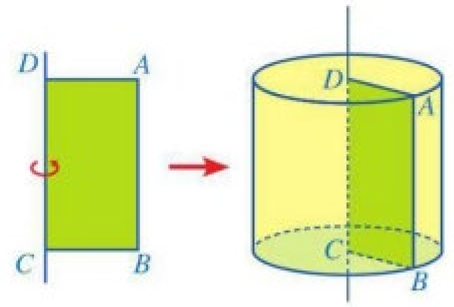
CHƯƠNG 10
HÌNH HỌC TRỰC QUAN

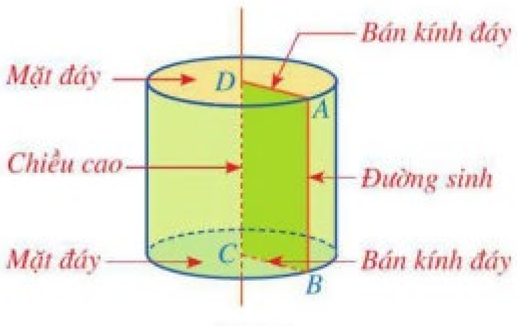
BÀI 1
HÌNH TRỤ

1. Hình trụ

a. Nhận biết hình trụ



Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ một vòng quanh cạnh CD cố định, ta được một **hình trụ**.



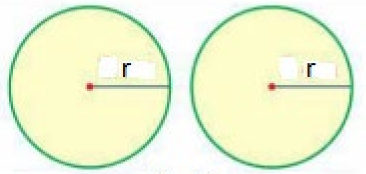
Với hình trụ trên, ta có:

- Hai hình tròn $(D;DA)$ và $(C;CB)$ là hai **mặt đáy**. Hai mặt đáy của hình trụ bằng nhau và nằm trong hai mặt phẳng song song.
- Độ dài cạnh DA được gọi là **bán kính đáy**.
- Độ dài cạnh CD được gọi là **chiều cao**.
- Cạnh AB quét nên **mặt xung quanh** của hình trụ, mỗi vị trí của AB được gọi là một **đường sinh**. Độ dài của đường sinh **bằng** chiều cao của hình trụ.

b. Tạo lập hình trụ

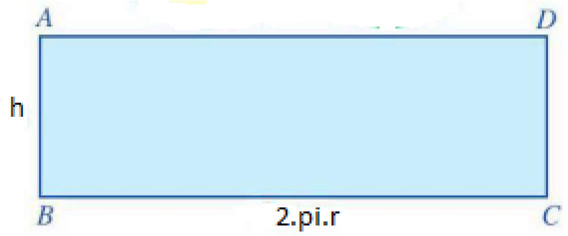
Để tạo lập chiếc hộp dạng hình trụ có chiều cao h và bán kính đáy r, ta làm ba bước như sau:

Bước 1: Cắt hai miếng bìa có dạng hình tròn với bán kính r (hình 1).



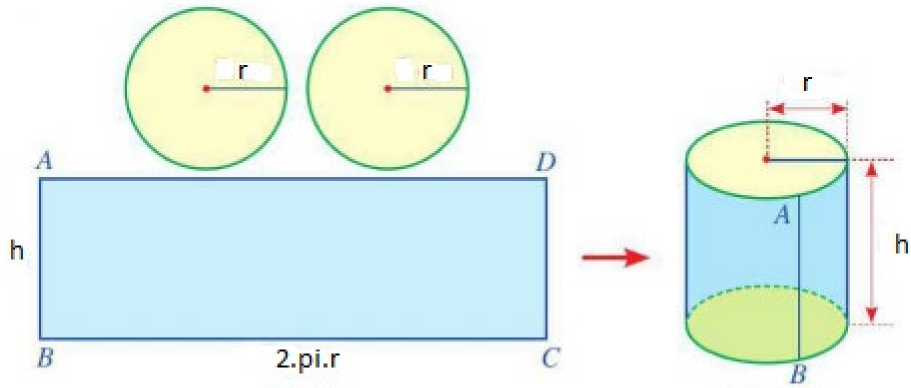
Hình 1

Bước 2: Cắt một tấm bìa hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh h và cạnh $2\pi r$ (hình 2).



Hình 2

Bước 3: Ghép và dán các miếng bìa vừa cắt ở bước 1, bước 2 (hình 3), ta được một hình trụ (hình 4).



Hình 3 Hình 4

2. Diện tích xung quanh của hình trụ

Diện tích xung quanh của hình trụ bằng tích của chu vi đáy với chiều cao:

$$S_{xq} = C.h = 2\pi rh$$

Trong đó:

S_{xq} là diện tích xung quanh của hình trụ.

