $\Leftrightarrow R + R' > l > |R - R'|$.
- Hai đường tròn tiếp xúc trong với nhau $\Leftrightarrow |R - R'| = l$
- Đường tròn (O) chứa đường tròn $(O') \Leftrightarrow |R - R'| > l$.

3, Ví dụ minh họa

Ví dụ 1.33. Cho hai đường tròn $(O, R), (O', 1)$. Độ dài $OO' = \sqrt{5}$. Với giá trị nào của R để hai đường tròn cắt nhau? Tiếp xúc trong với nhau?

Giải

- (O), (O') cắt nhau khi và chỉ khi $R + 1 > OO' > |R - 1|$

  $R + 1 > OO' \Leftrightarrow R > OO' - 1 = \sqrt{5} - 1 > 1$

  $OO' > |R - 1| = R - 1 \Leftrightarrow R < OO' + 1 = \sqrt{5} + 1$

  Vậy $\sqrt{5} + 1 > R > \sqrt{5} - 1$.

- $(O), (O')$ tiếp xúc trong $\Leftrightarrow |R - 1| = OO' \Leftrightarrow |R - 1| = \sqrt{5} \Leftrightarrow R = \sqrt{5} + 1$

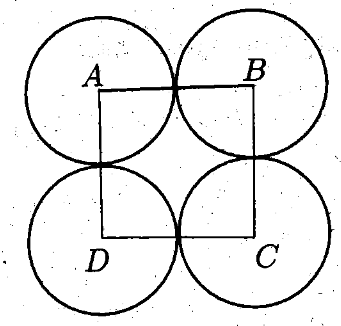
□

Ví dụ 1.34. Cho hình vuông $ABCD$. Ta xét bốn đường tròn có tâm tại bốn đỉnh hình vuông sao cho các cặp đường tròn (A) và (B), (B) và (C), (C) và (D) là các cặp đường tròn tiếp xúc ngoài. Xác định vị trí tương đối của:

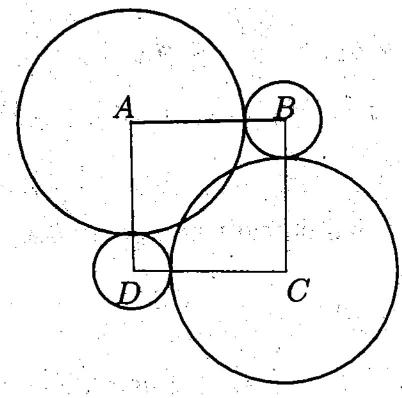
a. (A) và (C),

b. (A) và (D),

c. (B) và (D).



Hình 1.41.



Hình 1.42.

Giải

Gọi bán kính đường tròn $(A), (B), (C), (D)$ lần lượt là R_A, R_B, R_C, R_D. Gọi độ dài cạnh của hình vuông $ABCD$ là a. Từ giả thiết ta có:

$$R_A + R_B = R_B + R_C = R_C + R_D = a \qquad (1)$$
$$\Rightarrow R_A = R_C, R_B = R_D$$
$$\Rightarrow R_A + R_D = a = AD \Rightarrow (A), (D) \text{ tiếp xúc ngoài.}$$

Ta xét các trường hợp sau

- $R_A > a\frac{\sqrt{2}}{2}$

  $R_A + R_C = 2R_A > a\sqrt{2} = AC \Rightarrow (A), (C)$ là hai đường tròn cắt nhau.

  $R_B = a - R_A < a - a\frac{\sqrt{2}}{2} = a(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) \Rightarrow R_B + R_D = 2R_B < a\sqrt{2} = BD \Rightarrow (B), (D)$ là hai đường tròn ngoài nhau.

- $R_A = a\frac{\sqrt{2}}{2}$

  $R_A + R_C = AC \Rightarrow (A), (C)$ là hai đường tròn tiếp xúc ngoài.

  $R_B + R_D < BD \Rightarrow (B), (D)$ là hai đường tròn ngoài nhau.

- $a(1-\frac{\sqrt{2}}{2}) < R_A < a\frac{\sqrt{2}}{2}$

  $R_A + R_C < AC \Rightarrow (A), (C)$ là hai đường tròn ngoài nhau.

  $R_B < a - a(1-\frac{\sqrt{2}}{2}) = a\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow R_B + R_D < BD \Rightarrow (B), (D)$ là hai đường tròn ngoài nhau.

- $R_A = a(1-\frac{\sqrt{2}}{2})$

  $(A), (C)$ là hai đường tròn ngoài nhau.

  $(B), (D)$ là hai đường tròn tiếp xúc ngoài.

- $R_A < a(1-\frac{\sqrt{2}}{2})$

  $(A), (C)$ là hai đường tròn ngoài nhau.

  $(B), (D)$ là hai đường tròn cắt nhau.

□

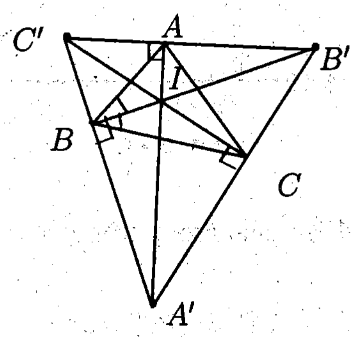
1.3 Đa giác ngoại tiếp

1.3.1 Các đường tròn nội tiếp và bàng tiếp

- Cho ΔABC với $BC = a, CA = b, AB = c$ và $p = \frac{(a+b+c)}{2}$. Ba đường phân giác trong đồng quy tại I. Điểm I cách đều 3 cạnh của tam giác một khoảng r.
  Đường tròn (I, r) được gọi là đường tròn nội tiếp tam giác và ΔABC là tam giác ngoại tiếp đường tròn (I, r).

- Dựng 3 đường phân giác ngoài của 3 góc $\angle A, \angle B, \angle C$. Phân giác trong góc $\angle A$ và 2 phân giác ngoài góc $\angle B, \angle C$ đồng quy tại A'. Điểm A' cách đều các đường thẳng AB, BC, CA một khoảng r_a.
  Đường tròn (A', r_a) được gọi là đường tròn bàng tiếp của ΔABC ứng với đỉnh A.

Tương tự ta có các đường tròn bàng tiếp (B', r_b) và (C', r_c) ứng với các đỉnh B và C.
Như vậy với mỗi tam giác luôn có 1 đường tròn nội tiếp và 3 đường tròn bàng tiếp.



Hình 1.43.

1.3.2 Một số kết quả cơ bản

Mười kết quả đơn giản sau đây sẽ được sử dụng khi giải các bài toán phức tạp hơn có liên quan đến các đường tròn nội tiếp và bàng tiếp.

1, I là trực tâm của $\Delta A'B'C'$.

Chứng minh. Hiển nhiên vì $A'A, B'B, C'C$ là 3 đường cao của ΔABC. □

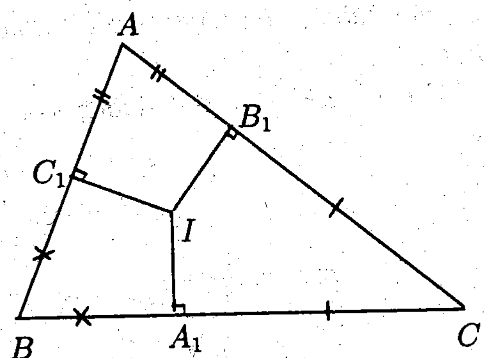
2, Gọi A_1, B_1, C_1 là các tiếp điểm của đường tròn (I, r) với các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng

$$BA_1 = BC_1 = p - b.$$

Chứng minh. Theo tính chất tiếp tuyến ta luôn có

$$BA_1 = BC_1, CA_1 = CB_1, AB_1 = AC_1$$
$$\Rightarrow BA_1 + CB_1 + AC_1 = p$$
$$\Rightarrow BA_1 = p - (CB_1 + AB_1) = p - b.$$

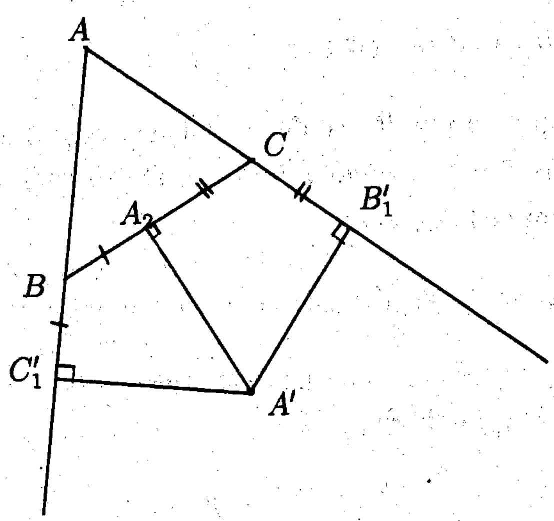
⇒ (đpcm). □



Hình 1.44.

3, Gọi B_1', C_1' là tiếp điểm của đường tròn (A', r_a) với các cạnh AC, AB. Chứng minh rằng

$$AB_1' = AC_1' = p.$$



Hình 1.45.

Chứng minh. Gọi A_2 là tiếp điểm của (A', r_a) với cạnh BC. Luôn có

$$BA_2 = BC_1'; CA_2 = CB_1' \Rightarrow BC_1' + CB_1' = BC = a.$$

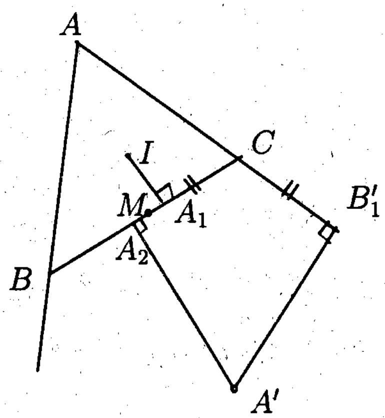
Hiển nhiên $AC_1' = AB_1'$ vì là hai tiếp tuyến cùng xuất phát từ A đối với (A', r_a).

Xét

$$\begin{aligned} AC_1' + AB_1' &= 2AC_1' \\ &= AB + AC + (BC_1' + CB_1') = a + b + c \\ \Rightarrow AC_1' &= AB_1' = \frac{(a+b+c)}{2}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ (đpcm). □

4, A_1, A_2 đối xứng qua trung điểm của BC.



Hình 1.46.

Chứng minh. Theo trên, $BA_1 = p - b$. Ta lại có:

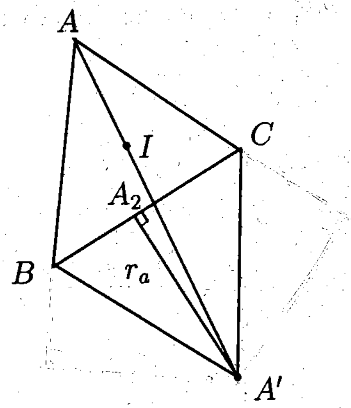
$$\begin{aligned} CA_2 = CB_1' = AB_1' - AC = p - b \\ \Rightarrow BA_1 = CA_2 = p - b \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ (đpcm). □

5, $S_{ABC} = p \cdot r = (p-a) \cdot r_a = (p-b) \cdot r_b = (p-c) \cdot r_c$.

Chứng minh.

- $S = p \cdot r$ (bạn đọc tự chứng minh).



Hình 1.47.

- Ta có

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{ABA'} + S_{ACA'} - S_{A'BC} \\ &= \frac{1}{2}(b+c)\cdot r_a - \frac{1}{2}a\cdot r_a \\ &= \frac{1}{2}(b+c-a)\cdot r_a = (p-a)\cdot r_a \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ (đpcm). □

6, Chứng minh rằng $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c}$.

Chứng minh. Từ kết quả 5 ta luôn có

$$\frac{r}{r_a} = \frac{p-a}{p} \Rightarrow r\left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}\right) = \frac{3p-(a+b+c)}{p} = 1$$

Suy ra (đpcm). □

Chú ý: Từ kết quả trên nếu đặt $M = \max\{r_a, r_b, r_c\}$ và $m = \min\{r_a, r_b, r_c\}$ thì luôn có $M \geq 3r$ và $m \leq 3r$.

7, Gọi h_a, h_b, h_c là độ dài ba đường cao tương ứng với các đỉnh A, B, C của tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}.$$

Chứng minh.
Do I là điểm trong của ΔABC nên

$$\frac{S_{IBC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{ICA}}{S_{ABC}} + \frac{S_{IAB}}{S_{ABC}} = 1 \qquad (1)$$

Dễ thấy

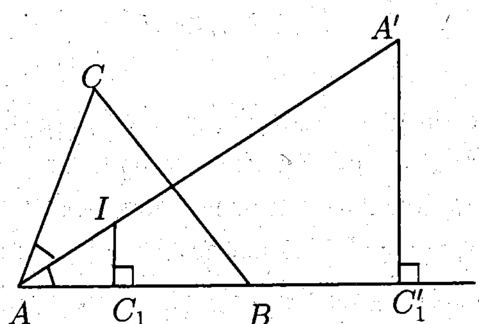
$$\frac{r}{h_a} = \frac{S_{IBC}}{S_{ABC}}, \frac{r}{h_b} = \frac{S_{ICA}}{S_{ABC}}, \frac{r}{h_c} = \frac{S_{IAB}}{S_{ABC}} \qquad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow \frac{r}{h_a} + \frac{r}{h_b} + \frac{r}{h_c} = 1 \Rightarrow$ (đpcm). □

Chú ý: Từ 2 kết quả trên ta luôn có

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}. = \frac{1}{\lambda}$$

8, Nếu $a = \max\{a, b, c\}$ thì $r_a \geq 3r$.
Nếu $a = \min\{a, b, c\}$ thì $r_a \leq 3r$.



Hình 1.48.

Chứng minh. Sử dụng phép giải tam giác vuông ta có:

$$r_a = p \operatorname{tg} \frac{A}{2}, r = (p - a) \operatorname{tg} \frac{A}{2}$$

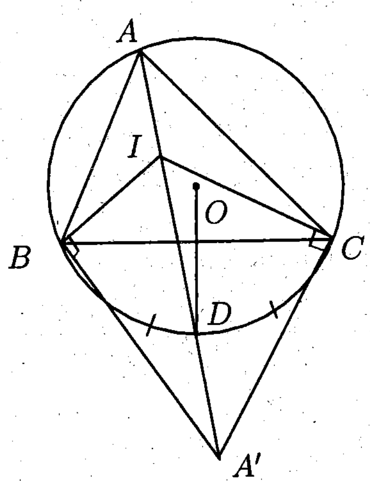
$$\Rightarrow 3r - r_a = (b + c - 2a) \operatorname{tg} \frac{A}{2}.$$

Do $\operatorname{tg}\dfrac{A}{2} > 0$ nên nếu:

- $a = \max\{a, b, c\}$ thì $3r - r_a \leq 0$.
- $a = \min\{a, b, c\}$ thì $3r - r_a \geq 0$.

Vậy ta có đpcm. □

9, IA' cắt đường tròn ngoại tiếp ΔABC tại trung điểm của nó.



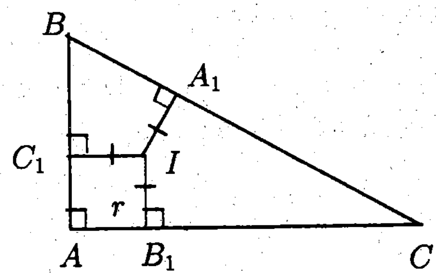
Hình 1.49.

Chứng minh. Gọi D là giao điểm của AA' với đường tròn (O) ngoại tiếp ΔABC. Tứ giác $IBA'C$ nội tiếp được trong đường tròn đường kính IA' (tiêu chuẩn 1) suy ra tâm đường tròn là trung điểm IA'. Mặt khác tâm đó thuộc đường trung trực của BC là đường OD (vì D là trung điểm của cung $\overset{\frown}{BC}$) $\Rightarrow$ tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $IBA'C$ là $D \Rightarrow$ (đpcm). □

10, Giả sử ΔABC vuông tại A. Chứng minh rằng

$$r = p - a.$$

Chứng minh. Do AB_1IC_1 là hình vuông nên $AC_1 = r$. Theo kết quả 2 suy ra (đpcm). □

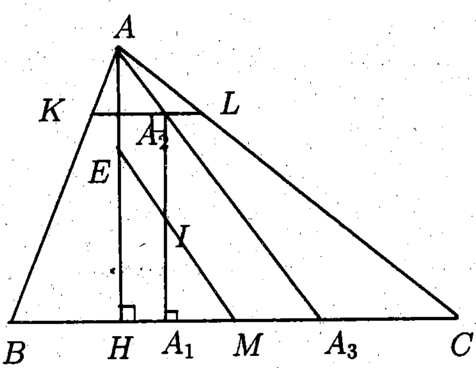


Hình 1.50.

1.3.3 Ví dụ minh họa

Ví dụ 1.35. Cho ΔABC, kẻ đường cao AH. Gọi M là trung điểm BC và I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC. MI cắt AH ở E. Chứng minh rằng $AE = r$.

Giải



Hình 1.51.

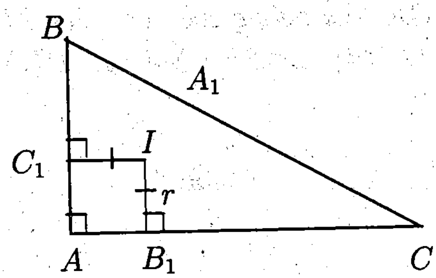
Vẽ đường kính A_1A_2 của (I, r). Tiếp tuyến (I, r) qua A_2 cắt AB, AC ở K và L. Khi đó (I, r) trở thành đường tròn bàng tiếp tam giác AKL ứng với đỉnh A.
Do $LK \| BC$ nên nếu AA_2 cắt BC ở A_3 thì A_3 là tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp ΔABC ứng với đỉnh A đối với cạnh $BC \Rightarrow MA_1 = MA_3$ (kết quả 4) $\Rightarrow AA_3 \| EM$ (đường trung bình). Dễ thấy $AH \| A_1A_2$ (cùng vuông góc với BC).

Vậy AA_2IE là hình bình hành $\Rightarrow AE = IA_2 = r$ (đpcm). □

Ví dụ 1.36. Cho ΔABC vuông ở A. Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp và a là độ dài cạnh huyền BC. Chứng minh rằng:

$$\frac{r}{a} \leq \frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

Giải



Hình 1.52.

Gọi b, c là độ dài các cạnh CA, AB và p là nửa chu vi của ΔABC. Ta có $r = p - a$ (kết quả 10) $\Leftrightarrow b + c = a + 2r$. (1)
Mặt khác,

$$(b+c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc \leq 2(b^2+c^2) = 2a^2$$
$$\Rightarrow b + c \leq a\sqrt{2} \qquad (2).$$

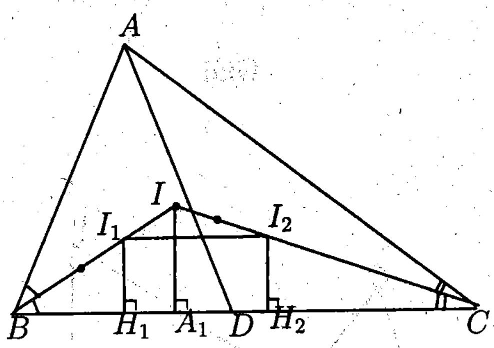
Từ (1) và (2) suy ra

$$a + 2r \leq a\sqrt{2} \Leftrightarrow 2r \leq a(\sqrt{2}-1)$$
$$\Leftrightarrow \frac{r}{a} \leq \frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

$\Rightarrow$ (đpcm). □

Ví dụ 1.37. Cho ΔABC và điểm D thuộc cạnh BC sao cho hai đường tròn nội tiếp hai tam giác ABD và ACD bằng nhau. Gọi a, b, c là ba cạnh của ΔABC. Tính AD theo a, b, c.

Giải



Hình 1.53.

Gọi $(I, r); (I_1, r'); (I_2, r')$ là các đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, ABD, ACD và gọi S, S_1, S_2 là diện tích và p, p_1, p_2 là nửa chu vi của các tam giác đó. Đặt $AD = x$. Do $I_1I_2 \| BC$ nên theo định lý Talét ta có biểu thức

$$\frac{BC}{I_1I_2} = \frac{r}{r - r'}.$$

Mặt khác

$$I_1I_2 = H_1H_2 = DH_1 + DH_2 = (p_1 - c) + (p_2 - b) = p + x - b - c$$

(kết quả 2)

$$\Rightarrow \frac{r}{r - r'} = \frac{a}{p + x - b - c} = \frac{a}{x + a - p}. \qquad (1)$$

Theo kết quả 5 ta có

$$S = p.r = S_1 + S_2 = (p_1 + p_2).r' = (p + x).r'$$

Vậy (1) $\Leftrightarrow \dfrac{\dfrac{S}{p}}{\dfrac{S}{p} - \dfrac{S}{p + x}} = \dfrac{a}{x + a - p} \Leftrightarrow x^2 = p(p - a).$

Từ đó ta có

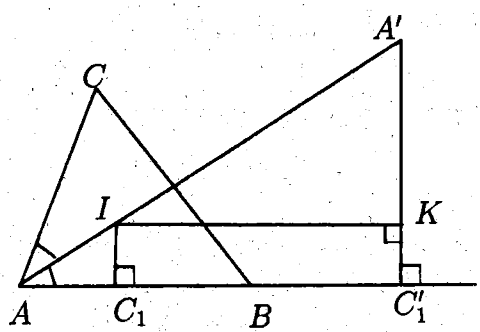
$$AD = \sqrt{p(p - a)}$$

□

Ví dụ 1.38. Cho ΔABC. r, r_a, r_b, r_c là bán kính đường tròn nội tiếp và các đường tròn bàng tiếp của ΔABC. Chứng minh rằng

$$\sqrt{r}(\sqrt{r_a}+\sqrt{r_b}+\sqrt{r_c}) \leq p$$

Giải



Hình 1.54.

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp của ΔABC,
C_1 là tiếp điểm của (I, r) và AB,
(A', r_a) là đường tròn bàng tiếp của ΔABC ứng với đỉnh A, C_1' là tiếp điểm của (A', r_a) và AB.

Kẻ $IK \perp A'C_1'$ suy ra $A'K = r_a - r, IK = C_1C_1' = a$ (kết quả 2 và 3). Mặt khác do (I, r) và (A', r_a) là hai đường tròn ngoài nhau nên $IA' \geq r + r_a$. Xét tam giác vuông IKA' ta có

$$(r + r_a)^2 \leq IA'^2 = (r_a - r)^2 + a^2$$
$$\Leftrightarrow 4rr_a \leq a^2 \Leftrightarrow \sqrt{rr_a} \leq \frac{a}{2}.$$

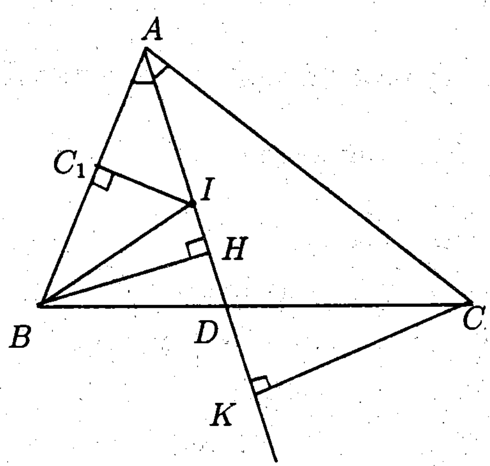
Tương tự ta có: $\sqrt{rr_b} \leq \frac{b}{2}$, $\sqrt{rr_c} \leq \frac{c}{2}$. Do đó

$$\sqrt{r}(\sqrt{r_a}+\sqrt{r_b}+\sqrt{r_c}) \leq \frac{a+b+c}{2}$$

$\Rightarrow$ (đpcm). □

Ví dụ 1.39. Cho ΔABC, gọi (I, r) là đường tròn nội tiếp. Chứng minh rằng ΔABC đều khi và chỉ khi $IA + IB + IC = 6r$.

Giải



Hình 1.55.

Kẻ $BH, CK \perp AI$

$$\Rightarrow BH + CK \leq BD + CD = a$$
$$\Rightarrow a \cdot IA \geq (BH + CK)IA.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $IA \perp BC \Leftrightarrow AB = AC$. Mặt khác

$$IA(BH + CK) = 2(S_{AIB} + S_{AIC}) = (b + c)r$$
$$\Rightarrow a \cdot IA \geq (b + c)r \Leftrightarrow IA \geq \frac{b + c}{a}r.$$

Tương tự ta có :

$$IB \geq \frac{c + a}{b}r, \ IC \geq \frac{a + b}{c}r$$
$$\Rightarrow IA + IB + IC \geq r(\frac{b + c}{a} + \frac{c + a}{b} + \frac{a + b}{c}).$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có .

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}=(\frac{b}{a}+\frac{a}{b})+(\frac{b}{c}+\frac{c}{b})+(\frac{a}{c}+\frac{c}{a})\geq 6$$

Do đó $IA+IB+IC\geq 6r$ và dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. Từ đó ta có đpcm. □

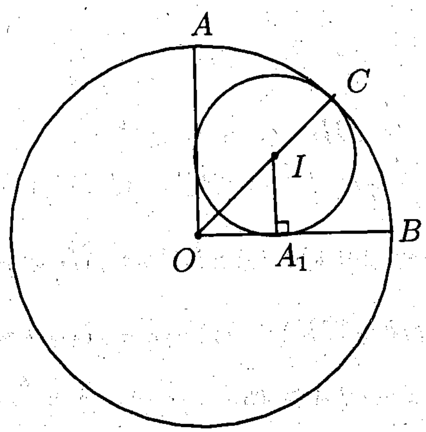
1.3.4 Tam giác cong và đường tròn nội tiếp

1, Ba loại tam giác cong thường gặp

Loại 1: Có một cạnh cong

Cho đường tròn (O,R) và 2 điểm biên A,B. Quạt tròn AOB được xem là 1 tam giác cong loại 1 có 1 cạnh cong là cung $\overset{\frown}{AB}$ (H1.56).

Xét đường tròn (I,r) vừa tiếp xúc với 2 cạnh OA,OB vừa tiếp xúc trong với (O,R). Trên phân giác OC xác định điểm I sao cho $IA_1=IC=r$. Đường tròn (I,r) là đường tròn nội tiếp tam giác cong đang xét.



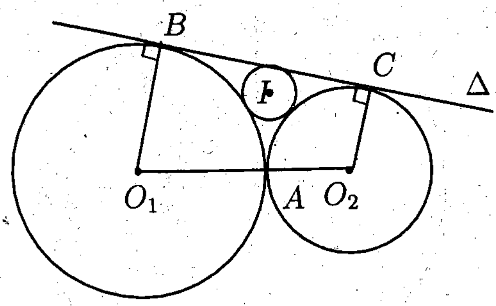
Hình 1.56.

Loại 2: Có 2 cạnh cong

Cho đường thẳng (Δ) và 2 đường tròn (O_1,R_1); (O_2,R_2) vừa tiếp xúc ngoài với nhau tại điểm A, vừa tiếp xúc với đường thẳng (Δ) tại B và C.

Khi đó xác định tam giác cong loại hai ABC có 2 cạnh cong là cung $\overset{\frown}{AB}$ và $\overset{\frown}{AC}$ (H1.57).

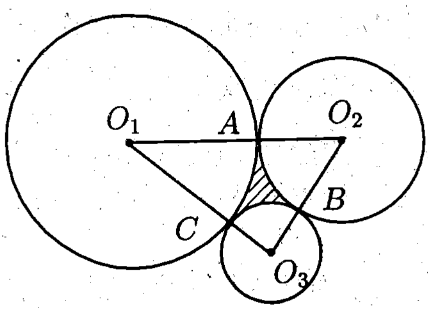
Xét đường tròn (I, r) vừa tiếp xúc với đường thẳng (Δ) vừa tiếp xúc ngoài với (O_1) và (O_2). Đó là đường tròn nội tiếp tam giác cong đang xét. Việc xác định (I, r) nhờ vào tính chất các đường tròn tiếp xúc và sẽ được minh hoạ cụ thể bằng các ví dụ.



Hình 1.57.

Loại 3: Có 3 cạnh cong

Cho 3 đường tròn (O_1, R_1), (O_2, R_2), (O_3, R_3) tiếp xúc ngoài từng đôi tại các điểm A, B, C sẽ tạo thành tam giác cong loại ba ABC, với 3 cạnh cong là các cung $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$ (H1.58). Đường tròn (I, r) tiếp xúc với cả ba đường tròn đó được gọi là đường tròn nội tiếp tam giác cong. Việc xác định (I, r) phụ thuộc vào điều kiện tiếp xúc của 3 đường tròn đã cho.

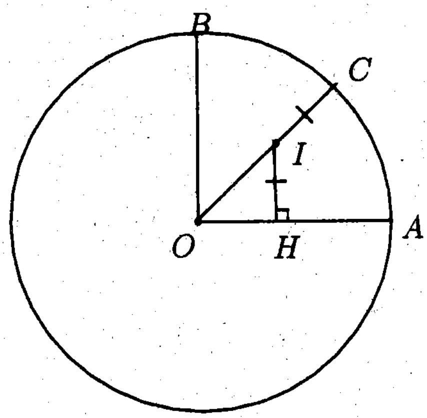


Hình 1.58.

2, Ví dụ minh họa

Ví dụ 1.40. Cho đường tròn (O, R) và dây cung $AB = R\sqrt{2}$. Tính diện tích hình tròn nội tiếp tam giác cong OAB.

Giải



Hình 1.59.

Gọi (I, r) là đường tròn phải tìm thì

$$IC = IH = r \Rightarrow OI = R - r.$$

Theo giả thiết $AB = R\sqrt{2} \Rightarrow AB^2 = OA^2 + OB^2 \Rightarrow \angle BOA = 90^o$

$$\Rightarrow IH = OI \sin 45^o \Leftrightarrow r = (R - r)\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow (2 + \sqrt{2})r = R\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{R\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = R(\sqrt{2} - 1).$$

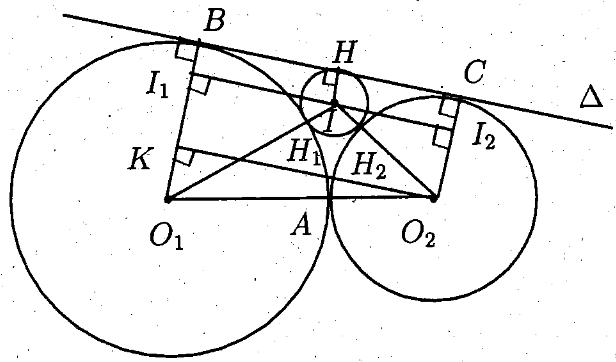
Vậy

$$S = (\sqrt{2} - 1)^2 \pi R^2.$$

□

Ví dụ 1.41. Cho (O_1, R_1) và (O_2, R_2) tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC. Xác định đường tròn nội tiếp tam giác cong ABC.

Giải



Hình 1.60.

Gọi (I, r) là đường tròn phải tìm. Không mất tổng quát, giả sử $R_1 \geq R_2$.

Kẻ $O_2K \perp O_1B$, luôn có :

$$O_1O_2 = R_1 + R_2,\ O_1K = R_1 - R_2$$

Qua I kẻ $I_1I_2 \| BC$, theo định lý Pitago ta có:

$$\begin{aligned} II_1{}^2 &= (R_1 + r)^2 - (R_1 - r)^2 = 4R_1r \\ II_2{}^2 &= (R_2 + r)^2 - (R_2 - r)^2 = 4R_2r \\ I_1I_2{}^2 = KO_2{}^2 &= (R_1 + R_2)^2 - (R_1 - R_2)^2 = 4R_1R_2 \end{aligned}$$

Do $I_1I_2 = II_1 + II_2$ nên

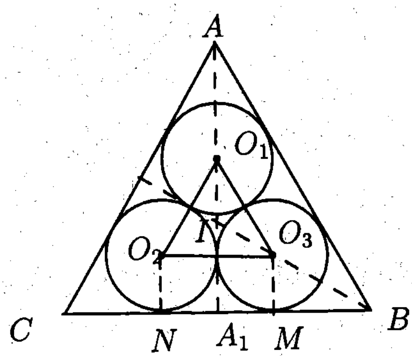
$$2\sqrt{R_1r} + 2\sqrt{R_2r} = 2\sqrt{R_1R_2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{r} = \frac{\sqrt{R_1R_2}}{\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2}}$$

Vậy $r = \dfrac{R_1R_2}{(\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2})^2}$. Tâm I là giao điểm của đường thẳng song song với BC và cách BC một khoảng bằng r, cùng phía với O_1, O_2 đối với BC và đường thẳng song song với O_1B, cách O_1B một khoảng bằng $2\sqrt{R_1r}$. □

Ví dụ 1.42. Cho ΔABC đều, cạnh a. Vẽ trong tam giác 3 đường tròn bằng nhau, tiếp xúc ngoài từng đôi một và mỗi đường tròn tiếp xúc với 2 cạnh của tam giác. Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác cong tạo bởi 3 đường tròn đó.

Giải



Hình 1.61.

Gọi O_1, O_2, O_3 là tâm 3 đường tròn bằng nhau và x là bán kính của các đường tròn đó thì $O_1O_2 = O_2O_3 = O_3O_1 = 2x$. Do ΔABC đều nên

$$BM = x \operatorname{cotg} 30^o = x\sqrt{3} \text{ và } MN = a - 2BM$$
$$\Leftrightarrow 2x = a - 2x\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{a}{2(1+\sqrt{3})}$$

Gọi (I, r) là đường tròn phải tìm thì $IO_1 = IO_2 = IO_3 = r + x$
$\Rightarrow I$ trùng với tâm của tam giác đều ABC. Xét

$$BI = BO_2 + O_2I = \frac{x}{\sin 30^o} + (r + x) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$
$$\Leftrightarrow r = \frac{a\sqrt{3}}{3} - \frac{3a}{2(1+\sqrt{3})}$$

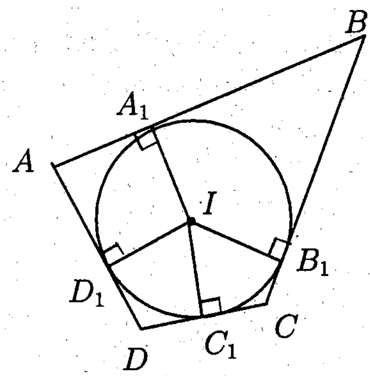
Vậy $r = \frac{a}{12}(9 - 5\sqrt{3})$. □

1.3.5 Tứ giác ngoại tiếp

- Cho tứ giác $ABCD$. Nếu có điểm I ở trong tứ giác cách đều 4 cạnh của nó một khoảng bằng r thì tứ giác $ABCD$ được gọi là ngoại tiếp được. Đường tròn (I, r) là đường tròn nội tiếp tứ giác. Khi đó cả 4 cạnh của tứ giác đều tiếp xúc với (I, r).

- Để chứng minh tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp được ta dùng tiêu chuẩn sau:

$$\textit{Tứ giác } ABCD \textit{ ngoại tiếp được } \Leftrightarrow AB + CD = AD + BC$$



Hình 1.62.

Chứng minh.
Điều kiện cần. Giả sử tứ giác $ABCD$ có đường tròn nội tiếp (I, r) . Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt là hình chiếu của I trên các cạnh AB, BC, CD, DA. Theo tính chất của 2 tiếp tuyến cùng xuất phát từ một điểm ta có:

$$AA_1 = AD_1, BA_1 = BB_1, \ CB_1 = CC_1, \ DC_1 = DD_1$$
$$\Leftrightarrow AB + CD = AD + BC$$

Điều kiện đủ. Cho tứ giác $ABCD$ thoả mãn điều kiện $AB + CD = AD + BC$ $^{(1)}$. Ta chứng minh tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp được.
Ta luôn xác định được đường tròn (I, r) tiếp xúc với 3 cạnh liên tiếp AB, BC, CD. Hai phân giác trong góc B và góc C cắt nhau tại I. Kẻ đường

thẳng qua A tiếp xúc với (I, r) cắt CD tại D'. Nếu D' trùng D thì ta có đpcm, nếu D không trùng D', chẳng hạn D' nằm trong CD thì theo điều kiện cần ta có:

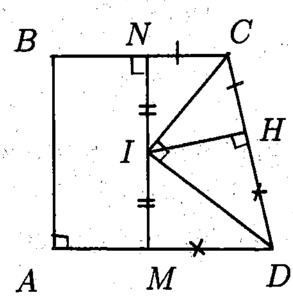
$$AB + D'C = AD' + BC \quad (2)$$

Lấy (1) – (2) ta có $DD' = AD - AD'$. Điều này mâu thuẫn với bất đẳng thức tam giác đối với $\Delta ADD'$.
Từ đó ta có đpcm. □

Sau đây chúng ta sẽ xét một số ví dụ minh họa.

Ví dụ 1.43. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A, có 2 đáy là AD và BC. Giả thiết hình thang có đường tròn nội tiếp tâm I sao cho $IC = 2, ID = 4$. Tính diện tích hình thang $ABCD$.

Giải



Hình 1.63.

Vẽ đường thẳng qua I, song song với AB cắt AD, BC lần lượt tại M, N.

Do ABCD ngoại tiếp được nên IC, ID là phân giác của 2 góc kề bù $\angle MIH$ và $\angle NIH$. Do đó $\angle CID = 90^o$.

Từ hệ thức lượng trong tam giác vuông CID ta có

$$CD^2 = IC^2 + ID^2 = 20 \Rightarrow CD = \sqrt{20}$$
$$\Rightarrow r = IH = \frac{2 \cdot 4}{\sqrt{20}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

Dễ thấy

$$AB = MN = 2r = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$
$$AD + BC = AB + CD = \frac{8\sqrt{5}}{5} + 2\sqrt{5} = \frac{18\sqrt{5}}{5}$$

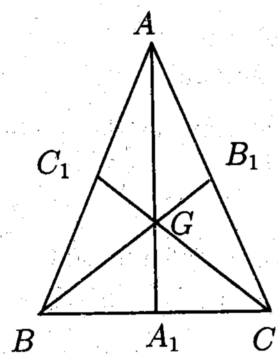
Vậy

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{18\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{8\sqrt{5}}{5} = \frac{72}{5} \text{ (đơn vị diện tích).}$$

□

Ví dụ 1.44. Cho tam giác ABC với 2 trung tuyến BB_1, CC_1 cắt nhau tại G. Chứng minh rằng $AB = AC$ khi và chỉ khi tứ giác AB_1GC_1 ngoại tiếp được.

Giải



Hình 1.64.

Nếu $AB = AC$ thì $AB_1 = AC_1$ và $GB_1 = GC_1 \Rightarrow AB_1 + GC_1 =$

$AC_1 + GB_1$

$\Rightarrow$ tứ giác AB_1GC_1 ngoại tiếp được.

Nếu $AB \neq AC$, chẳng hạn $AB > AC$ thì $AC_1 > AB_1$.

Sử dụng tính chất liên hệ giữa cạnh và góc trong hai tam giác ΔAA_1B và ΔAA_1C thì $\angle AA_1B > \angle AA_1C$.

Lại sử dụng tính chất đó trong 2 tam giác GA_1B và GA_1C ta có

$$BG > CG \Rightarrow GB_1 > GC_1 \text{ (tính chất trọng tâm)}$$
$$\Rightarrow AC_1 + GB_1 > AB_1 + GC_1$$

$\Rightarrow$ tứ giác AA_1GC_1 không thể ngoại tiếp được.

Vậy ta có đpcm. □

1.4 Bài tập và gợi ý lời giải

Bài tập 1.1. Cho hình vuông $ABCD$. Về phía ngoài hình vuông ta dựng các tam giác đều $ABM_1, BCM_2, CDM_3, DAM_4$.

Chứng minh rằng 8 trung điểm của 8 đoạn thẳng M_1A, M_1B, M_2B, M_2C, M_3C, M_3D, M_4D, M_4A cùng nằm trên 1 đường tròn.

Hướng dẫn

Chứng minh tâm O của hình vuông cách đều 8 điểm đang xét. □

Bài tập 1.2. Cho tam giác ABC và điểm D tuỳ ý thuộc cạnh BC. Gọi H, K là hình chiếu vuông góc của D lên AB và AC.

Chứng minh H, A, D, K cùng thuộc 1 đường tròn. Tìm vị trí của D để bán kính đường tròn đó bé nhất.

Hướng dẫn

Đường tròn đường kính AD. Đường tròn bé nhất khi AD vuông góc BC. □

Bài tập 1.3. Cho tam giác đềuABC cạnh bằng a. Trên cạnh BC lấy 2 điểm A_1, A_2 sao cho $BA_1 = A_1A_2 = A_2C$. Tương tự đối với các cặp điểm

B_1, B_2 và C_1, C_2. Chứng minh 6 điểm $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ nằm trên 1 đường tròn.

Tính bán kính đường tròn đó.

Hướng dẫn

Tâm O của tam giác đều cách 6 đỉnh đang xét một khoảng là $\frac{a}{3}$. □

Bài tập 1.4. Cho 4 đường tròn bằng nhau $(O_1), (O_2), (O_3), (O_4)$ có bán kính R và (O_1) tiếp xúc với (O_2) tại A. (O_2) tiếp xúc với (O_3) tại B, (O_3) tiếp xúc với (O_4) tại C, (O_4) tiếp xúc với (O_1) tại D.

Giả sử $O_1O_3 = O_2O_4$, chứng minh tứ giác $ABCD$ nội tiếp và tính bán kính đường tròn ngoại tiếp của nó.

Hướng dẫn

Tứ giác $O_1O_2O_3O_4$ là hình thoi có cạnh bằng $2R \Rightarrow ABCD$ là hình chữ nhật nên nội tiếp được.

Lập hệ 2 phương trình đại số để tính hai cạnh của hình chữ nhật. Từ đó tính được bán kính đường tròn ngoại tiếp □

Bài tập 1.5. Cho 2 đường tròn (O) và (O') tiếp xúc trong tại A ((O') nằm trong (O)). M tuỳ thuộc (O'). Tiếp tuyến với (O') qua M cắt (O) tại B, C. AM cắt (O) tại N.

Chứng minh rằng $NB^2 = NC^2 = NM.NA$.

Hướng dẫn

Chứng minh NO vuông góc BC. Tạo tứ giác nội tiếp rồi dùng tiêu chuẩn 3. □

Bài tập 1.6. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp được và AB cắt CD ở M. AD cắt CB ở N.

Chứng minh 2 phân giác trong của góc $\angle BMC$ và $\angle CND$ vuông góc với nhau.

Hướng dẫn

Hai phân giác cắt nhau ở E. Chứng minh $\angle MEN = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle BDC) = 90^o \Rightarrow$ (đpcm). □

Bài tập 1.7. Cho hình thang $ABCD$ với $AB \| CD$. Gọi M, N là trung điểm của AC, BD. Các đường thẳng qua M vuông góc AD và qua N vuông góc với BC cắt nhau tại I.

Chứng minh $IA = IB$.

Hướng dẫn

Kẻ $CE \perp AD$, và $DF \perp BC$. Hãy chứng minh I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABEF \Rightarrow$ đpcm. □

Bài tập 1.8. Cho đường tròn (O) và dây cung BC cố định không phải là đường kính. A di chuyển trên cung lớn BC.

Xác định vị trí của A để chu vi ΔABC lớn nhất.

Hướng dẫn

Gọi M là trung điểm cung lớn BC. Xét tứ giác $BMAC$ nội tiếp, kéo dài CA lấy $AD = AB$. Hãy chứng minh $MB = MD$. Từ đó suy ra đpcm. □

Bài tập 1.9. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp được. Gọi M, N là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ΔABC và ΔABD.

Chứng minh tứ giác $ABMN$ nội tiếp được.

Hướng dẫn

Chứng minh góc $\angle MAN = \angle MBN$, sử dụng tiêu chuẩn 2. □

Bài tập 1.10. Chứng minh rằng có thể chia nhỏ 1 tứ giác nội tiếp thành vô số tứ giác nội tiếp.

Hướng dẫn

Chia tứ giác đã cho thành 4 tứ giác nội tiếp được trong đó có một hình thang cân. Chia nhỏ hình thang cân thành vô số thang cân và hiển nhiên thang cân luôn nội tiếp được. □

Bài tập 1.11. Cho 2 điểm A, C cố định và điểm B chuyển động trong khoảng AC. Về 1 phía của đường thẳng AC ta vẽ 2 hình vuông $ABEF$ và $BCHK$, AK cắt CE tại M.

Chứng minh rằng đường thẳng MB đi qua 1 điểm cố định.

Hướng dẫn

Chứng minh góc $\angle AMC = 90^o \Rightarrow M$ thuộc đường tròn (O) đường kính AC.

Chứng minh MB là phân giác của góc $\angle AMC \Rightarrow$ (đpcm). □

Bài tập 1.12. Cho tứ giác $ABCD$ với các cặp cạnh đối diện AB cắt CD ở M, và AD cắt CB ở N.

Chứng minh rằng 4 đường tròn ngoại tiếp của 4 tam giác ΔABN, ΔADM, ΔBCM, ΔDCN đồng quy.

Hướng dẫn

Xét đường tròn ngoại của 2 tam giác, chẳng hạn là ΔDAM và ΔDCN cắt nhau tại E. Để chứng minh các đường tròn (ABN) hoặc (BCM) đi qua E thực chất là chứng minh các tứ giác $ABNE$ hoặc $BCEM$ nội tiếp được. □

Bài tập 1.13. Cho ΔABC với 3 đường cao AA_1, BB_1, CC_1. Kẻ A_1E, B_1F vuông góc với AB; B_1H, C_1K vuông góc với BC; A_1M, C_1N vuông góc với AC.

Chứng minh 6 điểm E, F, H, K, M, N cùng thuộc một đường tròn.

Hướng dẫn

Chứng minh các tứ giác $EFNM, EFMH$ nội tiếp được. □

Bài tập 1.14. Cho ΔABC lấy A_1, B_1, C_1 tuỳ ý thuộc BC, CA, AB. Gọi A_2, B_2, C_2 là tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AB_1C_1, BA_1C_1, CB_1A_1.

Chứng minh tam giác $\Delta A_2B_2C_2$ đồng dạng với ΔABC.

Hướng dẫn

Chứng minh 3 đường tròn $(A_2), (B_2), (C_2)$, đồng quy tại M và từ đó sử dụng tính chất các đường tròn cắt nhau để chứng minh ΔABC và $\Delta A_2B_2C_2$ có các góc tương ứng bằng nhau. □

Bài tập 1.15. Cho hình chữ nhật $ABCD$, các điểm M, N chuyển động trên BA, BC sao cho $\dfrac{BM}{BC} = \dfrac{BN}{BA}$. Kẻ $BH \perp CM$.

Chứng minh tứ giác $CNHD$ nội tiếp.

Hướng dẫn

Sử dụng các tam giác đồng dạng để suy ra $\angle DHN = 90^o$. □

Bài tập 1.16. Cho đường tròn (O) và điểm M nằm ngoài đường tròn (O). Kẻ tiếp tuyến MA và cát tuyến tuỳ ý MBC đối với (O). Kẻ $AH \perp MO$.

Chứng minh tứ giác $BCOH$ nội tiếp.

Hướng dẫn

Sử dụng tiêu chuẩn 3 kết hợp với hệ thức lượng trong tam giác vuông. □

Bài tập 1.17. Cho 3 điểm cố định thẳng hàng theo thứ tự A, B, C. Vẽ đường tròn (O) tuỳ ý đi qua A, B. Từ C kẻ 2 tiếp tuyến CM, CN đối với (O).

a. Chứng minh M, N cùng thuộc 1 đường tròn cố định.

b. Chứng minh đường thẳng MN đi qua 1 điểm cố định, từ đó suy ra quỹ tích giao điểm của CO và MN.