C là chu vi đáy.

r là bán kính đáy.

h là chiều cao của hình trụ.

Chú ý:

• Tổng của diện tích xung quanh và diện tích hai đáy của hình trụ gọi là diện tích toàn phần phần của hình trụ đó.

• Diện tích toàn phần của hình trụ: $S_{tp} = S_{xq} + 2S_{đáy} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h+r)$

Trong đó:

S_{tp} là diện tích toàn phần của hình trụ.

S_{xq} là diện tích xung quanh của hình trụ.

$S_{đáy}$ là diện tích đáy.

r là bán kính đáy.

h là chiều cao của hình trụ.

3. Thể tích của hình trụ

Thể tích của hình trụ bằng tích của diện tích đáy với chiều cao:

$$V = S.h = \pi r^2 h$$

Trong đó:

V là thể tích của hình trụ.

S là diện tích đáy.

r là bán kính đáy.

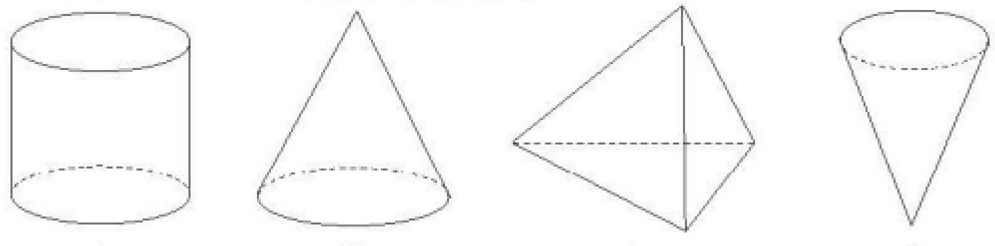
h là chiều cao của hình trụ.

DẠNG 1

NHẬN DẠNG VÀ TẠO LẬP HÌNH TRỤ

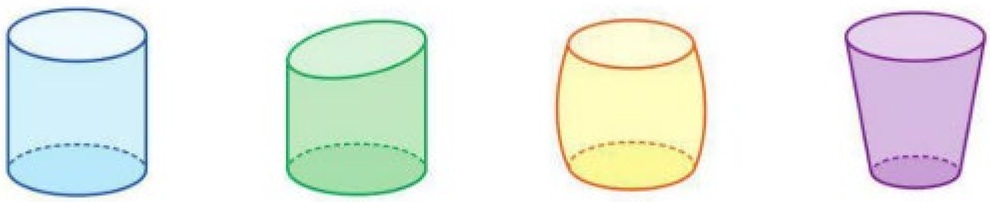
Hình trụ là hình có hai mặt đáy là đường tròn song song và bằng nhau.

Bài 1. Trong các hình sau đây, hình nào là hình trụ?



a) b) c) d)

Bài 2. Trong các vật thể ở các hình dưới đây, vật thể nào có dạng hình trụ?

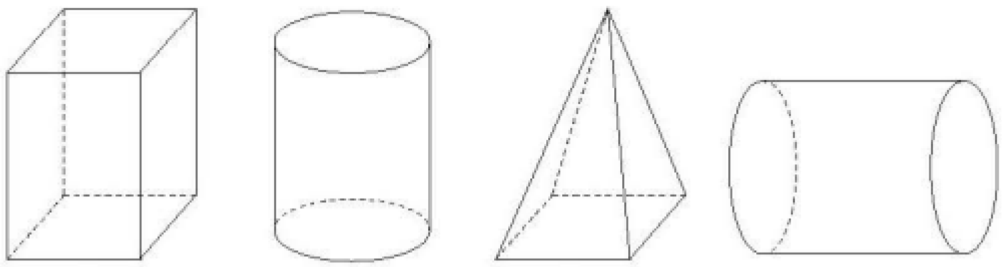


a) *b)* *c)* *d)*

Bài 3. Tạo lập hình trụ có bán kính đáy $r = 5(cm)$ và chiều cao $h = 8(cm)$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Trong các hình sau đây, hình nào là hình trụ?



a) b) c) d)

Bài 5. Trong các vật thể ở các hình dưới đây, vật thể nào có dạng hình trụ?

a) *b)* *c)* *d)* *e)*

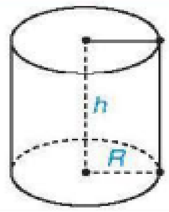
Bài 6. Tạo lập hình trụ có bán kính đáy $r = 4(cm)$ và thể tích $V = 224\pi(cm)$

DẠNG 2
TÍNH BÁN KÍNH ĐÁY, ĐƯỜNG CAO, DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH CỦA HÌNH TRỤ

Cho hình trụ có bán kính đáy r và chiều cao h.

- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2\pi rh$
- Diện tích toàn phần: $S_{tp} = 2\pi r(h + r)$
- Thể tích: $V = \pi r^2 h$

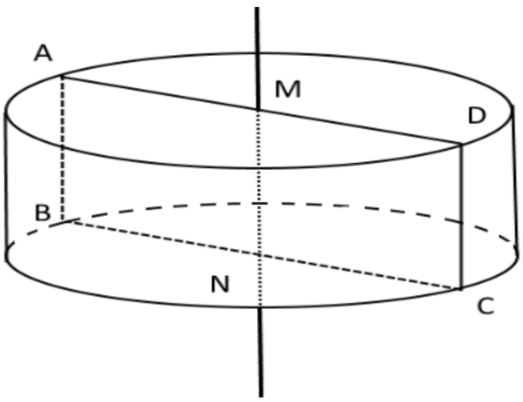
Bài 1. Thay dấu "?"bằng giá trị thích hợp và hoàn thành bảng sau:

Hình trụ	Bán kính đáy (cm)	Chiều cao (cm)	Diện tích xung quanh (cm^2)	Diện tích toàn phần (cm^2)	Thể tích (cm^3)
	3	7	?	?	?
	4	?	20π	?	?
	?	8	?	18π	?
	?	5	?	?	150π

Bài 2. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng $5(dm)$. Biết rằng hình trụ đó có diện tích toàn phần gấp đôi diện tích xung quanh. Tính chiều cao hình trụ.

Bài 3. Hỏi nếu tăng chiều cao của khối trụ lên 2 lần, bán kính của nó lên 3 lần thì thể tích của khối trụ mới sẽ tăng bao nhiêu lần so với khối trụ ban đầu?

Bài 4. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 1(cm), AD = 2(cm)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Quay hình chữ nhật đó xung quanh trục MN ta được một hình trụ như hình vẽ.



a) Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ đó.

b) Tính thể tích hình trụ đó.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

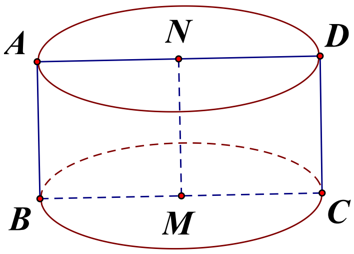
Bài 5. Cho hình trụ có bán kính hình tròn đáy bằng r và chiều cao bằng h. Hỏi nếu tăng chiều cao lên 4 lần và giảm bán kính đáy 2 lần thì thể tích của khối trụ mới sẽ tăng hay giảm?

Bài 6. Cho hình trụ có diện tích toàn phần là $4\pi\left(dm^2\right)$ và bán kính đáy bằng nửa chiều cao. Tính thể tích hình trụ?

A. $\dfrac{\pi\sqrt{6}}{12}$ **B.** $\dfrac{\pi\sqrt{6}}{9}$ **C.** $\dfrac{4\pi}{9}$ **D.** $\dfrac{4\pi\sqrt{6}}{9}$

Bài 7. Trong không gian cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$ và $AD = 2a$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AD và BC. Quay hình chữ nhật đó quanh trục HK, ta được một hình trụ. Tính diện tích toàn phần của hình trụ.

Bài 8. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$, $AD = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và AD. Khi quay hình chữ nhật trên quanh đường thẳng MN ta nhận được một hình trụ như hình vẽ.



a) Tính diện tích toàn phần của hình trụ theo a.

b) Tính thể tích của hình trụ theo a.

DẠNG 3
ỨNG DỤNG CỦA HÌNH TRỤ TRONG THỰC TIỄN

Cho hình trụ có bán kính đáy r và chiều cao h.

- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2\pi rh$
- Diện tích toàn phần: $S_{tp} = 2\pi r(h+r)$
- Thể tích: $V = \pi r^2 h$

Bài 1. Một khúc gỗ hình trụ có đường kính đáy bằng 1,2 *m*, chiều cao bằng bán kính đáy (như hình vẽ).

a) Tính diện tích xung quanh của khúc gỗ đó (làm tròn kết quả đến phần trăm).

b) Với thành hiện tại, 1 m^3 gỗ trên bán được 5 triệu đồng. Hãy tính giá thành khúc gỗ trên nếu đem đi bán.

Bài 2. Một bồn nước inox Đại Thanh có dạng hình trụ với chiều cao 1,75 *m* và diện tích đáy là 0,32 m^2.

a) Tính bán kính đáy của bồn nước inox Đại Thanh (làm tròn kết quả đến phần trăm).