Hướng dẫn

a. M, N thuộc $(C, \sqrt{CA \cdot CB})$.

b. $MN \cap AB = K$. Sử dụng tứ giác nội tiếp thích hợp để chứng minh K cố định theo diều kiện cần của tiêu chuẩn 3. □

Bài tập 1.18. Cho ΔABC với M là trung điểm của BC. Vẽ đường tròn (O) tuỳ ý qua A và cắt AB, AC, AM tại B_1, C_1, M_1.

Chứng minh rằng:

$$AB_1 \cdot AB + AC_1 \cdot AC = 2AM_1 \cdot AM.$$

Hướng dẫn

Đường tròn (BB_1M) cắt AM tại E (giả sử theo thứ tự A, E, M_1) $\Rightarrow$ tứ giác BB_1EM_1 nội tiếp được.

Kẻ $CF//BE \Rightarrow$ tứ giác CC_1M_1F nội tiếp. Dùng tiêu chuẩn 3 suy ra (đpcm). □

Bài tập 1.19. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O, R) với $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$ và S là diện tích của tứ giác .

Chứng minh rằng $ABCD$ là hình vuông khi và chỉ khi $S = \frac{abcd}{2R^2}$.

Hướng dẫn

Đặt $AC = m, BD = n$ và sử dụng công thức tính diện tích tam giác ta có $S_{ABC} = \frac{abm}{4R}, S_{BCD} = \frac{bcn}{4R}$ để xây dựng công thức tính diện tích tứ giác. Kết hợp định lý Ptôlêmê và bất đẳng thức Côsi để suy ra (đpcm). □

Bài tập 1.20. Cho n giác đều $A_1A_2 \cdots A_n (n \geq 4)$ thoả mãn điều kiện

$$\frac{1}{A_1A_2} = \frac{1}{A_1A_3} + \frac{1}{A_1A_4}.$$

Tính n?

Hướng dẫn

- $n = 4$: dễ thấy không thoả mãn.
- $n > 4$: Dùng định lý Ptôlêmê với tứ giác $A_1A_3A_4A_5$ và kết hợp với giả thiết của bài toán để chứng minh $A_1A_4 = A_1A_5$ từ đó $n = 7$.

□

Bài tập 1.21. Cho ΔABC vuông ở A có A, B cố định, C chuyển động sao cho chiều của tam giác ΔABC không đổi. Đường tròn nội tiếp ΔABC tiếp xúc với AC, BC tại M, N.

Chứng minh đường thẳng MN đi qua 1 điểm cố định.

Hướng dẫn

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp và AI cắt MN tại E. AE là phân giác của góc $\angle BAC$ nên AE cố định. Sử dụng tứ giác nội tiếp để chứng minh E thuộc đường tròn đường kính $BI \Rightarrow \angle BEI = 90^o \Rightarrow AE$ không đổi $\Rightarrow$ E cố định (đpcm). □

Bài tập 1.22. Đường tròn nội tiếp ΔABC tiếp xúc với AB, AC tại D, E. Đường thẳng DE cắt các đường phân giác trong của góc $\angle B, \angle C$ ở N, M.

Chứng minh các đoạn thẳng MN, NE, DM là 3 cạnh của 1 tam giác.

Hướng dẫn

Sử dụng các tam giác đồng dạng để chứng minh các đoạn thẳng MN, NE, MD tỷ lệ với 3 cạnh BC, CA, AB của ΔABC. □

Bài tập 1.23. Cho ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn (O, R). Gọi (O_1, R_1), (O_2, R_2), (O_3, R_3) là các đường tròn ngoại tiếp các tam giác OBC, OCA, OAB.

Chứng minh rằng $R_1 + R_2 + R_3 \geq 3R$.

Hướng dẫn

O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $O_1O_2O_3$. □

Bài tập 1.24. Cho ΔABC. Gọi A_1, B_1, C_1 là tâm các đường tròn bàng tiếp của tam giác tương ứng với các đỉnh A, B, C. Chứng minh rằng

$$S_{\Delta A_1BC} + S_{\Delta B_1CA} + S_{\Delta C_1AB} \geq 3S_{\Delta ABC}$$

Hướng dẫn

Sử dụng kết quả 5 và bất đẳng thức Côsi. □

Bài tập 1.25. Cho hình bình hành $ABCD$. Đường tròn nội tiếp các tam giác ABD, CBD tiếp xúc với BD tại T_1, T_2. Đường tròn nội tiếp các tam giác BAC, DAC tiếp xúc với AC tại T_3, T_4.

Chứng minh tứ giác $T_1T_2T_3T_4$ là hình chữ nhật.

Hướng dẫn

Sử dụng phép đối xứng tâm chứng minh $T_1T_2T_3T_4$ là hình bình hành. Sử dụng kết quả 2 để chứng minh $T_1T_2 = T_3T_4$ (đpcm). □

Bài tập 1.26. Cho ΔABC ngoại tiếp đường tròn tâm I. (I) tiếp xúc với BC ở A_1 và AB ở C_1. AI cắt A_1C_1 ở M .

Chứng minh góc $\angle AMC = 90^o$.

Hướng dẫn

Chứng minh tứ giác MA_1IC nội tiếp $(AB < AC) \Rightarrow$ đpcm. Trường hợp $AB > AC$ chứng minh tương tự. □

Bài tập 1.27. Cho ΔABC với a, b, c là độ dài các cạnh tương ứng; r, r_a, r_b, r_c là bán kính đường tròn nội tiếp và các đường tròn bàng tiếp .

Chứng minh rằng

$$\frac{abc}{r^3} \leq \frac{a^3}{r_a} + \frac{b^3}{r_b} + \frac{c^3}{r_c}.$$

Hướng dẫn

Sử dụng kết quả 5 ta biến đổi tương đương bất đẳng thức cần chứng minh thành bất đẳng thức đối với các cạnh a, b, c rồi sử dụng các phương pháp đánh giá thông thường. □

Bài tập 1.28. Các đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, ADC tiếp xúc với đường chéo AC của tứ giác $ABCD$ ở M và N.

Chứng minh tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp được $\Leftrightarrow M \equiv N$.

Hướng dẫn

Sử dụng kết quả 2 đối với AM và CN để chứng minh

$$M \equiv N \Leftrightarrow AB + CD = AD + BC.$$

□

Bài tập 1.29. Cho hình chữ nhật $ABCD$ với $AD = 2AB$. M trung điểm AB, N chuyển động trong khoảng BC.

Chứng minh chu vi ΔMND min $\Leftrightarrow$ tứ giác $ABND$ ngoại tiếp được.

Hướng dẫn

Lấy E là đối xứng của M qua B. ED cắt BC ở F. Chu vi ΔMND đạt min khi và chỉ khi $F \equiv N$. Khi đó $AD + BF = AB + FD$ (đpcm). □

Bài tập 1.30. Cho ΔABC, M là điểm trong tuỳ ý của ΔABC. AM, BM, CM cắt các cạnh đối diện tương ứng ở A_1, B_1, C_1.

Chứng minh nếu hai tứ giác BA_1MC_1 và CA_1MB_1 ngoại tiếp được thì tứ giác AB_1MC_1 cũng ngoại tiếp được.

Hướng dẫn

Chứng minh tứ giác AB_1MC_1 ngoại tiếp được $\Leftrightarrow$ $y - z = c - b$ với $y = MB, z = MC, c = AB, b = AC$. □

Chương 2

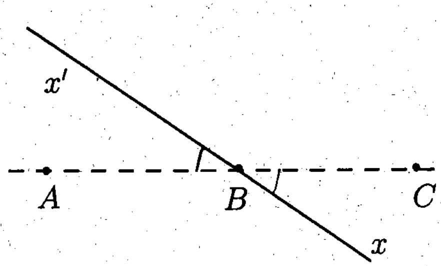
Thẳng hàng và đồng quy

2.1 Bài toán thẳng hàng

2.1.1 Một số tiêu chuẩn để chứng minh ba điểm thẳng hàng

Để chứng minh 3 điểm A, B, C thẳng hàng theo thứ tự, thực chất của các phương pháp cơ bản là chứng minh hai đường thẳng AB và AC trùng nhau. Trong phần này chúng ta đưa ra một số tiêu chuẩn để chứng minh 3 điểm A, B, C thẳng hàng.

Tiêu chuẩn 1. 3 điểm phân biệt A, B, C theo thứ tự nằm trên một đường thẳng khi và chỉ khi $\angle ABC = 180^o$.



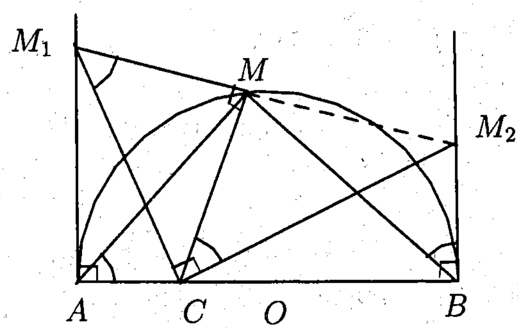
Hình 2.1.

Chú ý: Nếu qua điểm B có đường thẳng $x'Bx$ sao cho $\angle ABx' = \angle CBx$ thì theo tính chất hai góc đối đỉnh ta có A, B, C thẳng hàng. Khi đó dễ thấy

$\angle ABC = \angle xBC + \angle x'BC = 180^o$. Vì vậy tiêu chuẩn góc đối đỉnh được xem là trường hợp riêng của tiêu chuẩn 1.

Ví dụ 2.1. Cho nửa đường tròn đường kính AB. Lấy điểm C thuộc AB sao cho $CA < CB$ và điểm M thuộc nửa đường tròn đó. Đường thẳng qua M, vuông góc MC cắt tiếp tuyến qua A tại M_1. Đường thẳng qua C, vuông góc với M_1C cắt tiếp tuyến qua B tại M_2. Chứng minh M, M_1, M_2 thẳng hàng.

Giải



Hình 2.2.

Ta có:

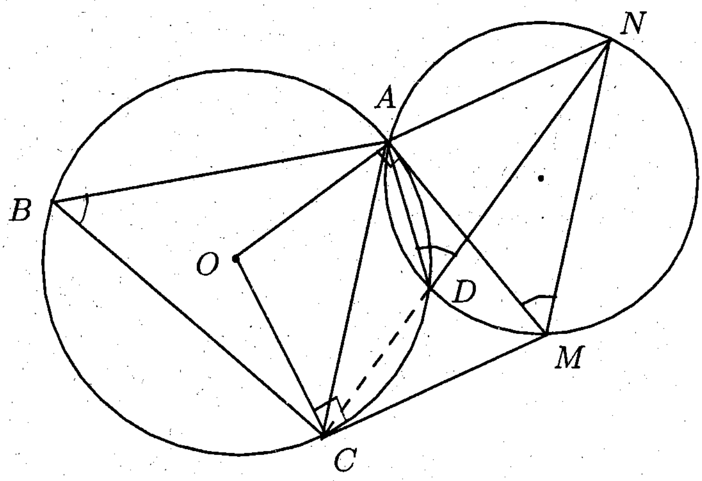
$$\angle CAM = \angle CM_1M \text{ (tứ giác } ACMM_1 \text{ nội tiếp được)}$$
$$\angle CAM = \angle MBM_2 \text{ (góc giữa tia tuyếp tuyến và dây cung)}$$
$$\angle CM_1M = \angle MCM_2 \text{ (cùng phụ } \angle MCM_1)$$

$\Rightarrow \angle MCM_2 = \angle MBM_2 \Rightarrow$ tứ giác $BCMM_2$ nội tiếp $\Rightarrow \angle CMM_2 = 90^o$. Từ đó ta có $\angle M_1MM_2 = \angle M_1MC + \angle M_2MC = 180^o \Rightarrow$ (đpcm). □

Ví dụ 2.2. Cho ΔABC nội tiếp trong đường tròn (O). Các tiếp tuyến qua A, C cắt nhau ở M. Vẽ hình bình hành $ACMN$. Đường tròn ngoại tiếp ΔAMN cắt (O) ở D. Chứng minh N, D, C thẳng hàng.

Giải

Ta có:



Hình 2.3.

$\angle AMN = \angle ADN$ (tứ giác ADMN nội tiếp),

$\angle AMN = \angle CAM$ (so le trong),

$\angle CAM = \angle ABC$(góc giữa tia tiếp tuyến và dây cung)

$\Rightarrow \angle ADN = \angle ABC$. (1)

Mặt khác, tứ giác $ABCD$ nội tiếp nên $\angle ABC + \angle ADC = 180^o$. (2)

Từ $(1),(2)$ ta có $\angle ADN + \angle ADC = 180^o \Rightarrow$ (đpcm). □

Ví dụ 2.3. Dựng về phía ngoài ΔABC hai tam giác cân BAA' và BCC' (cân tại B) sao cho $\angle ABA' = \angle CBC'$. AC' cắt CA' tại M, AA' cắt CC' tại N. Chứng minh tứ giác $AMCN$ nội tiếp được khi và chỉ khi A', B, C' thẳng hàng.

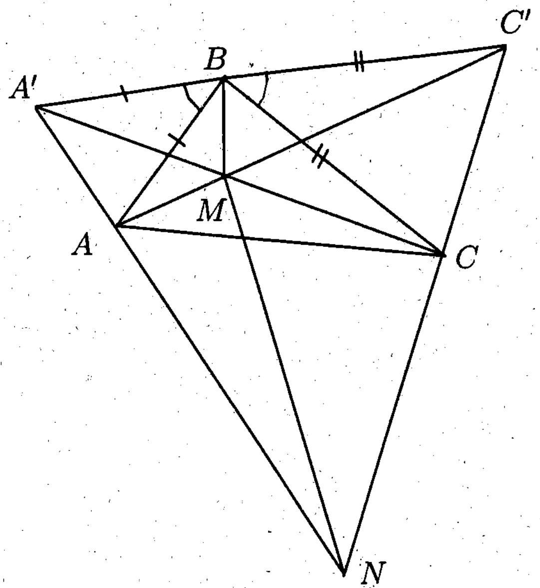
Giải

Từ giả thiết ta có

$$\Delta BA'C = \Delta BAC' \text{ (c.g.c)},$$
$$\Rightarrow CA' = C'A, \angle BAC = \angle BAC', \angle BC'A = \angle BCA'$$

$\Rightarrow$ tứ giác $BMAA'$ và $BMCC'$ đều nội tiếp được.

$\Rightarrow \angle BMA' = \angle BAA'; \angle BMC' = \angle BCC'$ (góc nội tiếp).



Hình 2.4.

$\Rightarrow \angle BMA' = \angle BMC' \Rightarrow MB$ là phân giác của $\angle A'MC'$.
Xét $\Delta A'BN$ và $\Delta C'BN$ ta có:

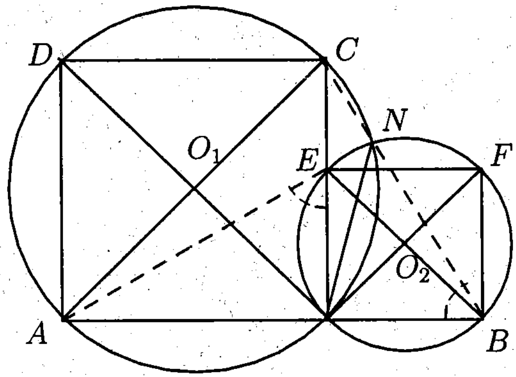
$$\angle A'BN + \angle BNA' + \angle BA'M + \angle AA'M = 180^o,$$
$$\angle C'BN + \angle BNC' + \angle BC'M + \angle CC'M = 180^o$$
$$\Rightarrow \angle A'BN + \angle C'BN = 360^o - (\angle ANC + \angle AMC)$$

Do đó $\angle A'BN + \angle C'BN = 180^o \Leftrightarrow \angle ANC + \angle AMC = 180^o$.
Từ đó ta có đpcm. □

Ví dụ 2.4. Cho 3 điểm thẳng hàng theo thứ tự A, M, B. Về cùng một phía của đường thẳng AB vẽ hai hình vuông $AMCD$ và $BMEF$. Hai đường tròn (O_1) và (O_2) ngoại tiếp hai hình vuông đó cắt nhau tại M và N. Chứng minh rằng:

a, B, C, N luôn thẳng hàng.
b, A, E, N luôn thẳng hàng.

Giải



Hình 2.5.

a, Ta có:

$$\angle ANC = 90^o \text{ (góc chắn nửa đường tròn)},$$
$$\angle MNE = \angle MFE = 45^o \text{ (góc nội tiếp)},$$
$$\angle MNB = \angle MEB = 45^o \text{ (góc nội tiếp)}$$
$$\Rightarrow \angle ANB = 90^o$$

Vậy $\angle CNA + \angle ANB = \angle CNB = 180^o \Rightarrow$ (đpcm).

b, Từ kết quả câu trên, ta có

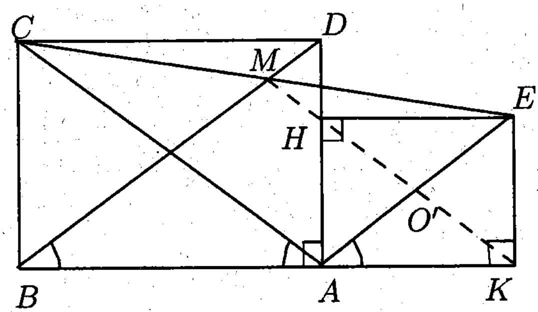
$$\Delta MBC = \Delta MEA \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \angle MBC = \angle MEA.$$

Mặt khác, tứ giác $BMEN$ nội tiếp được nên $\angle MBN + \angle MEN = 180^o$ $\Rightarrow \angle MEN + \angle MEA = 180^o \Rightarrow$ (đpcm). □

Tiêu chuẩn 2. A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow$ đường thẳng AB và AC cùng song song hoặc cùng vuông góc với một đường thẳng nào đó.

Ví dụ 2.5. Cho hình chữ nhật $ABCD$. M tuỳ ý thuộc BD. Gọi E là đối xứng của C qua M. Kẻ EH vuông góc với AD và EK vuông góc với AB. Chứng minh M, H, K thẳng hàng.

Giải



Hình 2.6.

Gọi O là giao điểm của AC và $BD \Rightarrow AE \| OM$ (đường trung bình) $\Rightarrow \angle OBA = \angle EAK$ (góc so le trong).

Mặt khác, do $ABCD$ và $AHEK$ là các hình chữ nhật nên $\angle OAB = \angle OBA, \angle EAK = \angle HKA$.

Từ đó $\angle HKA = \angle OAB \Rightarrow KH \parallel AC$ (1)

Gọi O' là giao điểm của AE và KH thì O' là trung điểm của $AE \Rightarrow O'M \parallel AC$ (đường trung bình) (2)

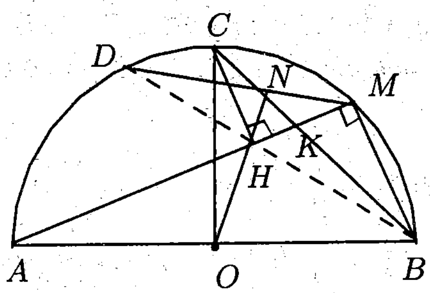
Từ (1), (2) $\Rightarrow O', H, M$ thẳng hàng. Từ đó ta có đpcm. □

Ví dụ 2.6. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Gọi C là trung điểm cung $\overset{\frown}{AB}, K$ là trung điểm đoạn BC. AK cắt (O) tại M. Kẻ CH vuông góc với $AM.OH$ cắt BC tại $N.MN$ cắt (O) tại D. Chứng minh B, H, D thẳng hàng.

Giải

Ta có $\angle AMB = 90^o$ (góc chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow HC \parallel BM$ (cùng vuông góc với AM). Mà K là trung điểm BC nên K là trung điểm $HM \Rightarrow BM = HC \Rightarrow BHCM$ là hình bình hành $\Rightarrow BH \parallel MC$. (1)

Mặt khác, $\angle AMC = 45^o$ (góc chắn cung $\overset{\frown}{AC}$) $\Rightarrow \Delta HCM$ vuông cân tại $H \Rightarrow HC = HM$.



Hình 2.7.

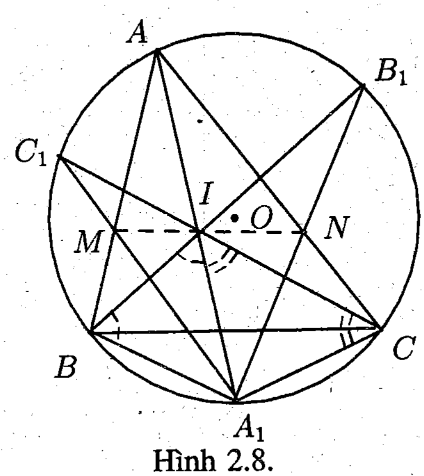
Lại có $OC = OM$ (bán kính đường tròn (O)) $\Rightarrow OH$ là phân giác của $\angle COM \Rightarrow NC = NM \Rightarrow \Delta NCM$ cân tại $N \Rightarrow \angle NCM = \angle NMC$

$\angle CMD = \angle CBD$ (góc nội tiếp), do đó $\angle BCM = \angle CBD \Rightarrow BD \parallel MC$. (2)

Từ (1), (2) ta có đpcm. □

Ví dụ 2.7. Cho ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi A_1, B_1, C_1 là trung điểm các cung $\overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CA}, \overset{\frown}{AB}$ của (O) và I là tâm đường tròn nội tiếp của ΔABC. A_1C_1 cắt AB ở M, A_1B_1 cắt AC ở N. Chứng minh M, I, N thẳng hàng.

Giải



Hình 2.8.

Vì A_1, B_1, C_1 là trung điểm các cung $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$, $\overset{\frown}{AB}$ nên AA_1, BB_1, CC_1 là các tia phân giác trong của tam giác ABC do đó chúng đồng quy tại I.
Ta có:

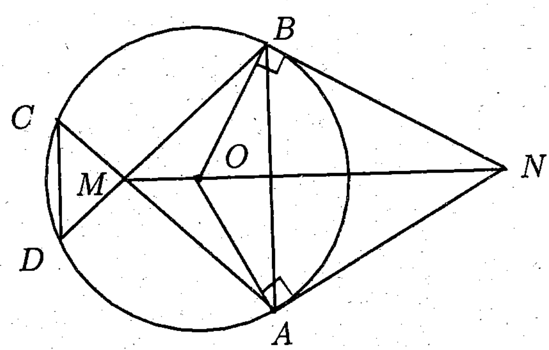
$$\angle IBA_1 = \frac{1}{2}A_1\overset{\frown}{C}B_1$$
$$\angle A_1IB = \frac{1}{2}\text{sđ}(A\overset{\frown}{B}_1 + B\overset{\frown}{A}_1) = \frac{1}{2}\text{sđ}A_1\overset{\frown}{C}B_1$$
$$\Rightarrow \angle A_1BI = \angle A_1IB \Rightarrow \Delta A_1BI \text{ cân tại } A_1.$$

Tương tự, ta có ΔA_1CI cân tại A_1.
Xét tứ giác A_1BMI có:

$$A_1B = A_1I \text{ và } \angle MA_1B = \angle MA_1I \text{ (góc nội tiếp)}$$
$$\Rightarrow A_1M \perp BI \Rightarrow MB = MI \Rightarrow \angle MBI = \angle MIB.$$

Mặt khác, BB_1 là phân giác góc $\angle ABC$ nên $\angle IBM = \angle IBC \Rightarrow \angle MIB = \angle IBC$ (so le trong) $\Rightarrow MI \parallel BC$
Tương tự, $NI \parallel BC \Rightarrow$ (đpcm). □

Ví dụ 2.8. Cho đường tròn (O).Vẽ hai dây cung AB, CD tuỳ ý song song với nhau. AC cắt BD tại M. Hai tiếp tuyến với (O) qua A, B cắt nhau tại N. Chứng minh M, O, N thẳng hàng.



Hình 2.9.

Giải

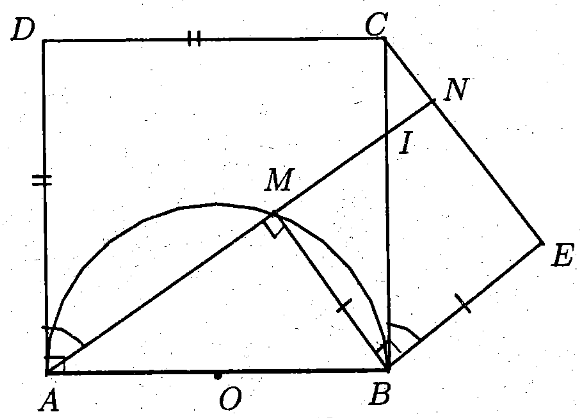
Do $AB \| CD$ nên tứ giác $ABCD$ là hình thang cân $\Rightarrow MA = MB$. Hiển nhiên $OA = OB \Rightarrow MO$ là đường trung trực của đoạn $AB \Rightarrow MO \perp AB$ (1)

Lại có $NA = NB$ (tính chất tiếp tuyến) nên NO là đường trung trực của $AB \Rightarrow NO \perp AB$. (2)

Từ (1) và (2) ta có đpcm. □

Ví dụ 2.9. Cho nửa đường tròn đường kính AB. Về cùng một phía với nửa đường tròn đó, vẽ hình vuông $ABCD$. M tuỳ ý thuộc nửa đường tròn. Về phía ngoài ΔMAB, vẽ hình vuông $BMNE$. Chứng minh C, E, N thẳng hàng.

Giải



Hình 2.10.

Vì AB là đường kính của (O) nên

$$\angle AMB = 90^o \Rightarrow \angle AMN = \angle AMB + \angle BMN = 180^o.$$

Theo giả thiết ta có:

$\angle ABM = \angle CBE$ (cùng phụ $\angle MBC$),

$\angle ABM = \angle DAM$ (góc giữa tia tiếp tuyến và dây cung)

$\Rightarrow \angle CBE = \angle DAM$

Gọi I là giao điểm của AN và BC. Ta có

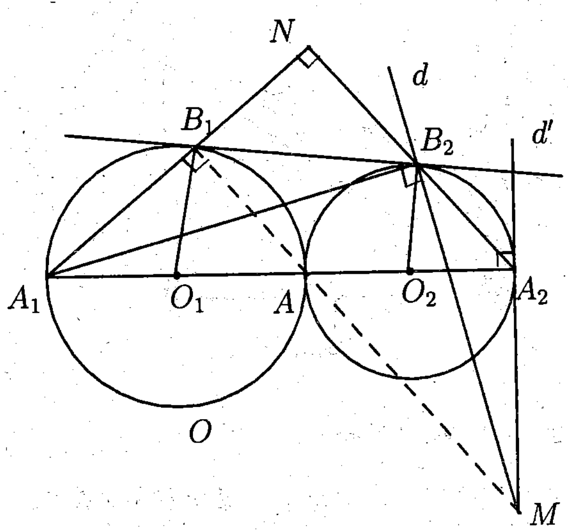
$$\Delta ABI \sim \Delta BMI \Rightarrow \frac{AB}{BI} = \frac{BM}{MI}$$
$$\Rightarrow \frac{BC}{BI} = \frac{MN}{MI} \Rightarrow \frac{CI}{BI} = \frac{IN}{MI} \Rightarrow CN \| BM$$

mà $NE \parallel BM \Rightarrow C, N, E$ thẳng hàng (đpcm).

□

Ví dụ 2.10. Hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ tiếp xúc ngoài tại A. Vẽ hai đường kính AA_1, AA_2 và tiếp tuyến chung ngoài tương ứng B_1B_2. Gọi d là đường thẳng qua B_2 và vuông góc với A_1B_2. Gọi d' là đường thẳng qua A_2, vuông góc với AA_2. d và d' giao nhau tại M. Chứng minh B_1, A, M thẳng hàng.

Giải



Hình 2.11.

Vì $AB_1 \perp A_1B_1$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), để chứng minh B_1, A, M thẳng hàng, ta sẽ chứng minh $MB_1 \perp A_1B_1$ nghĩa là chứng minh tứ giác $A_1B_1B_2M$ nội tiếp được.

Do $O_1B_1 \| O_2B_2$ nên $\angle AO_1B_1 = \angle AO_2B_2$ (2 góc đồng vị) $\Rightarrow B_1AO_1 = B_2A_2O_2 \Rightarrow B_1A \| B_2A_2$.

Tương tự, $A_1B_1 \| AB_2$.

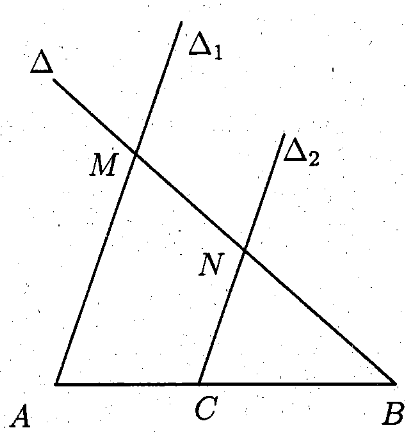
A_1B_1 cắt A_2B_2 tại N thì AB_1NB_2 là hình chữ nhật $\Rightarrow \angle NB_1B_2 = \angle B_1B_2A$.

Mặt khác, $\angle B_1B_2A = \angle B_2A_2A$ (góc giữa tia tiếp tuyến và dây cung) $\Rightarrow \angle NB_1B_2 = \angle B_2A_2A_1 \Rightarrow$ tứ giác $A_1B_1B_2A_2$ nội tiếp được.

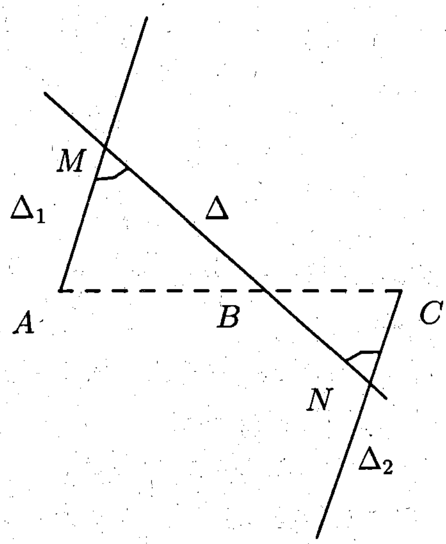
Ta có $A_1B_2A_2M$ nội tiếp được trong đường tròn đường kính A_1M. Vậy tứ giác $A_1B_1B_2M$ nội tiếp được.

Từ đó ta có đpcm. □

Tiêu chuẩn 3. Xét đường thẳng (Δ) đi qua B và hai đường thẳng $(\Delta_1), (\Delta_2)$ song song tương ứng qua A, C tạo thành hai tam giác BMA và BNC như một trong hai trường hợp trong hình vẽ dưới đây.



Hình 2.12.



Hình 2.13.

Nếu $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{NC}{NB}$ thì A, B, C thẳng hàng.

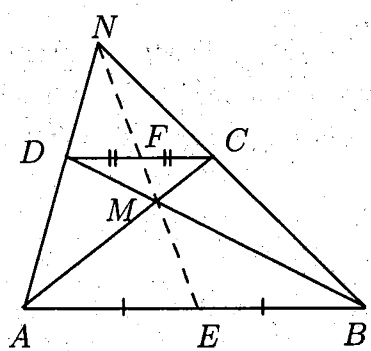
Chứng minh.

Vì $\Delta_1 \| \Delta_2 \Rightarrow \angle AMB = \angle CNB$. Do đó $\Delta MAB \sim \Delta NCB$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle MBA = \angle NBC$.

Từ đó ta có A, B, C thẳng hàng. □

Ví dụ 2.11. Cho hình thang $ABCD(AB \| CD)$. Hai đường chéo cắt nhau tại M, kéo dài hai cạnh bên cắt nhau tại N. Chứng minh đường M, N đi qua trung điểm của 2 cạnh đáy.

Giải



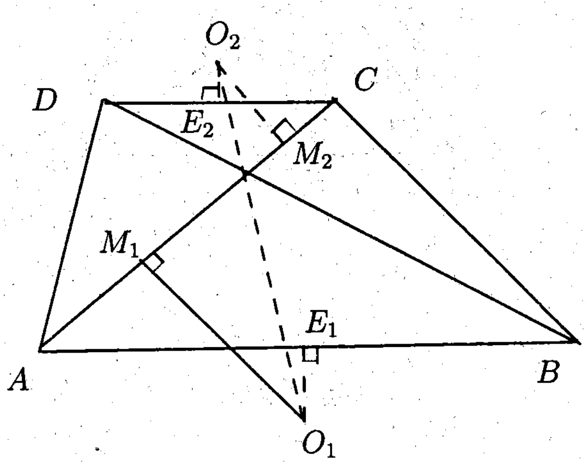
Hình 2.14.

Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD, ta chứng minh M, E, F thẳng hàng.
Thật vậy, do $AB \| CD$ nên $\dfrac{MC}{MA} = \dfrac{CD}{AB} = \dfrac{2FC}{2EA} \Rightarrow \dfrac{MC}{MA} = \dfrac{FC}{EA} \Rightarrow$ M, E, F thẳng hàng.
Ta còn phải chứng minh N, E, F thẳng hàng.
Xét ΔNAB có $CD \| AB$ nên $\dfrac{CD}{AB} = \dfrac{ND}{NA} \Rightarrow \dfrac{ND}{NA} = \dfrac{DF}{AE} \Rightarrow N, E, F$ thẳng hàng.

Từ đó ta có đpcm. □

Ví dụ 2.12. Cho hình thang $ABCD(AB \| CD)$. Gọi O là giao điểm hai đường chéo và O_1, O_2 là tâm đường tròn ngoại tiếp các ΔOAB và ΔOCD. Chứng minh O, O_1, O_2 thẳng hàng.

Giải



Hình 2.15.

Gọi E_1, E_2 lần lượt là trung điểm của AB, CD, theo ví dụ 2.11 ta có O, E_1, E_2 thẳng hàng.

Gọi M_1, M_2 lần lượt là trung điểm của OA, OB, ta có

$$\Delta E_1M_1O_1 \sim \Delta E_2M_2O_2 \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{M_1E_1}{M_2E_2} = \frac{M_1O_1}{M_2O_2}. \quad (1)$$

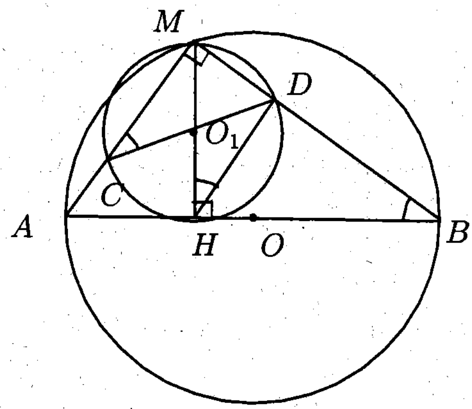
Mặt khác, do $M_1E_1 \| M_2E_2$ (đường trung bình) nên $\dfrac{M_1E_1}{M_2E_2} = \dfrac{M_1O}{M_2O}$. (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow \dfrac{M_1O}{M_2O} = \dfrac{M_1O_1}{M_2O_2} \Rightarrow O, O_1, O_2$ thẳng hàng (đpcm). □

Tiêu chuẩn 4. Sử dụng các tính chất của đường tròn để chứng minh A, B, C thẳng hàng: chẳng hạn B là tâm của đường tròn đường kính AC hoặc các đường tròn tâm A và tâm C tiếp xúc tại B,...

Ví dụ 2.13. Cho đường tròn (O) đường kính AB. M chuyển động trên (O), M khác A, B. Kẻ MH vuông góc với AB. Vẽ đường tròn (O_1) đường kính MH cắt đường thẳng MA, MB ở C, D. Chứng minh C, D, O_1 thẳng hàng và từ đó suy ra $ABDC$ nội tiếp được.

Giải



Hình 2.16.

Ta có

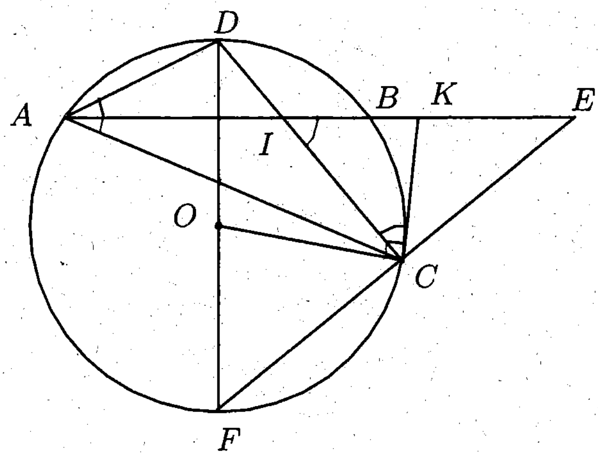
$\angle CMD = 90^o$(góc nội tiếp chắn đường kính AB)
$\Rightarrow O_1$ là trung điểm $CD \Rightarrow C, O_1, D$ thẳng hàng.
$\Rightarrow MCHD$ là hình chữ nhật
$\Rightarrow \angle MCD = \angle MHD$ (góc nội tiếp)
$\Rightarrow \angle MHD = \angle MBH$ (cùng phụ $\angle DHB$).
Từ đó suy ra $\angle MCD = \angle MBH \Rightarrow ACDB$ nội tiếp được (đpcm). □

Ví dụ 2.14. Cho đường tròn (O) và dây cung AB. Lấy I thuộc đoạn AB sao cho $IA > IB$. Gọi D là trung điểm cung nhỏ AB. DI cắt (O) tại giao điểm thứ hai C. Tiếp tuyến với (O) tại C cắt AB tại K. EC cắt (O) tại giao điểm thứ hai F. Chứng minh D, O, F thẳng hàng.

Giải

Ta có:

$\angle CAD = \angle KCD$ (góc giữa tia tiếp tuyến và dây cung),
$\angle CIK = \frac{1}{2}(\text{sđ}\,\overset{\frown}{AD} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{BC}) = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{CBD} = \angle CAD$
$\Rightarrow \angle CIK = \angle ICK \Rightarrow KI = KC.$



Hình 2.17.

Do K là trung điểm IE nên ΔCIE có $CK = \frac{1}{2}IE \Rightarrow \Delta CIE$ vuông tại $C \Rightarrow \angle DCF = 90^o \Rightarrow O$ là trung điểm đường kính DF.

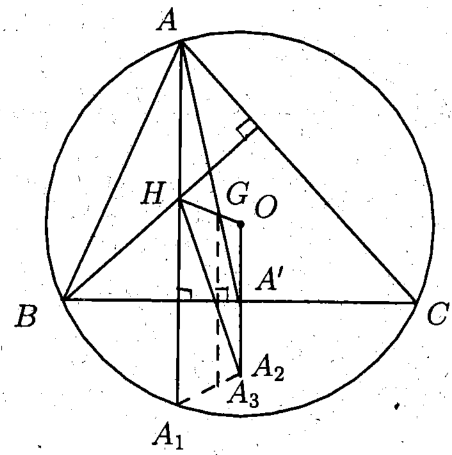
Từ đó ta có đpcm. □

Tiêu chuẩn 5. Sử dụng tính chất của các phép biến hình như đối xứng trục, đối xứng tâm, quay, vị tự,...: biến một đường thẳng thành một đường thẳng. Từ đó, nếu ta tìm được một trong các phép biến hình đó biến ba điểm thẳng hàng A_1, B_1, C_1 thành ba điểm A, B, C thì ta có ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Ví dụ 2.15. Cho ΔABC có H, G, O lần lượt là trực tâm, trọng tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tan giác. AH cắt đường tròn (O) tại A_1. Vẽ hình bình hành AHA_2O. Lấy A_3 là điểm đối xứng của G qua BC. Chứng minh A_1, A_2, A_3 thẳng hàng.

Giải

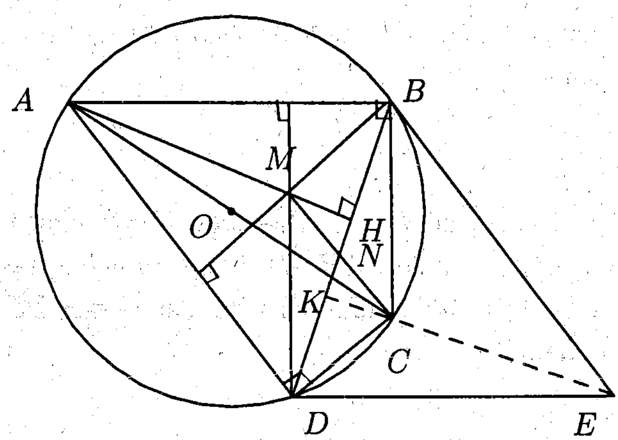
Theo kết quả đã biết, A_1 đối xứng với H qua BC và $AH \overset{\parallel}{=} 2OA'$ (A' là trung điểm BC). Theo giả thiết, AHA_2O là hình bình hành nên A_2 đối xứng với O qua đường thẳng BC.



Hình 2.18.

Vậy phép đối xứng trục BC biến H thành A_1, G thành A_3, O thành A_2. Mặt khác, theo tính chất của đường thẳng Ơ - le thì H, G, O thẳng hàng. Từ đó ta có đpcm. □

Ví dụ 2.16. Tứ giác $ABCD$ có $\angle B = \angle D = 90^o$. Kẻ $AH \perp BD$. Lấy K thuộc BD sao cho $BH = DK$. Dựng hình bình hành $ABED$. Chứng minh rằng E, C, K cùng nằm trên một đường thẳng và đường thẳng này vuông góc với BD.



Hình 2.19.

Giải

Gọi M là trực tâm ΔABD. Dễ thấy tứ giác $BMDC$ là hình bình hành (vì các cặp cạnh đối tương ứng song song với nhau). Gọi N là giao điểm của BD và MC thì theo tính chất của hình bình hành, N là trung điểm của BD và MC.

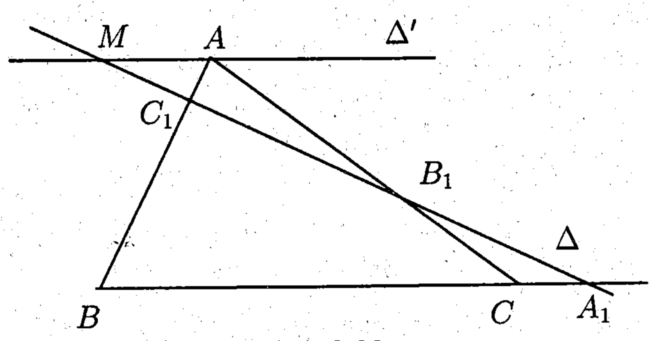
Ta thấy phép đối xứng tâm N biến A thành E, M thành C và H thành K (theo giả thiết). Mặt khác A, M, H cùng nằm trên một đường thẳng và đường thẳng này vuông góc với BD, từ đó ta có đpcm. □

2.1.2 Định lý Mê-lê-la-uýt và áp dụng

1, Định lý Mê-nê-la-uýt.

Bài toán 1. *Cho ΔABC và đường thẳng (Δ) tuỳ ý không đi qua các đỉnh của tam giác. Giả thiết (Δ) cắt các đường thẳng BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng:*

$$\frac{A_1C}{A_1B} \cdot \frac{C_1B}{C_1A} \cdot \frac{B_1A}{B_1C} = 1 \quad (1)$$



Hình 2.20.

Chứng minh. Kẻ (Δ') qua A và song song với BC cắt (Δ) tại M. Theo định lý Talét ta có:

$$\frac{C_1B}{C_1A} = \frac{A_1B}{AM}; \frac{B_1A}{B_1C} = \frac{AM}{A_1C}$$
$$\Rightarrow \frac{C_1B}{C_1A} \cdot \frac{B_1A}{B_1C} = \frac{A_1B}{AM} \cdot \frac{AM}{A_1C} = \frac{A_1B}{A_1C}$$

$\Rightarrow$ (đpcm). □

Chú ý:

- Biểu thức ở vế trái của (1) được gọi là biểu thức Mênêlauýt. Biểu thức này có nhiều cách viết tương đương, chẳng hạn khi xuất phát từ A_1, còn có thể viết:

$$\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B}=1 \quad (2)$$

  Và tương tự như vậy khi xuất phát từ B_1 hoặc C_1. Bạn đọc quan sát kỹ cách viết cho dễ nhớ.

- Bài toán trên còn được gọi là định lý Mênêlauýt. Nó được dùng để xác định vị trí một trong ba điểm A_1, B_1, C_1 khi biết vị trí hai điểm còn lại. Sau này, ở phần hình học không gian (lớp 11), khi xác định thiết diện của một mặt phẳng cắt một khối đa diện, ta thường phải kéo dài các giao tuyến đã biết và khi đó rất cần định lý Mênêlauýt để xác định vị trí các giao điểm.

- Vị trí các điểm A_1, B_1, C_1 phải là "hai trong một ngoài" hoặc "ba ngoài" đối với các cạnh BC, CA, AB. Do đó có thể xây dựng một cách đơn giản bài toán ngược của bài toán trên để áp dụng vào bài toán chứng minh ba điểm thẳng hàng.

Bài toán 2. *Cho ABC và ba điểm A_1, B_1, C_1 thuộc các cạnh BC, CA, AB sao cho chúng phải thoả mãn đồng thời hai điều kiện sau:*

i, Chúng phải là "hai trong một ngoài" hoặc "ba ngoài" đối với các cạnh của tam giác.

ii, Một biểu thức Mênêlauýt bằng 1.

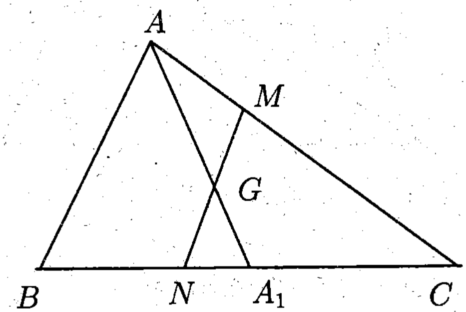
Khi đó A_1, B_1, C_1 phải thẳng hàng.

(Việc chứng minh bài toán này xin dành cho bạn đọc).

2, Ví dụ minh họa.

Ví dụ 2.17. Cho ΔABC với G là trọng tâm. Lấy điểm M thuộc cạnh BC sao cho $MA = \frac{1}{2}MC$. MG cắt BC tại N. N chia trong BC theo tỷ lệ nào? Chứng minh rằng $MG \| AB$.

Giải



Hình 2.21.

Gọi A_1 là trung điểm BC. Xét ΔAA_1C. Theo bài toán 1 ta có:

$$\frac{NA_1}{NC}\cdot\frac{MC}{MA}\cdot\frac{GA}{GA_1}=1$$
$$\Rightarrow \frac{NA_1}{NC}=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{A_1C}{NC}=\frac{3}{4}$$
$$\Rightarrow \frac{BC}{NC}=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{NB}{NC}=\frac{1}{2}$$

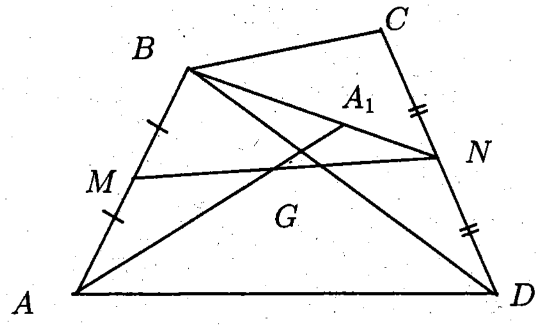
Từ đó ta có: $\dfrac{CM}{CA}=\dfrac{CN}{CB}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow MG\|AB$ (định lý Talét) $\Rightarrow$ (đpcm). □

Ví dụ 2.18. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N là trung điểm của AB, CD và A_1 là trọng tâm của $\Delta ACD.AA1$ cắt MN ở G. Chứng minh rằng G là trung điểm của MN. G chia AA_1 theo tỷ lệ nào?

Giải

Áp dụng định lý Mênêlauýt đối với ΔBMN ta có:

$$\frac{GM}{GN}\cdot\frac{A_1N}{A_1B}\cdot\frac{AB}{AM}=1$$
$$\Rightarrow \frac{GM}{GN}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2=1\Rightarrow\frac{GM}{GN}=1$$
$$\Rightarrow G \text{ là trung điểm của } MN.$$



Hình 2.22.

Áp dụng định lý Mênêlauýt đối với ΔABA_1:

$$\frac{GA}{GA_1} \cdot \frac{NA_1}{NB} \cdot \frac{MB}{MA} = 1$$
$$\Rightarrow \frac{GA}{GA_1} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = 1 \Leftrightarrow \frac{GA}{GA_1} = 3.$$

Vậy G chia trong đoạn AA_1 theo tỷ số 3. □

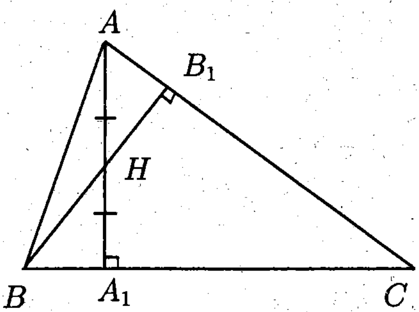
Chú ý: Kết quả trên dẫn tới định lý trọng tâm của tứ giác mở rộng trực tiếp định lý trọng tâm của tam giác. AA_1 được gọi là trung tuyến của tứ giác ứng với đỉnh A. Như vậy tứ giác có 4 trung tuyến. Dễ dàng chứng minh được bốn trung tuyến đồng quy tại G và G chia mỗi trung tuyến theo tỷ lệ bằng 3 kể từ đỉnh. G được gọi là trọng tâm của tứ giác. Xin dành cho bạn đọc bài toán xây dựng trọng tâm của $n-$giác $(n \geq 3)$.

Ví dụ 2.19. Cho ΔABC. Giả thiết trực tâm H là trung điểm đường cao AA_1. Chứng minh $\cos A = \cos B \cdot \cos C$.

Giải

Vì trực tâm H là trung điểm của AA_1 nên H nằm trong tam giác $\Delta ABC \Rightarrow \Delta ABC$ là tam giác nhọn.
Áp dụng định lý Mênêlauýt đối với ΔAA_1C, ta có

$$\frac{HA}{HA_1} \cdot \frac{BA_1}{BC} \cdot \frac{B_1C}{BA} = 1 \Rightarrow \frac{BA_1}{BC} \cdot \frac{B_1C}{BA} = 1 \Rightarrow \frac{B_1A}{AB} = \frac{B_1C}{BC} \cdot \frac{BA_1}{BA}.$$

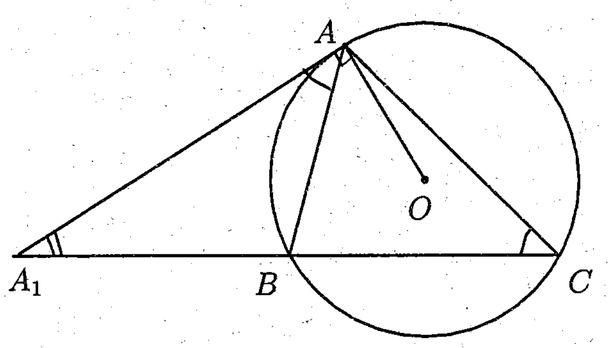


Hình 2.23.

Mặt khác, $\cos A = \dfrac{AB_1}{AB}, \cos B = \dfrac{BA_1}{BA}, \cos C = \dfrac{CB_1}{BC}$. Từ đó ta có đpcm. □

Ví dụ 2.20. Cho ΔABC không cân nội tiếp trong đường tròn (O). Tiếp tuyến của (O) qua A cắt BC tại A_1. Tương tự ta có B_1, C_1. Chứng minh A_1, B_1, C_1 thẳng hàng.

Giải



Hình 2.24.

Dễ thấy các điểm A_1, B_1, C_1 phải nằm ngoài các cạnh tương ứng.

Đặt $BC = a, CA = b, AB = c$. Ta có

$$\angle A_1AB = \angle ACB \text{ (góc giữa tia tiếp tuyến và dây cung)}$$
$$\Rightarrow \Delta A_1AB \sim \Delta A_1CA\,(g.g)$$
$$\Rightarrow \frac{A_1A}{A_1C} = \frac{A_1B}{A_1A} = \frac{AB}{CA} \Rightarrow \frac{A_1B}{A_1C} = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{c^2}{b^2}.$$

Tương tự ta có: $\dfrac{B_1C}{B_1A} = \dfrac{a^2}{c^2}, \dfrac{C_1A}{C_1B} = \dfrac{b^2}{a^2}$. Do đó

$$\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = 1$$

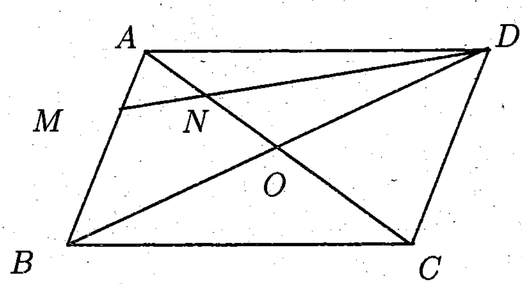
Từ đó, theo định lý Mênêlauýt phần đảo, ta có đpcm. □

Ví dụ 2.21. Cho ΔABC. Lấy M, N thuộc AB, AC sao cho:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{1}{n}; \; \frac{AN}{AC} = \frac{1}{n+1}, \quad n \in N*$$

Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Giải



Hình 2.25.

Vẽ hình bình hành $ABCD$. Khi đó D là điểm cố định. Ta chứng minh D, M, N thẳng hàng. Xét ΔABO (với O là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành). Dễ thấy M, N nằm trong hai cạnh AB, AO còn D nằm ngoài cạnh BO do đó điều kiện "hai trong một ngoài " được thoả mãn. Ta có:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{1}{n}, \frac{DB}{DO} = 2, \frac{NO}{NA} = \frac{AO - NA}{NA} = \frac{n+1-2}{2} = \frac{n-1}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{MA}{MB} \cdot \frac{DB}{DO} \cdot \frac{NO}{NA} = \frac{1}{n-1} \cdot 2 \cdot \frac{n-1}{2} = 1.$$

Từ đó ta có đpcm. □

2.1.3 Đường thẳng Ơ - le của tam giác

Ở ví dụ 1.5, chúng ta đã làm quen với đường thẳng Ơ-le và đường tròn Ơ-le của một tam giác. Trong phần này, chúng ta sẽ xem xét chi tiết hơn đường thẳng Ơ-le và đưa ra một số bài tập hay liên quan tới đường thẳng này.

1, Định nghĩa

Đường thẳng Ơ-le là đường thẳng đi qua trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp của một tam giác được gọi là đường thẳng Ơ-le (Euler) của tam giác đó.

Kí hiệu: d_E.

2, Tính chất

- Nếu tam giác ABC không đều thì có duy nhất một đường thẳng Ơ-le. Thật vậy, ΔABC không đều thì trực tâm H và tâm (O) của đường tròn ngoại tiếp ΔABC là hai điểm phân biệt. Do đó, tồn tại duy nhất đường thẳng đi qua hai điểm H, O

  Với mỗi tam giác đều có vô số đường thẳng Ơ-le. Vì ΔABC đều nên $H \equiv O$. Khi đó có vô số đường thẳng đi qua H, O hay ΔABC có vô số đường thẳng Ơ-le.

- Trọng tâm G và tâm O_1 của đường tròn Ơ-le của ΔABC (không đều) nằm trên đường thẳng Ơ-le.

- Đường thẳng Ơ-le đi qua một đỉnh của tam giác khi và chỉ khi tam giác đó vuông hoặc cân.

- Đường thẳng Ơ-le đi qua trung điểm của một cạnh khi và chỉ khi tam giác đó cân.

- Nếu ABC là tam giác nhọn có AB là cạnh nhỏ nhất, BC là cạnh lớn nhất thì d cắt đồng thời hai cạnh đó. Nếu ABC là tam giác có góc tù tại A và AB là cạnh nhỏ nhất thì d cắt cạnh BC, CA.

3, Ví dụ minh họa

Ví dụ 2.22. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC (không đều) và O' là điểm đối xứng với O qua BC. Chứng minh rằng d_E đi qua trung điểm của đoạn thẳng AO'.

Giải

Xét trường hợp ΔABC là tam giác nhọn.

Gọi H là trực tâm ΔABC. Từ chứng minh của tính chất 2 ta có $AH = 2OI$, với I là trung điểm của cạnh BC. Do đó $AH = OO'$. Mặt khác, $AH \| OO'$ (cùng vuông góc với BC) nên ta có $AOO'H$ là hình bình hành $\Rightarrow AO'$ và HO giao nhau tại trung điểm của mỗi đoạn. Từ đó ta có đpcm.

□

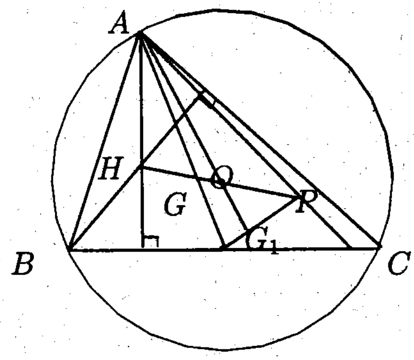
Ví dụ 2.23. Gọi H, O lần lượt là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ΔABCvà P là điểm đối xứng của H qua O. G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm các tam giác PBC, PCA, PAB. Chứng minh rằng $G_1A = G_2B = G_3C$ và các đường thẳng G_1A, G_2B, G_3C đồng quy.

Giải

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Theo tính chất (2.) ta có G thuộc đoạn HO và $HG = 2GO$. Vì P đối xứng với H qua P nên O thuộc đoạn GP và $\dfrac{OG}{OP} = \dfrac{1}{3}$ (1).

Vì G_1 là trọng tâm ΔPBC nên AG, PG_1 giao nhau tại trung điểm I của BC. Gọi O' là giao của AG_1 và GP. Ta có:

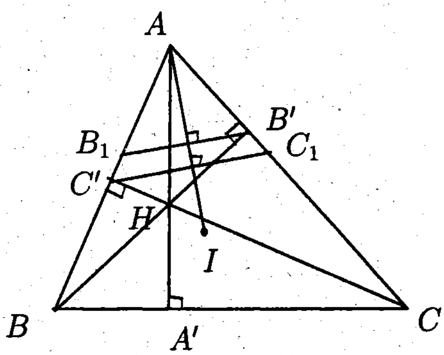
$$\frac{IG_1}{IP} = \frac{IG}{IA} = \frac{1}{3} \Rightarrow GG_1 \| AP \text{ và } \frac{O'G}{O'P} = \frac{GG_1}{AP} = \frac{1}{3}.$$



Hình 2.26.

Kết hợp với (1) suy ra $O \equiv O' \Rightarrow AG_1 = \frac{4}{3}AO$. Tương tự ta có $BG_2 = \frac{4}{3}BO$, $CG_3 = \frac{4}{3}CO$. Mà O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC nên $AO = BO = CO$ hay $AG_1 = BG_2 = CG_3$. Từ chứng minh trên ta suy ra AG_1, BG_2, CG_3 đều đi qua điểm O. Từ đó ta có đpcm. □

Ví dụ 2.24. Cho ΔABC không vuông có các đường cao AA', BB', CC' và đường tròn nội tiếp (I). Gọi d_1, d_2, d_3 là các đường thẳng Ơ- le của ba tam giác $AB'C', BA'C', CB'A'$. Gọi d_1', d_2', d_3' tương ứng là các đường thẳng đối xứng của d_1, d_2, d_3 qua AI, BI, CI. Chứng minh rằng d_1', d_2', d_3' song song.



Hình 2.27.

Giải

Gọi d là đường thẳng Ơ- le của ΔABC.

Từ B', C' lần lượt kẻ đường thẳng vuông góc với AI tương ứng cắt AB, AC tại B_1, C_1.

Vì AI là phân giác góc $\angle BAC$ nên $\Delta AB'B_1$, $\Delta AC'C_1$ là các tam giác cân suy ra $\Delta AB'C'$ và ΔAB_1C_1 đối xứng nhau qua AI.

Vì $\Delta AB'C'$ và ΔAB_1C_1 đối xứng nhau qua AI nên đường thẳng Ơ-le của ΔAB_1C_1 đối xứng nhau với đường thẳng d_1 qua AI hay d_1' chính là đường thẳng Ơ-le của ΔAB_1C_1.

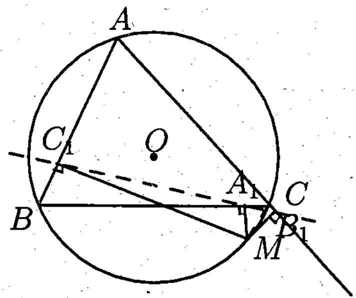
Mặt khác, $\Delta ABC \sim \Delta AB'C' \Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AB'}{AC'} \Rightarrow \dfrac{AB_1}{AB} = \dfrac{AC_1}{AC} \Rightarrow$ $B_1C_1 \| BC$.

Xét ΔAB_1C_1 có B_1, C_1 lần lượt nằm trên đường thẳng AB, AC, $B_1C_1 \| BC$ tức là ΔAB_1C_1 có các cạnh tương ứng cùng phương với các cạnh của ΔABC. Do đó đường thẳng Ơ-le của ΔAB_1C_1 song song với đường thẳng Ơ-le của ΔABC hay $d_1' \| d$.

Tương tự ta có $d_2', d_3' \| d$. Từ đó ta có đpcm. □

2.1.4 Đường thẳng Xim-xơn

1, Giới thiệu đường thẳng Xim-xơn



Hình 2.28.

Cho ABC nội tiếp trong đường tròn (O). M là điểm tuỳ ý thuộc (O). Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên BC, CA, AB. Chứng minh A_1, B_1, C_1 thẳng hàng.

Chứng minh. Không mất tổng quát, giả sử M thuộc cung BC. Ta sẽ sử dụng tiêu chuẩn góc đối đỉnh A_1 để suy ra $\angle C_1A_1B_1 = 180^o$. Ta có:

MA_1BC_1 nội tiếp $\Rightarrow \angle BA_1C_1 = \angle BMC_1$.

Tương tự, $\angle CA_1B_1 = \angle CMB_1$.

MB_1AC_1 nội tiếp $\Rightarrow \angle C_1AB_1 + \angle C_1MB_1 = 180^o$.

Tương tự, $\angle BAC + \angle BMC = 180^o$.

Do đó $\angle C_1MB_1 = \angle BMC \Rightarrow \angle C_1MB = \angle CMB_1$.

Từ đó ta có $\angle BA_1C_1 = \angle CA_1B_1 \Rightarrow$ (đpcm). □

Chú ý:

- Đường thẳng chứa 3 điểm A_1, B_1, C_1 được gọi là đường thẳng Xim-xơn của ΔABC ứng với điểm M.

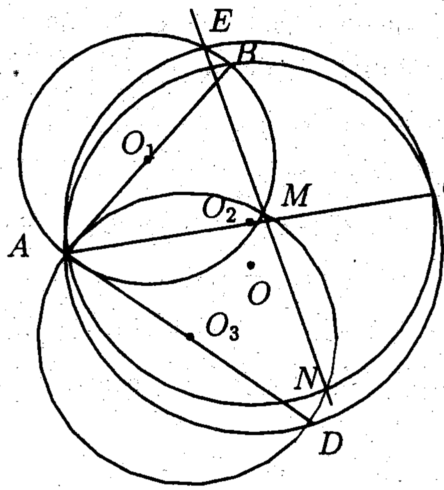
- Nếu M trùng với các đỉnh của ABC thì đường thẳng Xim-xơn chính là đường cao tương ứng.

- Mở rộng đường thẳng Xim-xơn đối với tam giác, ta có thể xây dựng đường thẳng Xim-xơn cho đa giác nội tiếp được. Chẳng hạn: "Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O), M là điểm tuỳ ý thuộc (O). Gọi $(a), (b), (c), (d)$ là đường thẳng Xim-xơn của M đối với tam giác ABC, BCD, CDA và DAB. Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 là hình chiếu vuông góc của M lên các đường thẳng đó. Chứng minh rằng A_1, B_1, C_1, D_1 thẳng hàng. Đường thẳng này được gọi là đường thẳng Xim-xơn của M đối với tứ giác ABCD." Việc chứng minh bài toán này xin dành cho bạn đọc.

2, Ví dụ minh họa.

Ví dụ 2.25. Cho đường tròn (O) và 3 dây cung tuỳ ý AB, AC, AD. Các đường tròn đường kính AB, AC, AD cắt nhau từng đôi một tại E, M, N. Chứng minh E, M, N thẳng hàng.

Giải



Hình 2.29.

Gọi $(O_1), (O_2), (O_3)$ là các đường tròn đường kính AB, AC, AD. Gọi E là giao điểm của (O_1) và (O_2). Ta có: $\angle AEB = \angle AEC = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow E, B, C$ thẳng hàng và $AE \perp BC$.

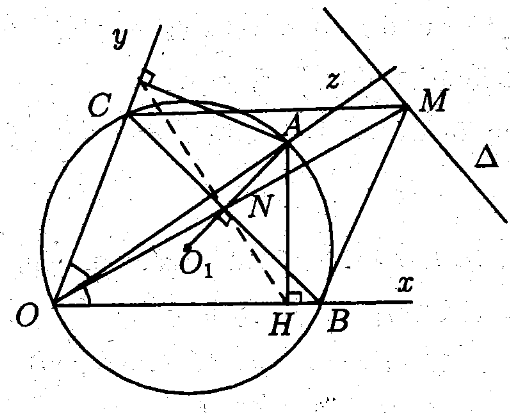
Các tính chất của M, N tương tự tính chất của điểm E . Do đó E, M, N thuộc đường thẳng Xim-xơn của điểm A đối với $\Delta BCD \Rightarrow$ (đpcm). □

Ví dụ 2.26. Cho góc xOy, lấy A cố định thuộc tia phân giác Oz. Vẽ đường tròn (O_1) tuỳ ý qua O, A và cắt các tia Ox, Oy tại B, C. Vẽ hình bình hành $OBMC$. Chứng minh M thuộc đường thẳng cố định.

Giải

Oz là phân giác góc xOy, $A \in Oz$ nên $O_1A \perp BC$ tại N là trung điểm $BC \Rightarrow N$ là trung điểm OM. Kẻ $AH \perp OB, AK \perp OC$ thì H, K cố định và N, H, K thẳng hàng trên Δ với Δ là đường thẳng Xim-xơn của A đối với $\Delta OBC \Rightarrow N \in \Delta$ cố định.

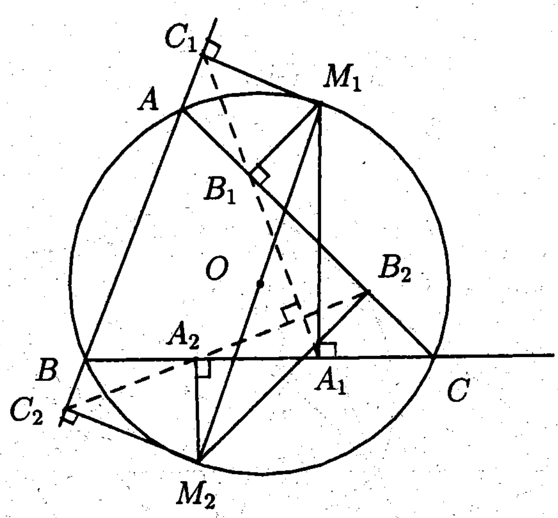
Do O cố định và $OM = 2ON$ nên $M \in \Delta'$ cố định song song với Δ và cách Δ một khoảng không đổi bằng khoảng cách từ O đến $\Delta \Rightarrow$ (đpcm). □



Hình 2.30.

Ví dụ 2.27. Cho ΔABC nội tiếp trong đường tròn (O). M_1M_2 là một đường kính tuỳ ý. Chứng minh rằng hai đường thẳng Xim-xơn tương ứng với hai điểm M_1, M_2 luôn vuông góc với nhau.

Giải



Hình 2.31.

Gọi đường thẳng Xim-xơn tương ứng với M_1, M_2 là $(d_1), (d_2)$. Để chứng minh $(d_1)\perp(_2)$ ta chứng minh $\angle AC_1B_1 + \angle BC_2A_2 = 90^o$. Ta có:

Tứ giác $AC_1M_1B_1$ nội tiếp $\Rightarrow \angle AB_1C_1 = \angle AM_1B_1$.

Tứ giác $BA_2M_2C_2$ nội tiếp $\Rightarrow \angle M_2C_2A_2 = \angle M_2BA_2$. (1)

M_1M_2 là đường kính $\Rightarrow \angle M_1BM_2 = 90^o$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\angle M_1BA_2 + \angle M_2C_2A_2 = 90^o$.

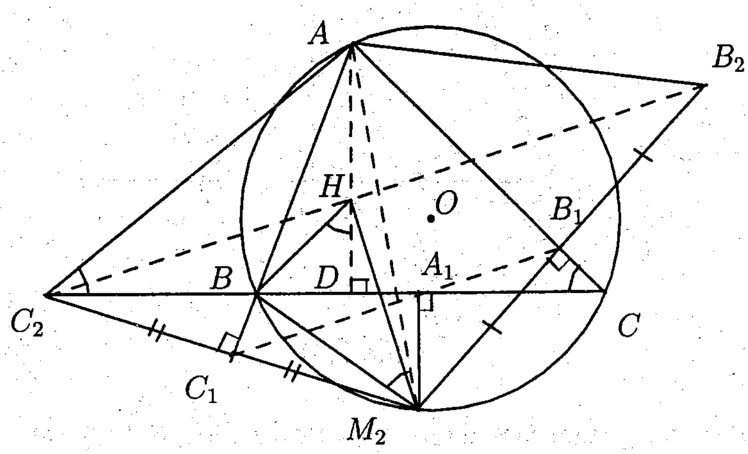
Ta có

$$\angle M_1BA_2 = \angle CAM_1 \text{ (góc nội tiếp)}$$
$$\Rightarrow \angle CAM_1 + \angle M_2C_2A_2 = 90^o$$
$$\Rightarrow \angle AM_1B_1 = \angle A_2C_2M_2 \text{ (cùng phụ)}$$
$$\Rightarrow \angle AC_1B_1 = \angle A_2C_2M_2.$$

Từ đó, do $\angle A_2C_2M_2 + \angle A_2C_2B = 90^o$ nên $\angle AC_1B_1 + \angle BC_2A_2 = 90^o \Rightarrow$ (đpcm). □

Ví dụ 2.28. Cho ABC nội tiếp trong (O) với H là trực tâm. M là điểm tuỳ ý thuộc (O). Chứng minh đường thẳng Xim-xơn ứng với điểm M luôn đi qua trung điểm của MH.

Giải



Hình 2.32.

Gọi B_2, C_2 là đối xứng của M qua AC, AB. Ta có:

$$\begin{aligned}
&\angle AMB = \angle ACB \text{ (góc nội tiếp)},\\
&\angle AMB = \angle AC_2B \text{ (đối xứng trục) },\\
&\angle ACB = \angle BHD \text{ (cạnh tương ứng vuông góc)}\\
\Rightarrow &\angle BHD = \angle AC_2B \Rightarrow \text{ tứ giác} AC_2BH \text{ nội tiếp}\\
\Rightarrow &\angle C_2HB = \angle C_2AB \text{ (góc nội tiếp)}.
\end{aligned}$$

Tương tự, $\angle B_2HC = \angle B_2AC$.
Từ đó ta có $\angle C_2HB_2 = \angle BAC + \angle BHC = 180^o \Rightarrow C_2, H, B_2$ thẳng hàng.
Do B_1C_1 là đường trung bình của ΔMB_2C_2 nên B_1C_1 đi qua trung điểm của $MH \Rightarrow$ (đpcm). □

2.2 Bài toán đồng quy

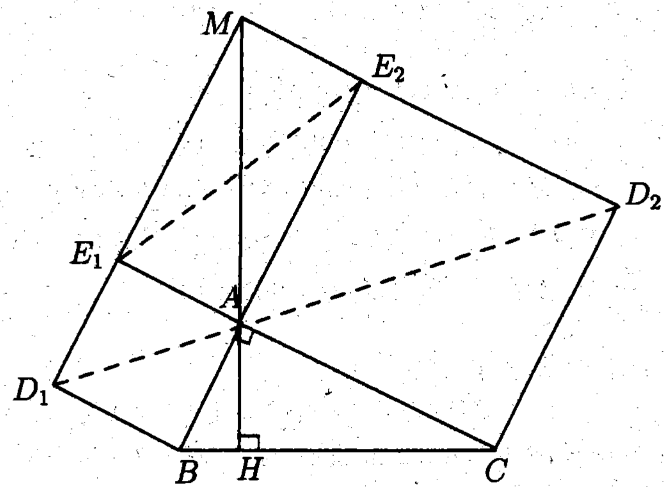
2.2.1 Các phương pháp cơ bản

Tiêu chuẩn 1. Bài toán chứng minh 3 đường thẳng đồng quy có thể chuyển về bài toán ba điểm thẳng hàng. Chẳng hạn, cho hai đường thẳng cắt nhau tại M và chứng minh đường thẳng thứ ba đi qua M tức là M thẳng hàng với hai điểm tuỳ ý thuộc đường thẳng đó.

Ví dụ 2.29. Cho ΔABC vuông tại A. Kẻ đường cao AH. Về phía ngoài vẽ hai hình vuông ABD_1E_1 và ACD_2E_2. Chứng minh rằng A, D_1, D_2 thẳng hàng và AH, D_1E_1, D_2E_2 đồng quy.

Giải

- Vì $\angle D_1AB = \angle D_2AC = 45^o$ nên $\angle D_1AD_2 = 45^o + 90^o + 45^o = 180^o \Rightarrow D_1, A, D_2$ thẳng hàng.



Hình 2.33.

- D_1E_1 cắt D_2E_2 tại M. Ta có:

$$\Delta ABC = \Delta AE_1E_2 \text{ (c.g.c) } \Rightarrow \angle ABC = \angle AE_1E_2.$$
$$\angle ABC = \angle HAC \text{ (cùng phụ } \angle HAB)$$
$$\Rightarrow \angle AE_1E_2 = \angle E_1AM = \angle HAC.$$

Các góc đó ở vị trí đối đỉnh bằng nhau nên H, A, M thẳng hàng $\Rightarrow$ (đpcm).

□

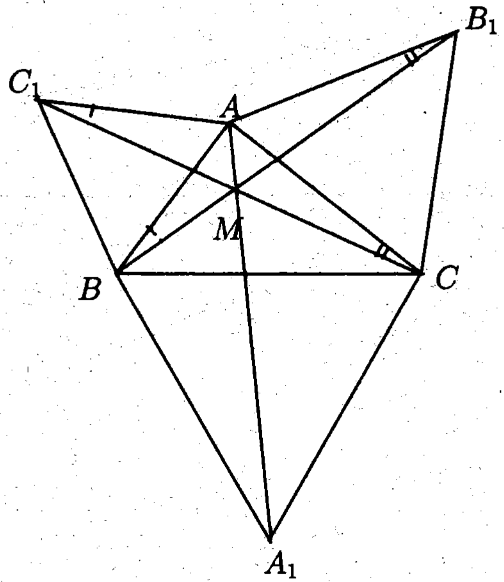
Ví dụ 2.30. Cho ΔABC . Vẽ phía ngoài vẽ ba tam giác đều ABC_1, BCA_1 và CAB_1. Chứng minh AA_1, BB_1, CC_1 bằng nhau và đồng quy.

Giải

Ta có

$$\angle C_1AC = \angle BAB_1 = \angle A + 60^o$$
$$\Rightarrow \Delta AC_1C = \Delta ABB_1 \text{ (c.g.c)} \quad (1)$$
$$\Rightarrow BB_1 = CC_1.$$

Tương tự đối với AA_1 và BB_1. Giả sử BB_1 cắt CC_1 ở M. Ta chứng minh A, M, A_1 thẳng hàng.



Hình 2.34.

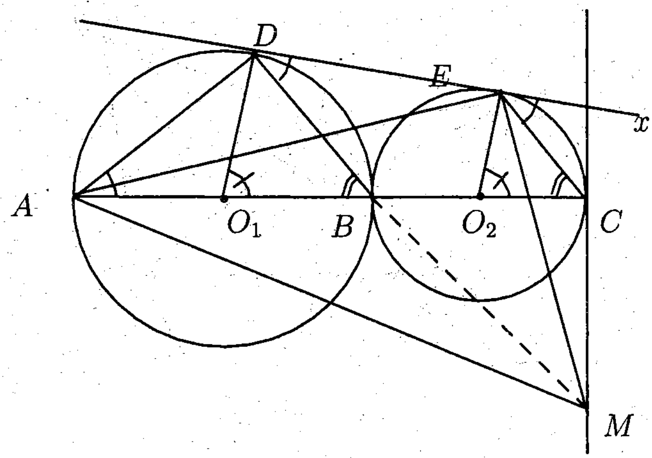
Thật vậy, do (1) nên $\angle MBA = \angle MC_1A$, $\angle MCA = \angle MB_1A$
$\Rightarrow$ các tứ giác $AMBC_1$ và $AMCB_1$ nội tiếp được.
$\Rightarrow \angle AMB = \angle AMC = 120^o \Rightarrow \angle BMC = 120^o \Rightarrow BMCA_1$ nội tiếp được.
Từ đó, do tính chất của góc nội tiếp nên $\angle MAC_1 = \angle MCA_1 = 60^o$. Vì hai góc này ở vị trí đối đỉnh nên A, M, A_1 thẳng hàng.

□

Ví dụ 2.31. Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng và theo thứ tự. Vẽ hai đường tròn $(O_1), (O_2)$, đường kính AB và đường kính BC. Gọi DE là tiếp tuyến chung ngoài của (O_1) và $(O_2)(D \in (O_1), E \in (O_2))$. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua C, vuông góc với AC và đường thẳng đi qua E, vuông góc với AE cắt nhau trên đường thẳng BD.

Giải

Giả sử hai đường thẳng đang xét cắt nhau tại M. Ta phải chứng minh D, B, M thẳng hàng. . Theo giả thiết, các tứ giác $AECM$ nội tiếp được trong đường tròn đường kính AM.



Hình 2.35.

Xét tứ giác $ADEC$, ta có

Vì DE là tiếp tuyến chung ngoài của (O_1) và (O_2) nên $O_1D||O_2E$
$\Rightarrow \angle DO_1B = \angle EO_2C$ (đồng vị) $\Rightarrow \angle DBO_1 = \angle ECO_2$ (góc ở đáy của tam giác
$\Rightarrow DB||EC \Rightarrow \angle BDE = \angle CEx$ (đồng vị).

Mặt khác, $\angle BAD = \angle BDE$ (góc giữa tia tiếp tuyến và dây cung).

Do đó tứ giác $ADEC$ nội tiếp được.

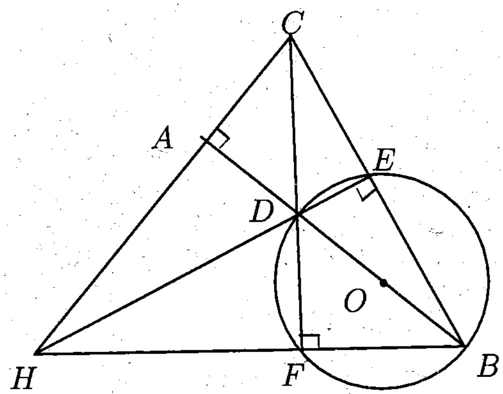
Vì hai tứ giác $ADEC$ và $AECM$ đều nội tiếp được nên ngũ giác $ADECM$ nội tiếp được trong đường tròn đường kính $AM \Rightarrow \angle ADM = 90^o$. Nhưng $\angle ADB = 90^o$ (góc nội tiếp) do đó D, B, M thẳng hàng.

Từ đó ta có đpcm. □

Tiêu chuẩn 2. Ba đường thẳng đang xét là ba đường đặc biệt của một tam giác, chẳng hạn là ba đường cao, ba đường trung tuyến, ba đường phân giác trong,...

Ví dụ 2.32. Cho ΔABC vuông ở A. Lấy điểm D tuỳ ý thuộc AB. Đường tròn đường kính BD cắt BC tại E và CD tại F. Chứng minh rằng AC, BF, DE đồng quy.

Giải



Hình 2.36.

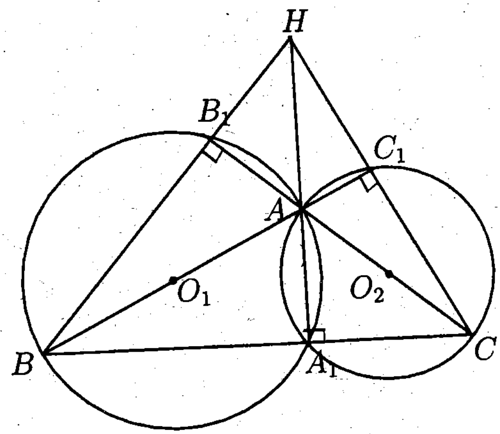
Luôn có $\angle BED = \angle BFD = 90^o$ (góc chắn nửa đường tròn). Từ đó BF, CA, DE là ba đường cao của ΔBCD. Do đó chúng đồng quy tại trực tâm H của $\Delta BCD \Rightarrow$ (đpcm). □

Ví dụ 2.33. Cho ΔABC. Gọi $(O_1), (O_2)$ là hai đường tròn đường kính AB và đường kính AC. (O_1) cắt đường thẳng AC ở B_1. (O_2) cắt đường thẳng AB ở C_1. (O_1) cắt (O_2) tại A và A_1. Chứng minh rằng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy.

Giải

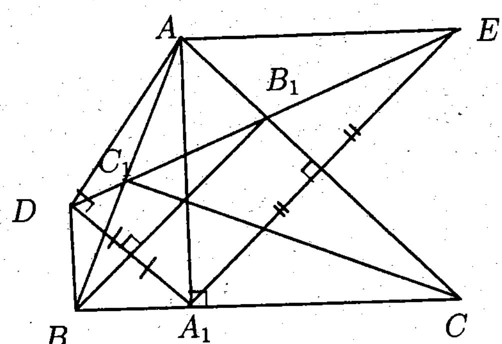
Do $\angle AA_1B = \angle AA_1C = 90^o$ (góc chắn nửa đường tròn) nên B, A_1, C thẳng hàng $\Rightarrow AA_1 \perp BC$.
Tương tự, $\angle BB_1A = CC_1A = 90^o$ (góc chắn nửa đường tròn) nên BB_1, CC_1 là hai đường cao tương ứng hạ từ B, C của ΔABC.
Vậy AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại H là trực tâm của $\Delta ABC \Rightarrow$ (đpcm). □

Ví dụ 2.34. Cho ΔABC . Vẽ đường cao AA_1. Gọi D, E là đối xứng của A_1 qua AB và AC. DE cắt AB, AC ở C_1, B_1. Chứng minh rằng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy.



Hình 2.37.

Giải



Hình 2.38.

Do tính chất của phép đối xứng trục ta luôn có: $\angle ADB = \angle AA_1B = 90^o \Rightarrow$ tứ giác AA_1BD nội tiếp được. (1)

$\angle AA_1B_1 = AEB_1$, $\angle AED = \angle ADE \Rightarrow \angle ADB_1 = \angle AA_1B_1 \Rightarrow$ tứ giác ADA_1B_1 nội tiếp được. (2)

Từ (1), (2) suy ra tứ giác $ADBB_1$ nội tiếp được, và từ đó $\angle AB_1B = \angle ADB = 90^o \Rightarrow BB_1 \perp AC$.

Tương tự ta có $CC_1 \perp AB$.

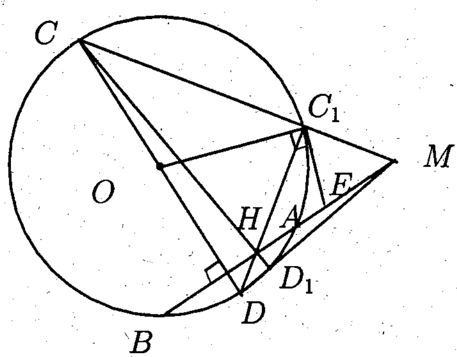
Vậy AA_1, BB_1, CC_1 là ba đường cao của ΔABC nên chúng đồng quy tại trực tâm H

$\Rightarrow$ (đpcm). □

Tiêu chuẩn 3. Đường thẳng thứ nhất và đường thẳng thứ hai cùng đi qua một điểm trên đường thẳng thứ ba.

Ví dụ 2.35. Cho đường tròn (O) và điểm M tuỳ ý nằm ngoài (O). Kẻ cát tuyến MAB tuý ý. Gọi CD là đường kính vuông góc với AB. Các đường thẳng MC, MD cắt (O) tại C_1, D_1. Chứng minh rằng các tiếp tuyến tại C_1, D_1 và đường thẳng AB đồng quy.

Giải



Hình 2.39.

Ta có

$$\angle CC_1D = \angle CD_1D = 90^o \text{ (góc chắn nửa đường tròn)}$$

$\Rightarrow MB, CD_1, DC_1$ là ba đường cao của ΔMCD nên đồng quy tại trực tâm H của ΔMCD.

Gọi E là trung điểm của $HM \Rightarrow C_1E = EH = EM$ (vì ΔC_1HM vuông tại C_1 nên trung tuyến bằng nửa cạnh huyền) $\Rightarrow \angle HC_1E = \angle EHC_1$.

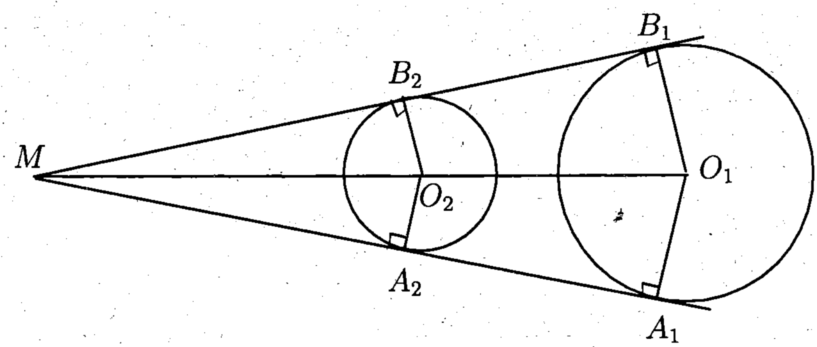
Mặt khác, do $OD = OC_1$ nên $\angle OC_1H = ADC_1$.

Từ đó ta có $\angle OC_1D + \angle DC_1E = 90^o \Rightarrow EC_1$ là tiếp tuyến của (O).

Tương tự đối với ED_1, ta có đpcm. □

Ví dụ 2.36. Cho hai đường tròn $(O_1, R_1), (O_2, R_2)$, có $R_1 > R_2$ và có tiếp tuyến chung ngoài. Chứng minh rằng hai tiếp tuyến chung ngoài của chúng luôn cắt nhau trên đường nối tâm.

Giải



Hình 2.40.

Gọi A_1A_2 là tiếp tuyến chung ngoài thứ nhất. Ta có $O_1A_1 \| O_2A_2$ và $R_1 > R_2$ nên đường thẳng A_1A_2 luôn cắt đường thẳng O_1O_2 tại M và M nằm ngoài O_1O_2 về phía O_2. Theo định lý Talét, ta có

$$\frac{MO_2}{MO_1} = \frac{O_2A_2}{O_1A_1} = \frac{R_2}{R_1} \quad (1)$$

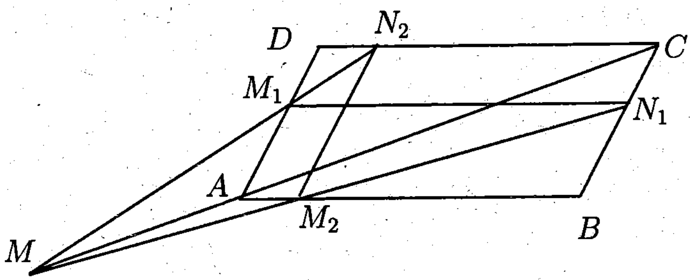
Tương tự, tiếp tuyến chung ngoài thứ hai BB_1 cắt đường nối tâm tại Nthì N cũng nằm ngoài O_1Q_2 về phía O_2 và

$$\frac{NO_2}{NO_1} = \frac{R_2}{R_1} \quad (2)$$

Từ $(1), (2)$ ta có $M \equiv N \Rightarrow$ (đpcm). □

Ví dụ 2.37. Cho hình bình hành $ABCD$. Vẽ hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$ tuỳ ý (không đồng thời là hai đường trung bình của hình bình hành) sao cho (d_1) song song với AB cắt cạnh AD, BC lần lượt tại M_1, N_1 và (d_2) song song với AD cắtcạnh AB, DC lần lượt tại M_2, N_2. Chứng minh M_1N_2, M_2N_1, AC đồng quy.

Giải



Hình 2.41.

Giả sử M_1N_2 cắt AC ở M và M nằm ngoài CA về phía A. Áp dụng định lý Mênêlauýt với ΔDAC, ta có

$$\frac{MA}{MC}\cdot\frac{N_2C}{N_2D}\cdot\frac{M_1D}{M_1A}=1\Leftrightarrow\frac{MA}{MC}=\frac{M_1A}{M_1D}\cdot\frac{N_2D}{N_2C}.\quad(1)$$

Tương tự, nếu M_2N_1 cắt AC ở N thì N nằm ngoài CA về phía A và

$$\frac{NA}{NC}=\frac{M_2A}{M_2B}\cdot\frac{N_1B}{N_1C}.\quad(2)$$

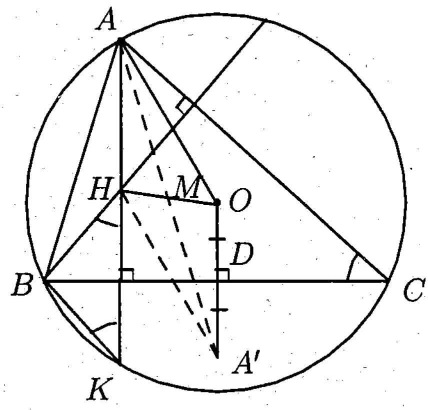
Mặt khác, $ABCD$ là hình bình hành nên $M_1A=N_1B, N_2D=M_2A, M_1D=N_1C$ và $N_2C=M_2B$ nên từ (1), (2) ta có

$$\frac{MA}{MC}=\frac{NA}{NC}\Rightarrow M\equiv N$$

$\Rightarrow$ (đpcm). □

Tiêu chuẩn 4. Chứng minh các đường thẳng đang xét cùng đi qua 1 điểm.

Ví dụ 2.38. Cho ΔABC với H là trực tâm. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác HBC, HCA, HAB. Chứng minh rằng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy.



Hình 2.42.

Giải

Đường cao AH cắt đường tròn (O) ngoại tiếp ΔABC tại K. Ta có:

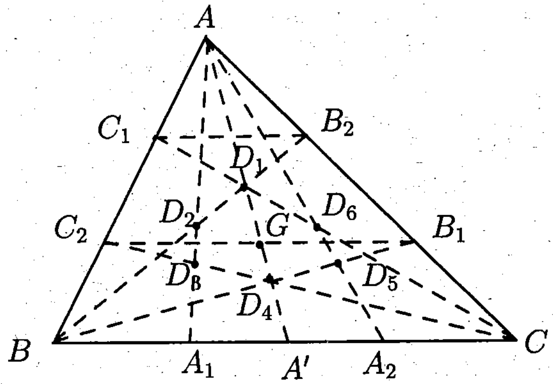
$$\angle AKB = \angle ACB \text{ (góc nội tiếp)},$$
$$\angle BHK = \angle ACB \text{ (góc có cạnh tương ứng vuông góc)}$$
$$\Rightarrow \angle BHK = \angle AKB = \angle BKH$$
$$\Rightarrow K \text{ là đối xứng của } H \text{ qua cạnh } BC.$$

· Từ đó, phép đối xứng trục BC biến đường tròn (O) thành đường tròn $(A_1) \Rightarrow A_1$ là đối xứng của O qua BC.

Sử dụng kết quả đã biết, ta có $AH \stackrel{\parallel}{=} 2OD \Rightarrow AH \stackrel{\parallel}{=} OA_1 \Rightarrow AHA_1O$ là hình bình hành $\Rightarrow AA_1$ đi qua M là trung điểm của HO.

Tương tự đối với BB_1, CC_1, ta có đpcm. □

Ví dụ 2.39. Cho ΔABC. Lấy các điểm $A_1, A_2 \in BC$ sao cho $BA_1 = A_1A_2 = A_2C$. Tương tự với $B_1, B_2 \in CA$ và $C_1, C_2 \in AB$. Các đường thẳng $AA_1, AA_2, BB_1, BB_2, CC_1, CC_2$ cắt nhau tạo thành lục giác $D_1D_2D_3D_4D_5D_6$ (hình vẽ). Chứng minh rằng ba đường chéo của lục giác đồng quy.



Hình 2.43.

Giải

Do giả thiết, dễ thấy BCB_1C_2, BCB_2C_1 là các hình thang nên A, D_1, D_4, A' thẳng hàng, với A' là trung điểm của BC và D_1D_4 là một đường chéo chính của lục giác.

Gọi G là giao diểm của AA' và B_1C_2, theo định lý Talét ta có

$$\frac{AG}{AA'} = \frac{AB_1}{AC} = \frac{2}{3}$$

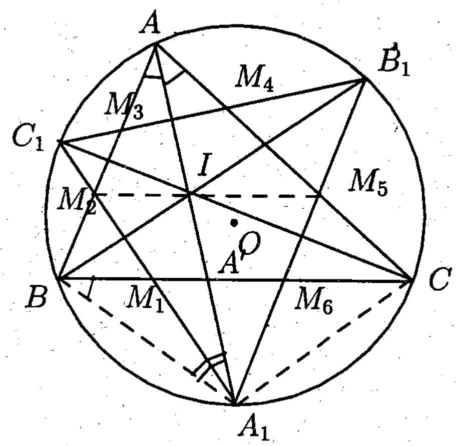
$\Rightarrow G$ là trọng tâm ΔABC hay D_1D_4 đi qua trọng tâm G của ΔABC.

Tương tự ta có các đường chéo D_2D_5 và D_3D_6 đi qua G. Từ đó ta có đpcm. □

Ví dụ 2.40. Cho ΔABC nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm các cung $\overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CA}, \overset{\frown}{AB}$. Các cạnh của ΔABC và $\Delta A_1B_1C_1$ cắt nhau tạo thành một lục giác. Chứng minh ba đường chéo chính của lục giác đồng quy.

Giải

Từ giả thiết, ta có AA_1, BB_1, CC_1 là ba đường phân giác của ΔABC nên chúng đồng quy tại I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC. Ký hiệu lục giác tạo thành là $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$. Xét một đường chéo chính, chẳng hạn M_2M_5.



Hình 2.44.