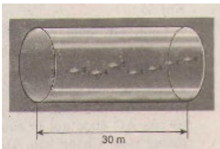
b) Hỏi bồn nước này đựng đầy được bao nhiêu mét khối nước? (Bỏ qua bề dày của bồn).

Bài 3. Người ta dự định làm dự định làm một chiếc bồn chứa dầu bằng sắt hình trụ có chiều cao 1,8 *m*, đường kính đáy 1,2 *m*. Hỏi chiếc bồn đó chứa đầy được bao nhiêu lít dầu, biết rằng 1 m^3 = 1000 *lít* (Bỏ qua bề dày của bồn, lấy $\pi = 3{,}14$)

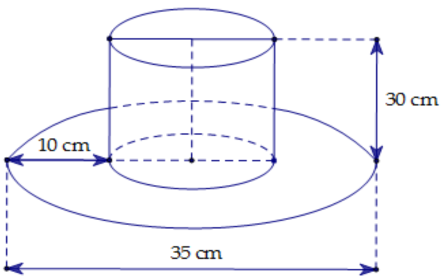
Bài 4. Một doanh nghiệp sản xuất vỏ hộp sữa ông thọ dạng hình trụ, có chiều cao bằng 12 *cm*. Biết thể tích của hộp là $192\pi\ cm^3$. Tính số tiền mà doanh nghiệp cần chi để sản xuất 10 000 vỏ hộp sữa ông thọ (kể cả hai nắp hộp), biết chi phí để sản xuất vỏ hộp đó là 80 000 đồng/m^2. (làm tròn kết quả đến phần ngàn).

Bài 5. Khi uống nước giải khát, người ta hay sử dụng ống hút nhựa dạng hình trụ đường kính đáy là 0,4 *cm*, chiều dài ống hút là 18 *cm*. Hỏi khi thải ra môi trường, diện tích nhựa gây ô nhiễm cho môi trường do 100 ống hút này gây ra là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến phần ngàn).

Bài 6. Đường ống nối hai bể cá trong một thủy cung miền nam nước Pháp có dạng một hình trụ, độ dài của đường ống là 30 *m*. Dung tích của đường ống nói trên là 1 800 000 *lít*. Tính diện tích đáy của đường ống.



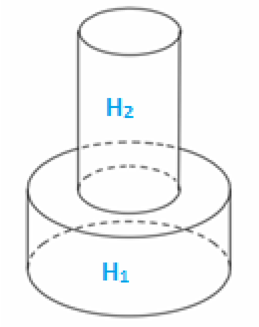
Bài 7. Một cái mũ bằng vải của nhà ảo thuật có dạng hình trụ và với kích thước mô phỏng như hình vẽ.



a) Hãy tính tổng diện tích vải cần có để làm nên cái mũ đó (không tính phần viền, mép dán) (làm tròn kết quả đến phần trăm).

b) Hãy tính thể tích phần có dạng hình nón của chiếc mũ đó (làm tròn kết quả đến phần trăm).

Bài 8. Một khối đồ chơi gồm hai hình trụ $(H_1),(H_2)$ xếp chồng lên nhau, lần lượt có bán kính đáy và chiều cao tương ứng là r_1,h_1,r_2,h_2 thỏa mãn $r_2=\frac{1}{2}r_1,h_2=2h_1$ (tham khảo hình vẽ). Biết rằng thể tích của toàn bộ khối đồ chơi bằng $30cm^3$. Tính thể tích khối trụ (H_1).



Bài 9. Người ta làm tạ tập cơ tay như hình vẽ với hai đầu là hai khối trụ bằng nhau và tay cầm cũng là khối trụ. Biết hai đầu là hai khối trụ đường kính đáy bằng $12(cm)$, chiều cao bằng $6(cm)$, chiều dài tạ bằng $30(cm)$ và bán kính tay cầm là $2(cm)$. Hãy tính thể tích vật liệu làm nên tạ tay đó (làm tròn kết quả đến phần trăm).

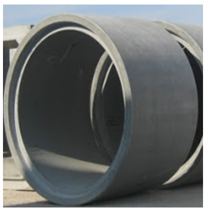
BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 10. Một thùng nước hình trụ có chiều cao bằng đường kính đáy và bằng 1 m. Thùng nước này có thể đựng được 1 m^3 nước không? Tại sao? (lấy $\pi = 3,14$)

Bài 11. Một bể nước hình trụ có chiều cao 2,5 m và diện tích đáy là 4,8 m^2. Một vòi nước được đặt phái trên miệng bể và chảy được 4.800 lít nước mỗi giờ. Hỏi vòi nước chảy sau bao lâu đầy bể (Biết ban đầu bể cạn nước, bỏ qua bề dày của thành bể và 1 m^3 = 1000 *lít*)

Bài 12. Một hộp đựng chè hình trụ có đường kính đáy bằng 8 cm và chiều cao bằng 12 cm. Tính diện tích giấy carton để làm một hộp chè đó, biết tỉ lệ giấy carton hao hụt khi làm một hộp chè là 5% (lấy $\pi = 3{,}14$).

Bài 13. Một đoạn ống nước hình trụ dài 5 *m*, có dung tích 32 m^3. Tính diện tích đáy của ống nước đó.



Bài 14. Một hộp phô mai gồm có 8 miếng, độ dày mỗi miếng là 2 *cm*. Nếu xếp chúng lại trên một đĩa thì tạo thành chiếc bánh hình trụ có đướng kính đáy bằng 10 *cm*. Hỏi mỗi miếng phô mai có thể tích bao nhiêu cm^3 (lấy $\pi = 3{,}14$).

Bài 15. Một lọ thuốc hình trụ có chiều cao 10 *cm* và bán kính đáy bằng 5 *cm*. Nhà sản xuất phủ kín mặt xung quanh của lọ thuốc bằng giấy in các thông tìn về loại thuốc ấy. Hãy tính diện tích phần giấy cần dùng của lọ thuốc đó (*Độ dày của giấy in và lọ thuốc không đáng kể*)?

Bài 16. Để hưởng ứng cuộc vận động "*Nói không với rác thải nhựa dùng một lần*", một nhà hàng dùng hộp giấy để đựng sữa chua. Hộp giấy có dạng hình trụ có đường kính đáy là 6 *cm*; chiều cao 7 *cm* và có lắp đậy làm bằng nhựa. Tính số m^2 giấy để sản xuất 100 hộp giấy trên. (Biết 1 m^2 = 10.000 cm^2; lấy $\pi = 3{,}14$ và bỏ qua các mép dán vỏ hộp).

Bài 17. Một cốc thủy tinh hình trụ có chiều cao bằng 10 *cm* và thể tích bằng $90\pi\ cm^3$. Tính bán kính của đáy cốc thủy tinh đó?

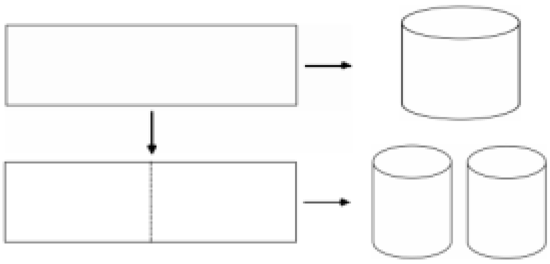
Bài 18. Một ống đong hình trụ có chiều cao gấp 5 lần bán kính. Biết thể tích ống đong bằng 40π cm^3. Tính chiều cao của ống đong đó.

Bài 19. Từ một tấm tôn hình chữ nhật kích thước $50\,\text{cm} \times 240\,\text{cm}$, người ta làm các thùng đựng nước hình trụ có chiều cao bằng $50\,\text{cm}$, theo hai cách sau (xem hình minh họa dưới đây):

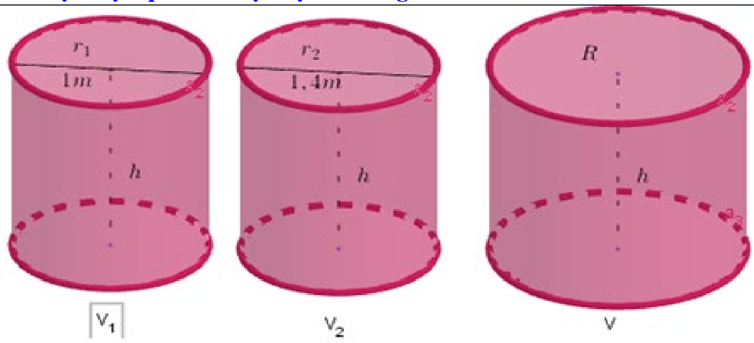
• Cách 1: Gò tấm tôn ban đầu thành mặt xung quanh của thùng.

• Cách 2: Cắt tấm tôn ban đầu thành hai tấm bằng nhau, rồi gò mỗi tấm đó thành mặt xung quanh của một thùng.