Theo tính chất của phân giác, ta có:

$$\frac{M_2A}{M_2B} = \frac{A_1A}{A_1B}, \frac{M_5A}{M_5C} = \frac{A_1A}{A_1C}, A_1B = A_1C$$

$$\Rightarrow \frac{M_2A}{M_2B} = \frac{M_5A}{M_5C} \Rightarrow M_2M_5 \| BC \text{ (định lý Talét đảo)}$$

Giả sử AA_1 cắt BC, M_2M_5 tại A', I'. Theo trên ta có:

$$\frac{I'A}{I'A'} = \frac{M_2A}{M_2B} = \frac{A_1A}{A_1B},$$

$$\Delta A_1AB \sim \Delta A_1BA'(g.g) \Rightarrow \frac{A_1A}{A_1B} = \frac{AB}{BA'}$$

$$\Rightarrow \frac{I'A}{I'A'} = \frac{BA}{BA'} \Rightarrow BI' \text{ là phân giác của } \angle ABC \Rightarrow I' \equiv I.$$

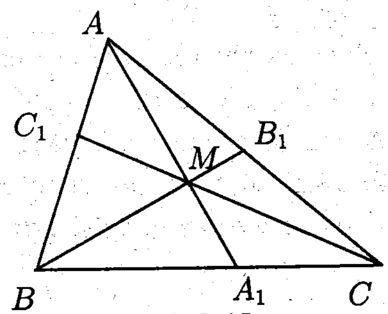
Từ đó ta có ba đường chéo của lục giác đồng quy tại I. □

2.2.2 Định lý Xê-va và các áp dụng

1, Định lý Xê-va.

Bài toán: Cho ΔABC. A_1, B_1, C_1 là các điểm tuỳ ý thuộc các cạnh BC, CA, AB sao cho AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại M. Chứng minh rằng:

$$\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = 1. \quad (*)$$



Hình 2.45.

Chứng minh. Áp dụng định lý Mênêlauýt với ΔABA_1 và ΔACA_1 ta có:

$$\frac{C_1A}{C_1B}\cdot\frac{CB}{CA_1}\cdot\frac{MA_1}{MA}=1, \frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{MA}{MA_1}\cdot\frac{BA_1}{BC}=1$$

$$\Rightarrow \frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B}=1 \text{ (đpcm).}$$

□

Nhận xét:

- Để đơn giản đối với chương trình hình học 9, ta giả thiết các điểm A_1, B_1, C_1 thuộc các cạnh BC, CA, AB (gọi tắt là vị trí "ba trong"). Nhưng ngoài ra, A_1, B_1, C_1 có thể ở vị trí "một trong hai ngoài" và khi đó kết quả bài toán trên vẫn đúng. Bài toán trên được gọi là định lý Xê-va.
- Ở vị trí "một trong hai ngoài", các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 còn có thể song song. Khi đó, kết quả (*) vẫn đúng. Việc chứng minh xin dành cho độc giả. Trong trường hợp này, ba đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 được xem là đồng quy ở điểm vô tận ($M \equiv \infty$).
- Nếu các điểm A_1, B_1, C_1 ở vị trí "ba trong" hoặc "một trong hai ngoài" và thoả mãn điều kiện

$$\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B}=1$$

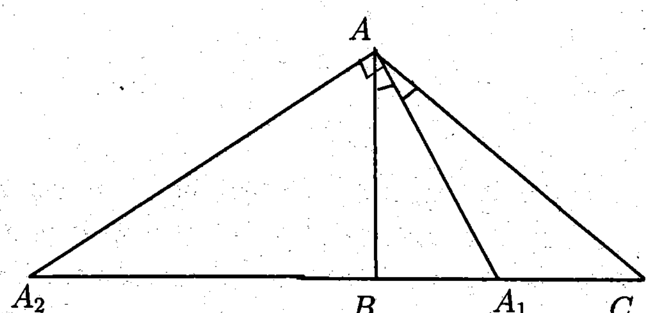
thì ta dễ dàng chứng minh được AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy. Kết quả này được xem là định lý Xê-va đảo.

- Để khắc phục sự phức tạp khi xét vị trí của các điểm A_1, B_1, C_1 đối với các cạnh BC, CA, AB của ΔABC, ở phần hình học 10, người ta đưa ra khái niệm độ dài đại số của đoạn thẳng AB (kí hiệu $\overline{AB}$) (xem sách *Hình học 10*). Khi đó, việc xây dựng các định lý Mênêlauýt, Xê-va sẽ chặt chẽ hơn và việc áp dụng sẽ đơn giản hơn.

2, Ví dụ minh họa.

Ví dụ 2.41. Cho ΔABC không cân. Gọi AA_1, BB_1, CC_1 là các phân giác trong và AA_2, BB_2, CC_2 là các phân giác ngoài. Chứng minh rằng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy và A_2, B_2, C_2 thẳng hàng.

Giải



Hình 2.46.

Theo tính chất của phân giác, ta có:

$$\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{A_2B}{A_2C} = \frac{AB}{AC}, \frac{B_1C}{B_1A} = \frac{B_2C}{B_2A} = \frac{BC}{BA}, \frac{C_1A}{C_1B} = \frac{C_2A}{C_2B} = \frac{CA}{CB}$$

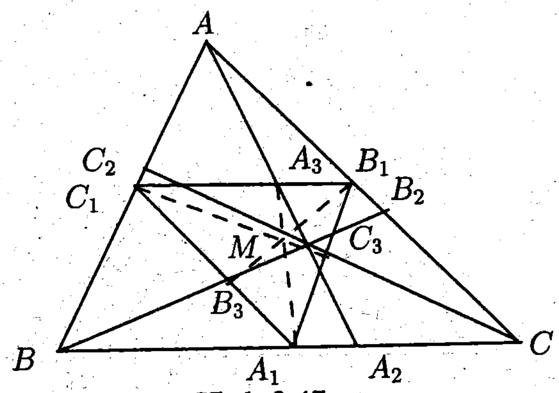
$$\Rightarrow \frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = \frac{A_2B}{A_2C} \cdot \frac{B_2C}{B_2A} \cdot \frac{C_2A}{C_2B} = 1.$$

Do A_1, B_1, C_1 ở vị trí "ba trong" nên AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy theo định lý Xê-va.

Do A_2, B_2, C_2 ở vị trí "ba ngoài" nên A_2, B_2, C_2 thẳng hàng theo định lý Mênêlauýt. □

Ví dụ 2.42. Cho ΔABC. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Lấy các điểm A_2, B_2, C_2 tuỳ ý thuộc BC, CA, AB sao cho AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy tại M. Gọi A_3, B_3, C_3 là trung điểm của AA_2, BB_2, CC_2. Chứng minh rằng A_1A_3, B_1B_3, C_1C_3 đồng quy.

Giải



Hình 2.47.

Do A_3 là trung điểm của AA_2 nên $A_3 \in B_1C_1$ (tính chất đường trung bình).

Theo định lý Talét, ta có:

$$\frac{A_3B_1}{A_3C_1} = \frac{A_2C}{A_2B}, \frac{B_3C_1}{B_3A_1} = \frac{B_2A}{B_2C}, \frac{C_3A_1}{C_3B_1} = \frac{C_2B}{C_2A}$$

$$\Rightarrow \frac{A_3B_1}{A_3C_1} \cdot \frac{B_3C_1}{B_3A_1} \cdot \frac{C_3A_1}{C_3B_1} = \frac{A_2C}{A_2B} \cdot \frac{B_2A}{B_2C} \cdot \frac{C_2B}{C_2A} = \frac{A_2C}{A_2B} \cdot \frac{C_2B}{C_2A} \cdot \frac{B_2A}{B_2C} \quad (1)$$

Mặt khác, AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy nên áp dụng định lý Xê-va đối với tam giác ABC ta có:

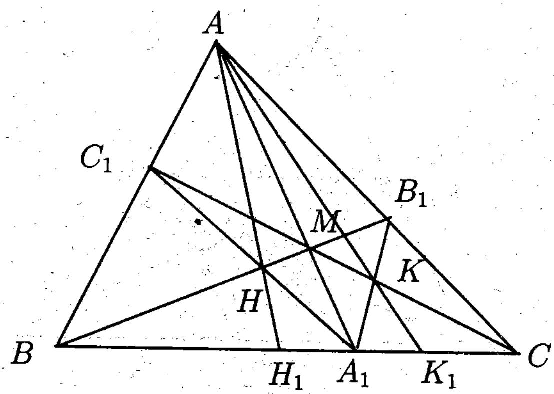
$$\frac{A_2C}{A_2B} \cdot \frac{C_2B}{C_2A} \cdot \frac{B_2A}{B_2C} = 1 \quad (2)$$

Từ (1), (2), áp dụng định lý Xê-va đảo đối với $\Delta A_1B_1C_1$ ta có A_1A_3, B_1B_3, C_1C_3 đồng quy (đpcm). □

Ví dụ 2.43. Cho ΔABC. Lấy M tuỳ ý thuộc trung tuyến AA_1. BM, CN tương ứng giao với AC, AB tại B_1, C_1. A_1C_1, A_1B_1 tương ứng giao với BM, CM tại H, K. AH, AK giao với BC tại H_1, K_1. Chứng minh rằng:

$$H_1B \cdot A_1K_1 = K_1C \cdot A_1H_1.$$

Giải



Hình 2.48.

Áp dụng định lý Xê-va đối với $\Delta ABC, \Delta ABA_1, ACC_1$ ta có:

$$\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = 1 \Rightarrow \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = 1. \quad (1)$$

$$\frac{H_1B}{H_1A_1} \cdot \frac{MA_1}{MA} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = 1, \; \frac{K_1C}{K_1A_1} \cdot \frac{MA_1}{MA} \cdot \frac{B_1A}{B_1C} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{H_1B}{H_1A_1} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = \frac{K_1C}{K_1A_1} \cdot \frac{B_1A}{B_1C}. \quad (2)$$

Từ $(1), (2) \Rightarrow \dfrac{H_1B}{H_1A_1} = \dfrac{K_1C}{K_1A_1} \Rightarrow$ (đpcm). □

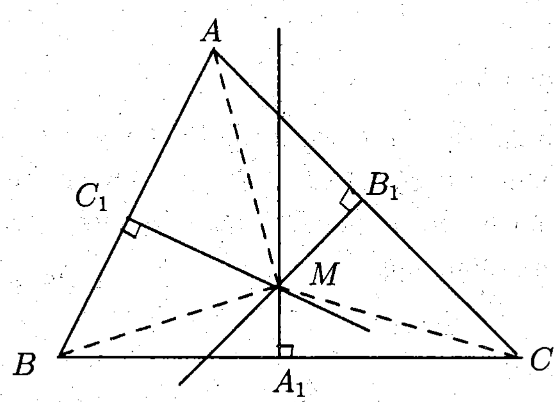
2.2.3 Định lý Các-nô

1, Định lý Các-nô

Trong ΔABC, tính chất đồng quy của ba đường cao, ba đường trung trực dẫn chúng ta đến bài toán: " tìm điều kiện cần và đủ để ba đường thẳng tương ứng vuông góc với ba cạnh của tam giác đồng quy". Nhà toán học Các-nô đã đưa ra bài toán sau (được gọi là định lý Các-nô)

Bài toán: Cho ΔABC. Lấy các điểm A_1, B_1, C_1 lần lượt thuộc các cạnh BC, CA, AB. Xét đường thẳng (d_1) qua A_1, vuông góc với BC; đường thẳng (d_2) qua B_1, vuông góc với CA; đường thẳng (d_3) qua C_1, vuông góc với AB. Điều kiện cần và đủ để ba đường thẳng đó đồng quy là:

$$(A_1B^2 - A_1C^2) + (B_1C^2 - B_1A^2) + (C_1A^2 - C_1B^2) = 0. \quad (*)$$



Hình 2.49.

Chứng minh.

Điều kiện cần. Gọi M là điểm đồng quy của ba đường thẳng $(d_1), (d_2), (d_3)$. Theo định lý Pitago, ta có:

$$A_1B^2 = MB^2 - MA_1{}^2, \; A_1C^2 = MC^2 - MA_1{}^2$$
$$\Rightarrow A_1B^2 - A_1C^2 = MB^2 - MC^2.$$

Tương tự, ta suy ra A_1, B_1, C_1 thoả mãn điều kiện $(*)$ (đpcm).

Điều kiện đủ. Giả sử A_1, B_1, C_1 thoả mãn điều kiện $(*)$, gọi M là giao điểm của $(d_1), (d_2)$. Gọi C_2 là hình chiếu của M trên cạnh AB. Áp dụng điều kiện cần, ta có

$$(A_1B^2 - A_1C^2) + (B_1C^2 - B_1A^2) + (C_2A^2 - C_2B^2) = 0. \quad (**)$$

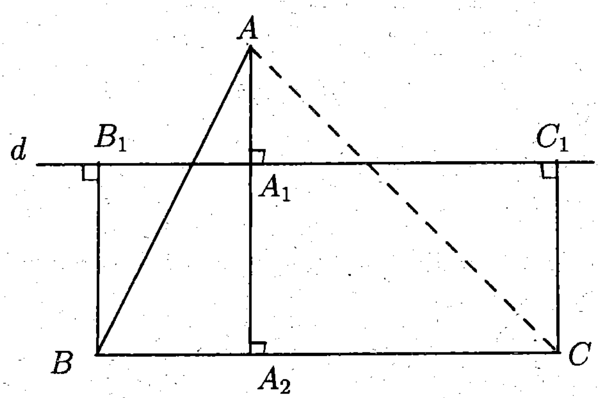
Từ $(*), (**) \Rightarrow (C_1A^2 - C_1B^2) = (C_2A^2 - C_2B^2) \Rightarrow C_1 \equiv C_2 \Rightarrow$ (đpcm).

□

Nhận xét: Các đường thẳng đang xét đồng quy tại M thường được gọi là các đường thẳng Các-nô. M được gọi là điểm Các-nô. Dễ thấy trong các trường hợp riêng, trực tâm H hoặc tâm đường tròn ngoại tiếp O của ΔABC là các điểm Các-nô. Điểm Các-nô có thể là điểm nằm trong, trên hoặc ngoài ΔABC.

2, Ví dụ minh họa

Ví dụ 2.44. Cho ΔABC và đường thẳng (d) tuỳ ý. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C lên (d). Chứng minh rằng các đường thẳng qua A_1, vuông góc với với BC; qua B_1, vuông góc với CA; qua C_1, vuông góc với AB đồng quy.



Hình 2.50.

Giải

Gọi A_2, B_2, C_2 tương ứng là giao của 3 đường thẳng trên với các cạnh BC, CA, AB. Áp dụng định lý Pitago ta có

$$A_2B^2 - A_2C^2 = A_1B^2 - A_1C^2 = (A_1B_1{}^2 + BB_1{}^2) - (A_1C_1{}^2 + CC_1{}^2). \quad (1)$$

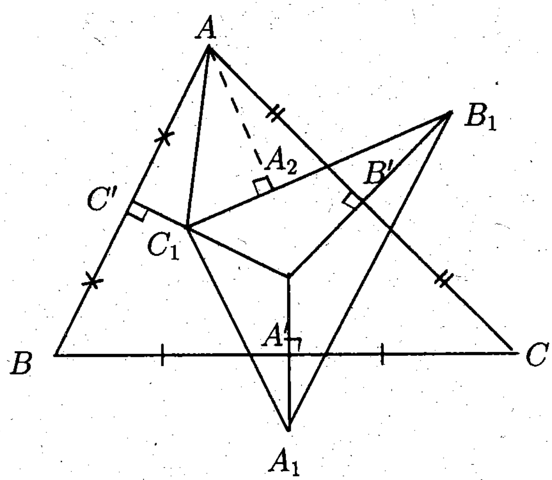
Tương tự, ta có:

$$B_2C^2 - B_2A^2 = (B_1C_1{}^2 + CC_1{}^2) - (A_1B_1{}^2 + AA_2{}^2), \quad (2)$$
$$C_2A^2 - C_2B^2 = (AA_1{}^2 + A_1C_1{}^2) - (BB_1{}^2 + B_1C_1{}^2). \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow (A_2B^2 - A_2C^2) + (B_2C^2 - B_2A^2) + (C_2A^2 - C_2B^2) = 0$.
Áp dụng định lý Các-nô ta có đpcm. □

Ví dụ 2.45. Cho ΔABC. Lấy A_1, B_1, C_1 tương ứng thuộc các đường trung trực của các cạnh BC, CA, AB. Kẻ $AA_2 \perp B_1C_1, BB_2 \perp C_1A_1, CC_2 \perp A_1B_1$. Chứng minh rằng AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy.

Giải



Hình 2.51.

Áp dụng định lý Các-nô với $\Delta A_1B_1C_1$, để chứng minh AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy, ta chứng minh $(A_2B_1{}^2 - A_2C_1{}^2) + (B_2C_1{}^2 - B_2A_1{}^2) + (C_2A_1{}^2 -$

$C_2B_1{}^2) = 0$. Thật vậy, gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA, áp dụng định lý Pitago ta có

$$\begin{aligned} A_2B_1{}^2 - A_2C_1{}^2 = AB_1{}^2 - AC_1{}^2 &= (B'A^2 + B'B_1{}^2) - (C'A^2 + C'C_1{}^2 \\ &= (B'A^2 - C'A^2) + (B'B_1{}^2 - C'C_1{}^2). \quad (1) \end{aligned}$$

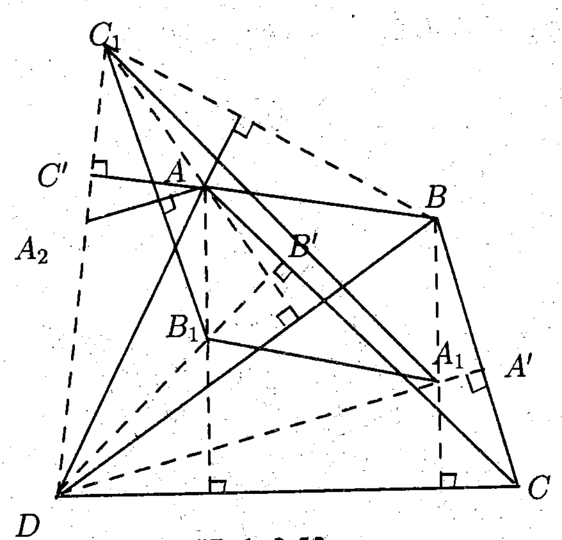
Tương tự, ta có:

$$B_2C_1{}^2 - B_2A_1{}^2 = (C'B^2 - A'B^2) + (C'C_1{}^2 - A'A_1{}^2), \quad (2)$$

$$C_2A_1{}^2 - C_2B_1{}^2 = (A'C^2 - B'C^2) + (A'A_1{}^2 - A'B_1{}^2). \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta có đpcm. □

Ví dụ 2.46. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trực tâm của các tam giác BCD, CDA, DAB. Kẻ $AA_2 \perp B_1C_1, BB_2 \perp C_1A_1, CC_2 \perp A_1B_1$. Chứng minh rằng ba đường thẳng AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy.



Hình 2.52.

Giải

Từ cách vẽ các trực tâm A_1, B_1, C_1, dễ thấy $DA_1 \perp BC$ tại A', $DC_1 \perp BA$ tại C' và $DB_1 \perp AC$ tại B'. Từ đó, áp dụng định lý Các-nô với $\Delta A'B'C'$, ta có

$$A'B^2 - A'C^2 + B'C^2 - B'A^2 + C'A^2 - C'B^2 = 0. \quad (1)$$

Áp dụng định lý Pitago đối với tam giác vuông ΔAA_2B_1 và ΔAA_2C_1, ta có

$$\begin{aligned} A_2{B_1}^2 - A_2{C_1}^2 &= A{B_1}^2 - A{C_1}^2 \\ &= (B'A^2 + B'{B_1}^2) - (C'A^2 + C'{C_1}^2) \\ &= (B'A^2 - C'A^2) + (B'{B_1}^2 - C'{C_1}^2) \quad (2) \end{aligned}$$

Tương tự, ta có:

$$B_2{C_1}^2 - B_2{A_1}^2 = (C'B^2 - A'B^2) + (C'{C_1}^2 - A'{A_1}^2) \quad (3)$$
$$C_2{A_1}^2 - C_2{B_1}^2 = (A'C^2 - B'C^2) + (A'{A_1}^2 - B'{C_1}^2) \quad (4)$$

Từ $(1), (2), (3), (4)$ ta có đpcm. □

2.3 Bài tập và gợi ý lời giải

Bài tập 2.1. Cho đường tròn (O) đường kính AB. M tuỳ ý thuộc (O) sao cho $MA > MB$. Về phía nửa mặt phẳng không chứa M đối với bờ AB, dựng hình vuông $MACD$. MC cắt (O) tại E. BE cắt tiếp tuyến qua A đối với O tại F. Chứng minh F, C, D thẳng hàng.

Hướng dẫn

Chứng minh $\angle ACF = 90^o \Rightarrow \angle FCD = 180^o$. □

Bài tập 2.2. Cho hình thang $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) $(AD \| BC)$. Các tiếp tuyến của (O) tại B, D giao nhau tại K. Vẽ hình bình hành $BDKM$. Đường tròn ngoại tiếp ΔBKM cắt (O) tại N. Chứng minh D, M, N thẳng hàng.

Hướng dẫn

Chứng minh $\angle BNM = \angle BAD \Rightarrow \angle BND + \angle BNM = 180^o$. □

Bài tập 2.3. Cho đường tròn (O) đường kính AB. C là trung điểm cung $\overset{\frown}{AB}$. M chuyển động trong khoảng BC. (t) là tiếp tuyến của (O) tại B. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên AB và (t). CK cắt lại (O) tại N. Chứng minh A, M, N thẳng hàng và từ đó suy ra NH luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn

Chứng minh $\angle NMK + \angle AMH = 90^o \Rightarrow \angle AMN = 180^o$

Đường thẳng NH đi qua C' cố định, với C' là điểm xuyên tâm đối của C. □

Bài tập 2.4. Cho hình vuông $ABCD$. M là điểm tuỳ ý trên cạnh BC. Vẽ hình vuông $AMEN$ cùng chiều với hình vuông $ABCD$. Chứng minh C, D, N thẳng hàng.

Hướng dẫn

Chứng minh $\angle ADN = 90^o \Rightarrow \angle CDN = 180^o$. □

Bài tập 2.5. Cho hai đường tròn (O) và (O') giao nhau tại A, B. Hai điểm M, M' chuyển động tương ứng trên $(O), (O')$, cùng xuất phát từ A, theo cùng chiều kim đồng hồ và với cùng vận tốc góc (tức là $\angle MOA = \angle M'O'A$). Chứng minh M, B, M' thẳng hàng và từ đó suy ra đường trung trực của MM' luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn

Chứng minh $\angle MBA + \angle M'BA = 180^o$. Dựng đường kính BC và BC' của hai đường tròn, khi đó ta có điểm cố định là trung điểm của CC'. □

Bài tập 2.6. Cho ΔABC với $AB < AC$. Đường tròn nội tiếp ΔABC tiếp xúc với AB, BC tại D, E. M, N là trung điểm của AC, BC. MN cắt phân giác trong của góc $\angle BAC$ tại K. Chứng minh D, E, K thẳng hàng.

Hướng dẫn

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC. Chứng minh tứ giác $CIEK$ nội tiếp được và từ đó suy ra $\angle DEI + \angle CEK = 90^o \Rightarrow$ (đpcm). □

Bài tập 2.7. Cho hình thang $ABCD$ $(AB||CD)$ và hai đường chéo cắt nhau tại O sao cho ΔOBC đều. Gọi E, M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh CD, OA, OB và H là trực tâm ΔEMN. Chứng minh HO đi qua trung điểm cạnh BC.

Hướng dẫn

Chứng minh tứ giác $MNOH$ nội tiếp được. Từ đó suy ra OH là phân giác trong của góc $\angle BOC \Rightarrow$ (đpcm). □

Bài tập 2.8. Cho đường tròn (O, R) và dây cung $AB = R\sqrt{2}$. Điểm C chuyển động trên cung lớn $\overset{\frown}{AB}$. Gọi H là trực tâm ΔABC. Các đường thẳng AH, BH cắt lại đường tròn (O) tại M, N. Chứng minh M, O, N thẳng hàng.

Hướng dẫn

Chứng minh $\angle MBN = 90^o \Rightarrow MON$ là đường kính của $(O) \Rightarrow$ (đpcm). □

Bài tập 2.9. Cho tam giác đều ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Vẽ đường tròn (O') tuỳ ý qua hai điểm O, B cắt lại BC, AO lần lượt tại M, N và cắt cung $\overset{\frown}{AB}$ ở P. Chứng minh C, N, P thẳng hàng.

Hướng dẫn

Giả sử CP cắt AO ở N' và chứng minh $N' \equiv N \Rightarrow$ (đpcm). □

Bài tập 2.10. Cho ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Kẻ $AH \perp BC$. Gọi M, N là hình chiếu vuông góc của H trên AB, AC và K là hình chiếu vuông góc của A trên MN. Chứng minh O, A, K thẳng hàng.

Hướng dẫn

Chứng minh $\angle KAB = \angle OAB = 90^o - \angle ACB \Rightarrow$ (đpcm). □

Bài tập 2.11. Cho hai đường tròn (O) và (O') ngoài nhau có AA' là tiếp tuyến chung ngoài; BB', CC' là hai tiếp tuyến chung trong $(A, B, C \in (O); A', B', C' \in (O'))$. BB' cắt AA' ở M. H là hình chiếu vuông góc của M trên OO'. Chứng minh H, A', C' thẳng hàng.

Hướng dẫn

Chứng minh $\angle O'HC' = \angle O'HA'$ và A', C' nằm cùng phía đối với bờ $HO' \Rightarrow$ (đpcm). □

Bài tập 2.12. Cho ΔABC nhọn đối với H là trực tâm. Gọi M, N là hình chiếu vuông góc của H trên phân giác trong, ngoài của góc $\angle BAC$. Chứng minh rằng MN đi qua trung điểm của BC.

Hướng dẫn

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC, E là trung điểm cạnh BC. Chứng minh MN và AE cùng song song với $AO \Rightarrow$ (đpcm). □

Bài tập 2.13. Cho ΔABC ngoại tiếp đường tròn (I). (I) tiếp xúc với BC tại D. Gọi E là trung điểm của AD. Chứng minh EI đi qua trung điểm của BC.

Hướng dẫn

Gọi M là trung điểm của BC và F là tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp góc $\angle A$ với BC. Chứng minh $EI||AF, MI||AF \Rightarrow$ (đpcm). □

Bài tập 2.14. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Điểm C tuỳ ý thuộc (O) $(C \neq A, B)$. Phân giác trong góc $\angle ACB$ cắt lại (O) tại M. Gọi H, K là hình chiếu vuông góc của M trên CA, CB. Chứng minh rằng H, O, K thẳng hàng.

Hướng dẫn

H, O, K thuộc đường thẳng Xim-xơn. □

Bài tập 2.15. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp được. Gọi H, K là hình chiếu vuông góc của B trên AC, CD. M, N là trung điểm của AD, HK. Chứng minh rằng $\angle MNB = 90^o$.

Hướng dẫn

Kẻ $BL \perp AD$. Chứng minh H, K, L thuộc đường thẳng Xim-xơn của B đối với ΔACD. Chứng minh tứ giác $MNBL$ nội tiếp được $\Rightarrow$ (đpcm). □

Bài tập 2.16. Cho ΔABC với ba đường cao AA_1, BB_1, CC_1 và trực tâm H. Gọi D, E là hình chiếu vuông góc của B_1 trên BC, CC_1. Chứng minh đường thẳng DE qua trung điểm B_1C_1.

Hướng dẫn

Sử dụng đường thẳng Xim-xơn của B_1 đối với ΔBCC_1. □

Bài tập 2.17. Cho ΔABC có AA_1, BB_1 là các phân giác trong và CC_1 là phân giác ngoài. Chứng minh A_1, B_1, C_1 thẳng hàng.

Hướng dẫn

Áp dụng định lý Mênêlauýt (bài toán 2). □

Bài tập 2.18. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I) với các tiếp điểm A_1, B_1, C_1, D_1 thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA. Giả sử A_1D_1 cắt B_1C_1 ở M. Chứng minh rằng M, B, D thẳng hàng.

Hướng dẫn

Áp dụng định lý Mênêlauýt với ΔABD và ΔCBD, chứng minh giao điểm của BD với A_1D_1 và B_1C_1 trùng nhau. □

Bài tập 2.19. Cho hình bình hành $ABCD$. Lấy các điểm E, F, M, N lần lượt nằm trên AB, CD, BC, AD sao cho $EF \perp BC$, $MN \perp AB$. Các đường thẳng EF, MN cắt nhau tại I; BN, DE cắt nhau tại J. Chứng minh C, I, J thẳng hàng.

Hướng dẫn

Áp dụng định lý Mênêlauýt đối với ΔBMN và ba điểm I, J, C ở vị trí "hai trong, một ngoài". □

Bài tập 2.20. Cho ba đường tròn $(O_1), (O_2), (O_3)$ sao cho (O_1) và (O_2) có tiếp tuyến chung ngoài cắt nhau tại A; (O_2) và (O_3) có tiếp tuyến chung ngoài cắt nhau tại B; (O_3) và (O_1) có tiếp tuyến chung ngoài cắt nhau tại C. Chứng minh A, B, C thẳng hàng.

Hướng dẫn

Áp dụng định lý Mênêlauýt với $\Delta O_1O_2O_3$. □

Bài tập 2.21. Cho hai đường tròn (O_1, R_1) và (O_2, R_2) tiếp xúc ngoài tại $A (R_1 > R_2)$. Đường nối tâm O_1O_2 cắt (O_1) tại B, cắt (O_2) tại C. Gọi O là trung điểm của O_1O_2. Vẽ cát tuyến ODE vuông góc với BC. DC, EC cắt (O_2) ở M, N. Chứng minh BC, DN, EM đồng quy.

Hướng dẫn

Chứng minh BC, DN, EM là ba đường cao của ΔCOE. □

Bài tập 2.22. Cho ΔABC với ba đường cao AA_1, BB_1, CC_1. Đường tròn ngoại tiếp $\Delta A_1B_1C_1$ cắt lại BC, CA, AB lần lượt tại A_2, B_2, C_2. Chứng minh đường thẳng qua A_2, vuông góc với BC; đường thẳng qua B_2, vuông góc với CA và đường thẳng qua C_2, vuông góc với AB đồng quy.

Hướng dẫn

Chứng minh ba đường thẳng đó là ba đường trung trực của ΔABC. □

Bài tập 2.23. Cho đường tròn (O) và điểm M nằm ngoài (O). Từ M kẻ hai cát tuyến tuỳ ý MAB và MCD đối xứng qua MO (với A nằm trong MB và C nằm trong MD). Chứng minh MO, AD, BC đồng quy.

Hướng dẫn

AD, BC cùng đi qua một điểm trên MO. □

Bài tập 2.24. Cho đường tròn (O) và dây cung BC không phải là đường kính. Tiếp tuyến của (O) tại hai điểm B, C giao nhau tại A. M là điểm tuỳ ý thuộc cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$. Tiếp tuyến qua M cắt AB, AC ở D, E. OD, OE cắt BC ở I, K. Chứng minh MO, DK, EI đồng quy.

Hướng dẫn

Chứng minh MO, DK, EI là ba đường cao của ΔODE □

Bài tập 2.25. Cho hai hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$ tuỳ ý nhưng cùng chiều. Chứng minh BB', CC', DD' đồng quy.

Hướng dẫn

Dùng phép quay tâm A, góc quay 90^o và kết hợp với tứ giác nội tiếp. □

Bài tập 2.26. Cho ΔABC, đường tròn nội tiếp tam giác tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại A_1, B_1, C_1. Chứng minh AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy.

Hướng dẫn

Áp dụng định lý Xê-va. □

Bài tập 2.27. Cho ΔABC nhọn có trực tâm H và tâm đường tròn ngoại tiếp O. Kéo dài AH, BH, CH cắt (O) tại A_1, B_1, C_1. OA_1 cắt BC tại A_2, OB_1 cắt CA tại B_2, OC_1 cắt AB tại C_2. Chứng minh AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy.

Hướng dẫn

Áp dụng định lý Xê-va. □

Bài tập 2.28. Cho ΔABC và M là điểm tuỳ ý nằm trong tam giác.AM, BM, CM tương ứng cắt Bc, CA, AB tại A_1, B_1, C_1 sao cho B_1C_1 không song song với BC. A_1C_1 cắt BB_1 ở D, A_1B_1 cắt CC_1 ở E. Chứng minh BC, B_1C_1, DE đồng quy.

Hướng dẫn

Áp dụng đồng thời định lý Mênêlauýt và định lý Xê-va. □

Bài tập 2.29. Cho ΔABC. Các đường tròn bàng tiếp tương ứng với các đỉnh A, B, C tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng đường thẳng qua A_1, B_1, C_1 tương ứng vuông góc với BC, CA, AB đồng quy.

Hướng dẫn

Áp dụng điều kiện đủ của định lý Các-nô đối với ΔABC và điều kiện cần đối với $\Delta A'B'C'$, ở đó A', B', C' là tâm các đường tròn bàng tiếp. □

Bài tập 2.30. Cho ΔABC đều và M là một điểm tuỳ ý. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác MBC, MCA và MAB. Chứng minh rằng các đường vuông góc hạ từ A, B, C tương ứng lên B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 đồng quy..

Hướng dẫn

Áp dụng định lý Các-nô kết hợp với các tính chất của đường tròn nội tiếp. □

Chương 3

Diện tích

3.1 Diện tích tam giác

Trong mục này, chúng ta sẽ tổng kết các công thức tính diện tích của một tam giác. Ngoài các công thức quen thuộc, bạn đọc được làm quen thêm một số công thức mới, dùng để giải nhiều dạng bài toán hơn. Đối với những công thức này, chúng tôi sẽ chứng minh chi tiết.

3.1.1 Các công thức tính diện tích tam giác

Cho tam giác ABC. Trong chương này, chúng ta sử dụng các ký hiệu quen thuộc:

a, b, c : độ dài các cạnh BC, CA, AB

h_a, h_b, h_c : độ dài các đường cao tương ứng với các đỉnh A, B, C

p : nửa chu vi của ΔABC

R, r : bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của ΔABC

r_a, r_b, r_c : bán kính đường tròn bàng tiếp tương ứng với các đỉnh A, B, C.

Khi đó, diện tích tam giác ABC được tính theo các công thức sau:

1, $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$

2, $S = pr$

3, $S = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c$

4, $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (công thức Hê-rông)

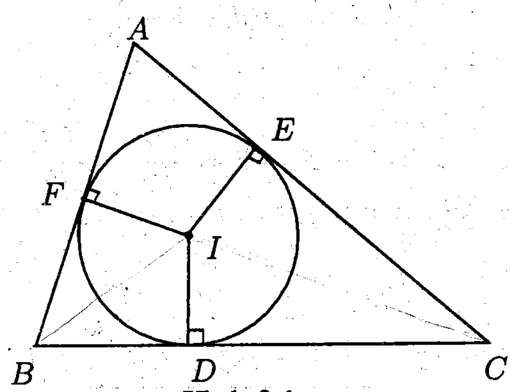
5, $S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B$

6, $S = \frac{abc}{4R}$

Chứng minh.

1, Công thức 1 là công thức cơ bản.

2, Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của I lên cạnh BC, CA, AB. Ta có $ID = IE = IF = r$.



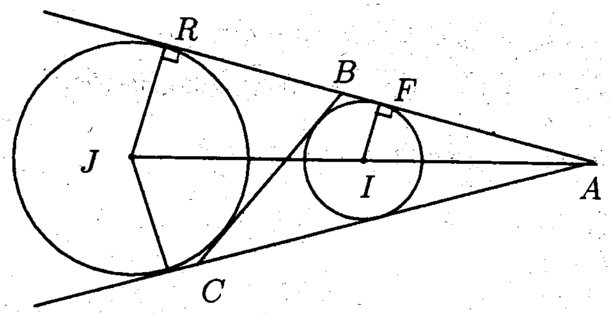
Hình 3.1.

Do I là điểm nằm trong ΔABC nên

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{IBC} + S_{ICA} + S_{IAB} \\ &= \frac{1}{2}BC \cdot ID + \frac{1}{2}CA \cdot IE + \frac{1}{2}AB \cdot IF \\ &= \frac{1}{2}(BC + CA + AB) \cdot r = pr \Rightarrow \text{ (đpcm).} \end{aligned}$$

3, Xem kết quả 5 (mục 1.3.2).

4, Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp và J là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của ΔABC. F, R lần lượt là hình chiếu vuông góc của I, J lên đường thẳng AB.



Hình 3.2.

Xét ΔFBI và ΔRJB ta có:

$$\angle IFB = \angle JRB = 90^o,$$
$$\angle IBF = \angle BJR = \frac{\angle ABC}{2}$$

Do đó

$$\Delta FBI \sim \Delta RJB \Rightarrow \frac{FB}{RJ} = \frac{FI}{RB}$$
$$\Rightarrow FB \cdot RB = FI \cdot RJ \Rightarrow (p-b)\cdot(p-c) = r \cdot r_a.$$

Ta lại có

$$S^2 = p(p-a)rr_a = p(p-a)(p-b)(p-c)$$
$$\Rightarrow S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ (đpcm).}$$

Chú ý: Công thức 4 được gọi là công thức Hê-rông. Công thức này được sử dụng nhiều để giải các bài toán về đẳng thức và bất đẳng thức hình học.Có nhiều bài tập thú vị được chúng tôi trình bày ở chương 4.

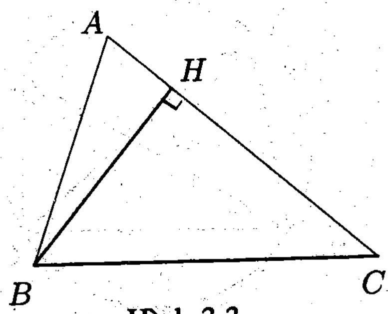
5, Giả thiết rằng ΔABC là tam giác nhọn.

Gọi BH là đường cao của ΔABC. Ta có $BH = BC \sin BCA$

Vậy $S = \frac{1}{2}AC \cdot BH = \frac{1}{2}AC \cdot BC \sin BCA = \frac{1}{2}ab \sin C.$

Tương tự, $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B.$

Nhận xét:



Hình 3.3.

- Trong công thức 5, chúng ta phải giả thiết ΔABC nhọn vì trong chương trình hình học cấp trung học cơ sở chỉ xây dựng các tỉ số lượng giác của góc α với α nhọn. Thực ra, công thức trên vẫn đúng với tam giác vuông hoặc tù. Khi đó chúng ta phải sử dụng định nghĩa các tỉ số lượng giác tổng quát hơn với góc α từ 0^o đến 180^o ở phần hình học lớp 10. Để có công thức trên, chúng ta phải sử dụng đến hai kết quả cơ bản sau:

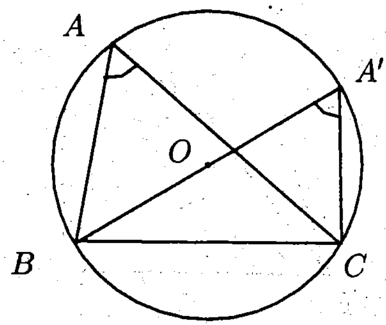
$$\sin 90^o = 1,$$

$$\sin(180^o - \alpha) = \sin\alpha.$$

- Từ công thức 5 ta có thể suy ra *định lý hàm số sin* trong tam giác: Tam giác ABC có bán kính ngoại tiếp đường tròn bằng R, khi đó $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R.$
Thật vậy, từ công thức 5, ta có

$$ab\sin C = bc\sin A = ca\sin B$$
$$\Rightarrow \frac{abc}{ab\sin C} = \frac{abc}{bc\sin A} = \frac{abc}{ca\sin B}$$
$$\Rightarrow \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

Không mất tổng quát, giả sử góc $\angle BAC$ nhọn (nếu $\angle BAC$ tù ta có $\angle ABC$ nhọn, khi đó ta áp dụng chứng minh với góc $\angle ABC$). Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Vẽ đường kính BA', ta



Hình 3.4.

có:

$$\angle BAC = \angle BA'C, \angle BCA' = 90^o \text{ (góc nội tiếp)}$$
$$\Rightarrow \sin BAC = \sin BA'C = \frac{BC}{BA'}$$
$$\Rightarrow \sin A = \frac{a}{2R} \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = 2R$$

Vậy $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$ (đpcm).

6, Từ định lý hàm số sin ta có

$$\sin A = \frac{a}{2R} \Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot \frac{abc}{2R} = \frac{abc}{4R}.$$

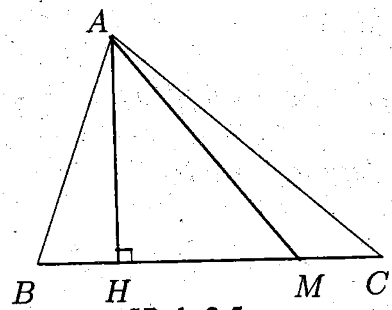
□

3.1.2 Một số kết quả cơ bản

Các kết quả dưới đây được sử dụng rất nhiều trong các bài toán diện tích. Khi sử dụng các kết quả này, ta phải trình bày lại cách chứng minh.

1, Cho ΔABC. Trên đường thẳng BC lấy điểm M tùy ý. Khi đó

$$\frac{S_{ABM}}{S_{ACM}} = \frac{BM}{CM}.$$



Hình 3.5.

Chứng minh. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC. Theo công thức 1 ta có

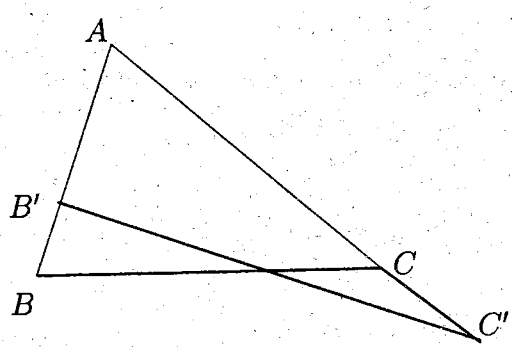
$$\frac{S_{ABM}}{S_{ACM}} = \frac{\frac{1}{2}BM \cdot AH}{\frac{1}{2}CM \cdot AH} = \frac{BM}{CM} \quad \text{(đpcm).}$$

□

2, Cho ΔABC và các điểm tuỳ ý B', C' tương ứng thuộc các đường thẳng AB, AC. Khi đó

$$\frac{S_{AB'C'}}{S_{ABC}} = \frac{AB'}{AB} \cdot \frac{AC'}{AC}.$$

Chứng minh.



Hình 3.6.

Áp dụng công thức 5 ta có

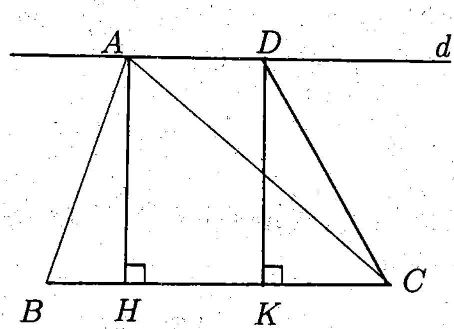
$$\frac{S_{AB'C'}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}AB' \cdot AC' \cdot \sin B'AC'}{\frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin BAC} = \frac{AB'}{AB} \cdot \frac{AC'}{AC} \text{ (đpcm).}$$

□

3, Cho ΔABC và đường thẳng d đi qua A, song song với BC. Lấy điểm D tùy ý trên đường thẳng d. Khi đó $S_{DBC} = S_{ABC}$.

Chứng minh.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, D trên đường thẳng BC.



Hình 3.7.

Do $AD \| BC$ nên $AH = DK$. Ta có

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AH \cdot BC = \frac{1}{2}DK \cdot BC = S_{DBC} \text{ (đpcm).}$$

□

4, Cho số thực k dương, tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$ đồng dạng theo tỉ số k. Khi đó $\dfrac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = k^2$.

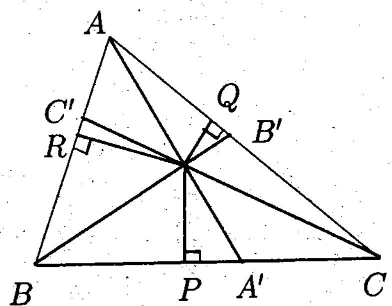
Chứng minh. Theo giả thiết $\Rightarrow \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = k$, $\angle BAC = \angle B'A'C$.

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin BAC}{\frac{1}{2}A'B' \cdot A'C' \sin B'A'C'} = \frac{AB}{A'B'} \cdot \frac{AC}{A'C'} = k^2 \Rightarrow \text{(đpcm).}$$

□

5, Lấy điểm M bất kì nằm trong ΔABC. Gọi khoảng cách từ M đến các cạnh BC, CA, AB lần lượt là x_a, x_b, x_c. Khi đó $\dfrac{x_a}{h_a} + \dfrac{x_b}{h_b} + \dfrac{x_c}{h_c} = 1$.

Chứng minh.



Hình 3.8.

Gọi P, Q, R tương ứng là hình chiếu vuông góc của M trên BC, CA, AB. Ta có:

$$S_{MBC} = \frac{1}{2}MP \cdot BC = \frac{1}{2}x_a \cdot a \Rightarrow \frac{S_{MBC}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}x_a \cdot a}{\frac{1}{2}h_a \cdot a} = \frac{x_a}{h_a}$$

Tương tự, $\dfrac{S_{MCA}}{S_{ABC}} = \dfrac{x_b}{h_b}$, $\dfrac{S_{MAB}}{S_{ABC}} = \dfrac{x_c}{h_c}$.

Vậy

$$\frac{x_a}{h_a} + \frac{x_b}{h_b} + \frac{x_c}{h_c} = \frac{S_{MBC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{MCA}}{S_{ABC}} + \frac{S_{MAB}}{S_{ABC}} = \frac{S_{MBC} + S_{MCA} + S_{MAB}}{S_{ABC}} = 1$$

$\Rightarrow$ (đpcm). □

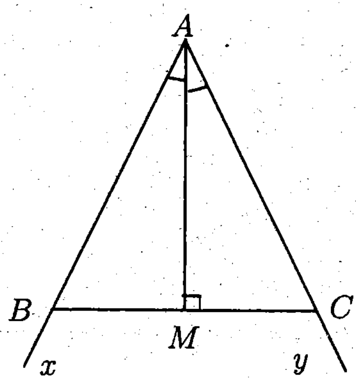
Chú ý: Gọi A', B', C' là giao điểm của AM, BM, CM với BC, CA, AB. Áp dụng định lý Talét ta có:

$$\frac{MA'}{AA'} = \frac{x_a}{h_a}, \frac{MB'}{BB'} = \frac{x_b}{h_b}, \frac{MC'}{CC'} = \frac{x_c}{h_c}$$

$$\Rightarrow \frac{MA'}{AA'} + \frac{MB'}{BB'} + \frac{MC'}{CC'} = 1 \quad (*)$$

Biểu thức (*) được sử dụng rất nhiều trong các bài toán diện tích, đẳng thức và bất đẳng thức hình học.

6, Cho góc α nhọn. Ta có $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$.



Hình 3.9.

Chứng minh. Xét góc $xAy = \alpha$. Trên tia Ax, Ay lần lượt lấy hai điểm B, C sao cho $AB = AC$. Ta có ΔABC cân tại A, có góc $\angle BAC = \alpha$.
Gọi M là trung điểm BC, khi đó $AM \perp BC$.
Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}AM \cdot BC = \frac{1}{4}AM \cdot BM$.
Xét ΔABM có:

$$\begin{cases} AM = AB \cdot \cos BAM = AB \cdot \cos\frac{A}{2} \\ BM = AB \cdot \sin BAM = AB \cdot \sin\frac{A}{2} \end{cases}$$

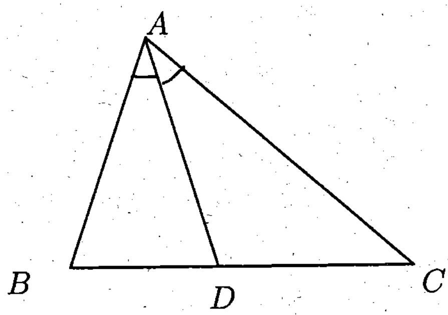
$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{4}AB^2 \cdot \sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = \frac{1}{4}AB \cdot AC \cdot \sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}.$$

Mặt khác, $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A \Rightarrow \sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$
$\Rightarrow$ (đpcm). □

Chú ý: Công thức trên vẫn đúng với α là góc vuông hoặc tù (xem sách "Hình học lớp 10").

7, Cho ΔABC. Dựng phân giác trong AD. Khi đó

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{2\cos\dfrac{A}{2}}{AD}.$$

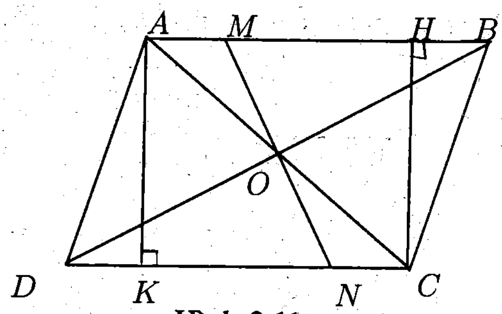


Hình 3.10.

Chứng minh. Ta có:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A,$$
$$S_{ABD} = \frac{1}{2}AB \cdot AD \sin\frac{A}{2},$$
$$S_{ACD} = \frac{1}{2}AC \cdot AD \sin\frac{A}{2}$$
$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD}$$
$$\Rightarrow AB \cdot AC \cdot \sin A = (AB \cdot AD + AC \cdot AD)\sin\frac{A}{2}$$
$$\Rightarrow 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = (AB + AC) \cdot AD \sin\frac{A}{2}$$
$$\Rightarrow 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos\frac{A}{2} = (AB + AC) \cdot AD$$
$$\Rightarrow \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{2\cos\dfrac{A}{2}}{AD} \text{ (đpcm).}$$ □

8, Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC, BD. Khi đó mọi đường thẳng đi qua O đều chia hình bình hành thành hai phần có diện tích bằng nhau.



Hình 3.11.

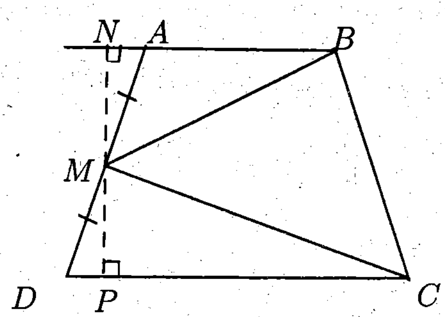
Chứng minh. Không mất tổng quát, giả sử d cắt cặp cạnh AB, CD lần lượt tại M, N. Do d đi qua tâm đối xứng của hình bình hành nên $AM = CN$, $BM = DN$.

Kẻ $AK \perp CD, CH \perp AB$. Ta có:

$$S_{AMND} = \frac{1}{2}(AM + DN) \cdot AK,$$
$$S_{CNMB} = \frac{1}{2}(CN + BM) \cdot CH,$$
$$AK = CH,$$
$$S_{ABCD} = S_{AMND} + S_{CNMB}$$
$$\Rightarrow S_{AMND} = S_{CNMB} = \frac{1}{2} S_{ABCD} \Rightarrow \text{(đpcm)}.$$

□

9, Cho hình thang $ABCD$ có đáy AB, CD. Gọi M là trung điểm cạnh bên AD. Khi đó $S_{ABCD} = 2S_{MBC}$.



Hình 3.12.

Chứng minh. Kẻ đường thẳng đi qua M, vuông góc với đáy, cắt AB, CD

lần lượt tại N, P. Ta có NP là đường cao của hình thang và $MN = MP = \frac{1}{2}PN$.

$$\begin{aligned} S_{MAB} + S_{MDC} &= \frac{1}{2}MN \cdot AB + \frac{1}{2}MP \cdot DC \\ &= \frac{1}{2}MN(AB + DC) \\ &= \frac{1}{4}NP(AB + DC) = \frac{1}{2}S_{ABCD} \\ \Rightarrow S_{MBC} &= S_{ABCD} - S_{MAB} - S_{MDC} \\ &= \frac{1}{2}S_{ABCD} \text{ (đpcm)}. \end{aligned}$$

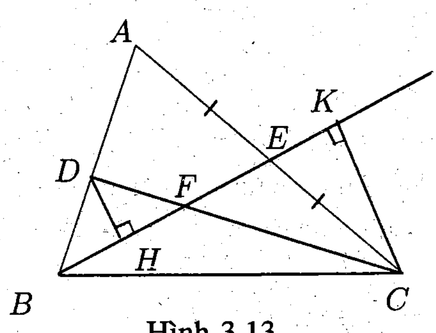
□

Hệ quả: Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên BC, ta có diện tích hình thang $ABCD$ bằng $S_{ABCD} = MH \cdot BC$.

3.1.3 Ví dụ áp dụng

Ví dụ 3.1. Cho tam giác ABC có diện tích S. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $AD = 2DB$. Gọi E là trung điểm AC và F là giao điểm của CD và BE. Tính tỉ số $\frac{CF}{CD}$, từ đó suy ra diện tích ΔFBC.

Giải



Hình 3.13.

Gọi K, H lần lượt là hình chiếu của C, D trên BE.

Dễ thấy:

$$S_{ABE} = S_{BCE} = \frac{1}{2}S_{ABC} \quad (1)$$

$$S_{CDB} = \frac{1}{3}S_{ABC} \quad (2)$$

$$S_{EDB} = \frac{1}{3}S_{AEB} \quad (3)$$

Từ (1) và (3) suy ra $S_{EDB} = \frac{1}{3}S_{CEB}$.

$$\frac{1}{3} = \frac{S_{EDB}}{S_{CEB}} = \frac{\frac{1}{2}EB \cdot DH}{\frac{1}{2}EB \cdot CK} = \frac{DH}{CK}$$

$$\Rightarrow \frac{FD}{FC} = \frac{DH}{CK} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{CF}{CD} = \frac{3}{4}.$$

Xét ΔFBC và ΔCDB có chung đường cao hạ từ B và đáy $CF = \frac{3}{4}CD$

$\Rightarrow S_{FBC} = \frac{3}{4}S_{CDB}$. (4)

Từ (2), (4) suy ra $S_{FBC} = \frac{1}{4}S_{ABC} = \frac{1}{4}S$. □

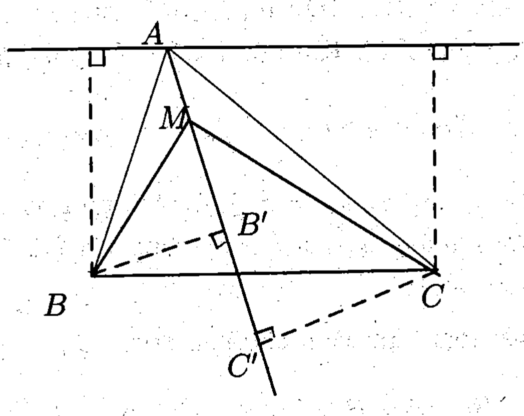
Ví dụ 3.2. Cho ΔABC, tìm tập hợp điểm M thoả mãn $S_{ABM} = S_{ACM}$.

Giải

Nếu $M \equiv A$, ta có $S_{ABM} = S_{ACM} = 0$.

Giả sử M là một điểm thoả mãn điều kiện $S_{ABM} = S_{ACM}$ và $M \not\equiv A$. Gọi B', C' lần lượt là hình chiếu của B, C trên AM. Ta có

$$S_{ABM} = S_{ACM} \Leftrightarrow \frac{1}{2}AM \cdot BB' = \frac{1}{2}AM \cdot CC' \Leftrightarrow BB' = CC'.$$



Hình 3.14.

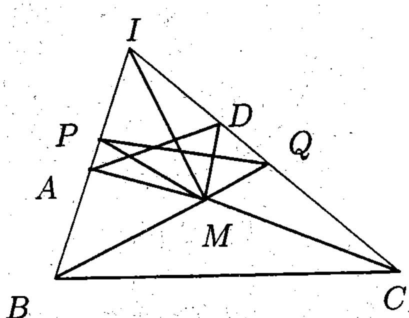
Xét đường thẳng AM ta có hai trường hợp:

i, $AM \| BC$. Áp dụng kết quả 3 ta có $BB' = CC'$ và $S_{ABM} = S_{ACM}$.

ii, AM giao với BC tại D. Khi đó, áp dụng định lý Talét ta có $\dfrac{BB'}{CC'} = \dfrac{BD}{CD} \Rightarrow D$ là trung điểm của BC.

Vậy M thoả mãn $S_{ABM} = S_{ACM}$ khi và chỉ khi M thuộc đường thẳng đi qua A, song song với BC hoặc M thuộc đường trung tuyến đi qua A của ΔABC. □

Ví dụ 3.3. Cho tứ giác $ABCD$ sao cho AB và CD không song song. Tìm quỹ tích điểm M sao cho $S_{ABM} = S_{CDM}$.



Hình 3.15.

Giải

Gọi I là giao của AB và CD. Trên tia IA, IC lần lượt lấy các điểm P, Q sao cho $IP = AB$, $IQ = DC$. Khi đó, ta có I, P, Q là ba điểm cố định và

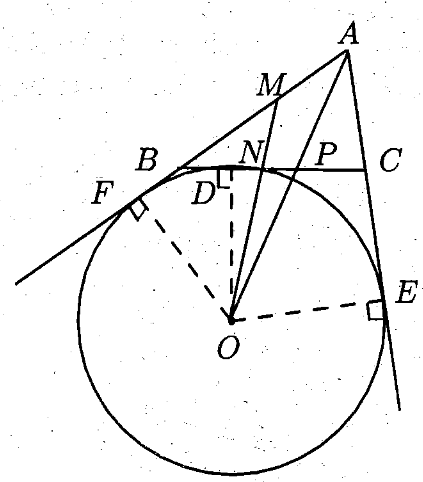
$$S_{IPM} = S_{ABM}, S_{IQM} = S_{CDM}.$$

Suy ra $S_{ABM} = S_{CDM} \Leftrightarrow S_{IPM} = S_{IQM}$. Áp dụng ví dụ 3.2, ta có quỹ tích điểm M là đường thẳng đi qua I song song với PQ hoặc đường thẳng IK (K là trung điểm PQ).

Phần đảo của bài toán xin dành cho bạn đọc. □

Ví dụ 3.4. Cho ΔABC có $\angle BAC = 2\angle ABC$ và (O) là đường tròn bàng tiếp góc A của ΔABC. Gọi M là trung điểm cạnh AB, N là giao của OM và BC. Chứng minh rằng AN là phân giác góc $\angle BAO$.

Giải



Hình 3.16.

Gọi P là giao của BC và AO, để chứng minh AN là phân giác góc $\angle BAO$ ta chứng minh $\dfrac{NP}{NB} = \dfrac{AP}{AB}$.

Vì $\angle ABC = \dfrac{1}{2}\angle BAP$ nên ΔPAB cân tại $P \Rightarrow AP = BP$.

Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của O trên BC, CA, AB. Vì (O) là đường tròn bàng tiếp góc A của ΔABC nên $OD = OE = OF$. Áp dụng kết quả 1 với ΔBOA ta có

$$\frac{OP}{OA} = \frac{S_{BOP}}{S_{BOA}} = \frac{\frac{1}{2}BP \cdot OD}{\frac{1}{2}AB \cdot OF} = \frac{BP}{AB} = \frac{AP}{AB} \quad (1)$$

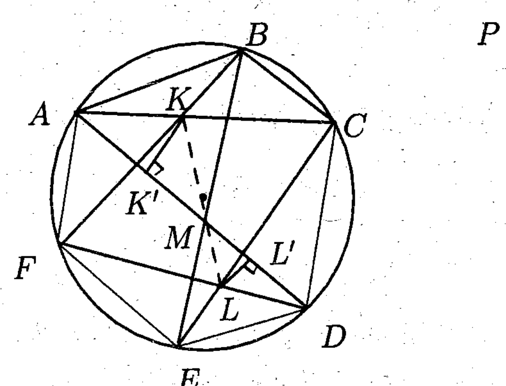
Vì M là trung điểm của AB nên $S_{NOA} = S_{NOB}$ (ví dụ 3.2). Ta có

$$\frac{OP}{OA} = \frac{S_{NOP}}{S_{NOA}} = \frac{S_{NOP}}{S_{NOB}} = \frac{NP}{NB} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{NP}{NB} = \frac{AP}{AB}$ (đpcm). □

Ví dụ 3.5. Cho lục giác $ABCDEF$ nội tiếp đường tròn. AC và BF giao nhau tại K, CE và FD giao nhau tại L, AD và BE giao nhau tại M. Chứng minh rằng 3 điểm K, M, L thẳng hàng (định lý Pascal).

Giải



Hình 3.17.

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp lục giác $ABCDEF$.
Đặt $M_1 = AD \cap KL$, $M_2 = BE \cap KL$. Do $ABCDEF$ lồi nên M_1, M_2

nằm trên đoạn KL. Gọi K', L' là hình chiếu vuông góc của K, L trên AD. Ta có:

$$\frac{M_1K}{M_1L} = \frac{S_{AM_1K}}{S_{AM_1L}} = \frac{\frac{1}{2}AM_1 \cdot KK'}{\frac{1}{2}AM_1 \cdot LL'} = \frac{KK'}{LL'}, \quad (1)$$

$$\frac{KK'}{LL'} = \frac{S_{KAD}}{S_{LAD}} = \frac{AD \cdot AK \cdot \sin DAC}{AD \cdot DL \cdot \sin ADF} = \frac{AK \cdot \sin DAC}{DL \cdot \sin ADF} \quad (2)$$

Áp dụng định lý hàm số sin với ΔDAC, ΔADF ta có:

$$\sin DAC = \frac{CD}{2R}, \sin ADF = \frac{AF}{2R}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin DAC}{\sin ADF} = \frac{CD}{AF} \quad (2)$$

Từ $(1), (2), (3)$ suy ra $\dfrac{M_1K}{M_1L} = \dfrac{AK \cdot CD}{DL \cdot AF}$.

Tương tự, $\dfrac{M_2K}{M_2L} = \dfrac{BK \cdot EF}{EL \cdot BC}$.

Mặt khác,

$$\Delta AKF \sim \Delta BKC \Rightarrow \frac{AK}{AF} = \frac{BK}{BC},$$

$$\Delta ELF \sim \Delta DLC \Rightarrow \frac{CD}{DL} = \frac{EF}{EL}.$$

Vậy $\dfrac{AK \cdot CD}{DL \cdot AF} = \dfrac{BK \cdot EF}{EL \cdot BC} \Rightarrow \dfrac{M_1K}{M_1L} = \dfrac{M_2K}{M_2L} \Rightarrow M_1 \equiv M_2 \equiv M \Rightarrow$ (đpcm). □

Ví dụ 3.6. Cho ΔABC có các đường cao h_a, h_b, h_c. Tính S_{ABC}.

Giải

Ta có

$$2S_{ABC} = a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c$$

$(a, b, c$ là các cạnh đáy tương ứng với $h_a, h_b, h_c)$

$$\Rightarrow \frac{a}{h_b} = \frac{b}{h_a} = \frac{c}{\frac{h_a h_b}{h_c}} \quad (1)$$

Đặt $a' = h_b, b' = h_a, c' = \dfrac{h_a h_b}{h_c}$.

Từ (1) suy ra a', b', c' là ba cạnh của một tam giác. Xét $\Delta A'B'C'$ có $B'C' = a', C'A' = b', A'B' = c'$. Khi đó, $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ theo tỉ số k với

$$k = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

Mặt khác, gọi h'_a là đường cao tương ứng với cạnh a' của $\Delta A'B'C'$, ta có:

$$k = \frac{h_a}{h'_a} = \frac{h_a}{\dfrac{2S_{A'B'C'}}{a'}} = \frac{h_a}{\dfrac{2S_{A'B'C'}}{h_b}} = \frac{h_a \cdot h_b}{2S_{A'B'C'}},$$

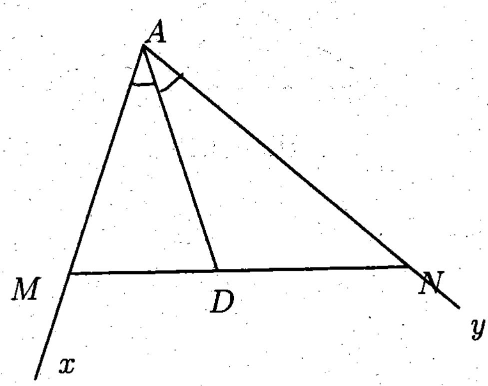
$$k^2 = \frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} \Rightarrow S_{ABC} = S_{A'B'C'} \cdot k^2 = \frac{{h_a}^2 {h_b}^2}{4S_{A'B'C'}}.$$

với $S_{A'B'C'} = \sqrt{p'(p'-a')(p'-b')(p'-c')}$, $p' = \dfrac{1}{2}(a'+b'+c')$.

□

Ví dụ 3.7. Cho góc xOy và số thực k dương. Trên tia Ox, Oy lần lượt lấy điểm M, N sao cho $\dfrac{1}{OM} + \dfrac{1}{ON} = k$. Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Giải



Hình 3.18.

Gọi OD là đường phân giác trong của góc xOy, $D \in MN$. Từ kết quả 7 ta có

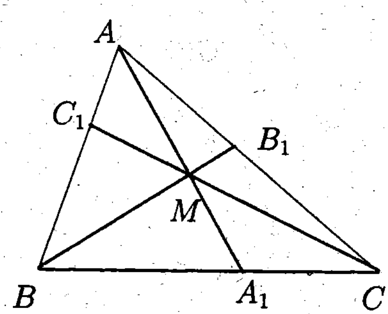
$$k = \frac{1}{OM} + \frac{1}{ON} = \frac{2 \cdot \cos \frac{\hat{O}}{2}}{OD}$$

$$\Rightarrow OD = \frac{2 \cdot \cos \frac{\hat{O}}{2}}{k} = const$$

$\Rightarrow D$ cố định $\Rightarrow$ (đpcm). □

Ví dụ 3.8. Cho ΔABC và điểm M tùy ý nằm trong tam giác. Gọi A_1 là giao của AM và BC, B_1 là giao của BM và AC, C_1 là giao của CM và AB. Chứng minh rằng $\frac{AA_1}{MA_1} + \frac{BB_1}{MB_1} + \frac{CC_1}{MC_1} \geq 9$.

Giải



Hình 3.19.

Đặt $S = S_{ABC}, S_a = S_{MBC}, S_b = S_{MAC}, S_c = S_{MAB}$. Ta có $S_a + S_b + S_c = S$.

Áp dụng kết quả 1 ta có

$$\frac{AA_1}{MA_1} = \frac{S_{ABA_1}}{S_{MBA_1}} = \frac{S_{ACA_1}}{S_{MCA_1}} = \frac{S_{ABA_1} + S_{ACA_1}}{S_{MBA_1} + S_{MCA_1}} = \frac{S}{S_a}.$$

Tương tự, $\dfrac{BB_1}{MB_1} = \dfrac{S}{S_b}, \dfrac{CC_1}{MC_1} = \dfrac{S}{S_c}$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki ta có

$$\begin{aligned}\frac{AA_1}{MA_1} + \frac{BB_1}{MB_1} + \frac{CC_1}{MC_1} &= \frac{S}{S_a} + \frac{S}{S_b} + \frac{S}{S_c} = S(\frac{1}{S_a} + \frac{1}{S_b} + \frac{1}{S_c}) \\ &= (S_a + S_b + S_c)(\frac{1}{S_a} + \frac{1}{S_b} + \frac{1}{S_c}) \geq 9\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ (đpcm).

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{aligned}\frac{S}{S_a} = \frac{S}{S_b} = \frac{S}{S_c} &\Leftrightarrow \frac{AA_1}{MA_1} = \frac{BB_1}{MB_1} = \frac{CC_1}{MC_1} = 3 \\ &\Leftrightarrow M \text{ là trọng tâm } \Delta ABC.\end{aligned}$$

□

Ví dụ 3.9. Cho ΔABC, các đường cao là h_a, h_b, h_c và bán kính đường tròn nội tiếp bằng r. Chứng minh rằng $h_a + h_b + h_c \geq 9r$.

Giải

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC, khoảng cách từ I đến các cạnh của ΔABC bằng r. Từ kết quả 5 ta có:

$$\frac{r}{h_a} + \frac{r}{h_b} + \frac{r}{h_b} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_b} = \frac{1}{r}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki ta có:

$$\begin{aligned}(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_b})(h_a + h_b + h_c) &\geq (\sqrt{\frac{h_a}{h_a}} + \sqrt{\frac{h_b}{h_b}} + \sqrt{\frac{h_c}{h_c}})^2 \\ \Leftrightarrow \quad \frac{1}{r}(h_a + h_b + h_c) &\geq 9 \\ \Leftrightarrow \quad h_a + h_b + h_c &\geq 9r \text{ (đpcm).}\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $h_a = h_b = h_c \Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều. □

Ví dụ 3.10. Tam giác ABC có bán kính đường tròn nội tiếp và bán kính đường tròn bàng tiếp lần lượt là r, r_a, r_b, r_c. Chứng minh rằng $S = \sqrt{rr_ar_br_c}$.

Giải

Đặt $BC = a, CA = b, AB = c, p = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Không mất tổng quát, giả sử r_a, r_b, r_c lần lượt là bán kính đường tròn bàng tiếp góc A, B, C. Ta có

$$\begin{aligned} S &= (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c \quad \text{(công thức (3))} \\ &= pr \\ \Rightarrow S^4 &= p(p-a)(p-b)(p-c)rr_ar_br_c. \end{aligned}$$

Ta lại có $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$ (công thức Hêrông) $\Rightarrow S^2 = rr_ar_br_c$.
Từ đó ta có đpcm. □

3.2 Diện tích đa giác

3.2.1 Diện tích các tứ giác đặc biệt.

1, Công thức.

i, Hình vuông.

$$S = a^2$$

a – cạnh hình vuông.

ii, Hình chữ nhật.

$$S = a \cdot b$$

a, b – cạnh hình chữ nhật.

iii, Hình thang.

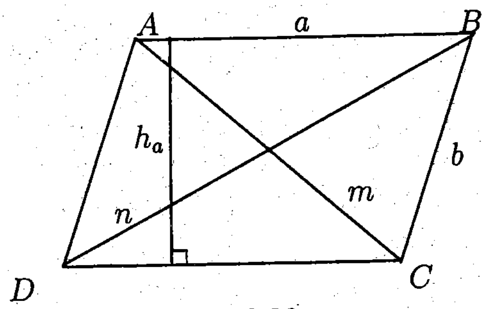
$$S = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h = m \cdot h$$

a, b – độ dài cạnh đáy; h – đường cao; m – độ dài đường trung bình.

iv, Diện tích hình bình hành.

$$S = a \cdot h_a = a \cdot b \cdot \sin A$$

a, b – độ dài cạnh ; h_a – đường cao tương ứng với cạnh a.



Hình 3.20.

v, Diện tích hình thoi.

$$S = a \cdot h_a = a^2 \cdot \sin A$$

a – độ dài cạnh của hình thoi; h – đường cao.

2, Ví dụ minh họa

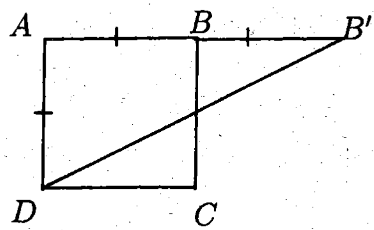
Ví dụ 3.11. Hãy dựng một hình vuông có diện tích bằng 5 lần diện tích của hình vuông $ABCD$ cho trước.

Giải

Gọi độ dài cạnh của hình vuông cần dựng là a thì diện tích của nó là

$$S = a^2 = 5S_{ABCD} \Rightarrow a^2 = 5AB^2 \Rightarrow a = AB\sqrt{5}$$

Vậy để dựng được hình vuông đó, ta cần dựng một đoạn thẳng có độ dài bằng $AB\sqrt{5}$ và chọn đoạn thẳng đó làm cạnh của hình vuông cần dựng.



Hình 3.21.

Lấy B' trên tia AB sao cho $AB' = 2AB$. Theo định lý Pytago ta có

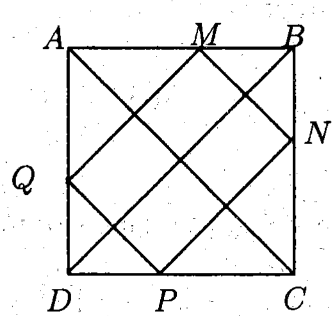
$$DB'^2 = AB'^2 + AD^2 = 4AB^2 + AB^2 = 5AB^2 \Rightarrow DB' = AB\sqrt{5}.$$

Dựng hình vuông $A'B'DC'$ có một cạnh là DB' (bài toán dựng hình cơ bản) ta có $S_{A'B'DC'} = 5S_{ABCD}$. □

Nhận xét: Bài toán trên có nhiều cách dựng, và nhiều nghiệm hình. Ở đây ta chỉ đưa ra một cách dựng hình vuông thỏa mãn đề bài.

Ví dụ 3.12. Cho hình vuông $ABCD$ có diện tích S và số thực k ($k > 0$). Vẽ hình chữ nhật $MNPQ$ sao cho M, N, P, Q lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA, $MN \| AC$ và $MN = kNP$. Tính diện tích hình chữ nhật.

Giải



Hình 3.22.

Vì $MN \| AC$, $MN \perp NP$ và $AC \perp BD$ nên $NP \| BD$. Theo định lý Ta-lét ta có:

$$MN = \frac{AC \cdot BN}{BC}, NP = \frac{BD \cdot CN}{BC}$$
$$\Rightarrow \frac{AC \cdot BN}{BC} = k\frac{BD \cdot CN}{BC}$$
$$\Rightarrow BN = kCN \Rightarrow \frac{BN}{NC} = k \Rightarrow \frac{BN}{BC} = \frac{k}{k+1}.$$

Từ đó ta có

$$MN = \frac{AC \cdot BN}{BC} = AC \cdot \frac{k}{k+1} = \sqrt{2}AB \cdot \frac{k}{k+1}$$
$$\Rightarrow NP = \sqrt{2}AB\frac{1}{k+1}.$$

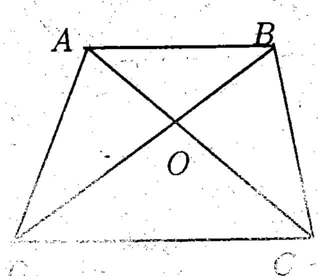
Gọi S' là diện tích hình chữ nhật $MNPQ$, ta có

$$S' = MN \cdot NP = \frac{2k}{(k+1)^2} \cdot AB^2 = \frac{2k}{(k+1)^2} \cdot S.$$

□

Ví dụ 3.13. Cho hình thang $ABCD$ $(AB \| CD)$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Tính diện tích hình thang biết diện tích tam giác OAB, OCD lần lượt là S_1, S_2.

Giải



Hình 3.23.

Vì $AB \| CD$ nên $\Delta OAB \sim \Delta OCD$. Ta có:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{S_{OCD}}{S_{OAB}} = \frac{OC^2}{OA^2} = \frac{OD^2}{OB^2} = \frac{CD^2}{AB^2} \quad (1) \text{ (theo kết quả 4)}$$

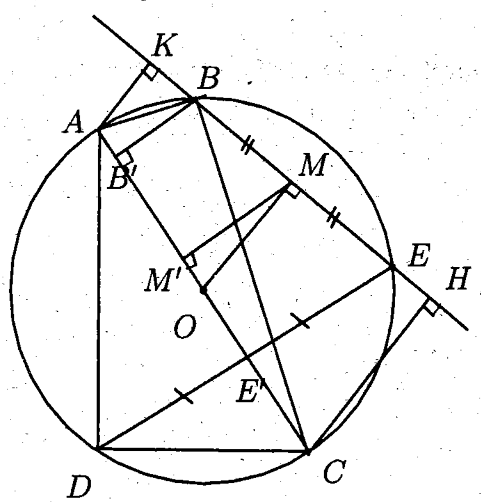
$$\frac{S_{OBC}}{S_{OAB}} = \frac{OC}{OA}, \frac{S_{OAD}}{S_{AOB}} = \frac{OD}{OB} \quad (2) \text{ (theo kết quả 1)}$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_{OAB} + S_{ODC} + S_{OAD} + S_{OBC} \\ &= S_1 + S_2 + \sqrt{\frac{S_2}{S_1}} \cdot S_1 + \sqrt{\frac{S_2}{S_1}} \cdot S_1 \\ &= S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 S_2} \\ &= (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 3.14. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O, đường kính AC. Gọi E là điểm đối xứng của D qua AC. Gọi K, H lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, C trên đường thẳng BE. Chứng minh rằng $S_{AKHC} = S_{ABCD}$.



Hình 3.24.

Giải

Gọi M là trung điểm $BE \Rightarrow OM \perp BE \Rightarrow OM \| AK \| CH$.

Mặt khác, O là trung điểm AC, suy ra OM là đường trung bình của hình thang $AKHC$ hay M là trung điểm của KH.

Gọi B', M', E' lần lượt là hình chiếu vuông góc của B, M, E trên AC. Theo công thức đường trung bình ta có

$$MM' = \frac{1}{2}(BB' + EE').$$

Áp dụng kết quả 9, ta có:

$$S_{AKHC} = 2S_{MAC} = AC \cdot MM' = \frac{1}{2}AC(BB' + EE'),$$

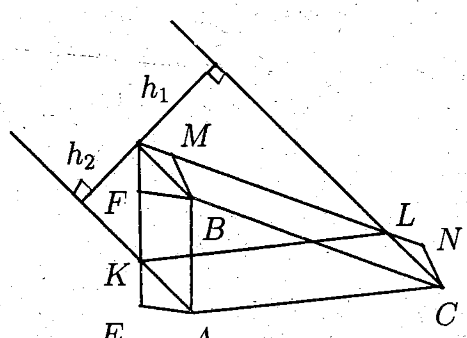
$$S_{ABCD} = S_{BAC} + S_{DAC} = S_{BAC} + S_{EAC} = \frac{1}{2}AC(BB' + EE')$$

$$\Rightarrow S_{AKHC} = S_{ABCD} \text{ (đpcm).}$$

□

Ví dụ 3.15. Trên cạnh AC của ΔABC, dựng hình bình hành $ACLK$ nằm về cùng một phía đối với đỉnh B. Trên 2 cạnh AB và BC dựng các hình bình hành $AEFB$ và $BMNC$ sao cho $K \in EF, L \in MN$. Chứng minh diện tích hình bình hành $ACLK$ bằng tổng diện tích hình bình hành $AEFB$ và $BMNC$.

Giải



Hình 3.25.

Gọi S là giao của EF và MN. Xét ΔSKL và ΔBAC, ta có:

$$KL = AC,\ \angle SKL = \angle BAC,\ \angle SLK = \angle BCA$$
$$\Rightarrow \Delta SKL = \Delta BAC \Rightarrow KS = BA, SL = BC$$
$$\Rightarrow SB \overset{\parallel}{=} KA \overset{\parallel}{=} LC.$$

Gọi h là khoảng cách giữa LC và KA, h_1, h_2 lần lượt là khoảng cách từ S đến LC, KA. Ta có

$$h_1 + h_2 = h.$$

Xét hình bình hành $AEFB$ và $AKSB$ có chung cạnh AB.Vì hai cạnh EF và KS cùng nằm trên một đường thẳng nên đường cao tương ứng với cạnh AB của hai hình bình hành này là bằng nhau. Từ đó ta có $S_{AEFB} = S_{AKSB}$

Tương tự, $S_{BMNC} = S_{BSLC}$.

Vậy

$$\begin{aligned} S_{AEFB} + S_{BMNC} &= S_{AKSB} + S_{BSLC} \\ &= h_1 \cdot AK + h_2 \cdot LC \\ &= (h_1 + h_2)AK \\ &= h \cdot AK = S_{AKLC}. \end{aligned}$$

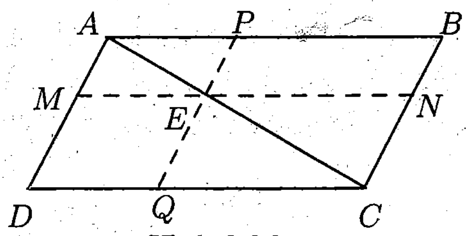
Từ đó ta có đpcm. □

Ví dụ 3.16. Cho hình bình hành $ABCD$ và điểm E bất kì nằm trong hình bình hành. Đường thẳng đi qua E song song với AB cắt AD và BC lần lượt tại M, N. Đường thẳng đi qua E song song với AD cắt AB, DC lần lượt tại P, Q. Chứng minh rằng $S_{BNEP} = S_{DMEQ}$ khi và chỉ khi E nằm trên đường chéo AC.

Giải

Cách 1.

Điều kiện cần. Cho $S_{BNEP} = S_{DMEQ}$, ta phải chứng minh E thuộc đường chéo AC.



Hình 3.26.

Ta có

$$S_{DMEQ} = S_{BPEN} \Rightarrow S_{APQD} = S_{AMNB}$$
$$\frac{S_{APQD}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{AMNB}}{S_{ADCB}}$$
$$\Rightarrow \frac{AM}{AD} = \frac{AP}{AB} = \frac{ME}{DC}$$

Mặt khác, $E = PQ \cap MN, ME \| DC$ nên theo định lý Talét ta có $E \in AC$.

Điều kiện đủ. Giả thiết E nằm trên đường chéo AC, ta chứng minh $S_{BNEP} = S_{DMEQ}$. Ta có:

$$\frac{S_{APQD}}{S_{ABCD}} = \frac{DQ}{DC} = \frac{AE}{AC}, \frac{S_{ABNM}}{S_{ABCD}} = \frac{BN}{BC} = \frac{AE}{AC}$$
$$\Rightarrow S_{APQD} = S_{ABNM}. \quad (1)$$

Ta lại có:

$$S_{APQD} = S_{DMEQ} + S_{APME}, S_{ABNM} = S_{BNEP} + S_{APME}. \quad (2)$$

Từ $(1), (2)$ ta có $S_{BNEP} = S_{DMEQ}$.

Cách 2. Ta có

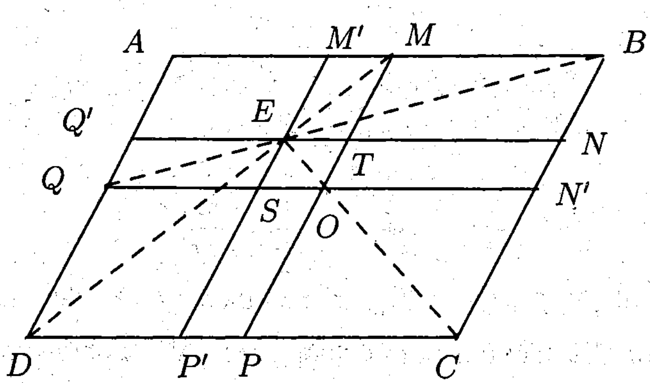
$$S_{BNEP} = S_{DMEQ}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}S_{BNEP} + \frac{1}{2}S_{APEM} = \frac{1}{2}S_{DMEQ} + \frac{1}{2}S_{APEM}$$
$$\Leftrightarrow S_{PEB} + S_{PEA} = S_{DEM} + S_{MEA} \Leftrightarrow S_{BAE} = S_{DAE}$$

Áp dụng ví dụ 3.2 cho tam giác ABD ta có $S_{DAE} = S_{BAE} \Leftrightarrow E$ nằm trên đường thẳng AC.

Từ đó ta có đpcm. □

Ví dụ 3.17. Trên cạnh AB, BC, CD, DA của hình bình hành $ABCD$ lần lượt lấy các điểm M, N, P, Q sao cho $MP \| AD, NQ \| AB$. Chứng minh các đường thẳng BQ, DM, CO đồng quy, với O là giao của MP và NQ.

Giải



Hình 3.27.

Gọi E là giao của DM và BQ. Qua E kẻ đường thẳng song song với AD cắt AB, CD lần lượt tại M', P'; kẻ đường thẳng song song với AB cắt BC, AD lần lượt tại N', Q'.

Đặt $S = P'M' \cap NQ, T = N'Q' \cap MP$.

Xét hình bình hành $AMPD$, ta có

$$E \in MD \Rightarrow S_{AM'EQ'} = S_{PP'ET} \quad (1)$$

Tương tự, xét hình bình hành $AQNB$, ta có $S_{AM'EQ'} = S_{NN'ES}$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $S_{NN'ES} = S_{PP'ET} \Rightarrow S_{NN'TO} = S_{PP'SO}$. Xét hình bình hành $CN'EP'$ có điểm O nằm ở trong hình bình hành thoả mãn $S_{NN'TO} = S_{PP'SO} \Rightarrow O \in CE$. Từ đó ta có đpcm. □

3.2.2 Các trường hợp khác

Trong trường hợp tứ giác $ABCD$ không phải là các tứ giác đặc biệt, tùy vào các giả thiết xác định tứ giác chúng ta có thể xây dựng các công thức thích hợp để tính diện tích của nó. Xét các trường hợp sau:

1, Tứ giác $ABCD$ là hình thoi giả.

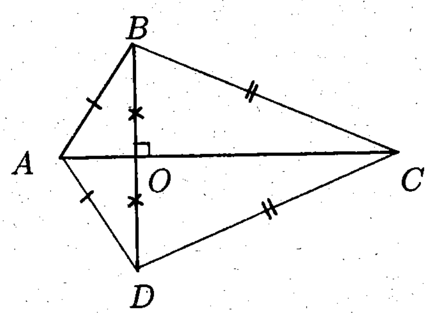
Định nghĩa: Tứ giác $ABCD$ được gọi là hình thoi giả nếu nó nhận một trong hai đường chéo làm trục đối xứng.

Giả sử tứ giác $ABCD$ nhận AC là trục đối xứng, khi đó diện tích hình thoi giả $ABCD$ được tính theo công thức

$$S = \frac{1}{2}AC \cdot BD = AB \cdot BC \cdot \sin B$$

Đặc biệt, nếu thêm điều kiện $ABCD$ nội tiếp được thì $\angle B = \angle D = 90^o$. Khi đó

$$S = AB \cdot BC$$



Hình 3.28.

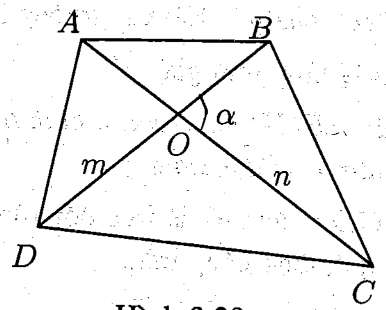
Chứng minh. Gọi giao điểm của hai đường chéo AC, BD là O. Khi đó

$$S_{ABCD} = 2S_{ABC} = 2 \cdot \frac{1}{2}AC \cdot BO = \frac{1}{2}AC \cdot BD$$
$$= 2 \cdot \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin B = AB \cdot BC \cdot \sin B.$$

□

2, Biết độ dài đường chéo $AC = m, BD = n$, góc giữa hai đường chéo AC, BD là α. Khi đó diện tích tứ giác được tính theo công thức

$$S = \frac{1}{2}m \cdot n \cdot \sin \alpha$$



Hình 3.29.

Chứng minh. Gọi O là giao hai đường chéo của tứ giác $ABCD$, ta có

$$\begin{aligned}
S_{ABCD} &= S_{ABO} + S_{BCO} + S_{CDO} + S_{DAO}\\
&= \frac{1}{2}(AO \cdot BO \sin AOB + BO \cdot CO \sin BOC +\\
&\qquad + CO \cdot DO \sin COD + DO \cdot AO \sin DOA)\\
&= \frac{1}{2}(AO \cdot BO + BO \cdot CO + CO \cdot DO + DO \cdot AO) \cdot \sin\alpha\\
&= \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin\alpha\\
&= \frac{1}{2} c_1 \cdot c_2 \sin\alpha.
\end{aligned}$$

Vậy ta có đpcm. □

Hệ quả. Tứ giác có hai đường chéo vuông góc thì diện tích bằng nửa tích hai đường chéo.

Chú ý: Đối với học sinh bậc Trung học cơ sở, khi sử dụng các công thức trên vẫn phải giả thiết góc $\angle B$ nhọn. Nhưng kết quả vẫn đúng với $\angle B$ vuông hoặc tù. Khi đó, chúng ta đã sử dụng định nghĩa các tỉ số lượng giác tổng quát hơn với góc từ 0^o đến 180^o.

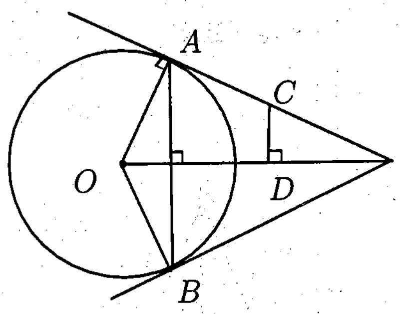
3, Nếu tứ giác $ABCD$ không thuộc hai trường hợp trên, để tính diện tích tứ giác ta phải áp dụng các phương pháp tính diện tích đa giác được trình bày ở phần sau.

Ví dụ 3.18. Cho đường tròn tâm O và điểm M tuỳ ý nằm ngoài đường tròn. Từ M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB tiếp xúc với (O) tại A, B. Gọi C là trung điểm của AM và D là hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng OM.

a. Chứng minh D là điểm nằm ngoài (O).

b. Đặt $d = OM$, R là bán kính đường tròn (O). Tính S_{MAOB} theo d và R.

Giải



Hình 3.30.

a. Ta có $OA = OB, MA = MB$ nên tứ giác $MAOB$ là hình thoi giả nhận OM làm trục đối xứng. Đặt $K = AB \cap OM$

Xét tam giác ΔAKM ta có $AK \perp KM \Rightarrow CD \| KM$, mà C là trung điểm MA nên CD là đường trung bình của $\Delta AKM \Rightarrow D$ là trung điểm KM. Hơn nữa, ΔAKM vuông tại K nên $AM > AK$.

Áp dụng định lý Pytago với hai tam giác vuông ΔAOC và ΔDOC ta có

$$OD^2 + DC^2 = OC^2 = OA^2 + AC^2$$
$$\Rightarrow OD^2 - OA^2 = AC^2 - CD^2 = (\frac{AM}{2})^2 - (\frac{AK}{2})^2 > 0$$
$\Rightarrow D$ nằm ngoài đường tròn (O) (đpcm).

b. Ta có

$$AM^2 = OM^2 - OA^2 = d^2 - R^2$$
$$\Rightarrow S_{MAOB} = 2S_{MAO} = 2 \cdot \frac{1}{2} OA \cdot AM = R\sqrt{(d^2 - R^2)}.$$

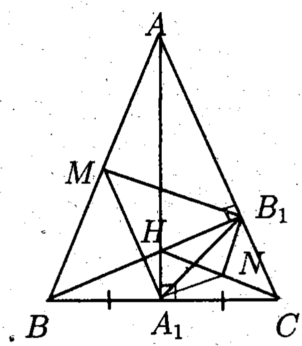
□

Ví dụ 3.19. Cho ΔABC cân tại A. AA_1, BB_1 là hai đường cao cắt nhau tại H. M, N lần lượt là trung điểm AB, CH.

a. Chứng minh rằng tứ giác MA_1NB_1 là hình thoi giả.

b. Đặt $a = BC, h = AA_1$. Tính diện tích tứ giác MA_1NB_1 theo a, h.

Giải



Hình 3.31.

a. ΔAB_1B vuông tại B_1 nên $B_1M = \frac{1}{2}AB$. ΔABA_1 vuông tại A_1 nên $A_1M = \frac{1}{2}AB \Rightarrow A_1M = B_1M$. (1)

Tương tự với hai tam giác vuông $\Delta HB_1C, \Delta HA_1C$ ta có $A_1N = B_1N = \frac{1}{2}CH$. (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow$ MN là đường trung trực của A_1B_1 $\Rightarrow$ tứ giác MA_1NB_1 là hình thoi giả (đpcm) .

b. Ta có:

ΔABC cân tại A có đường cao AA_1 $\Rightarrow$ A_1 là trung điểm của BC.

ΔBB_1C vuông tại B_1 $\Rightarrow$ $B_1A_1 = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}a$. (1)

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Theo ví dụ 1.5 ta có

MN là đường kính đường tròn Ơle của $\Delta ABC \Rightarrow MN = R$. Ta có:

$$AB = AC = \sqrt{A_1A^2 + A_1C^2} = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}$$

$$\Rightarrow R = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4S_{ABC}} = \frac{(h^2 + \frac{a^2}{4})a}{4 \cdot \frac{1}{2}a \cdot h}$$

$$\Rightarrow MN = R = \frac{(h^2 + \frac{a^2}{4})}{2h} \qquad (2)$$

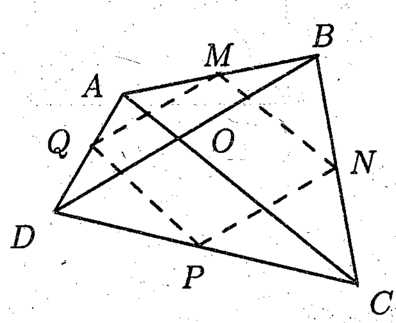
Từ (1), (2) ta có:

$$S_{MA_1NB_1} = \frac{1}{2}A_1B_1 \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{(h^2 + \frac{a^2}{4})}{2h} = \frac{a(4h^2 + a^2)}{32h}$$

□

Ví dụ 3.20. Chứng minh rằng hai tứ giác có chung trung điểm các cạnh thì diện tích bằng nhau.

Giải



Hình 3.32.

Cho bốn điểm M, N, P, Q. Ta chứng minh rằng các tứ giác nhận M, N, P, Q là trung điểm các cạnh thì có diện tích bằng nhau.

Thật vậy, giả sử tứ giác $ABCD$ nhận bốn điểm đó là trung điểm các cạnh. Không mất tổng quát, giả sử bốn điểm M, N, P, Q lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DA. Ta có:

$$MN \overset{\parallel}{=} QP \overset{\parallel}{=} \frac{1}{2}AC,$$
$$QM \overset{\parallel}{=} NP \overset{\parallel}{=} \frac{1}{2}BD$$

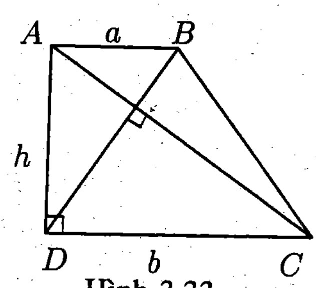
$\Rightarrow$ tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành và

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= \frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin AOB \quad (O = AC \cap BD) \\ &= 2MN \cdot MQ \cdot \sin QMN = const. \end{aligned}$$

Từ đó, ta có đpcm. □

Ví dụ 3.21. Cho hình thang vuông $ABCD$, có đường cao $AD = h$, $AB = a$, $DC = b$ và hai đường chéo vuông góc. Chứng minh $h^2 = ab$.