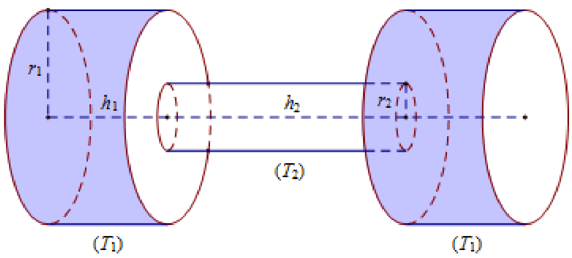
Kí hiệu V_1 là thể tích của thùng gò được theo cách 1 và V_2 là tổng thể tích của hai thùng gò được theo cách 2. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.



Bài 20. Một cơ sở sản xuất có hai bể nước hình trụ có chiều cao bằng nhau, bán kính đáy lần lượt bằng $1\,m$ và $1,4\ m$. Chủ cơ sở dự định làm một bể nước mới, hình trụ, có cùng chiều cao và có thể tích bằng tổng thể tích của hai bể nước trên (như hình vẽ). Tính bán kính đáy của bể nước dự định làm (làm tròn kết quả đến phần trăm).



Bài 21. Một chiếc tạ tay có hình dạng gồm 3 khối trụ, trong đó hai khối trụ ở hai đầu bằng nhau và khối trụ làm tay cầm ở giữa. Gọi khối trụ làm đầu tạ là (T_1) và khối trụ làm tay cầm là (T_2) lần lượt có bán kính và chiều cao tương ứng là r_1, h_1, r_2, h_2 thỏa mãn $r_1 = 4r_2$, $h_1 = \frac{1}{2}h_2$ (tham khảo hình vẽ).



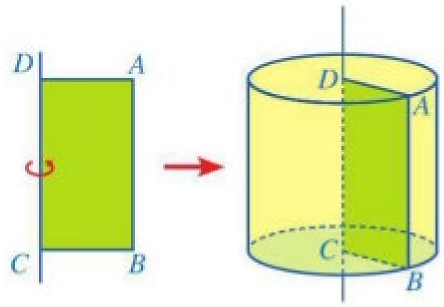
Biết rằng thể tích của khối trụ tay cầm (T_2) bằng 30 (cm^3) và chiếc tạ làm bằng inox có khối lượng riêng là $D = 7,7 g/cm^3$. Khối lượng của chiếc tạ tay bằng

CHƯƠNG 10
HÌNH HỌC TRỰC QUAN

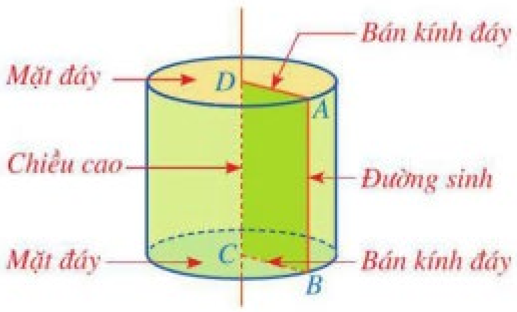
BÀI 1
HÌNH TRỤ

1. Hình trụ

a. Nhận biết hình trụ



Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ một vòng quanh cạnh CD cố định, ta được một **hình trụ**.



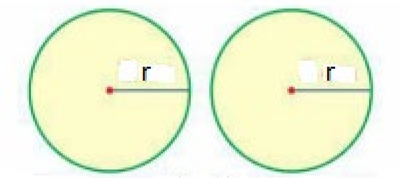
Với hình trụ trên, ta có:

- Hai hình tròn $(D;DA)$ và $(C;CB)$ là hai **mặt đáy**. Hai mặt đáy của hình trụ bằng nhau và nằm trong hai mặt phẳng song song.
- Độ dài cạnh DA được gọi là **bán kính đáy**.
- Độ dài cạnh CD được gọi là **chiều cao**.
- Cạnh AB quét nên **mặt xung quanh** của hình trụ, mỗi vị trí của AB được gọi là một **đường sinh**. Độ dài của đường sinh **bằng** chiều cao của hình trụ.

b. Tạo lập hình trụ

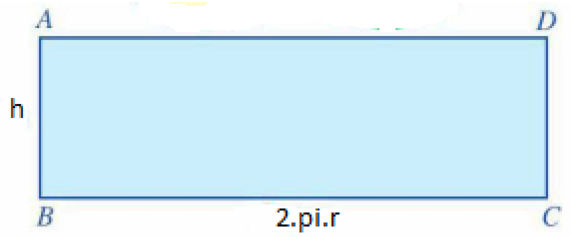
Để tạo lập chiếc hộp dạng hình trụ có chiều cao h và bán kính đáy r, ta làm ba bước như sau:

Bước 1: Cắt hai miếng bìa có dạng hình tròn với bán kính r (hình 1).