Giải



Hình 3.33.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(a+b)h \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} S^2{}_{ABCD} &= \frac{1}{4}AC^2 \cdot BD^2 \\ &= \frac{1}{4}(AD^2 + DC^2)(AB^2 + AD^2) \\ &= \frac{1}{4}[AD^4 + AD^2(AB^2 + DC^2) + DC^2 \cdot AB^2] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}[h^4 + h^2(a^2 + b^2) + a^2b^2]. \quad (2)$$

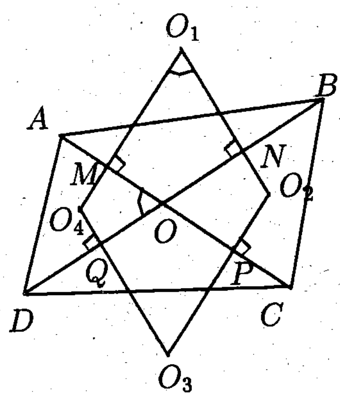
Từ (1), (2) suy ra:

$$(a+b)^2h^2 = h^4 + h^2(a^2+b^2) + a^2b^2$$
$$\Rightarrow 2abh^2 = h^4 + a^2b^2 \Rightarrow (h^2 - ab)^2 = 0 \Rightarrow h^2 = ab \text{ (đpcm)}.$$

□

Ví dụ 3.22. Tứ giác $ABCD$ có diện tích S, góc giữa hai đường chéo bằng α, O là giao của hai đường chéo . Gọi O_1, O_2, O_3, O_4 là tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác OAB, OBC, OCD, ODA. Tính diện tích tứ giác $O_1O_2O_3O_4$.

Giải



Hình 3.34.

O_1, O_2 là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta AOB, \Delta BOC \Rightarrow O_1, O_2$ cách đều $OB \Rightarrow O_1O_2$ là đường trung trực của OB. Tương tự, O_2O_3, O_3O_4, O_4O_1 lần lượt là đường trung trực của OC, OD, OA. Do đó, ta có $O_1O_2O_3O_4$ là hình bình hành có một góc ở đỉnh bằng $\angle AOD$, không mất tổng quát giả sử $\angle O_4O_1O_2 = \angle AOD = \alpha$.

Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của OA, OB, OC, OD. Khi đó, hình bình hành $O_1O_2O_3O_4$ nhận MP là đường cao tương ứng với cạnh

O_1O_4, NQ là đường cao tương ứng với cạnh O_1O_2. Ta có:

$$MP = \frac{1}{2}AC,\ NQ = \frac{1}{2}BD,$$

$$\begin{aligned} S_{O_1O_2O_3O_4} = O_1O_2 \cdot NQ &= \frac{MP}{\sin O_4O_1O_2} \cdot NQ \\ &= \frac{1}{4}\frac{AC \cdot BD \cdot \sin\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{S}{2\sin^2\alpha}. \end{aligned}$$

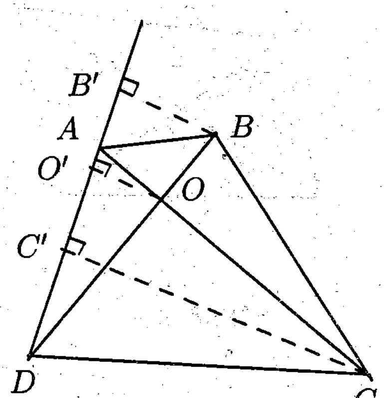
□

Ngoài ra, ta có thể tính diện tích tứ giác dựa vào công thức có được từ hai ví dụ sau:

Ví dụ 3.23. Cho tứ giác lồi $ABCD$ có hai đường chéo giao nhau tại O. Gọi B', O', C' lần lượt là hình chiếu của B, O, C trên đường thẳng AD. Chứng minh rằng

$$S_{ABCD} = \frac{AD \cdot BB' \cdot CC'}{2OO'}.$$

Giải



Hình 3.35.

Ta có

$$\frac{S_{BOC}}{S_{DOC}} = \frac{OB}{OD} = \frac{S_{BOA}}{S_{DOA}} \Rightarrow \frac{S_{BAC}}{S_{DAC}} = \frac{OB}{OD},$$

$$\text{mà } S_{ABCD} = S_{BAC} + S_{DAC} \Rightarrow \frac{S_{DAC}}{S_{ABCD}} = \frac{OB}{BD}.$$

Ta lại có $OO' \| BB' \Rightarrow \dfrac{BD}{OD} = \dfrac{BB'}{OO'}$.

Vậy

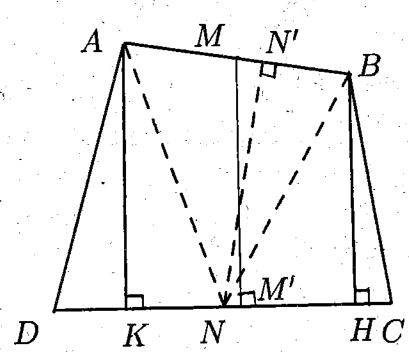
$$S_{ABCD} = S_{DAC} \cdot \frac{BD}{OD} = \frac{AD \cdot CC'}{2} \cdot \frac{BB'}{OO'} = \frac{AD \cdot BB' \cdot CC'}{2OO'} \Rightarrow \text{(đpcm).}$$

□

Ví dụ 3.24. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, CD. M' là hình chiếu của M trên CD, N' là hình chiếu của N trên AB. Chứng minh rằng

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(MM' \cdot CD + NN' \cdot AB).$$

Giải



Hình 3.36.

Kẻ AK, BH vuông góc với CD. Ta có:

$$S_{ABCD} = S_{AND} + S_{ANB} + S_{BNC},$$
$$S_{ANB} = \frac{1}{2} NN' \cdot AB,$$
$$S_{AND} = \frac{1}{2} AK \cdot DN = \frac{1}{4} AK \cdot DC,$$
$$S_{BNC} = \frac{1}{2} BH \cdot NC = \frac{1}{4} BH \cdot DC.$$

Hình thang $AKHB$ có đường trung bình $MM' \Rightarrow MM' = \dfrac{AK + BH}{2}$. Vậy

$$S_{ADN} + S_{BNC} = \frac{1}{4}(AK + BH) \cdot DC = \frac{1}{2}MM' \cdot DC$$
$$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}(MM' \cdot DC + NN' \cdot AB) \text{ (đpcm).}$$

□

3.2.3 Diện tích đa giác

1, Phương pháp

a. Đa giác đều. Cho $n-$ giác đều $(n \geq 3)$ có độ dài mỗi cạnh bằng a. Diện tích của đa giác đều được tính theo công thức:

$$S = \frac{na^2}{4} \cdot \operatorname{cotg} \frac{180^o}{n}.$$

Chứng minh. Xét n - giác đều $A_1A_2..A_n$ $(n \geq 3)$ cạnh a. Gọi O là tâm của n - giác đều. Ta có OA_1A_2 là tam giác cân tại O có diện tích bằng $\dfrac{1}{n}$ diện tích đa giác $A_1A_2..A_n$.

Xét ΔOA_1A_2 có $A_1A_2 = a$, $\angle A_1OA_2 = \dfrac{360^o}{n}$. Kẻ đường cao OH. Ta có

$$OH = \frac{A_1A_2}{2} \cdot \operatorname{cotg} \frac{180^o}{n}$$
$$\Rightarrow S_{OA_1A_2} = \frac{1}{2} \cdot A_1A_2 \cdot OH = \frac{A_1A_2{}^2}{4} \cdot \operatorname{cotg} \frac{180^o}{n} = \frac{a^2}{4} \cdot \operatorname{cotg} \frac{180^o}{n}$$

Từ đó ta có đpcm. □

b. Đa giác tùy ý. Để tính diện tích của một đa giác bất kì, ta thường sử dụng các phương pháp sau:

i, Phương pháp chia nhỏ. Chia đa giác thành các hình nhỏ các hình nhỏ này không có điểm trong chung sao cho tính được diện tích của chúng. Diện tích đa giác bằng tổng diện tích của các hình nhỏ đó.

ii, Phương pháp bổ sung. Bổ sung vào đa giác đã cho các hình có diện tích tính được để thu được một hình lớn chứa hình ban đầu có diện tích cũng tính được. Khi đó, diện tích đa giác đã cho bằng diện tích hình mới nhận được trừ đi tổng diện tích các hình bổ sung.

2, Ví dụ minh họa

Ví dụ 3.25. Cho lục giác đều $ABCDEF$.

a. Tính diện tích của nó theo h là trung đoạn của lục giác đều.

b. Vẽ hình bình hành tuỳ ý có các đỉnh thuộc các cạnh của lục giác đều và có tâm đối xứng trùng với tâm của lục giác đều. Gọi S, s lần lượt là diện tích của lục giác đều và hình bình hành. Chứng minh rằng:

$$s \leq \frac{2}{3}S.$$

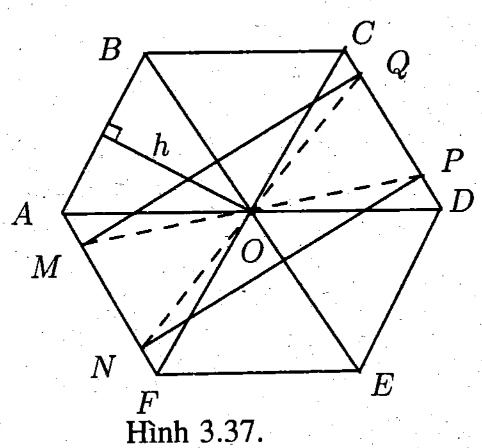
Giải

a. Gọi O là tâm, a là độ dài cạnh của lục giác đều, ta có

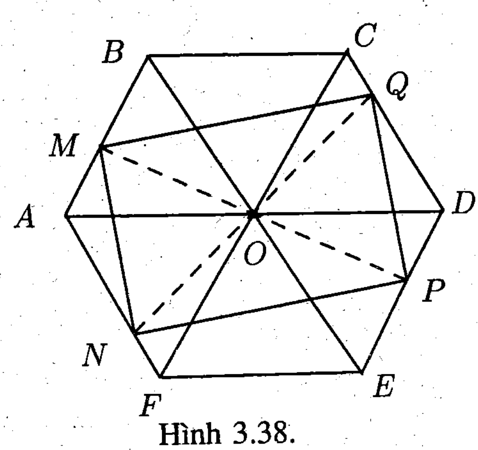
$$\frac{a}{2} = h \cdot \text{tg}\, 30^o = h\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow a = \frac{2\sqrt{3}}{3}h$$

$$\Rightarrow S_{ABCDEF} = 6S_{OAB} = 6(\frac{1}{2}ah) = 2\sqrt{3}h^2.$$

b. Giả sử hình bình hành $MNPQ$ thoả mãn điều kiện bài toán. Có hai trường hợp xảy ra:



Hình 3.37.



Hình 3.38.

- M, N cùng thuộc cạnh của lục giác đều, chẳng hạn cạnh AF (H3.37). Khi đó:

$$S_{MON} \leq S_{AOF} \Rightarrow \frac{s}{4} \leq \frac{S}{6} \Rightarrow s \leq \frac{2}{3}S.$$

- M, N thuộc hai cạnh liên tiếp của lục giác đều (H3.38).

  Vì M nằm trên cạnh AB nên $S_{MNO} \leq \max(S_{ANO}, S_{BNO})$.

  Mặt khác, $S_{ANO} \leq S_{AFO} = S_{ABO}$ và $S_{BNO} = S_{ABO}$ (vì $NA \| BO$).

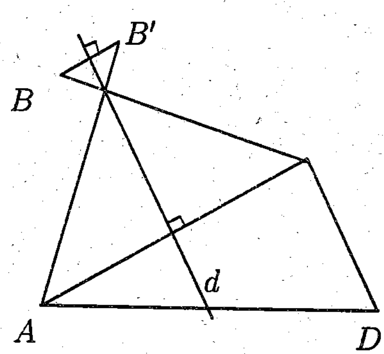
  Do đó, $S_{MNO} \leq S_{ABO} \Rightarrow \dfrac{s}{4} \leq \dfrac{S}{6} \Rightarrow s \leq \dfrac{2}{3}S.$

□

Ví dụ 3.26. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Chứng minh rằng

$$S_{ABCD} \leq \frac{1}{2}(AB \cdot CD + AD \cdot BC).$$

Giải



Hình 3.39.

Gọi d là đường trung trực của AC. Lấy B' đối xứng với B qua d. Ta có:

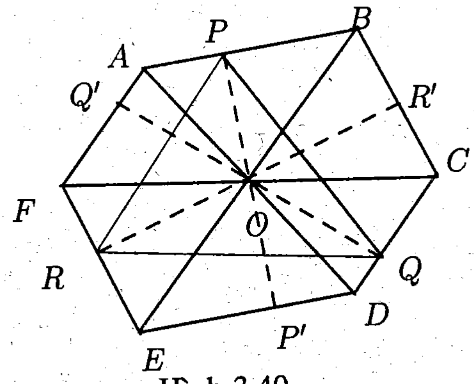
$$
\begin{aligned}
& S_{ABC} = S_{AB'C}, BA = B'C, BC = B'A \\
\Rightarrow\ & S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} \\
&= S_{AB'C} + S_{ADC} \\
&= S_{AB'CD} \\
&= S_{AB'D} + S_{CB'D} \\
&= \frac{1}{2}(AB' \cdot AD \cdot \sin B'AD + CB' \cdot CD \cdot \sin B'CD) \\
&\le \frac{1}{2}(AB' \cdot AD + CB' \cdot CD) = \frac{1}{2}(AB \cdot DC + AD \cdot BC).
\end{aligned}
$$

Từ đó, ta có đpcm. □

Nhận xét: Từ ví dụ trên, ta có kết quả sau: "Cho tứ giác $ABCD$ các cạnh là a, b, c, d (không theo thứ tự). Khi đó $S_{ABCD} \le \frac{1}{2}(ab + cd)$ ".

Ví dụ 3.27. Lục giác $ABCDEF$ có tâm đối xứng và P, Q, R lần lượt nằm trên các cạnh AB, CD, EF. Chứng minh rằng $S_{PQR} \le \frac{1}{2} S_{ABCDEF}$.

Giải



Hình 3.40.

Gọi O là tâm đối xứng của lục giác. Ta có các đường chéo AD, BE, CF đồng quy tại O và mỗi đường chia lục giác thành hai phần có diện tích bằng nhau.

Xét ΔACE ta có

$$S_{ACE} = S_{OAC} + S_{OCE} + S_{OAE}$$

$$= S_{OAF} + S_{OEF} + S_{OED}$$

$$= S_{ADEF} = \frac{1}{2}S_{ABCDEF} \quad (*)$$

Tương tự, $S_{BDF} = \frac{1}{2}S_{ABCDEF}$.

Cách 1.

Xét các điểm P, Q, R bất kì trên các đoạn AB, CD, EF ta có P thuộc đoạn AB nên $S_{PQR} \leq \max(S_{AQR}, S_{BQR})$. Tính chất của Q, R tương tự, do đó tồn tại 3 điểm X, Y, Z thuộc tập $\{A, B, C, D, E, F\}$ sao cho $S_{PQR} \leq S_{XYZ} \Rightarrow S_{PQR} \leq S_{ACE} = \frac{1}{2}S_{ABCDEF}$ (đpcm).

Cách 2.

Lần lượt lấy P', Q', R' đối xứng với P, Q, R qua O. Ta có lục giác $PR'QP'RQ'$ nội tiếp lục giác $ABCDEF$. Tương tự chứng minh $(*)$, ta có $S_{PQR} = \frac{1}{2}S_{PR'QP'RQ'} \leq \frac{1}{2}S_{ABCDEF}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} P \equiv A, Q \equiv C, R \equiv E \\ P \equiv B, Q \equiv D, R \equiv F. \end{array}\right.$ □

Ví dụ 3.28. Chứng minh rằng tồn tại ba đỉnh liên tiếp của một lục giác lồi lập thành một tam giác có diện tích không lớn hơn $\frac{1}{6}$ diện tích lục giác đó.

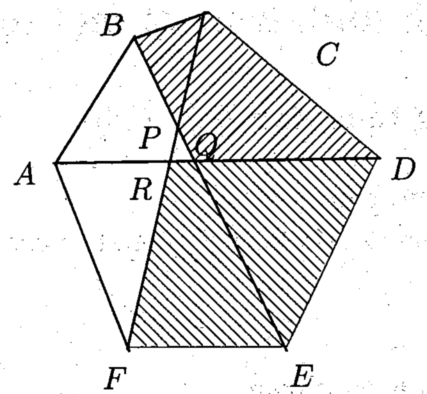
Giải

Đặt:

$$P = BE \cap CF, Q = AD \cap BE,$$
$$R = AD \cap CF, S = S_{ABCDEF}.$$

Ta thấy, các tứ giác $ABPF, BCDQ, DEFR$ đôi một không có điểm trong chung.

Thật vậy, xét tứ giác $ABPF$ và tứ giác $BCDQ$ ta có hai đoạn thẳng CD và AF nằm ở hai nửa mặt phẳng bờ BE và $P, Q \in BE \Rightarrow$ tứ giác



Hình 3.41.

$ABPF$ và tứ giác $BCDQ$ nằm ở hai nửa mặt phẳng bờ BE, do đó không có điểm chung trong. Tương tự, ta có các tứ giác $ABPF, BCDQ, DEFR$ đôi một không có điểm trong chung. Vậy

$$S_{ABPF} + S_{BCDQ} + S_{DEFR} = S_{ABCDEF} - S_{PQR} \leq S$$

$\Rightarrow$ tồn tại ít nhất một trong ba tứ giác trên có diện tích không vượt quá $\frac{1}{3}S$. Không mất tổng quát, giả sử là $ABPF$. Ta lại có $S_{ABPF} = S_{ABP} + S_{APF}$

- $S_{ABP} \leq S_{APF} \Rightarrow S_{ABP} \leq \frac{1}{2}S_{ABPF} \leq \frac{1}{6}S.$

  Gọi h_C, h_P, h_F lần lượt là khoảng cách từ C, P, F đến đường thẳng AB. Vì P thuộc đoạn CF nên $h_P \geq \min(h_C, h_F)$.

  Không mất tổng quát, giả sử $h_c = \min(h_C, h_F) \Rightarrow h_C \leq h_P \Rightarrow \frac{1}{2}h_C \cdot AB \leq h_P \cdot AB \Rightarrow S_{ABC} \leq S_{ABP} \leq \frac{1}{6}S \Rightarrow$ (đpcm).

- $S_{APF} \leq S_{ABP} \Rightarrow S_{APF} \leq \frac{1}{2}S_{ABPF} \leq \frac{1}{6}S$. Tương tự như chứng minh trên vì P thuộc đoạn BE nên $S_{ABF} \leq S_{APF}$ hoặc $S_{AEF} \leq S_{APF}$. Từ đó ta có đpcm.

□

3.3 Diện tích hình tròn và một số hình liên quan

3.3.1 Các công thức tính diện tích

1, Diện tích hình tròn

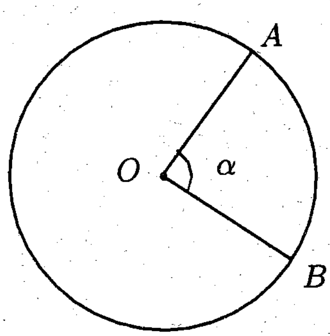
Cho hình tròn tâm O, bán kính R. Diện tích của nó được tính theo công thức

$$S = \pi R^2$$

2, Diện tích hình quạt tròn

Cho hình quạt tròn AOB tâm O, bán kính R và góc ở tâm bằng α $(0 \leq \alpha \leq 360^o)$. Diện tích của quạt tròn AOB được tính theo công thức

$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} = \frac{lR}{2} \text{ (} l \text{ là độ dài cung } \overset{\frown}{AB}\text{)}$$



Hình 3.42.

Nhận xét:

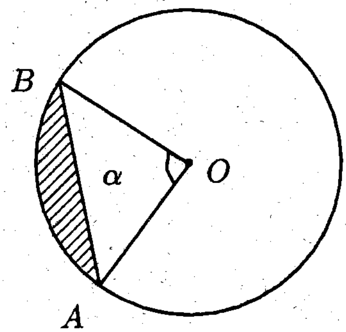
Nếu $\alpha = 0^o$ thì quạt tròn AOB biến dạng thành bán kính OA, diện tích của nó bằng 0.

Nếu $\alpha = 180^o$ thì quạt tròn AOB là nửa hình tròn (O, R).

Nếu $\alpha = 360^o$ thì quạt tròn AOB là hình tròn (O, R).

3, Diện tích hình viên phân

Cho hình tròn (O, R). Hình viên phân xác định bởi cung $\overset{\frown}{AB}$ là phần hình tròn giới hạn bởi cung tròn $\overset{\frown}{AB}$ và dây cung AB (trong hình vẽ, hình viên phân được biểu diễn bởi miền gạch sọc).



Hình 3.43.

Để tính diện tích hình viên phân xác định bởi cung $\overset{\frown}{AB}$, ta lấy diện tích quạt tròn AOB trừ đi diện tích tam giác AOB.

$$\begin{aligned} S_{\text{viên phân } AB} &= S_{\text{quạt tròn} AOB} - S_{AOB} \\ &= \frac{\pi R^2 \alpha}{360} - \frac{1}{2} R^2 \sin AOB. \qquad (*) \end{aligned}$$

Chú ý: Với học sinh bậc Trung học cơ sở, công thức $(*)$ chỉ được áp dụng trong trường hợp α là góc nhọn. Thực tế, công thức trên vẫn đúng với trường hợp α vuông hoặc tù (xem lại công thức tính diện tích tam giác ở §1 chương 3). Với trường hợp này, nếu không sử dụng công thức $(*)$ các em có thể làm như sau:

Kẻ $OH \perp AB \Rightarrow \Delta OHA$ vuông tại H có $\angle HOA = \dfrac{\alpha}{2}$

$$\Rightarrow OH = R\cos\frac{\alpha}{2}, AH = R\sin\frac{\alpha}{2}$$

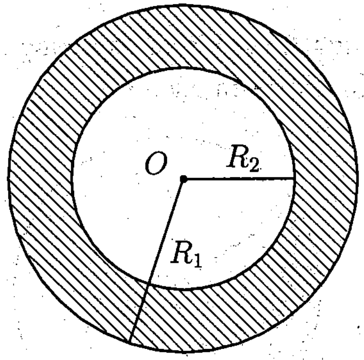
$$\Rightarrow S_{AOB} = R^2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$$

4 Hình vành khăn

Cho hai hình tròn đồng tâm (O, R_1), (O, R_2) $(R_1 > R_2)$. Miền giới hạn bởi hai đường tròn (miền gạch sọc) được gọi là hình vành khăn.

Diện tích của hình vành khăn được tính theo công thức

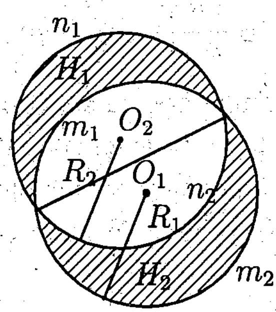
$$S = \pi({R_1}^2 - {R_2}^2).$$



Hình 3.44.

5, Hình lưỡi liềm (hình trăng khuyết)

Cho hai điểm A, B cố định. Đặt $AB = 2a$. Vẽ đường tròn (O_1, R_1), (O_2, R_2) $(R_1 > R_2)$ có tâm O_1, O_2 nằm cùng phía đối với đường thẳng AB. Khi đó ta có hai hình trăng khuyết H_1, H_2(miền gạch sọc).



Hình 3.45.

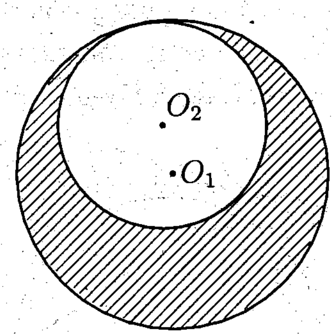
Để tính diện tích hình trăng khuyết H_1 ta làm như sau: Hình trăng khuyết H_1 là hình được giới hạn bởi hai cung m_1, n_1. Xét hình quạt tròn và hình viên phân được xác định bởi m_1, n_1. Gọi S_1 là diện tích hình quạt tròn AO_1B, S_2 là diện tích hình viên phân ABO_2. S_3 là diện tích ΔABO_2. Khi đó, diện tích hình trăng khuyết H_1 được tính theo công thức:

$$S_{H_1} = S_1 - (S_2 + S_3)$$

Để tính diện tích hình trăng khuyết H_2 ta làm tương tự.

6, Hình khuyên tai

Cho hai đường tròn (O_1, R_1), (O_2, R_2) tiếp xúc trong tại A $(R_1 > R_2)$. Miền gạch sọc được gọi là hình khuyên tai tạo bởi hai đường tròn đã cho.



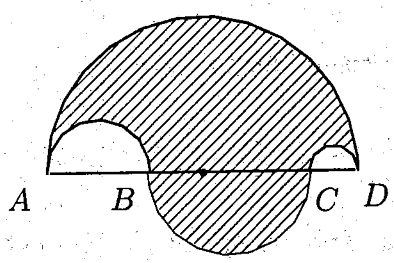
Hình 3.46.

Diện tích hình khuyên tai bằng diện tích hình tròn lớn trừ đi diện tích hình tròn nhỏ.

$$S_{\text{khuyên tai}} = \pi({R_1}^2 - {R_2}^2)$$

7, Hình hòa bình

Cho bốn điểm A, B, C, D theo thứ tự cùng nằm trên một đường thẳng. Dựng các nửa đường tròn đường kính AB, CD, AB về cùng một phía đối với đường thẳng AD. Dựng nửa đường tròn đường kính BC khác phía với ba đường tròn kia. Miền gạch sọc được gọi là hình hòa bình.



Hình 3.47.

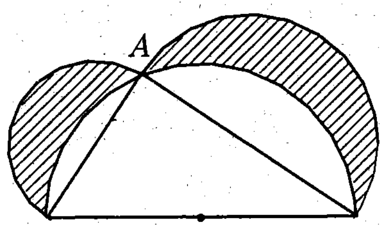
Diện tích hình hòa bình được tính theo công thức

$$S = \frac{1}{8}\pi(AD^2 + BC^2 - AB^2 - DC^2)$$

Đặc biệt, nếu $AB = CD$ thì diện tích hình họa bình bằng diện tích hình tròn đường kính AC (bạn đọc tự chứng minh).

8, Hình trăng khuyết Hy-pô-crát

Cho ΔABC vuông ở A. Vẽ nửa đường tròn đường kính BC. Về phía ngoài tam giác vuông, vẽ hai nửa đường tròn đường kính AB và AC. Miền gạch sọc được gọi là hình trăng khuyết Hy-pô-crát.



Hình 3.48.

Ta sẽ tính diện tích của hình trăng khuyết Hy-pô-crát theo độ dài các cạnh của ΔABC. Gọi diện tích các nửa đường tròn đường kính BC, CA, AB lần lượt là S_a, S_b, S_c. Ta có

$$S_a = \frac{1}{2}\pi \cdot (\frac{a}{2})^2 = \frac{1}{8}\pi a^2,$$
$$S_b = \frac{1}{2}\pi \cdot (\frac{b}{2})^2 = \frac{1}{8}\pi b^2,$$
$$S_c = \frac{1}{2}\pi \cdot (\frac{c}{2})^2 = \frac{1}{8}\pi c^2.$$

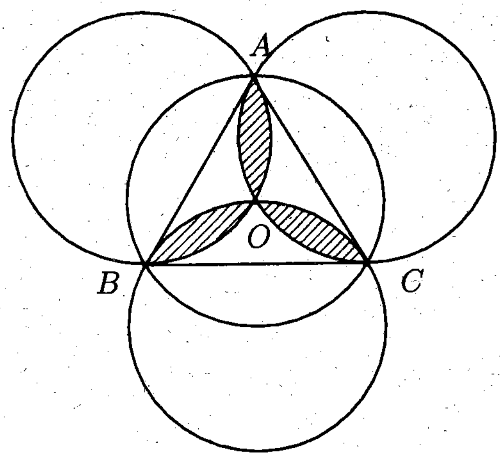
Diện tích của hình trăng khuyết Hy-pô-crát là

$$S = S_{ABC} + S_b + S_c - S_a = \frac{1}{2}bc + \frac{1}{8}\pi(b^2 + c^2 - a^2) = \frac{1}{2}bc.$$

Vậy diện tích của hình trăng khuyết Hy-pô-crát bằng diện tích của ΔABC.

9, Hình hoa thị ba cánh

Cho tam giác đều ABC, tâm O có độ dài cạnh bằng a. Vẽ ba đường tròn ngoại tiếp các tam giác OAB, OBC, OCA. Chúng cắt nhau từng đôi tạo thành hình hoa thị (miền gạch sọc).



Hình 3.49.

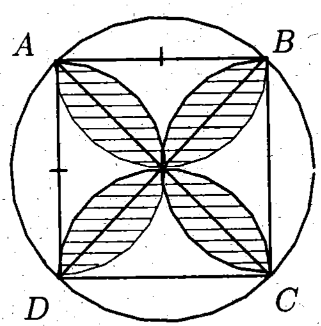
Diện tích của hình hoa thị được tính như sau:

Gọi A' là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔOBC thì dễ thấy $\Delta A'BO$ đều, có cạnh bằng $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Do tính chất đối xứng của hình qua các trục OA, OB, OC nên hình hoa thị gồm 6 hình viên phân bằng nhau, trong đó có một hình, chẳng hạn là hình viên phân BOA'. Ta có:

$$S_{\text{quạt } BA'O} = \frac{\pi R^2}{6}, \; S_{A'BO} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow S_{\text{hoa thị}} = 6R^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{a^2}{6}(2\pi - 3\sqrt{3})$$

10, Hình hoa thị bốn cánh



Hình 3.50.

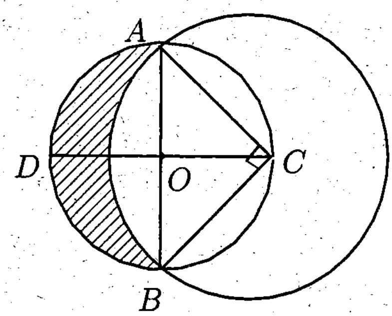
Cho hình vuông $ABCD$, tâm O, có độ dài cạnh bằng a. Vẽ bốn đường tròn ngoại tiếp các tam giác OAB, OBC, OCD, ODA. Các đường tròn cắt nhau từng đôi tạo thành hình hoa thị bốn cánh (miền gạch sọc).

Việc tính diện tích hình hoa thị bốn cánh xin dành cho bạn đọc.

3.3.2 Ví dụ minh họa

Ví dụ 3.29. Cho đường tròn tâm O. AB, CD là hai đường kính vuông góc của đường tròn.Vẽ đường tròn tâm C, bán kính CA. Chứng minh rằng diện tích hình trăng khuyết ADB (phần gạch sọc) bằng diện tích ΔABC.

Giải



Hình 3.51.

Ta có:

$$S_{\text{quạt } ACB} = \pi AC^2 \cdot \frac{90}{360} = \frac{\pi}{4}AC^2,$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC^2 \Rightarrow S_{\text{viên phân } ABC} = \frac{\pi}{4}AC^2 - \frac{1}{2}AC^2$$

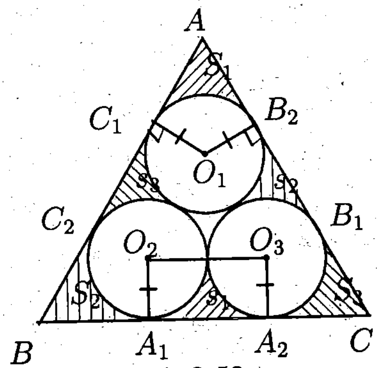
Diện tích của hình trăng khuyết ADB là

$$\frac{1}{2}\pi OC^2 - \left(\frac{\pi}{4}AC^2 - \frac{1}{2}AC^2\right) = \frac{\pi}{4}AC^2 - \frac{\pi}{4}AC^2 + \frac{1}{2}AC^2 = \frac{1}{2}AC^2.$$

Từ đó ta có đpcm. □

Ví dụ 3.30. Cho ba đường tròn (O_1) ,(O_2), (O_3) bán kính 1 đôi một tiếp xúc ngoài với nhau. Các tiếp tuyến chung ngoài d_1, d_2, d_3 của ba đường tròn đôi một giao nhau tại A, B, C như hình vẽ. Tính tổng diện tích các miền gạch sọc.

Giải



Hình 3.52.

Cách 1

Phần gạch sọc gồm sáu phần ta đánh số S_1, S_2, S_3, s_1, s_2, s_3 như hình vẽ.

Vì (O_1) ,(O_2), (O_3) là các đường tròn bằng nhau nên ΔABC là tam giác đều và $S_1 = S_2 = S_3$, $s_1 = s_2 = s_3$. Do đó để tính diện tích phần gạch sọc, ta chỉ cần tính S_1, s_1.

Diện tích mỗi đường tròn là π (đvdt).

Xét tứ giác $AC_1O_1B_2$ là hình thoi giả có

$$\angle C_1AB_2 = 60^0,\ \angle AC_1O_1 = 90^o,\ O_1C_1 = 1$$
$$\Rightarrow AC_1 = O_1C_1 \cdot \text{cotg}\, 30^o = \sqrt{3}$$
$$\Rightarrow S_{AC_1OB_2} = AC_1 \cdot O_1C_1 = \sqrt{3} \text{ (đvdt).}$$

Quạt tròn $C_1O_1B_2$ có góc ở tâm là 120^o, do đó diện tích của nó là

$$S_{\text{quạt tròn } C_1O_1B_2} = \pi O_1C_1^2 \frac{120}{360} = \frac{\pi}{3} \text{ (đvdt).}$$

Vậy .

$$S_1 = S_{AC_1O_1B_2} - S_{\text{quạt tròn } C_1O_1B_2} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \text{ (đvdt)}.$$

Tứ giác $A_1A_2O_3O_2$ là hình chữ nhật có $O_2A_1 = 1, O_2O_3 = 2$. Gọi A' là tiếp điểm của (O_2), (O_3).

Vì $\angle A_1O_2A' = 90^o \Rightarrow S_{\text{quạt tròn} A_1O_2A'} = \frac{\pi}{4}$ (đvdt).

Vậy

$$\begin{aligned} s_1 &= S_{A_1A_2O_3O_2} - S_{\text{quạt tròn} A_1O_2A'} - S_{\text{quạt tròn} A_2O_3A'} \\ &= S_{A_1A_2O_3O_2} - S_{\text{quạt tròn} A_1O_2A'} = 2 - \frac{\pi}{2} \text{ (đvdt)}. \end{aligned}$$

Diện tích phần gạch sọc là

$$S = 3(S_1 + s_1) = 3(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}) + 3(2 - \frac{\pi}{2}) = 6 + 3\sqrt{3} - \frac{5\pi}{2} \text{ (đvdt)}.$$

Cách 2

Gọi A', B', C' là các tiếp điểm của 3 đường tròn (O_1), (O_2), (O_3). Diện tích của phần gạch sọc bằng diện tích của ΔABC trừ đi diện tích của ba đường tròn và diện tích của tam giác cong $A'B'C'$. Gọi diện tích tam giác cong $A'B'C'$ là s.

Từ cách 1, ta có $AC_1 = \sqrt{3}, C_1C_2 = 2$ do đó

$$\begin{aligned} AB &= AC_1 + BC_2 + C_1C_2 = 2(\sqrt{3} + 1) \\ \Rightarrow S_{ABC} &= \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)^2 = 4\sqrt{3} + 6 \text{ (đvdt)}. \end{aligned}$$

Tam giác $O_1O_2O_3$ là tam giác đều cạnh $O_1O_2 = 2 \Rightarrow S_{O_1O_2O_3} = \sqrt{3}$.

Các quạt tròn $B'O_1C'$, $C'O_2A'$, $A'O_3B'$ là các quạt tròn bằng nhau có góc ở tâm bằng 60^o. Do đó

$$\begin{aligned} S_{\text{quạt tròn} B'O_1C'} &= \frac{\pi}{6} \\ \Rightarrow s = S_{O_1O_2O_3} - 3S_{\text{quạt tròn} B'O_1C'} &= \sqrt{3} - \frac{\pi}{2} \text{ (đvdt)}. \end{aligned}$$

Vậy diện tích miền gạch sọc là

$$S = 4\sqrt{3} + 6 - 3\pi - (\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}) = 6 + 3\sqrt{3} - \frac{5\pi}{2} \text{ (đvdt).}$$

□

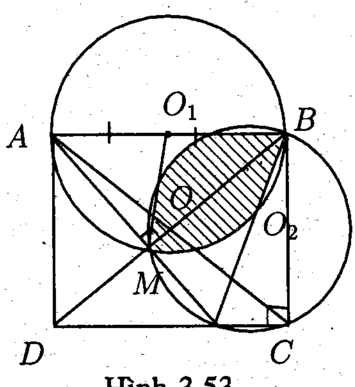
Ví dụ 3.31. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a\sqrt{2}$, $AD = a$. Gọi E là trung điểm cạnh CD. AE cắt BD tại M.

a. Tính diện tích hình tròn ngoại tiếp ΔMAB.

b. Chứng minh rằng tứ giác $BMEC$ nội tiếp được và tính diện tích hình tròn ngoại tiếp của nó.

c. Tính diện tích phần chung của hai hình tròn trên.

Giải



Hình 3.53.

a. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC, BD. Tam giác ADC có trung tuyến AE, DO giao nhau tại M nên M là trọng tâm ΔADC. Do đó

$$DM = \frac{2}{3}DO = \frac{1}{3}DB = \frac{\sqrt{AB^2 + AD^2}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Theo định lý Pytago, ta có

$$AE^2 = AD^2 + DE^2 = a^2 + (\frac{a\sqrt{2}}{2})^2 = \frac{3a^2}{2}$$

$$\Rightarrow AE = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow AM = \frac{2}{3}AE = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Ta có $MA^2 + MD^2 = \frac{2a^2}{3} + \frac{a^2}{3} = a^2 = AD^2$ nên theo định lý Pytago ta có ΔAMD vuông tại M. Vậy đường tròn ngoại tiếp ΔMAB có tâm O_1 là trung điểm cạnh AB và bán kính $R_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Diện tích đường tròn ngoại tiếp ΔMAB là

$$S_1 = \pi {R_1}^2 = \frac{\pi a^2}{2}.$$

b. Theo câu *a* thì $\angle BME = 90^o$ và theo giả thiết $\angle BCE = 90^o$ nên tứ giác $BCEM$ nội tiếp được trong đường tròn đường kính BE. Đường tròn này có tâm O_2 là trung điểm của đoạn BE và bán kính $R_2 = \frac{BE}{2}$. Mặt khác $BE = AE = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ (câu *a*). Do đó $R_2 = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

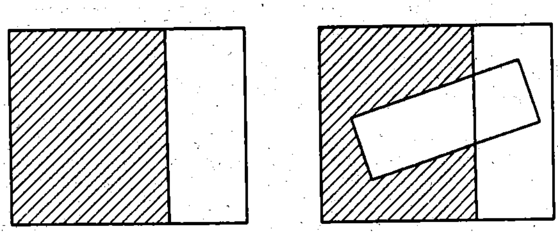
Vậy diện tích hình tròn (O_2, R_2) là

$$S_2 = \pi {R_2}^2 = \frac{3\pi a^2}{8}.$$

c. Phần chung của hai hình tròn (O_1, R_1) và (O_2, R_2) (miền gạch sọc) gồm hai hình viên phân BMO_1 và BMO_2. Việc tính toán cụ thể xin dành cho bạn đọc. □

3.4 Nguyên lý trải thảm

3.4.1 Nguyên lý.



Hình 3.54.

Cho hai tấm thảm có tổng diện tích bằng diện tích nền nhà. Nếu ta trải hai tấm thảm trong phạm vi nền nhà thì diện tích phần nền nhà chưa được trải thảm bằng diện tích phần nền nhà được phủ bởi hai lớp thảm.

Chứng minh. Gọi S là diện tích nền nhà, S_1, S_2 lần lượt là diện tích của hai tấm thảm.

Gọi diện tích phần nền nhà chưa được trải thảm là S_3, diện tích phần nền nhà được phủ hai lớp thảm là S_4. Ta phải chứng minh $S_3 = S_4$.

Theo giả thiết ta có $S = S_1 + S_2$. Diện tích phần nền nhà chỉ được phủ bởi tấm thảm thứ nhất là $S_1' = S_1 - S_3$.

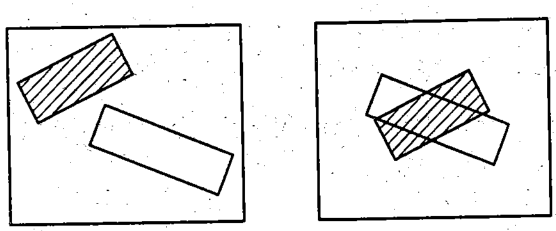
Diện tích phần nền nhà chỉ được phủ bởi tấm thảm thứ hai là $S_2' = S_2 - S_3$.

Diện tích phần nền nhà được trải thảm là $s = S_1' + S_2' + S_3 = (S_1 + S_2) - S_3 = S - S_3$.

Vậy diện tích phần nền nhà chưa được trải thảm là $S_4 = S - s = S - (S - S_3) = S_3$.

Từ đó ta có đpcm. □

Nhận xét: *Ta thấy kết quả trên đúng với hai tấm thảm có hình dạng bất kì thoả mãn tổng diện tích bằng diện tích nền nhà.*



Hình 3.55.

Cho hai tấm thảm có diện tích bằng nhau trải trên nền nhà. Khi đó, diện tích phần nền nhà chỉ được phủ bởi tấm thảm thứ nhất bằng diện tích nền nhà chỉ được phủ bởi tấm thảm thứ hai.

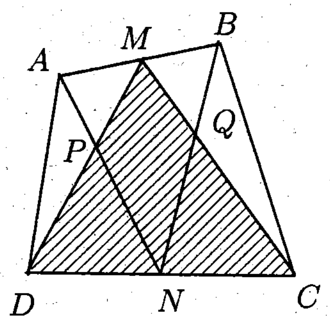
Nhận xét: *Giống như trường hợp trên, kết quả vẫn đúng với hai tấm thảm có hình dạng bất kì thoả mãn điều kiện diện tích bằng nhau.*

Do nguyên lý luôn đúng với hai tấm thảm có hình dạng bất kì nên ta có thể áp dụng vào giải một số bài toán diện tích với hình phức tạp.

3.4.2 Ví dụ minh họa

Ví dụ 3.32. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M là trung điểm của AB, N là trung điểm của CD. Gọi P là giao của AN và DM, Q là giao của BN và CM. Chứng minh rằng $S_{MPNQ} = S_{ADP} + S_{BQC}$.

Giải



Hình 3.56.

Từ ví dụ 3.24 ta có

$$S_{NAB} + S_{MDC} = S_{ABCD}.$$

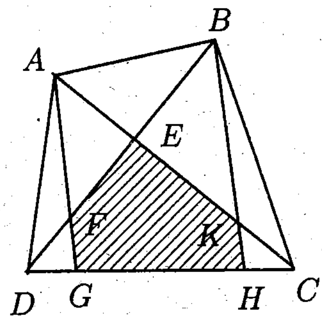
Áp dụng nguyên lý trải thảm đối với hai tấm thảm NAB, MDC và nền nhà là tứ giác $ABCD$ ta có

$$S_{MPNQ} = S_{ADP} + S_{BQC} \quad \text{(đpcm).}$$

□

Ví dụ 3.33. Hình thang $ABCD$ có đáy $AB \leq CD$. Qua A, B kẻ hai đường thẳng song song cắt cạnh CD tại G, H. Hai đường thẳng này cùng với hai đường chéo chia hình thang thành 7 tam giác và 1 ngũ giác. Chứng minh rằng diện tích ngũ giác bằng tổng diện tích các tam giác có chung cạnh với hình thang.

Giải



Hình 3.57.

Tứ giác $ABHG$ là hình bình hành nên $AB = GH$. Gọi khoảng cách của AB và DC là h. Ta có

$$S_{AGC} + S_{BHD} = \frac{1}{2}(DH + GC)h = \frac{1}{2}(AB + DC)h = S_{ABCD}.$$

Vậy ta có hai tấm thảm AGC và BHD có tổng diện tích bằng diện tích nền nhà $ABCD$. Áp dụng nguyên lý trải thảm ta có

$$S_{EFGHK} = S_{FAD} + S_{EAB} + S_{KBC} \quad \text{(đpcm)}.$$

□

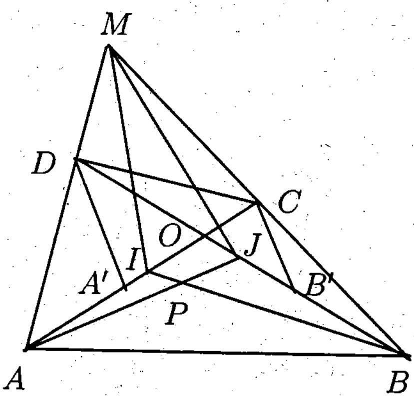
Ví dụ 3.34. Cho tứ giác $ABCD$. I, J lần lượt là trung điểm AC, BD và hai đoạn AJ, BI giao nhau tại P, hai đường thẳng AD, BC giao nhau tại M. Chứng minh rằng $S_{MIPJ} = S_{PAB}$.

Giải

Gọi O là giao của AC, BD. Vì hai đoạn thẳng AI, BJ giao nhau nên I nằm trên đoạn AO, J nằm trên đoạn BO. Thật vậy,

- $I \equiv J \equiv O \Rightarrow ABCD$ là hình bình hành, mâu thuẫn với giả thiết AC, BD giao nhau.

- Nếu hoặc $I \equiv O$ hoặc $J \equiv O$, khi đó hai đoạn AJ, BI không giao nhau.



Hình 3.58.

- Giả sử I nằm trong đoạn OC, khi đó A, I nằm ở hai nửa mặt phẳng bờ BD, mà $J \in BD$ do đó hai đoạn AJ, BI không giao nhau. Vậy I không thuộc đoạn OC.

  Tương tự, ta có J không thuộc đoạn OD.

Lấy A' trên tia OA, B' trên tia OB sao cho $OA' = OC, OB' = OD$, ta có $A'B'CD$ là hình bình hành. Vì $OA > OC = OA', OB > OD = OB'$ nên M là giao của hai tia AD, BC. Ta có:

$$S_{MJA} = S_{MJD} + S_{AJD} = \frac{1}{2}S_{MDB} + \frac{1}{2}S_{ADB} = \frac{1}{2}S_{MAB}.$$

$$S_{MIB} = S_{MIC} + S_{BIC} = \frac{1}{2}S_{MAC} + \frac{1}{2}S_{BAC} = \frac{1}{2}S_{MAB}$$

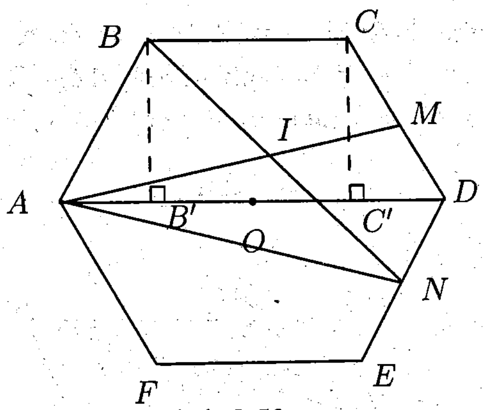
Vậy $S_{MJA} + S_{MIB} = S_{MAB}$. Xét hai tấm thảm MJA và MIB có tổng diện tích bằng diện tích nền nhà MAB. Phần nền nhà được trải hai lớp thảm là tứ giác $MIPJ$ và phần nền nhà chưa được trải thảm là tam giác PAB. Áp dụng nguyên lý trải thảm ta có $S_{MIPJ} = S_{PAB}$ (đpcm). □

Ví dụ 3.35. Cho lục giác đều $ABCDEF$ có cạnh bằng a. Gọi M, N là trung điểm của CD, DE. AM cắt BN tại I. Tính diện tích tứ giác $IMDN$.

Giải

Gọi diện tích lục giác đều là S. Ta có $S = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^2$.

Gọi B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của B, C ở trên đường thẳng



Hình 3.59.

AD. Xét $\Delta ABB'$ vuông ở B' có $\angle BAB' = 60^o \Rightarrow AB' = \frac{1}{2}AB$. Tương tự, $DC' = \frac{1}{2}CD$. Do đó $AD = 2a$. Mặt khác, $AD \| BC \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}S_{ACD}$. Từ đó ta có:

$$S_{CDE} = S_{ABC} = \frac{1}{2}S_{ACD} = \frac{1}{2}S_{AED} = \frac{1}{2}S_{NAB} = \frac{1}{6}S_{ABCDEF} = \frac{1}{6}S,$$

$$S_{ABCM} = S_{BCDN} = \frac{1}{3}S. \quad (1)$$

Áp dụng nguyên lý trải thảm đối với hai tấm thảm có diện tích bằng nhau $ABCM$ và $BCDN$ ta có $S_{IMDN} = S_{ABI}$. Vậy để tính S_{IMDN} ta tính S_{ABI}. Do vậy ta cần tính tỉ số $\frac{BI}{IN}$.

Vì M, N là trung điểm CD, DE nên $S_{DMN} = \frac{1}{4}S_{CDE} = \frac{1}{24}S$

M là trung điểm CD nên $S_{BMC} = \frac{1}{2}S_{BCD} = \frac{1}{12}S$. Vậy

$$S_{ABM} = S_{ABCM} - S_{BCM} = (\frac{1}{3} - \frac{1}{12})S = \frac{1}{4}S,$$

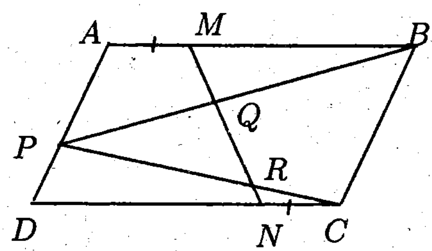
$$S_{ANM} = S_{AMDN} - S_{DMN} = (\frac{1}{3} - \frac{1}{24})S = \frac{7}{24}S$$

$$\Rightarrow \frac{BI}{IN} = \frac{S_{ABM}}{S_{ANM}} = \frac{6}{7} \text{ (xem bài tập 3.5).} \quad (2)$$

Xét ΔNAB, từ (2) ta có $S_{ABI} = \frac{6}{13}S_{NAB} = \frac{2}{13}S$. Vậy $S_{MIND} = \frac{2}{13}S$ □

Ví dụ 3.36. Cho hình bình hành $ABCD$. Trên cạnh AB, CD lần lượt lấy M, N sao cho $AM = CN$. Trên cạnh AD lấy điểm P bất kì. MN giao với BP, CP lần lượt tại Q, R. Chứng minh rằng $S_{QBCR} = S_{AMQP} + S_{PRND}$.

Giải



Hình 3.60.

$$AP \| BC \Rightarrow S_{PBC} = S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}, \quad (1)$$

$$AM = CN \Rightarrow AM + DN = BM + CN$$

$$\Rightarrow S_{AMND} = S_{BMNC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}. \quad (2)$$

Từ $(1), (2) \Rightarrow S_{PBC} = S_{AMND}$. Giả sử tấm thảm thứ nhất là tam giác PBC và tấm thảm thứ hai là tứ giác $AMND$. Ta có hai tấm thảm này diện tích bằng nhau. Phần nền nhà chỉ được phủ bởi tấm thứ nhất là $AMQP$ và $PRND$. Phần nền nhà chỉ được phủ bởi tấm thảm thứ hai là $QBCR$. Áp dụng nguyên lý trải thảm ta có

$$S_{AMQP} + S_{PRND} = S_{QBCR} \quad \text{(đpcm)}.$$

□

3.5 Bài tập và gợi ý lời giải

Bài tập 3.1. Tam giác ABC có diện tích 1. Trên các cạnh AB, BC, CA lần lượt lấy các điểm D, E, F sao cho $AD = DB, BE = 2EC, CF = \frac{1}{2} FA$. Tính diện tích ΔDEF.

Bài tập 3.2. Cho ΔABC. Trên các cạnh AB, BC, CA lần lượt lấy các điểm D, E, F sao cho các tam giác ADF, BDE, CEF có diện tích bằng nhau. Chứng minh $\frac{AD}{AB} = \frac{BE}{BC} = \frac{CF}{CA}$

Hướng dẫn

Đặt $x = \frac{AD}{AB}, y = \frac{BE}{BC}, z = \frac{CF}{CA}, (x, y, z \in [0, 1])$.
Chứng minh $S_{ADF} = x(1-z), S_{BDE} = y(1-x); S_{CEF} = z(1-y)$.
Giả sử, $x > max(y, z) \Rightarrow S_{ADF} > S_{BDF}$ (mâu thuẫn với giả thiết). Tương tự với y, z.
Từ đó, ta có đpcm. □

Bài tập 3.3. Xác định điểm G trong ΔABC sao cho $S_{GAB} = S_{GBC} = S_{GCA}$.

Hướng dẫn

$S_{GAB} = S_{GBC}, G$ nằm trong ΔABC do đó G thuộc trung tuyến AD. Tương tự, G thuộc trung tuyến BE. Vậy G là trọng tâm ΔABC. □

Bài tập 3.4. Chứng minh rằng trung điểm 2 cạnh đáy, giao hai đường chéo và giao hai cạnh bên của hình thang thẳng hàng.

Hướng dẫn

Cho hình thang $ABCD$, đáy $AB \| CD$, $O = AC \cap BD$, $I = AD \cap BC$. Ta có $\frac{AD}{AI} = \frac{BC}{BI}$. Chứng minh $S_{IOA} = S_{IOB}, S_{IOD} = S_{IOC}$. □

Bài tập 3.5. Cho ΔABC và số thực $k > 0$. Tìm tập hợp điểm M thoả mãn $S_{ABM} = kS_{ACM}$.

Bài tập 3.6. Cho tứ giác lồi $ABCD$ và số thực $k > 0$. Xác định tập hợp điểm M thoả mãn $S_{ABM} = kS_{ACM}$.

Bài tập 3.7. Cho ΔABC và số thực $S > 0$. Tìm tập hợp điểm M thoả mãn $S_{ABM} + S_{ACM} = S$.

Hướng dẫn

Xét điểm M nằm trong góc $\angle BAC$, tương tự với trường hợp M nằm trong các góc $\angle A_2, \angle A_3, \angle A_4$. Đường thẳng $AM \cap BC = M'$. Ta có:

$$S_{ABC} = S_{M'AB} + S_{M'AC},$$
$$\frac{S_{M'AB}}{S_{MAB}} = \frac{S_{M'AC}}{S_{MAC}} = \frac{AM'}{AM}$$
$$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S} = \frac{S_{ABC}}{S_{MAB} + S_{MAC}} = \frac{AM'}{AM}$$

$\Rightarrow M$ chạy trên đoạn DE với $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE} = \dfrac{S_{ABC}}{S}$.

Quỹ tích điểm M là hình bình hành $DED'E'$ ở đó D', E' đối xứng với D, E qua A. □

Bài tập 3.8. Cho tứ giác $ABCD$ và số thực $S > 0$. Tìm tập hợp điểm M thoả mãn $S_{MAB} + S_{MCD} = S$.

Hướng dẫn

Giả sử $AB \cap CD = I$. Lấy X, Y lần lượt trên AB, CD sao cho $IX = AB$, $IY = CD$. Khi đó $S_{MAB} = S_{MIX}$, $S_{MCD} = S_{MIY}$. Ta đưa bài toán về tìm điểm M thỏa mãn $S_{MIX} + S_{MIY} = S$ □

Bài tập 3.9. Cho hai đường thẳng d_1, d_2 không song song và số thực $k > 0$. Tìm quỹ tích điểm M sao cho tổng khoảng cách từ M đến d_1, d_2 bằng k.

Hướng dẫn

Đặt $A = d_1 \cap d_2$. Lấy B, C trên d_1, d_2 sao cho $AB = AC = 1$. Áp dụng bài tập 7 với $S = k$. □

Bài tập 3.10. Cho hình chữ nhật $ABCD, BC = a, CD = b$. Trên các cạnh BC, CD về phía ngoài hình chữ nhật dựng các tam giác đều BCM, CDN. Tính diện tích tam giác AMN.

Bài tập 3.11. Cho ΔABC nhọn, trực tâm H. Chứng minh rằng $S_{ABC} = \dfrac{1}{4}(AH \cdot BC + BH \cdot AC + CH \cdot AB)$. Nếu ΔABC tù kết quả trên còn đúng không?

Hướng dẫn

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Vì ΔABC nhọn nên H, O nằm trong ΔABC. Gọi I, J, K là trung điểm BC, CA, AB. Ta có

$$S_{ABC} = S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OAC}$$

Áp dụng ví dụ 1.5 ta có: $AH = 2OI$, $BH = 2OJ, CH = 2OK$. □

Bài tập 3.12. Các đỉnh của tam giác ABC nằm trên các cạnh của một tam giác có diện tích S. Chứng minh rằng diện tích của ΔABC không vượt quá $\dfrac{S}{2}$.

Bài tập 3.13. Trên cạnh AB, BC, CA của tam giác đều ABC lần lượt lấy các điểm P, Q, R sao cho $PQ \perp AB, QR \perp BC, RP \perp CA$. Tính tỉ số diện tích tam giác PQR và tam giác ABC.

Hướng dẫn

$\Delta PQR \sim \Delta ABC \Rightarrow \Delta PQR$ đều. Ta chứng minh được $AP = BQ = CR$. □

Bài tập 3.14. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Gọi K là giao điểm của hai đường chéo AC, BD. Gọi P, Q là trung điểm của AC, BD, M, N là trung điểm của AB, CD. Chứng minh rằng $S_{PMQN} = \dfrac{1}{2}|S_{AKB} - S_{CKD}|$.

Bài tập 3.15. Cho đường tròn (O, R) và hai dây cung không song song AB, CD. Đường vuông góc với AB kẻ từ A cắt đường vuông góc với CD kẻ từ C và từ D lần lượt tại M, P. Đường vuông góc với AB kẻ từ B cắt đường vuông góc với CD kẻ từ C và từ D lần lượt tại Q, N. Chứng minh rằng:

a. AD, BC, MN đồng quy.

b. AC, BD, PQ đồng quy.

Hướng dẫn

Chứng minh tương tự ví dụ 3.5 □

Bài tập 3.16. Cho ΔABC và 3 điểm P, Q, R lần lượt nằm trên AB, BC, CA. Các điểm A', B', C' lần lượt nằm trên RP, PQ, QR sao cho $AB \| A'B'$, $BC \| B'C'$, $CA \| C'A'$. Chứng minh rằng $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{S_{PQR}}{S_{A'B'C'}}$.

Hướng dẫn

$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. Đặt $k = \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CA}{C'A'}$. Ta có:

$$\frac{S_{PA'B'}}{S_{AA'B'B}} = \frac{S_{RA'C'}}{S_{AA'C'C}} = \frac{S_{QB'C'}}{S_{BB'C'C}} = \frac{1}{k+1}$$
$$\Rightarrow (k^2-1)S_{A'B'C'} = (S_{PQR} - S_{A'B'C'})(k+1).$$

□

Bài tập 3.17. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Gọi E là giao của AB và CD, F là giao của AD và BC. Chứng minh rằng trung điểm các đoạn AC, BD, EF thẳng hàng.

Hướng dẫn

Gọi M, N lần lượt là trung điểm AC, BD. Chứng minh $S_{EMN} = S_{FMN} (= \frac{1}{4}S_{ABCD})$.

Từ đó, áp dụng ví dụ 3.2 ta có MN đi qua trung điểm của EF. □

Bài tập 3.18. Cho hình bình hành $ABCD$. Lần lượt lấy các điểm M, N, P trên các đoạn BD, BC, CD sao cho $CNMP$ là hình bình hành. Gọi E, F lần lượt là giao điểm của BD vưới AN, AP. Chứng minh rằng $S_{AEF} = S_{BEN} + S_{DFP}$.

Hướng dẫn

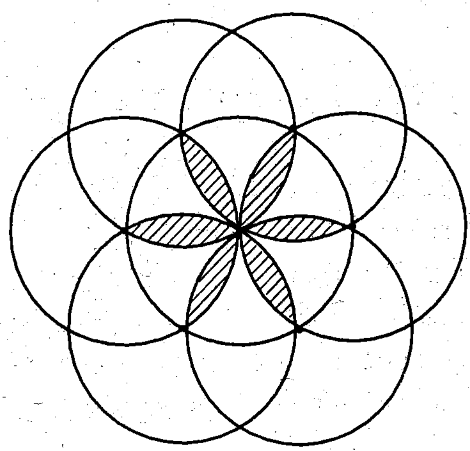
$S_{APM} = S_{DPM}$, $S_{AMN} = S_{BMN}$. □

Bài tập 3.19. Cho hình thang cân có một góc 45^o nội tiếp đường tròn (O, R). Các cạnh của hình thang hợp với đường tròn tạo thành bốn hình viên phân. Tính diện tích của các hình viên phân đó.

Bài tập 3.20. Để vẽ một bông hoa 6 cánh bé Yến vẽ đường tròn bán kính $5\,cm$. Sau đó em lấy 6 điểm A, B, C, D, E, F trên đường tròn sao cho 6 điểm này lập thành lục giác đều. Em vẽ về phía ngoài đường tròn ban đầu các nửa đường tròn đường kính AB, BC, CD, DE, EF, FA. Hình thu được là một bông hoa 6 cánh. Hãy tính diện tích của bông hoa đó.

Bài tập 3.21. Để vẽ một bông hoa 6 cánh bé Tun có cách như sau. Em vẽ đường tròn (O) bán kính 5 cm. Tun tiếp tục lấy điểm O_1 bất kì trên đường tròn (O) và vẽ đường tròn tâm O_1 bán kính 5 cm. Đường tròn (O_1) cắt (O) tại hai điểm, Tun chọn một trong hai điểm, chẳng hạn (O_2) rồi lại vẽ đường tròn tâm (O_2) bằng các đường tròn trên, rồi lại chọn giao điểm của (O_2) với (O). Cứ như thế cho đến khi các đường tròn tạo thành trùng với các đường tròn cũ. Lúc ấy em có một bông hoa 6 cánh nằm ở giữa đường tròn (O) (H3.61).

Hãy tính diện tích của bông hoa đó



Hình 3.61.

Bài tập 3.22. Cho tứ giác $ABCD$. Các điểm M, N, P, Q lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DA. Đặt $X = AP \cap BQ$, $Y = BQ \cap CM$, $Z = CM \cap DN$, $T = DN \cap AP$. Chứng minh rằng:

$$S_{XYZT} = S_{AQX} + S_{BMY} + S_{CNZ} + S_{DPT}.$$

Hướng dẫn

Áp dụng nguyên lý trải thảm với tứ giác $BNDQ$ và tứ giác $AMCP$. □

Chương 4

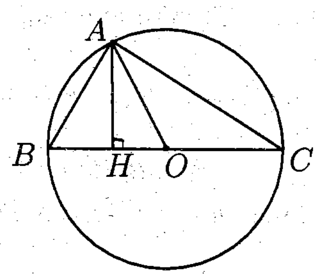
Cực trị hình học

4.1 Bài toán cực trị hình học

Độ lớn của một góc, độ dài của một đoạn thẳng, chu vi hay diện tích của một hình phẳng,... gọi là những đại lượng hình học. Vì gắn liền với các hình phẳng nên các đại lượng hình học thường bị chặn. Bài toán tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của đại lượng hình học gọi là bài toán cực trị hình học. Trong mục này chúng tôi chỉ giới thiệu một số bài toán cực trị hình học cơ bản thường gặp vì không có một phương pháp chung nào dùng cho mọi trường hợp.

Ví dụ minh họa

Ví dụ 4.1. Tìm diện tích lớn nhất của tam giác vuông nội tiếp trong một đường tròn cố định.



Hình 4.1.

Giải

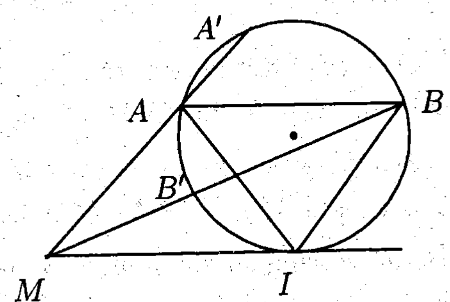
Gọi ABC là tam giác vuông đỉnh A nội tiếp trong đường tròn (O,R). Vì BC là đường kính nên $BC = 2R = const$. Kẻ $AH \perp AB$. Gọi diện tích ΔABC là S, ta có $S = R \cdot AH$. Mặt khác, ta có $AH \leq AO = R, AH = R \Leftrightarrow A$ là trung điểm của cung $\overset{\frown}{BC}$.

Vậy $S_{max} = R^2$ khi A là trung điểm cung $\overset{\frown}{BC}$. □

Ví dụ 4.2. Cho đường thẳng d và hai điểm A, B ở ngoài về một phía của đường thẳng d. Tìm trên đường thẳng d điểm M sao cho $\angle AMB$ đạt giá trị lớn nhất.

Giải

- Xét trường hợp $AB \parallel d$



Hình 4.2.

Vẽ đường tròn (ω) qua A, B và tiếp xúc với d ở I. Ta có I cố định và $\angle AIB$ nhận giá trị không đổi. Đặt $\angle AIB = \alpha$.

Với mọi điểm $M \in d, M \not\equiv I, MA, MB$ cắt đường tròn (ω) tại A', B'.

Ta có

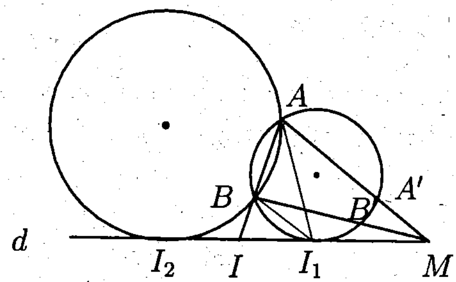
$$\angle AMB = |\frac{1}{2}\text{sđ}(\overset{\frown}{A'B} - \overset{\frown}{AB'})|$$

$$\angle AMB \leq |\frac{1}{2}\text{sđ}(\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{AB'})| \leq \alpha.$$

$$\Rightarrow \angle AMB \leq \angle AIB, \text{ dấu "=" xảy ra khi } M \equiv I.$$

- Xét trường hợp $AB \not\parallel d$. Giả sử $AB \cap d = I$. Dựng đường tròn $(\omega_1), (\omega_2)$ qua A, B và tiếp xúc với d ở I_1, I_2. Ta xét hai trường hợp điểm M trên đường thẳng d thuộc tia II_1 hay tia II_2.

  i) $M \in$ tia II_1. Đặt $\angle AI_1B = \alpha_1$. Các tia MA, MB cắt đường tròn (ω_1) ở A', B', ta có



Hình 4.3.

$$\angle AMB = \frac{1}{2}\text{sđ}(\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{A'B'}) \leq \alpha_1$$

$$\Rightarrow \angle AMB \leq \angle AI_1B, \text{ dấu "=" xảy ra khi } M \equiv I_1. \quad (1)$$

ii) $M \in II_2$. Xét đường tròn (ω_2), đặt $\angle AI_2B = \alpha_2$. Tương tự trên ta có nếu $M \not\equiv I_2$ thì $\angle AMB < \alpha_2$. (2)

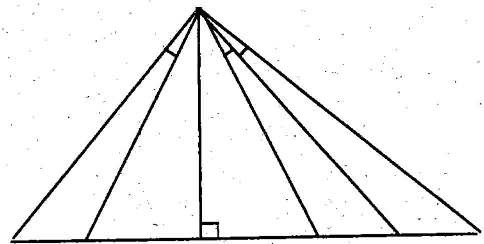
Từ (1), (2) suy ra nếu $\alpha_1 > \alpha_2$ thì $\forall M \in d$ ta có $\angle AMB \leq \alpha_1$ và $\angle AMB = \alpha_1$ khi $M \equiv I_1$. Vậy I_1 là điểm cần tìm.

Nếu $AB \perp d$, dễ dàng chứng minh được hai đường tròn (ω_1), (ω_2) bằng nhau và $\alpha_1 = \alpha_2$. Khi đó, cực đại của $\angle AMB$ đạt tại vị trí $M \equiv I_1$ hoặc $M \equiv I_2$.

□

Ví dụ 4.3. Cho đường thẳng d và điểm A cố định không thuộc đường thẳng đó. Xét góc $\angle xAy$ có độ lớn bằng α không đổi, quay xung quanh đỉnh A sao cho hai cạnh của góc cắt đường thẳng d ở M, N. Tìm vị trí của góc để MN có độ dài nhỏ nhất.

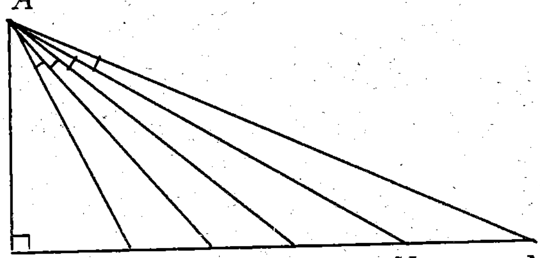
Giải



Hình 4.4.

- $\alpha \geq 90^o$. Kẻ $AH \perp d$, ta có M, N nằm về hai phía của H. Ta sẽ chứng minh rằng M, N có độ dài nhỏ nhất khi M, N đối xứng nhau qua H, nghĩa là nếu M_0, N_0 là vị trí của M, N sao cho $HM_0 = HN_0$ thì M_0N_0 nhận giá trị không đổi và $MN \geq M_0N_0$ với mọi vị trí của M, N.
  Thật vậy, giả sử $HN > HM$. Lấy M' đối xứng của M qua H thì $\angle MAH = \angle M'AH$. Vì $\angle M_0AN_0 < \angle MAN$ nên AN_0 là phân giác góc $M'AN$. Do $AM' < AN$ nên $N_0M' < N_0N$.
  Vì M_0 là điểm đối xứng của N_0 qua H nên $MM_0 = M'N_0$. Từ đó ta có $M_0N_0 < MN$.

- $\alpha < 90^o$.



Hình 4.5.

Nếu M, N nằm về hai phía của H thì lập luận tương tự như trường hợp trên ta có độ dài M, N nhỏ nhất khi M, N đối xứng nhau qua H. Vậy để kết luận MN nhỏ nhất khi và chỉ khi M, N đối xứng qua H, ta chỉ cần chứng minh nếu M, N nằm về một phía của H thì tồn tại trường hợp M_1, N_1 nằm về hai phía của H sao cho $MN > M_1N_1$. Thật vậy, xét trường hợp M, N nằm về một phía của H. Đường phân giác góc $\angle MAN$ cắt MN ở N_1. Kẻ AM_1 hợp với AM góc $\frac{\alpha}{2}$ về phía điểm H. Áp dụng tính chất đường phân giác ta có:

$$M_1M < MN_1 < NN_1 \Rightarrow M_1N_1 < MN. \quad (1)$$

Lấy M_2 trên tia M_1H sao cho AM_2 hợp với AM_1 góc $\frac{\alpha}{2}$, ta có:

$$M_2M < M_1N_1, \ \angle M_2AN = \alpha.$$

Nếu M_2, M_1 ở cùng một phía với H, ta tiếp tục lấy điểm M_3 thoả mãn $M_3AN_2 = \frac{\alpha}{2}$. Ta lại có:

$$M_3M_1 < M_2M, \ \angle M_3AM_1 = \alpha.$$

Quá trình trên cứ tiếp tục cho đến khi có điểm M_k, M_{k-1} nằm khác phía đối với điểm H và ta có:

$$M_kM_{k-2}, M_{k-1}M_{k-3} < \ldots < MN$$

và M_k, M_{k-2} nằm khác phía đối với H.
Đến đây bài toán được chứng minh.

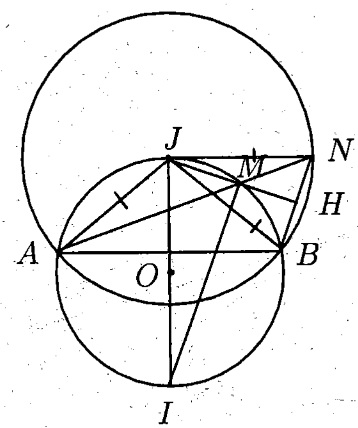
□

Ví dụ 4.4. Cho đường tròn (O, R) và dây cung AB cố định $(AB < 2R)$. Trên cung lớn $\overset{\frown}{AB}$ lấy điểm M. Tìm vị trí của M để chu vi tam giác MAB đạt giá trị lớn nhất.

Giải

Trên tia đối của tia AM lấy điểm N sao cho $MN = MB$. Khi đó chu vi ΔAMB bằng $2p = AN + AB$. Do $AB = const$ nên chu vi ΔAMB đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi AN lớn nhất.

ΔBMN cân tại M và phân giác MH của góc $\angle BMN$ là phân giác ngoài của góc $\angle AMB$. Vì phân giác trong của $\angle AMB$ là MI (I là trung



Hình 4.6.

điểm cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$) nên $\angle HMI = 90^o$. Do đó, MH cắt đường tròn (O) tại J và IJ là đường kính của đường tròn (O) (J là trung điểm cung lớn $\overset{\frown}{AB}$).

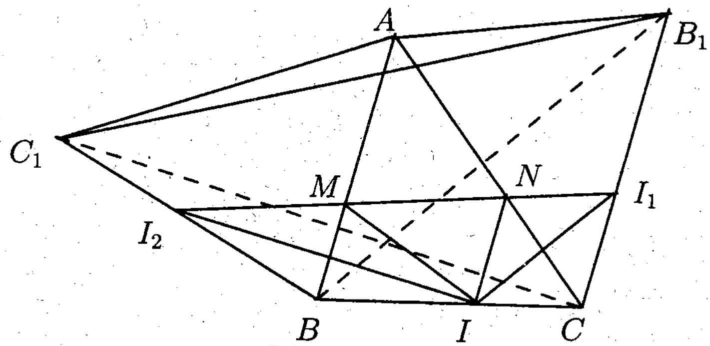
Mặt khác, ΔBMN cân tại M nên MJ là đường trung trực của BN. Từ đó ta có $JA = JB = JN$ và N thuộc đường tròn cố định (J) tâm J bán kính JA. Khi đó AN là dây cung của đường tròn (J) do đó AN đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi AN là đường kính của (J) hay $M \equiv J$.

Vậy chu vi ΔMAB đạt giá trị lớn nhất khi M trùng với trung điểm J của cung lớn $\overset{\frown}{AB}$. □

Ví dụ 4.5. Cho ΔABC có $\angle A < 60^o$. Trên cạnh BC lấy điểm I cố định. Tìm trên cạnh AB, AC hai điểm M, N để chu vi ΔIMN đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải

Gọi B_1 là điểm đối xứng với B qua AC. Khi đó ΔAB_1C đối xứng với ΔABC qua AC. Do đó điểm I có điểm đối xứng qua AC là I_1 nằm trên đoạn B_1C. Tương tự gọi C_1 là điểm đối xứng của C qua AB thì ΔAC_1B đối xứng với ΔACB qua AB. Do đó điểm I có điểm đối xứng qua AB là I_2 nằm trên đoạn C_1B. I_1, I_2 là hai điểm cố định. Từ đó, $\forall M \in AB, N \in AC$ ta có: $MI_2 = MI$, $NI_1 = NI \Rightarrow$ chu vi ΔIMN bằng $2p = MI_2 + MN + NI_1 \Rightarrow p \geq I_1I_2$. Vậy chu vi ΔIMN đạt giá trị



Hình 4.7.

nhỏ nhất bằng I_1I_2 khi I_2, M, N, I_1 thẳng hàng hay M, N là giao của I_1I_2 với các cạnh AB, AC. □

4.2 Sử dụng bất đẳng thức đại số tìm cực trị hình học

4.2.1 Một vài bất đẳng thức đại số hay dùng trong hình học

1. Bất đẳng thức Côsi

Cho hai số không âm x, y. Ta có

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}.$$

Hệ quả. Cho hai số không âm x, y.

1) Nếu $x + y = a$ (a là hằng số) thì tích xy đạt cực đại khi $x = y = \frac{a}{2}$ và $\max(xy) = \frac{a^2}{4}$.

2) Nếu $xy = a^2$ ($a \geq 0$ là hằng số) thì tổng $x + y$ đạt cực tiểu khi $x = y = a$ và $\min(x + y) = 2a$.

2. Bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki

Cho hai bộ số (a,b,c), (x,y,z), ta có

$$(ax + by + cx)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2).$$

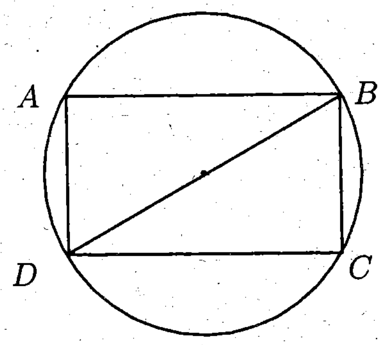
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$.

Hệ quả. Cho ba số x, y, z, khi đó $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}(x + y + z)^2$.

4.2.2 Ví dụ minh họa

Ví dụ 4.6. Cho đường tròn (O, R). $ABCD$ là hình chữ nhật nội tiếp trong đường tròn. Chứng tỏ rằng diện tích hình chữ nhật lớn nhất khi nó là hình vuông.

Giải



Hình 4.8.

Gọi diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là S. Ta có $S = AB \cdot AD$.

Vì $\angle BAD = 90^o$ nên BD là đường kính đường tròn. Từ đó ta có:

$$AB^2 + AD^2 = BD^2 = 4R^2,$$

$$S = \sqrt{AB^2 \cdot AD^2} \overset{\text{Côsi}}{\leq} \frac{AB^2 + AD^2}{2} = 2R^2.$$

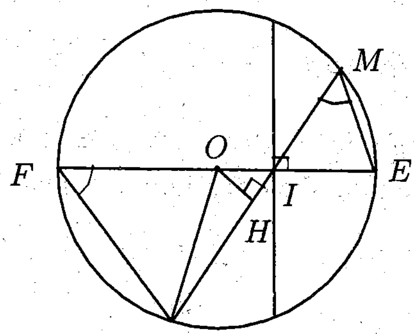
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $AB = AD$.

Vậy $\max S_{ABCD} = 2R^2$ khi $ABCD$ là hình vuông. □

Ví dụ 4.7. Trong đường tròn (O, R) cho điểm I cố định với $OI = \frac{R}{3}$, MN là dây cung bất kỳ qua I. Tìm giá trị nhỏ nhất của độ dài dây cung MN.

Giải

Cách 1.



Hình 4.9.

Kẻ EF là đường kính qua I (E, I cùng phía đối với O).Ta có:

$$\Delta IME \sim \Delta IFN(g.g) \Rightarrow \frac{IM}{IF} = \frac{IE}{IN} \Rightarrow IM \cdot IN = IE \cdot IF,$$

$$IE = R - \frac{R}{3}, IF = R + \frac{R}{3} \Rightarrow IE \cdot IF = (R - \frac{R}{3})(R + \frac{R}{3}) = \frac{8R^2}{9}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

$$MN = IM + IN \geq 2\sqrt{IM \cdot IN} = 2\sqrt{\frac{8R^2}{9}} = \frac{4\sqrt{2}R}{3}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $IM = IN \Leftrightarrow MN \perp OI$.

Vậy $\min(MN) = \dfrac{4\sqrt{2}R}{3}$ khi dây cung MN vuông góc với OI.

Cách 2.

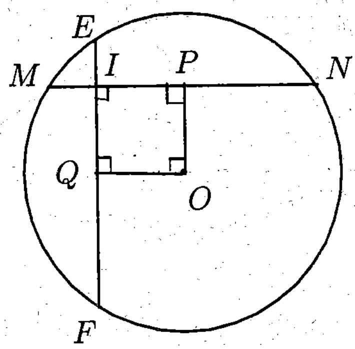
Kẻ $OH \perp MN$. Vì H là trung điểm MN nên MN nhỏ nhất khi NH nhỏ nhất. Xét tam giác vuông OHN ta có $HN^2 = R^2 - OH^2$ nên NH nhỏ nhất khi OH lớn nhất. Vì H là hình chiếu của O trên MN nên $OH \leq OI$ nên OH lớn nhất khi $H \equiv I$ hay $OI \perp MN$ tại I.

$$MN_{\min} = 2NH_{\min} = 2\sqrt{R^2 - (\frac{R}{3})^2} = 2\sqrt{\frac{8R^2}{9}} = \frac{4\sqrt{2}R}{3}.$$

□

Ví dụ 4.8. Trong đường tròn (O, R) cho điểm I cố định, $OI = a$ (0 < a<R). MN, EF là hai dây cung bất kỳ vuông góc với nhau tại I. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tứ giác $MENF$.

Giải



Hình 4.10.

Gọi S là diện tích tứ giác $MENF$. Vì $MN \perp EF \Rightarrow S = \frac{1}{2} MN \cdot EF$.

Từ O kẻ $OP \perp MN, OQ \perp EF$ thì P, Q là trung điểm MN, EF. Ta có:

$$MN = 2\sqrt{R^2 - OP^2},\ EF = 2\sqrt{R^2 - OQ^2},\ OP^2 + OQ^2 = OI^2 = a^2,$$

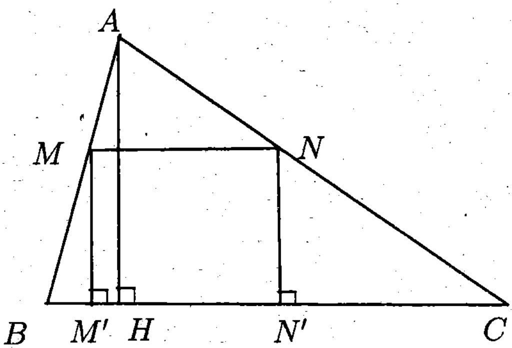
$$\begin{aligned} S &= 2\sqrt{(R^2 - OP^2)(R^2 - OQ^2)} \\ &\overset{\text{Côsi}}{\leq} 2 \cdot \frac{1}{2}[(R^2 - OP^2) + (R^2 - OQ^2)] \\ &= 2R^2 - (OP^2 + OQ^2) = 2R^2 - a^2. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $OP = OQ$ hay tứ giác $IPOQ$ là hình vuông.

Vậy $\max S = 2R^2 - a^2$ khi $IPOQ$ là hình vuông. □

Ví dụ 4.9. Cho tam giác nhọn ABC. Trên cạnh AB lấy điểm M bất kỳ. Kẻ MN song song với $BC (N \in AC)$. Gọi M', N' là hình chiếu của M, N trên BC. Tìm vị trí của M để diện tích hình chữ nhật $MNN'M'$ đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị đó biết rằng diện tích ΔABC là s.

Giải



Hình 4.11.

Gọi S là diện tích hình chữ nhật $MNN'M'$, ta có $S = MN \cdot MM'$. AH là đường cao của ΔABC. Áp dụng định lý Talét ta có:

$$\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB}, \frac{MM'}{AH} = \frac{MB}{AB}$$

$$\Rightarrow \frac{MN}{BC} + \frac{MM'}{AH} = \frac{AM + MB}{AB} = 1.$$

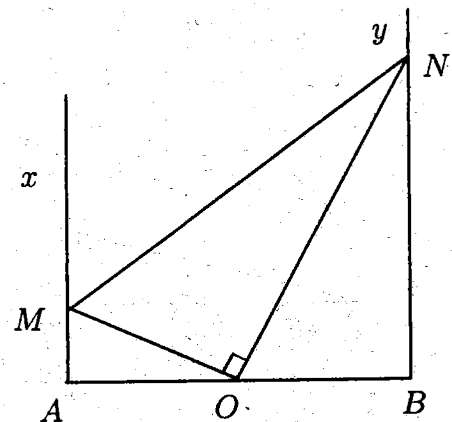
$$S = BC \cdot AH \cdot \frac{MN}{BC} \cdot \frac{MM'}{AH} \overset{\text{Côsi}}{\leq} \frac{1}{4} BC \cdot AH = \frac{1}{2} S_{ABC} = \frac{1}{2} s$$

Dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{MM'}{AH} = \dfrac{1}{2}$ hay M là trung điểm BC.

Vậy $S_{\max} = \dfrac{s}{2}$ khi M là trung điểm BC. □

Ví dụ 4.10. Cho đoạn thẳng $AB = 2a$. O là trung điểm AB. Hai tia Ax, By cùng vuông góc với AB và nằm cùng phía đối với đường thẳng AB. Trên Ax, By lần lượt lấy M, N sao cho $\angle MON = 90^o$. Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích ΔOMN khi M chạy trên Ax.

Giải



Hình 4.12.

Ta có:

$$\Delta AOM \sim \Delta BNO \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AM}{OB} = \frac{OA}{BN}$$

$$\Rightarrow AM \cdot BN = OA \cdot OB = a^2 = const.$$

Mặt khác, $S_{OMN} = \frac{1}{2}S_{ABMN}$. Do đó ta có

$$\begin{aligned} S_{OMN} &= \frac{1}{2}AB \cdot \frac{AM+BN}{2} = \frac{1}{4}AB \cdot (AM+BN) \\ &\overset{\text{Côsi}}{\geq} \frac{1}{4}AB \cdot (2\sqrt{AM \cdot BN}) \\ &= \frac{1}{4} \cdot 2a \cdot 2a = a^2. \end{aligned}$$

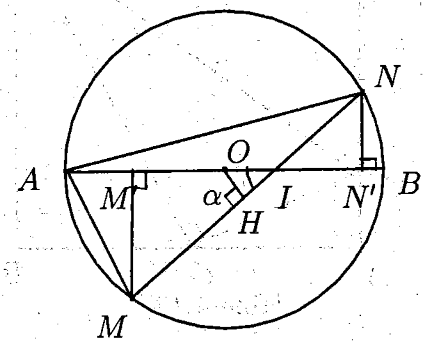
Vậy $\min S_{OMN} = a^2$ khi $AM = BN = a$. □

Nhận xét: Phương pháp áp dụng các bất đẳng thức đại số để tìm cực trị hình học tuy rất tiện lợi, song vì các điều kiện ràng buộc của đại lượng hình học có lúc không tìm được trường hợp đạt cực trị mà bất đẳng thức đại số đã chỉ ra. Khi đó, bài toán tìm cực trị hình học phải được giải theo một hướng khác.

Ta xét một ví dụ minh họa cho trường hợp này.

Ví dụ 4.11. Cho đường tròn (O, R) có đường kính AB cố định. Trên OB lấy I cố định, $OI = a (0 < a < R)$. MN là dây cung bất kỳ đi qua I. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích ΔAMN.

Giải



Hình 4.13.

Gọi M', N' lần lượt là hình chiếu vuông góc của M, N trên AB. Ta có

$$S_{AMN} = S_{AIM} + S_{AIN} = \frac{1}{2}AI \cdot MM' + \frac{1}{2}AI \cdot NN'.$$

Đặt $\angle AIM = \alpha$, ta có:

$$MM' = IM \cdot \sin\alpha,\ NN' = IN \cdot \sin\alpha$$

$$\Rightarrow S_{AMN} = \frac{1}{2}AI \cdot (IM\sin\alpha + IN\sin\alpha)$$

$$= \frac{1}{2}AI \cdot \sin\alpha \cdot (IM + IN)$$

$$= \frac{1}{2}AI \cdot MN\sin\alpha.$$

Kẻ $OH \perp MN$. Đặt $OH = x$, ta có $MN = 2\sqrt{R^2 - x^2}$.

Xét ΔOHI ta có $\sin\alpha = \dfrac{OH}{OI} = \dfrac{x}{a}$.

Vậy $S_{AMN} = \dfrac{1}{2}(R+a)\dfrac{x}{a}2\sqrt{R^2 - x^2} = \dfrac{R+a}{a}\sqrt{x^2(R^2 - x^2)}$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$S_{AMN} \le \frac{R+a}{a} \cdot \frac{x^2 + (R^2 - x^2)}{2} = \frac{R+a}{a} \cdot \frac{R^2}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x^2 = R^2 - x^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$. Mặt khác, ΔOHI vuông nên $OH \le OI$ hay $x \le a$. Xét hai trường hợp:

- $a \geq \dfrac{R}{\sqrt{2}}$

  $$\max S_{AMN} = \frac{R+a}{a} \cdot \frac{R^2}{2} \text{ khi } x = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

- $a < \dfrac{R}{\sqrt{2}}$.

  Đặt $t = x^2, (0 < t \leq a^2)$, ta có

  $$S_{AMN} = \frac{R+a}{a}\sqrt{t(R^2-t)} = \frac{R+a}{a}\sqrt{(-t^2+R^2\cdot t)}$$

  nên S_{AMN} đạt giá trị lớn nhất khi $(-t^2 + R^2 \cdot t)$ đạt giá trị lớn nhất.

  Xét hàm số $f(t) = -t^2 + R^2 t$, ta có f đồng biến trong khoảng $(-\infty, \frac{R^2}{2}) \Rightarrow f$ đồng biến trong khoảng $(0, a^2]$.
  Vậy $\max S_{AMN} = (R+a)\sqrt{R^2 - a^2}$ khi $x = a$.

□

4.3 Sử dụng các tính chất hình học đơn giản tìm cực trị

4.3.1 Các tính chất hình học đơn giản

Trong tiết này chúng ta sử dụng các tính chất hình học đơn giản để tìm cực trị.
1. Đoạn thẳng nối hai điểm cho trước có độ dài bé nhất so với độ dài các đường gấp khúc tuỳ ý nối hai điểm đó. Từ đó dễ thấy trong một tam giác, "bất đẳng thức tam giác" là trường hợp riêng:

- $AB + BC \geq AC$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi B nằm trên *đoạn* AC.

- $AB - BC \leq AC$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi B nằm trên *tia* AC.

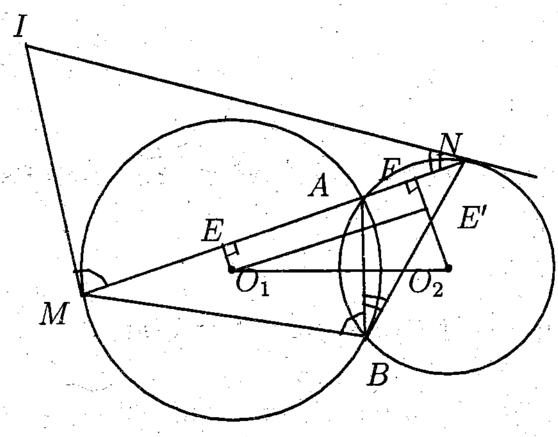
2. Trong một đường tròn, đường kính là dây cung lớn nhất.

3. Cho đường tròn (O, R) và điểm A. Đường thẳng AO cắt đường tròn tại hai điểm M_1, M_2. Giả sử $AM_1 < AM_2$. Khi đó, với mọi điểm M trên đường tròn ta có: $AM_1 \leq AM \leq AM_2$.

4.3.2 Ví dụ minh họa

Ví dụ 4.12. Hai đường tròn $\omega_1(O_1, R_1), \omega_2(O_2, R_2)$ giao nhau tại A, B. Đường thẳng d bất kỳ đi qua A cắt ω_1 tại M, cắt ω_2 tại N. Tiếp tuyến tại M của ω_1 và tiếp tuyến tại N của ω_2 giao nhau tại I. Tìm giá trị lớn nhất của bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔIMN khi d quay quanh A.

Giải



Hình 4.14.

Xét tứ giác $IMBN$ ta có:

$$\angle ABM = \angle AMI,\ \angle ABN = \angle ANI \text{ (góc giữa tiếp tuyến và dây cung)}$$
$$\Rightarrow \angle MIN + \angle MBN = 180^o \Rightarrow \text{ tứ giác } IMBN \text{ nội tiếp.}$$

Mặt khác, xét ΔMBN ta có $\angle AMB, \angle ANB$ nhận giá trị không đổi $\Rightarrow \angle MBN$ không đổi. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔIMN ta có ΔOMN cân và $\angle MON = 2\angle MIN = const.$

Vậy khi d thay đổi ta có các tam giác OMN nhận được đồng dạng với nhau nên bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔIMN lớn nhất khi MN lớn nhất.

Kẻ $O_1E \perp AM, O_2F \perp AN \Rightarrow MN = 2EF$. Xét tam giác vuông O_1EF ta có:

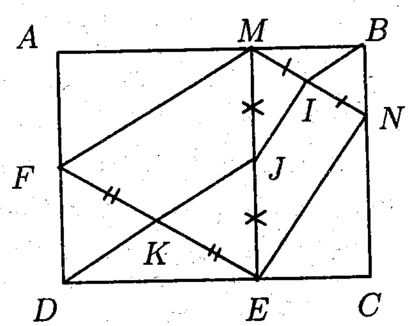
$$EF = O_1F \leq O_1O_2.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $EF \overset{\parallel}{=} O_1O_2 \Rightarrow d \| O_1O_2$.

Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác IMN đạt giá trị lớn nhất khi đường thẳng d song song với O_1O_2. □

Ví dụ 4.13. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA của hình chữ nhật $ABCD$ lần lượt lấy các điểm M, N, E, F. Tìm vị trí bốn điểm đó để chu vi tứ giác $MNEF$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải



Hình 4.15.

Ta chứng minh kết quả phụ sau:

Cho điểm M cố định. Khi chu vi tứ giác $MNEF$ đạt giá trị nhỏ nhất ta có $MNEF$ là hình bình hành có các cạnh song song với các đường chéo của hình chữ nhật $ABCD$.

Thật vậy, gọi I, J, K lần lượt là trung điểm MN, ME, EF, ta có:

$$IB = \frac{1}{2}MN,\ IJ = \frac{1}{2}NE,\ JK = \frac{1}{2}MF,\ DK = \frac{1}{2}EF$$

(hệ thức lượng trong tam giác vuông).

Vậy chu vi tứ giác $MNEF$ bằng

$$2p = 2(BI + IJ + JK + KD) \geq 2BD.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi B, I, J, K, D theo thứ tự nằm trên một đường thẳng $\Rightarrow MF \| NE \| BD$.

Tương tự, ta có để chu vi tứ giác $MNEF$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $MN \parallel EF \parallel AC$. Vậy chu vi $MNEF$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $MNEF$ là hình bình hành có cạnh song song với đường chéo của hình chữ nhật $ABCD$ (kết quả phụ được chứng minh).

Từ chứng minh trên ta nhận thấy, nếu tứ giác $MNEF$ có các cạnh song song với các đường chéo của hình chữ nhật $ABCD$ thì chu vi của nó là $p = 2BD = const$, không phụ thuộc vào cách lấy điểm M trên cạnh AB.

Vậy chu vi tứ giác $MNEF$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $2BD$ khi $MNEF$ là hình bình hành có các cạnh song song với các đường chéo của hình chữ nhật $ABCD$. □

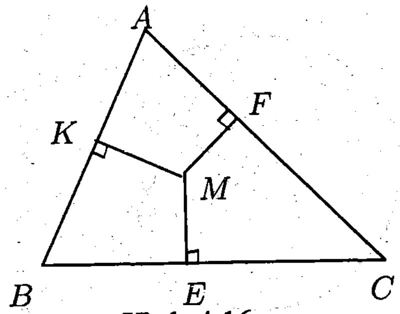
Ví dụ 4.14. Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$. M là một điểm thuộc miền trong ΔABC. Gọi E, F, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên BC, CA, AB. Xác định vị trí điểm M để tích $ME \cdot MF \cdot MK$ đạt giá trị lớn nhất.