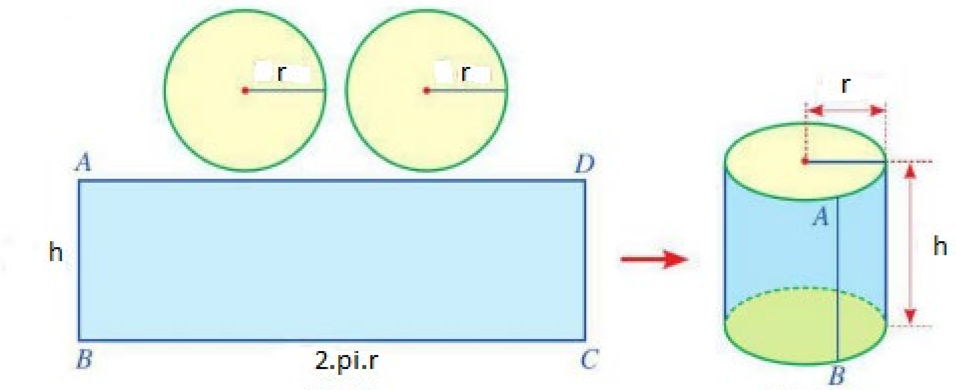
Hình 1

Bước 2: Cắt một tấm bìa hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh h và cạnh $2\pi r$ (hình 2).



Hình 2

Bước 3: Ghép và dán các miếng bìa vừa cắt ở bước 1, bước 2 (hình 3), ta được một hình trụ (hình 4).



Hình 3 Hình 4

2. Diện tích xung quanh của hình trụ

Diện tích xung quanh của hình trụ bằng tích của chu vi đáy với chiều cao:

$$S_{xq} = C.h = 2\pi rh$$

Trong đó:

S_{xq} là diện tích xung quanh của hình trụ.

C là chu vi đáy.

r là bán kính đáy.

h là chiều cao của hình trụ.

Chú ý:

- Tổng của diện tích xung quanh và diện tích hai đáy của hình trụ gọi là diện tích toàn phần phần của hình trụ đó.
- Diện tích toàn phần của hình trụ: $S_{tp} = S_{xq} + 2S_{đáy} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h+r)$

Trong đó:

S_{tp} là diện tích toàn phần của hình trụ.

S_{xq} là diện tích xung quanh của hình trụ.

$S_{dáy}$ là diện tích đáy.

r là bán kính đáy.

h là chiều cao của hình trụ.

3. Thể tích của hình trụ

Thể tích của hình trụ bằng tích của diện tích đáy với chiều cao:

$$V = S.h = \pi r^2 h$$

Trong đó:

V là thể tích của hình trụ.

S là diện tích đáy.

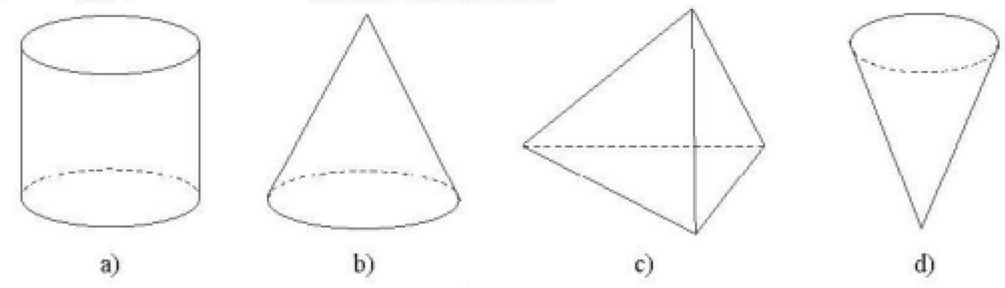
r là bán kính đáy.

h là chiều cao của hình trụ.

DẠNG 1
NHẬN DẠNG VÀ TẠO LẬP HÌNH TRỤ

Hình trụ là hình có hai mặt đáy là đường tròn song song và bằng nhau.

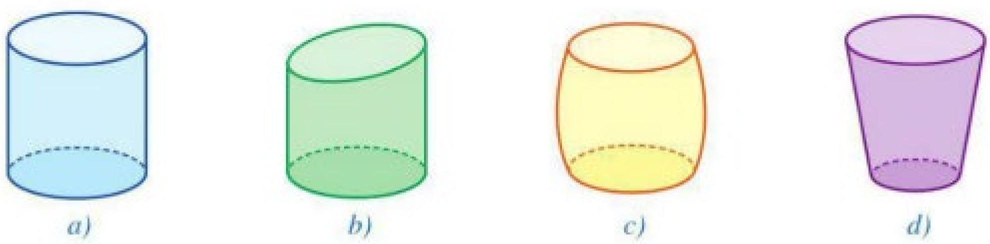
Bài 1. Trong các hình sau đây, hình nào là hình trụ?