Giải

Ta có:

$$2S_{ABC} = 2(S_{MBC} + S_{MCA} + S_{MAB}) = a \cdot ME + b \cdot MF + c \cdot MK.$$

Do đó, áp dụng bất đẳng thức Cô-si với bộ 3 số $a \cdot ME, b \cdot MF, c \cdot MK$



Hình 4.16.

ta có:

$$\begin{aligned} a\cdot b\cdot c\cdot ME\cdot MF\cdot MK &= (a\cdot ME)\cdot(b\cdot MF)\cdot(c\cdot MK)\\ &\le \frac{1}{27}(a\cdot ME+b\cdot MF+c\cdot MK)^3\\ &= 8S_{ABC}^3\end{aligned}$$

$$\Rightarrow ME\cdot MF\cdot MK \le \frac{8S_{ABC}^3}{abc}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$a\cdot ME = b\cdot MF = c\cdot MK \Leftrightarrow S_{MBC} = S_{MCA} = S_{MAB} \Leftrightarrow M$$

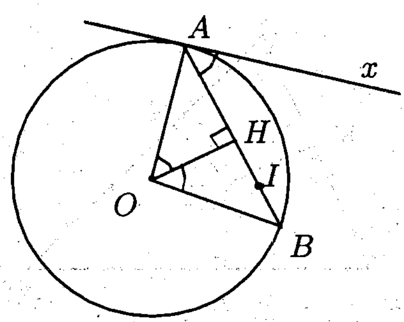
là trọng tâm ΔABC.

Vậy $\max(ME\cdot MF\cdot MK) = \dfrac{8S_{ABC}^3}{abc}$ khi M là trọng tâm ΔABC. □

Ví dụ 4.15. Cho đường tròn (O,R) và điểm I cố định nằm trong đường tròn.Tìm trên đường tròn điểm A sao cho góc giữa IA và tiếp tuyến tại A của đường tròn là nhỏ nhất.

Giải

Kéo dài AI cắt đường tròn ở B. $\angle BAx = \dfrac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{AB} \Rightarrow \angle BAx$ đạt giá trị nhỏ nhất khi sđ $\overset{\frown}{AB}$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow AB$ đạt giá trị nhỏ nhất.



Hình 4.17.

Kẻ $OH \perp AB$, ta có $AB = 2\sqrt{R^2 - OH^2} \Rightarrow AB$ đạt giá trị nhỏ nhất khi OH đạt giá trị lớn nhất.

Xét tam giác vuông OHI ta có $OH \leq OI$ và $OH = OI \Leftrightarrow AB \perp OI$.

Vậy góc giữa IA và tiếp tuyến tại A đạt giá trị nhỏ nhất khi A là giao điểm của đường thẳng vuông góc với OI tại I với đường tròn ω. Bài toán có hai nghiệm hình. □

Ví dụ 4.16. Cho tam giác ABC cân đỉnh A. Gọi O là trung điểm BC. Đường tròn (O) tiếp xúc với AB ở E, tiếp xúc với AC ở F. Điểm H chạy trên cung nhỏ $\overset{\frown}{EF}$, tiếp tuyến của đường tròn tại H cắt AB, AC lần lượt tại M, N. Xác định vị trí của điểm H để diện tích ΔAMN đạt giá trị lớn nhất.

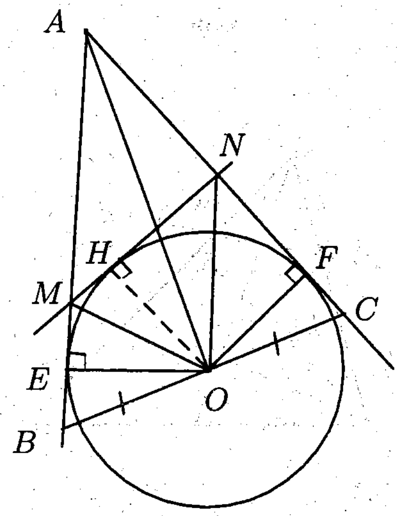
Giải

Dễ thấy OM, ON lần lượt là phân giác góc $\angle EOH$, $\angle FOH$. Từ đó ta có:

$$\angle MON = \frac{180^o - \angle BAC}{2} = \angle ABC \Rightarrow \Delta MBO \sim \Delta OCN \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{MB}{OC} = \frac{BO}{CN} \Rightarrow BM \cdot CN = OB \cdot OC = \frac{BC^2}{4} = const. \quad (1)$$

Ta lại có $S_{AMN} = S_{ABC} - S_{BMNC}$ nên S_{AMN} đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi S_{BMNC} đạt giá trị nhỏ nhất. Gọi R là bán kính đường tròn (O),



Hình 4.18.

ta có:

$$\begin{aligned}
S_{BMNC} &= S_{BOM} + S_{MON} + S_{NOC} \\
&= \frac{1}{2}R(BM + MN + NC) \\
&= \frac{1}{2}R[BE + CF + 2(EM + FN)] \qquad (MN = EM + FN) \\
&= R(BE + EM + FN) \qquad (BE = CF) \\
&= R(BE + BM + CN - 2BE) = R(BM + CN - BE) \qquad (2)
\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, từ (1) và (2) suy ra

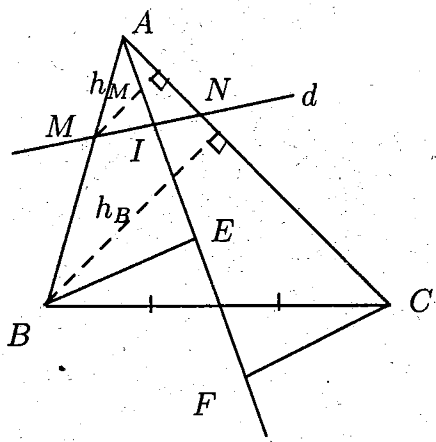
$$S_{BMNC} \geq R(\sqrt{BM \cdot CN} - BE) = R(\frac{BC}{2} - BE)$$

Dấu "= " xảy ra khi và chỉ khi $BM = CN \Leftrightarrow MN \| BC$ khi và chỉ khi H là giao điểm của đường trung trực của BC với đường tròn (O).

Vậy diện tích ΔAMN đạt giá trị lớn nhất khi H là giao của đường trung trực của BC với đường tròn (O). □

Ví dụ 4.17. Cho ΔABC, trên trung tuyến AD lấy điểm I cố định. Đường thẳng d đi qua I lần lượt cắt cạnh AB, AC tại M, N. Tìm vị trí của đường thẳng d để diện tích ΔAMN đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải



Hình 4.19.

Từ B, C dựng các đường thẳng song song với d, lần lượt cắt tia AD tại E, F. Dễ thấy $\Delta BED = \Delta CFD$ nên $DE = DF$ hay $AE + AF = 2AD$. Ta có:

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AE}{AI}, \frac{AC}{AN} = \frac{AF}{AI}$$
$$\Rightarrow \frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN} = \frac{AE + AF}{AI} = 2\frac{AD}{AI} = const.$$

Gọi h_B, h_M là khoảng cách từ B, M đến AC. Áp dụng định lý Talét, ta có $\dfrac{h_B}{h_M} = \dfrac{AB}{AM}$.

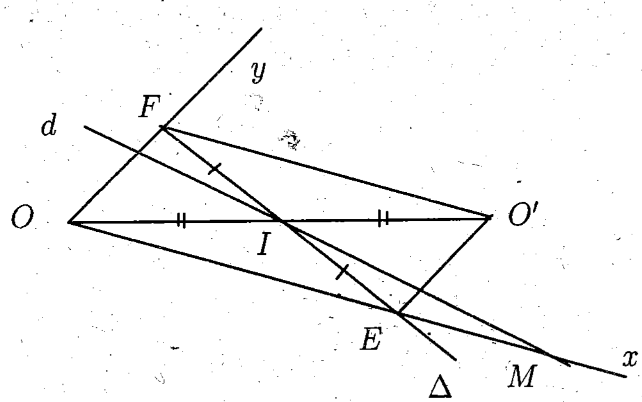
$$\frac{S_{ABC}}{S_{AMN}} = \frac{\frac{1}{2}AC \cdot h_B}{\frac{1}{2}AN \cdot h_M} = \frac{AC}{AN} \cdot \frac{AB}{AM} \leq (\frac{\frac{AC}{AN} + \frac{AB}{AM}}{2})^2 = \frac{AD^2}{AI^2}$$
$$\Rightarrow S_{AMN} \geq S_{ABC} \cdot \frac{AI^2}{AD^2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AC}{AN} \Leftrightarrow MN \| BC$.

Vậy $\min(S_{AMN}) = S_{ABC} \cdot \dfrac{AI^2}{AD^2}$ khi d là đường thẳng đi qua I và song song với BC. □

Ví dụ 4.18. Cho góc nhọn xOy và điểm I cố định nằm ở trong góc đó. Đường thẳng d đi qua I và cắt Ox, Oy lần lượt tại M, N. Xác định đường thẳng d để diện tích ΔOMN đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải



Hình 4.20.

Trước hết ta dựng đường thẳng Δ đi qua I cắt Ox, Oy tại E, F sao cho $IE = IF$ (*). Ta dựng đường thẳng Δ như sau:

Lấy O' là đối xứng của O qua I. Từ O' kẻ đường thẳng song song với Ox cắt Oy tại F, song song với Oy cắt Ox tại E. Vì $OEO'F$ là hình bình hành nên $OO' \cap EF = I$ là trung điểm của E. Lấy Δ là đường thẳng EF, ta có Δ thoả mãn điều kiện (*), Δ cố định.

Giả sử d là đường thẳng bất kỳ qua I cắt Ox ở M, cắt Oy ở N. Áp dụng ví dụ 4.17 ta có:

$$\frac{OE}{OM} + \frac{OF}{ON} = 2\frac{OI}{OI} = 2.$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

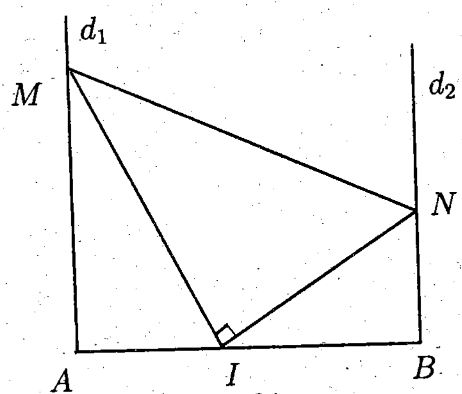
$$\frac{OE}{OM} \cdot \frac{OF}{ON} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{OE}{OM} + \frac{OF}{ON}\right) = 1.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{OE}{OM} = \dfrac{OF}{ON} = 1 \Leftrightarrow OE = OM, OF = ON$ hay $M \equiv E, N \equiv F$.

Vậy khi đường thẳng d trùng với Δ thì diện tích ΔOMN đạt giá trị nhỏ nhất. □

Ví dụ 4.19. Cho ba điểm A, I, B thẳng hàng theo thứ tự. Gọi d_1, d_2 là hai nửa đường thẳng vuông góc với AB tại A, B và nằm về cùng một phía đối với đường thẳng AB. Góc vuông $\angle xIy$ quay xung quanh đỉnh I sao cho hai cạnh của góc tương ứng cắt d_1 ở M, cắt d_2 ở N. Tìm vị trí của M, N để diện tích ΔIMN đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải



Hình 4.21.

Ta có:

$$\angle AMI + \angle AIM = 90^o, \angle BIN + \angle AIM = 90^o$$
$$\Rightarrow \angle AMI = \angle BIN \Rightarrow \Delta MAI \sim \Delta IBN (g.g)$$
$$\Rightarrow \frac{AI}{BN} = \frac{AM}{BI} \quad (*) \Rightarrow AM \cdot BN = AI \cdot BI = const.$$

Mặt khác,

$$S_{IMN} = \frac{1}{2} IM \cdot IN = \frac{1}{2}\sqrt{(AI^2 + AM^2)(BI^2 + BN^2)}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-xki ta có

$$(AI^2 + AM^2)(BI^2 + BN^2) \geq (AI \cdot BI + AM \cdot BN)^2$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{AI}{BI} = \frac{AM}{BN} \Leftrightarrow \frac{AI}{AM} = \frac{BI}{BN}.$$

Kết hợp với $(*)$ suy ra diện tích ΔIMN đạt giá trị nhỏ nhất khi

$$\frac{BI}{BN} = \frac{BN}{BI} = \frac{AI}{AM} = 1 \text{ hay } BI = BN, AI = AM$$

Khi đó $\Delta AIM, \Delta BIN$ vuông cân tại các đỉnh $A, B \Rightarrow IM, IN$ hợp với AB các góc bằng 45^o.

Vậy diện tích ΔIMN đạt giá trị nhỏ nhất khi IM, IN cùng hợp với AB góc 45^o. □

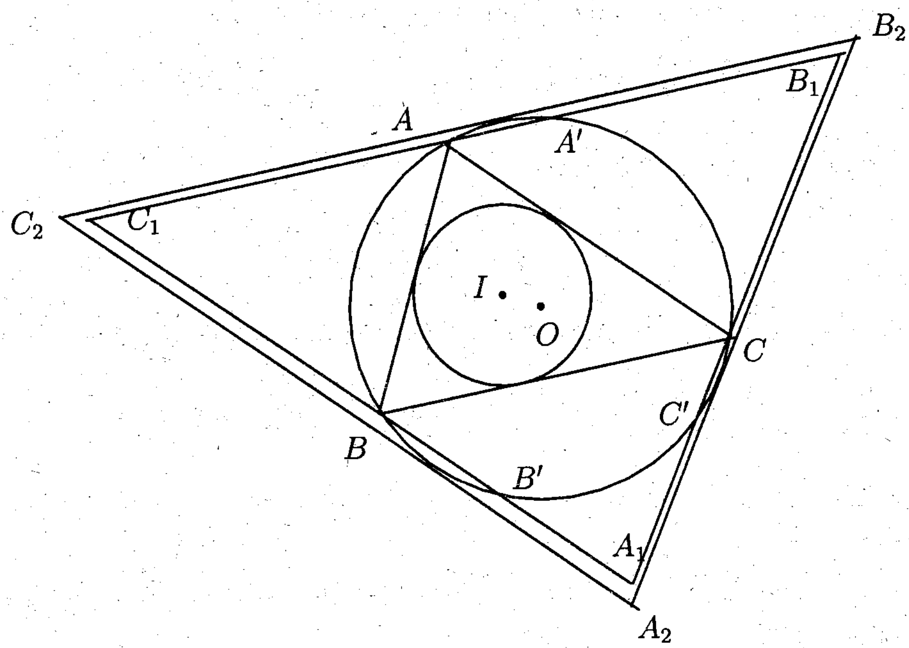
Ví dụ 4.20. Cho ΔABC. Gọi r, R lần lượt là bán kính đường tròn nội, ngoại tiếp tam giác. Chứng minh rằng $\frac{r}{R} \leq \frac{1}{2}$.

Giải

Gọi I, O lần lượt là tâm đường tròn nội, ngoại tiếp ΔABC. Qua A, B, C kẻ các đường thẳng song song với cạnh đối, tương ứng giao nhau tại A_1, B_1, C_1. Ta có $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$, tỉ số đồng dạng bằng 2. Gọi r_1 là bán kính đường tròn nội tiếp $\Delta A_1B_1C_1$, ta có $r_1 = 2r$.

B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 tương ứng giao với đường tròn (O) tại các cặp điểm A và A', B và B', C và C'. Xét các cung nhỏ $\overset{\frown}{AA'}, \overset{\frown}{BB'}, \overset{\frown}{CC'}$. Dựng đường thẳng x tiếp xúc với cung $\overset{\frown}{AA'}$ và song song với B_1C_1, tương tự dựng đường thẳng y, z tương ứng tiếp xúc với các cung $\overset{\frown}{BB'}, \overset{\frown}{CC'}$ và song song với C_1A_1, A_1B_1. Các đường thẳng x, y, z tương ứng giao nhau tại các điểm A_2, B_2, C_2.

$\Delta A_2B_2C_2$ nhận đường tròn (O) là đường tròn nội tiếp. $\Delta A_2B_2C_2 \sim \Delta A_1B_1C_1$ theo tỉ số k. Từ cách dựng hình ta có $\Delta A_1B_1C_1$ lồng trong



Hình 4.22.

$\Delta A_2B_2C_2$ nên $k \geq 1$. Từ đó ta có

$$R \geq r_1 \Rightarrow R \geq 2r \Rightarrow \frac{r}{R} \leq \frac{1}{2}.$$

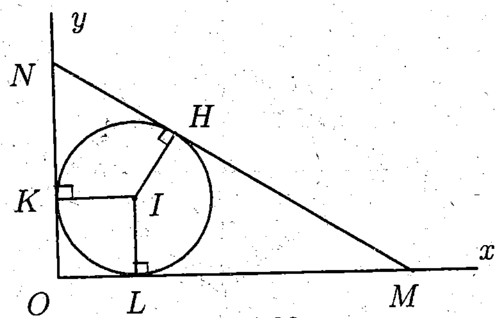
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\Delta A_2B_2C_2 \equiv \Delta A_1B_1C_1$ (*).

(*) xảy ra khi và chỉ khi $A \equiv A', B \equiv B', C \equiv C' \Leftrightarrow$ đường thẳng OA, OB, OC là đường trung trực của $BC, CA, AB \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều. □

Nhận xét: Tỉ số $\frac{r}{R}$ đạt giá trị cực đại bằng $\frac{1}{2}$ khi tam giác ABC đều.

Ví dụ 4.21. Cho đường tròn $\omega(I, r)$ tiếp xúc với hai cạnh của góc vuông $\angle xOy$. Tiếp tuyến d của đường tròn ω lần lượt cắt Ox, Oy tại M, N sao cho đường tròn ω nội tiếp ΔOMN. Xác định vị trí của d để diện tích ΔOMN có giá trị nhỏ nhất (khi đó chu vi của ΔOMN cũng đạt giá trị nhỏ nhất).

Giải



Hình 4.23.

Gọi $2p$ là chu vi ΔOMN. Gọi H, K, L lần lượt là tiếp điểm của đường tròn ω với các cạnh MN, NO, OM. Khi đó tứ giác $IKOM$ là hình chữ nhật. Ta có:

$$2p = OM + ON + MN = OL + LM + MH + HN + NK + KO$$
$$= 2(OL + MH + HN) = 2(r + MN)$$

$\Rightarrow S_{OMN} = p \cdot r = r(r + MN)$.

Từ đó, S_{OMN} đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MN đạt giá trị nhỏ nhất. Mặt khác, ΔOMN vuông nên MN là đường kính đường tròn ngoại tiếp ΔOMN. Ta có

$$\frac{r}{MN} \leq \frac{\sqrt{2}-1}{2} \Rightarrow MN \geq \frac{2r}{\sqrt{2}-1}.$$

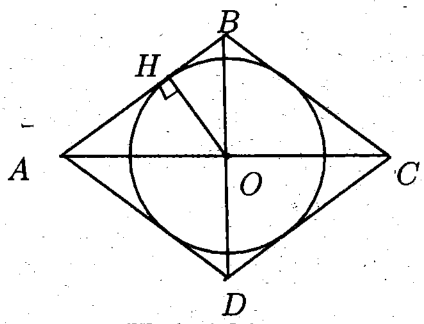
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi ΔOMN cân tại O hay d tiếp xúc với đường tròn ω tại giao điểm của ω và OI. □

Ví dụ 4.22. Tìm hình thoi có diện tích nhỏ nhất ngoại tiếp đường tròn $\omega(O, R)$.

Giải

Giả sử $ABCD$ là hình thoi ngoại tiếp $\omega(O, R)$.

Đặt $OA = x, OB = y, S_{ABCD} = S$. Ta có $S = 2xy$.



Hình 4.24.

Gọi H là tiếp điểm của AB với ω thì $OH \perp AB$ và $OH = R$. Xét tam giác vuông OAB ta có

$$\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{R^2} = const.$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{y^2}} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{R^2}$$
$$\Rightarrow S \geq 4R^2.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = R\sqrt{2}$.
Vậy hình thoi có diện tích nhỏ nhất ngoại tiếp đường tròn $\omega(O, R)$ là hình vuông cạnh $2R$. □

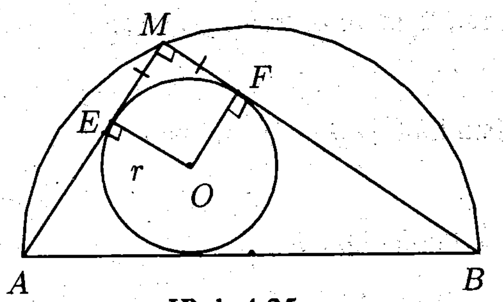
Ví dụ 4.23. Cho nửa đường tròn đường kính AB. Xác định vị trí điểm M trên nửa đường tròn đó để bán kính đường tròn nội tiếp ΔMAB đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải

AB là đường kính $\Rightarrow \angle AMB = 90^o$. Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp ΔMAB. Theo kết quả 10 (Chương 1 phần 3.2) ta có

$$r = ME = \frac{1}{2}(MA + MB - AB).$$

Vì AB cố định nên r đạt giá trị lớn nhất khi $MA + MB$ đạt giá trị lớn nhất. Ta có $MA + MB$ lớn nhất khi và chỉ khi M là trung điểm cung $\overset{\frown}{AB}$.



Hình 4.25.

Vậy bán kính đường tròn nội tiếp ΔMAB đạt giá trị lớn nhất khi M là trung điểm cung $\overset{\frown}{AB}$. □

4.4 Bất đẳng thức tam giác

Gọi a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác, ta luôn có các bất đẳng thức tam giác sau:

$$a + b > c \quad (1)$$

$$b + c > a \quad (2)$$

$$c + a > b \quad (3)$$

Liên quan đến bất đẳng thức tam giác có nhiều kết quả hay và đơn giản. Để tiện sử dụng chúng ta ký hiệu:

- h_a, h_b, h_c là độ dài của đường cao hạ từ các đỉnh tương ứng A, B, C của tam giác

- m_a, m_b, m_c là độ dài của các đường trung tuyến

- l_a, l_b, l_c là độ dài các đường phân giác

- R là độ dài bán kính vòng tròn ngoại tiếp
- r là độ dài bán kính vòng tròn nội tiếp
- $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi

Ví dụ 4.24. Chứng minh rằng nếu a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thì $\dfrac{1}{a+b}, \dfrac{1}{b+c}, \dfrac{1}{c+a}$ là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Giải

Để giải ví dụ này, trước hết ta chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{a+b} > \frac{1}{2(b+c)} \quad (*)$$

Thật vậy, vì $b + c > a \Rightarrow b + 2c > a \Rightarrow 2b + 2c > a + b$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a+b} > \frac{1}{2(b+c)}$$

Tương tự ta có $\dfrac{1}{c+a} > \dfrac{1}{2(b+c)}$ $(**)$.

Từ $(*)$, $(**)$ suy ra

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{c+a} > \frac{1}{b+c}.$$

Hoàn toàn tương tự ta có:

$$\frac{1}{c+a} + \frac{1}{b+c} > \frac{1}{a+b}$$
$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b} > \frac{1}{c+a}.$$

Từ đó ta có đpcm. □

Ví dụ 4.25. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{h_a}, \dfrac{1}{h_b}, \dfrac{1}{h_c}$ lập thành ba cạnh của một tam giác đồng dạng với tam giác có 3 cạnh là a, b, c.

Giải

Ta có

$$2S = \frac{a}{\frac{1}{h_a}} = \frac{b}{\frac{1}{h_b}} = \frac{c}{\frac{1}{h_c}}$$

Suy ra $\frac{1}{h_a}, \frac{1}{h_b}, \frac{1}{h_c}$ lập thành ba cạnh của một tam giác và tam giác này đồng dạng với tam giác có ba cạnh a, b, c, tỷ số đồng dạng $k = \frac{1}{2S}$. □

Ví dụ 4.26. Cho ΔABC.

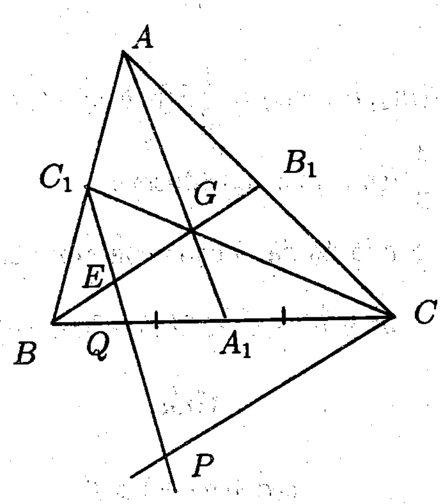
a. Chứng minh rằng m_a, m_b, m_c lập thành ba cạnh của một tam giác.

b. Kí hiệu $S(a, b, c)$ là diện tích tam giác với 3 cạnh a, b, c và $S(m_a, m_b, m_c)$ là diện tích tam giác với 3 cạnh m_a, m_b, m_c. Chứng minh rằng

$$S(a, b, c) = \frac{4}{3}S(m_a, m_b, m_c).$$

Giải

a. Các trung tuyến AA_1, BB_1, CC_1 cắt nhau tại G. Qua C_1 kẻ đường thẳng song song với AA_1, cắt BB_1, BC tại E, Q. Qua C kẻ đường thẳng song song với BB_1 cắt C_1Q tại P.



Hình 4.26.

Ta có

$$EG = \frac{1}{2}BG = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}m_b = \frac{1}{3}m_b$$

$$\frac{EG}{PC} = \frac{C_1G}{C_1C} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow EG = \frac{1}{3}PC$$

Suy ra $PC = m_b$.
Ta có

$$\frac{C_1E}{C_1P} = \frac{C_1G}{C_1C} = \frac{1}{3} \to C_1E = \frac{1}{3}C_1P$$

$$C_1E = \frac{1}{2}AG = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}m_a = \frac{1}{3}m_a$$

Suy ra $C_1P = m_a$ và $CC_1 = m_c$. Từ đó ΔCC_1P có ba cạnh là m_a, m_b, m_c (đpcm).

b. Vì $CC_1 = \frac{1}{2}AA_1$ nên vậy $C_1Q = PQ$, suy ra $S_{\Delta CC_1Q} = \frac{1}{2}S(m_a, m_b, m_c)$
Ta có

$$S_{\Delta CC_1Q} = S_{\Delta CBC_1} - S_{\Delta QBC_1}$$

Vì $BC_1 = AC_1$ suy ra $S_{\Delta CBC_1} = \frac{1}{2}S(a, b, c)$

$\frac{C_1Q}{AA_1} = \frac{1}{2}$ suy ra $S_{\Delta QBC_1} = \frac{1}{8}S(a, b, c)$

Suy ra

$$\frac{1}{2}S(m_a, m_b, m_c) = \frac{1}{2}S(a, b, c) - \frac{1}{8}S(a, b, c)$$

hay $S(a, b, c) = \frac{4}{3}S(m_a, m_b, m_c)$ (đpcm). □

Ví dụ 4.27. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca).$$

Giải

Ta có

$$c(a + b - c) > 0$$

$$a(b + c - a) > 0$$

$$b(c+a-b) > 0$$

Cộng các bất đẳng thức trên ta thu được

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca) \quad \text{(đpcm).}$$

□

Ví dụ 4.28. Chứng minh rằng

$$h_a + h_b + h_c \geq 9r.$$

Giải

Ta có

$$S = r.p = r\left(\frac{a+b+c}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{r} = \frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

Ta có

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r} \geq \frac{9}{h_a + h_b + h_c}$$

Suy ra $h_a + h_b + h_c \geq 9r$ (đpcm). □

Ví dụ 4.29. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c} \leq \frac{1}{r}.$$

Giải

Ta có $l_a \geq h_a, l_b \geq h_b, l_c \geq h_c$ nên

$$\frac{1}{l_a} \leq \frac{1}{h_a},\ \frac{1}{l_b} \leq \frac{1}{h_b},\ \frac{1}{l_c} \leq \frac{1}{h_c}$$

Suy ra

$$\frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c} \leq \frac{1}{r} \quad \text{(đpcm).}$$

□

Ví dụ 4.30. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{h_a h_b} + \frac{1}{h_b h_c} + \frac{1}{h_c h_a} > \frac{1}{4r^2}.$$

Giải

Vì $\frac{1}{h_a}, \frac{1}{h_b}, \frac{1}{h_c}$ là độ dài 3 cạnh của một tam giác nên ta có

$$\frac{1}{h_a^2}+\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}<2\Big(\frac{1}{h_ah_b}+\frac{1}{h_bh_c}+\frac{1}{h_ch_a}\Big)$$

$$\frac{1}{r^2}=\Big(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\Big)^2<4\Big(\frac{1}{h_ah_b}+\frac{1}{h_bh_c}+\frac{1}{h_ch_a}\Big)$$

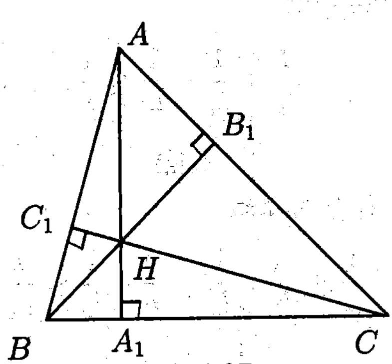
$$\Leftrightarrow \frac{1}{h_ah_b}+\frac{1}{h_bh_c}+\frac{1}{h_ch_a}>\frac{1}{4r^2}.$$

□

Ví dụ 4.31. Xét $\triangle ABC$ nhọn, trực tâm H, A_1, B_1, C_1 là chân các đường cao hạ từ các đỉnh A, B, C. Chứng minh rằng

$$\Big(\frac{HA_1}{AA_1}\Big)^2+\Big(\frac{HB_1}{BB_1}\Big)^2+\Big(\frac{HC_1}{CC_1}\Big)^2\geq\frac{1}{3}.$$

Giải



Hình 4.27.

Kí hiệu $S=S_{\triangle ABC}$, $S_1=S_{\triangle HBC}$, $S_2=S_{\triangle HCA}$, $S_3=S_{\triangle HAB}$, ta có $S=S_1+S_2+S_3$.

Ta có

$$\frac{HA_1}{AA_1}=\frac{S_1}{S},\ \frac{HB_1}{BB_1}=\frac{S_2}{S},\ \frac{HC_1}{CC_1}=\frac{S_3}{S}$$

Suy ra

$$\frac{HA_1}{AA_1} + \frac{HB_1}{BB_1} + \frac{HC_1}{CC_1} = 1$$

Theo bất đẳng thức Bu - nhia - cop - ski, ta có

$$\left(\frac{HA_1}{AA_1}\right)^2 + \left(\frac{HB_1}{BB_1}\right)^2 + \left(\frac{HC_1}{CC_1}\right)^2 \geq \frac{1}{3}\left(\frac{HA_1}{AA_1} + \frac{HB_1}{BB_1} + \frac{HC_1}{CC_1}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi ΔABC đều $\Rightarrow$ đpcm. □

4.5 Công thức Hêrông

Công thức Hêrông

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

là một trong các công thức tính diện tích tam giác. Như chúng ta đã biết trong chương trước, có thể tính diện tích một tam giác theo nhiều công thức khác nhau. Do đó bằng cách tính diện tích của cùng một tam giác nhưng theo các công thức khác nhau, chúng ta sẽ tìm được những hệ thức liên hệ giữa các yếu tố khác nhau của tam giác.

Ví dụ 4.32. Chứng minh rằng

$$Q = \frac{1}{(p-a)(p-b)} + \frac{1}{(p-b)(p-c)} + \frac{1}{(p-c)(p-a)} = \frac{1}{r^2}.$$

Giải

Ta có

$$Q = \frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{p^2}{S^2} = \frac{p^2}{r^2p^2} = \frac{1}{r^2}.$$

□

Ví dụ 4.33. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(p-a)^2} + \frac{1}{(p-b)^2} + \frac{1}{(p-c)^2} \geq \frac{1}{r^2}.$$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

ta có

$$\frac{1}{(p-a)^2} + \frac{1}{(p-b)^2} + \frac{1}{(p-c)^2} \geq \frac{1}{(p-a)(p-b)} +$$
$$+ \frac{1}{(p-b)(p-c)} + \frac{1}{(p-c)(p-a)} = \frac{1}{r^2}.$$

□

Ví dụ 4.34. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$$

ta có

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} \geq \frac{4}{p-a+p-b} = \frac{4}{c}$$
$$\frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq \frac{4}{a}$$
$$\frac{1}{p-c} + \frac{1}{p-a} \geq \frac{4}{a}$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên ta thu được

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

□

Ví dụ 4.35. Chứng minh rằng

$$S \leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}}.$$

Giải

Ta có

$$(p-a)(p-b)(p-c) \leq \left(\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\right)^3 = \frac{p^3}{27}$$

Suy ra

$$S^2 \leq \frac{p^4}{27} \Leftrightarrow S \leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}}.$$

$\square$

Ví dụ 4.36. Chứng minh rằng

$$ab + bc + ca = p^2 + r^2 + 4Rr.$$

Giải

Ta có

$$\begin{aligned}
&p^2r^2 = S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)\\
\Leftrightarrow\, &pr^2 = p^3 - (a+b+c)p^2 + (ab+bc+ca)p - abc\\
\Leftrightarrow\, &pr^2 = -p^3 + (ab+bc+ca)p - 4Rrp\\
\Leftrightarrow\, &r^2 = -p^2 + (ab+bc+ca) - 4Rr\\
\Leftrightarrow\, &ab+bc+ca = r^2 + p^2 + 4Rr.
\end{aligned}$$

$\square$

Ví dụ 4.37. Chứng minh rằng

$$p^2 \geq 3r^2 + 12Rr.$$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$$

ta thu được

$$\begin{aligned}
&4p^2 \geq 3(p^2 + r^2 + 4Rr)\\
\Leftrightarrow\, &p^2 \geq 3r^2 + 12Rr \quad \text{(đpcm).}
\end{aligned}$$

$\square$

Ví dụ 4.38. Chứng minh rằng

$$p^2 + r^2 \geq 14Rr.$$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$$

ta có

$$\frac{ab+bc+ca}{abc} \geq \frac{9}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4Rrp} \geq \frac{9}{2p}$$

$$\Leftrightarrow p^2 + r^2 + 4Rr \geq 18Rr$$

$$\Leftrightarrow p^2 + r^2 \geq 14Rr \quad \text{(đpcm)}.$$

□

Ví dụ 4.39. Chứng minh rằng

$$p^2 \geq 7r^2 + 10Rr.$$

Giải

Ta có $2p = a + b + c$, suy ra

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{a}{2p-a} + \frac{b}{2p-b} + \frac{c}{2p-c}$$

$$= \frac{a(2p-b)(2p-c) + b(2p-c)(2p-a) + c(2p-a)(2p-b)}{(2p-a)(2p-b)(2p-c)}$$

$$= \frac{8p^3 + 3abc - 4p(ab+bc+ca)}{8p^3 - (a+b+c)4p^2 + (ab+bc+ca)2p - abc}$$

$$= \frac{8p^3 + 12Rrp - 4p(p^2+r^2+4Rr)}{2p(p^2+r^2+4Rr) - 4Rrp}$$

$$= \frac{4p^3 - 4pr^2 - 4Rrp}{2p^3 + 2pr^2 + 4Rrp}$$

$$= \frac{2p^2 - 2r^2 - 2Rr}{p^2 + r^2 + 2Rr}.$$

Áp dụng bất đẳng thức

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

với $a, b, c > 0$, ta có

$$\frac{2p^2 - 2r^2 - 2Rr}{p^2 + r^2 + 2Rr} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow p^2 \geq 7r^2 + 10Rr \quad \text{(đpcm).}$$

□

Ví dụ 4.40. Chứng minh rằng

$$\sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} \leq \sqrt{3p}.$$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức

$$\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{3} \leq \sqrt{\frac{a+b+c}{3}}$$

ta nhận được

$$\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c} \leq 3\sqrt{\frac{p-a+p-b+p-c}{3}} = \sqrt{3p} \quad \text{(đpcm)}.$$

□

4.6 Bài tập và hướng dẫn

Bài tập 4.1. Cho ΔABC nhọn. Từ điểm M trên BC kẻ $ME \perp AB$, $MF \perp AC$. Tìm vị trí điểm M để EF có độ dài nhỏ nhất.

Bài tập 4.2. Cho đường thẳng d và hai điểm cố định A, B không nằm trên d. Tìm vị trí điểm M trên d sao cho:

a) $MA + MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

b) $|MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn

Xét hai trường hợp A, B cùng hoặc khác phía đối với bờ d. Ứng dụng phép đối xứng qua d. □

Bài tập 4.3. Cho đường tròn (O, R) và điểm A cố định nằm trong đường tròn. Tìm vị trí điểm M trên đường tròn sao cho góc $\angle AMO$ đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn

Xét khoảng cách từ O đến đường thẳng AM. □

Bài tập 4.4. Cho ΔABC có $\angle A \leq 90^o$. Vẽ ra phía ngoài của ΔABC hai nửa đường tròn đường kính AB, AC. Đường thẳng d bất kỳ qua A cắt đường tròn đường kính AB tại M, cắt nửa đường tròn đường kính AC tại N.

a, Nếu $\angle A < 90^o$, tìm vị trí của d để MN có độ dài lướn nhất.

b, Nếu $\angle A = 90^o$, tìm vị trí của d để diện tích hình thang $BCNM$ lớn nhất.

Hướng dẫn

Nếu $\angle A = 90^o$, xét diện tích ΔABM và ΔACN. □

Bài tập 4.5. Cho đường tròn (O, R) và dây cung cố định $AB(AB < 2R)$. M là một điểm bất kỳ trên đường tròn sao cho ΔMAB nhọn. AA', BB', MM' là các đường cao của ΔMAB. Tìm vị trí của điểm M để chu vi $\Delta M'A'B'$ đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn

Gọi H là trực tâm ΔMAB, chứng minh $HM \perp A'B'$. Từ đó suy ra chu vi $\Delta M'A'B'$ tỉ lệ thuận với diện tích ΔMAB. □

Bài tập 4.6. Cho tam giác nhọn ABC. Tìm vị trí điểm M nằm trong tam giác sao cho $(MA + MB + MC)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn

Giả sử $B \geq C$. Chứng minh rằng trên BC, B là điểm có tổng khoảng cách đến hai cạnh AB, AC nhỏ nhất. Giả sử $A \geq B \geq C$, với M trong ΔABC kẻ đường thẳng qua M và song song với BC. □

Bài tập 4.7. Cho góc nhọn xOy và điểm I cố định thuộc miền trong của góc. Tìm trên Ox, Oy các điểm A, B sao cho chu vi ΔIAB đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn

Xem bài 4.2 □

Bài tập 4.8. Cho đường tròn (O, R) và tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn. Chứng minh rằng nếu chu vi của $ABCD$ đạt giá trị lướn nhất thì nó là một hình vuông.

Hướng dẫn

Xem ví dụ 4.4. □

Bài tập 4.9. Cho đường tròn (O) và điểm I cố định không thuộc đường tròn và $I \not\equiv O$. Tìm vị trí của đường thẳng d đi qua O cắt đường tròn tại hai điểm M, N sao cho:

a, $IM + IN$ đạt giá trị nhỏ nhất.

b, $IM + IN$ đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn

Chia bài toán theo trường hợp I nằm trong hay ngoài đường tròn (O). Xét khoảng cách từ I tới đường thẳng d. □

Bài tập 4.10. Cho ΔABC vuông cân ở đỉnh A. Trên BC lấy điểm M, gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên AB, AC. Xác định vị trí điểm M để diện tích hình chữ nhật $AEMF$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài tập 4.11. Cho ΔABC vuông cân ở đỉnh A. Đường tròn ω tiếp xúc với AB tại B, tiếp xúc với AC tại C. Đường thẳng d bất kỳ tiếp xúc với cung $\overset{\frown}{BC}$ của đường tròn ω cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M, N. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{3}(AB + AC) \leq MB + MC \leq \frac{1}{2}(AB + AC)$$

Bài tập 4.12. Một tam giác có ba đỉnh nằm trên ba cạnh của hình bình hành. Chứng minh rằng diện tích của tam giác không vượt quá nửa diện tích hình bình hành.

Hướng dẫn

Giả sử các đỉnh E, F, K nằm trên ba cạnh AB, BC, CD của hình bình hành $ABCD$. Kẻ đường thẳng qua F, song song với AB, CD. □

Bài tập 4.13. Cho ΔABC và d là đường thẳng bất kỳ đi qua A không cắt tam giác. Gọi B', C' lần lượt là hình chiếu của B, C trên đường thẳng d. Xác định vị trí đường thẳng d để:

a, $(BB' + CC')$ đạt giá trị nhỏ nhất.

b, $(BB' + CC')$ đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn

Lấy B' đối xứng với B qua A. □

Bài tập 4.14. Trong góc nhọn xOy cho hai điểm cố định A, B. Xác định trên Ox, Oy hai điểm C, D sao cho đường gấp khúc $ACDB$ có độ dài nhỏ nhất.

Bài tập 4.15. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Tìm vị trí của điểm M để $MA + MB + MC + MD$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài tập 4.16. Cho hình vuông $ABCD$. Trên BC, CD lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho $\angle MAN = 45^o$. Xác định vị trí M, N đểdiện tích ΔAMN đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn

AM, AN lần lượt giao với BD tại E, F. Chứng minh rằng $\dfrac{S_{AEF}}{S_{AMN}} = \dfrac{1}{2}$.
Áp dụng ví dụ 4.3 để giải bài toán. □

Bài tập 4.17. Cho ΔABC, dựng đường tròn nội tiếp tam giác. Tiếp tuyến song song với BC cắt AB, AC lần lượt tại M, N. Tiếp tuyến song song với CA cắt BC, BA lần lượt tại E, F. Tiếp tuyến song song với AB cắt CA, CB lần lượt tại I, J. Chứng minh rằng:

$$S_{AMN} + S_{BEF} + S_{CIJ} \geq \frac{1}{3}S_{ABC}$$

dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

Hướng dẫn

Gọi h_a, h_b, h_c là đường cao của ΔABC tương ứng với các đỉnh. Ta có:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r},$$

$$\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = (1 - \frac{2r}{h_a})^2, \frac{S_{BEF}}{S_{ABC}} = (1 - \frac{2r}{h_b})^2, \frac{S_{CIJ}}{S_{ABC}} = (1 - \frac{2r}{h_c})^2.$$

□

Bài tập 4.18. Cho ΔABC ngoại tiếp đường tròn (I, r). Đường thẳng qua I song song với BC cắt cạnh AB, AC tại M, N. Đường thẳng qua I song song với CA cắt cạnh BC, BA tại E, F. Đường thẳng qua I song song AB cắt cạnh CA, CB tại I, J.

Chứng minh rằng $MN^2 + EF^2 + IJ^2 \geq 16r^2$. Dấu "=" xảy ra khi ΔABC đều.

Hướng dẫn

Gọi a, b, c tương ứng là ba cạnh của ΔABC, p là nửa chu vi. Áp dụng công thức $S = pr = \dfrac{abc}{4R}$, ta có $MN^2 = a^2\dfrac{bc}{p^2}$.

Áp dụng bất đẳng thức $r \leq \dfrac{1}{2}R$ suy ra (đpcm). □

Bài tập 4.19. Cho góc nhọn xOy và ΔABC cố định ở trong góc đó. Tìm điểm M trên cạnh của tam giác để tổng khoảng cách từ M đên Ox, Oy đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn

Trên Ox, Oy lấy $OE = OF$. Chứng minh rằng mọi điểm trên đoạn EF có tổng khoảng cách tới Ox, Oy không đổi. □

Bài tập 4.20. Cho đường tròn (O, R) và điểm A nằm trong đường tròn. Gọi d_1, d_2 là hai đường thẳng bất kỳ qua A và vuông góc với nhau. Tìm vị trí của d_1, d_2 và vị trí điểm M trên đường tròn (O, R) sao cho tổng khoảng cách từ M đến d_1, d_2 đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn

Với mỗi cặp d_1, d_2 cố định, áp dụng bài 4.19 □

Bài tập 4.21. Chứng minh rằng

$$R^2 + r^2 \geq \frac{5}{2}Rr.$$

Hướng dẫn

Xuất từ bất đẳng thức $R \geq 2r$. □

Bài tập 4.22. Chứng minh rằng

$$\sqrt[4]{p-a} + \sqrt[4]{p-b} + \sqrt[4]{p-c} \leq \frac{1}{\sqrt[4]{2}}(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b} + \sqrt[4]{c})$$

Hướng dẫn

Áp dụng bất đẳng thức

$$\frac{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}}{2} \leq \sqrt[4]{\frac{a+b}{2}}$$

□

Bài tập 4.23. Tính diện tích tam giác biết rằng

$$h_a = \frac{1}{3},\ h_b = \frac{1}{4},\ h_c = \frac{1}{5}.$$

Hướng dẫn

Sử dụng đẳng thức

$$\frac{S(a,b,c)}{S\left(\frac{1}{h_a}, \frac{1}{h_b}, \frac{1}{h_c}\right)} = 4S^2(a,b,c)$$

□

Bài tập 4.24. Tính diện tích tam giác biết rằng

$$m_a = 3, m_b = 4, m_c = 5.$$

Hướng dẫn

Sử dụng $S(a,b,c) = \frac{4}{3}S(m_a, m_b, m_c)$ □

Bài tập 4.25. Chứng minh rằng

$$\frac{h_a h_b}{h_a + h_b} + \frac{h_b h_c}{h_b + h_c} > \frac{h_c h_a}{h_c + h_a}.$$

Hướng dẫn

Sử dụng $\frac{1}{h_a}, \frac{1}{h_b}, \frac{1}{h_c},$ là 3 cạnh của một tam giác. □

Bài tập 4.26. Chứng minh rằng

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 < 2(m_a m_b + m_b m_c + m_c m_a).$$

Hướng dẫn

Áp dụng ví dụ 4.27, vì m_a, m_b, m_c lập thành 3 cạnh của một tam giác. □

Bài tập 4.27. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(p-a)^3} + \frac{1}{(p-b)^3} + \frac{1}{(p-c)^3} \geq \frac{81}{p^3}.$$

Hướng dẫn

Áp dụng bất đẳng thức

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \text{và} \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$$

(a, b, c là số thực dương) □

Tài liệu tham khảo

[1] *Toán bồi dưỡng học sinh - hình học 9,*
Vũ Hữu Bình, Tôn Thân, Đỗ Quang Thiều.
Nhà xuất bản Giáo dục, năm 1998.

[2] *Một số vấn đề phát triển hình học 9,*
Vũ Hữu Bình,
Nhà xuất bản Giáo dục, năm 1998.

[3] *Chuyên đề bất đẳng thức và cực trị trong hình học phẳng,*
Nguyễn Đức Tấn,
Nhà xuất bản Giáo dục, năm 2003.

[4] *Các bài toán về giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trong hình học phẳng ở trung học cơ sở,*
Vũ Hữu Bình, Hồ Thu Hằng, Kiều Thu Hằng, Trịnh Thúy Hằng,
Nhà xuất bản Giáo dục, năm 2003.

[5] *Mathematical Olympiad Treasures,*
Titu Andreescu, Bogdan Enescu,
Birkhauser Boston, USA, năm 2004.

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội
Điện thoại: (04) 9718312; (04) 9724770. Fax: (04) 9714899
E-mail: nxb@ vnu.edu.vn

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO

Tổng biên tập: NGUYỄN BÁ THÀNH

Biên tập: KHỐI PHỔ THÔNG CHUYÊN TOÁN TIN
TRƯỜNG ĐHKHTN

Trình bày bìa: BÙI QUANG TUẤN

CÁC BÀI GIẢNG VỀ HÌNH HỌC PHẲNG

Mã số: 1L-176 ĐH2006
In 2000 cuốn, khổ 17 x 24 cm tại Nhà in Đại học Quốc gia Hà Nội
Số xuất bản: 868 - 2006/CXB/18 - 180/ĐHQGHN, ngày 17/11/2006
Quyết định xuất bản số: 403 LK/XB
In xong và nộp lưu chiểu quý IV năm 2006.