Lời giải

+ Hình a) là hình trụ

Bài 2. Trong các vật thể ở các hình dưới đây, vật thể nào có dạng hình trụ?



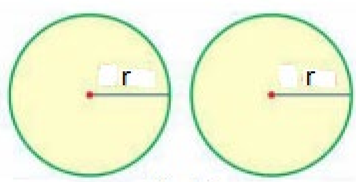
Lời giải

+ Vật thể a) là vật thể có dạng hình trụ

Bài 3. Tạo lập hình trụ có bán kính đáy $r = 5(cm)$ và chiều cao $h = 8(cm)$

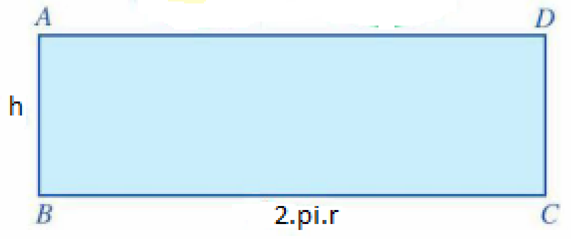
Lời giải

Bước 1: Cắt hai miếng bìa có dạng hình tròn với bán kính $r = 5(cm)$ (hình 1).



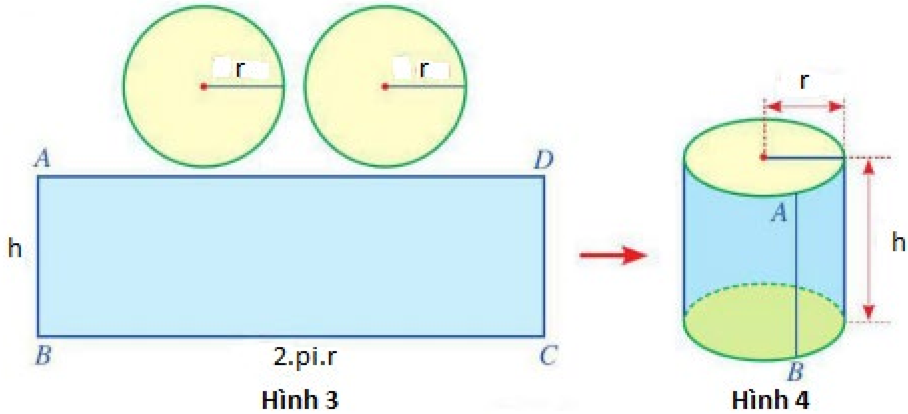
Hình 1

Bước 2: Cắt một tấm bìa hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $h = 8(cm)$ và cạnh $2\pi.r = 2\pi.5 \approx 31,4(cm)$ (hình 2).



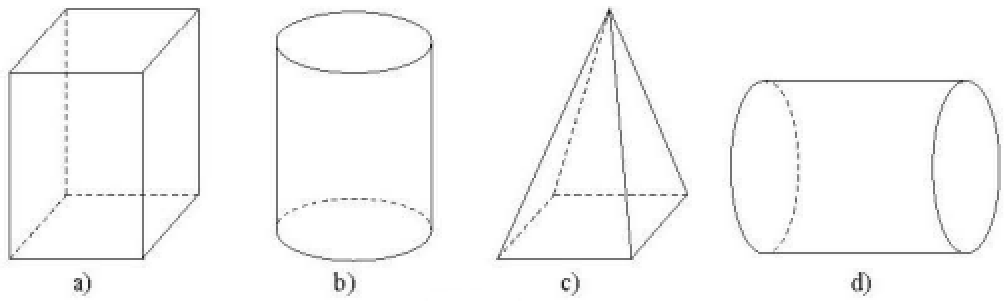
Hình 2

Bước 3: Ghép và dán các miếng bìa vừa cắt ở bước 1, bước 2 (hình 3), ta được một hình trụ có bán kính đáy $r = 5(cm)$ và chiều cao $h = 8(cm)$ (hình 4).



BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Trong các hình sau đây, hình nào là hình trụ?



Lời giải

+ Hình b) và hình d) là hình trụ

Bài 5. Trong các vật thể ở các hình dưới đây, vật thể nào có dạng hình trụ?

Lời giải

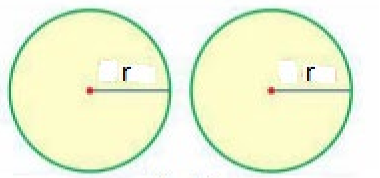
+ Vật thể e) là vật thể có dạng hình trụ

Bài 6. Tạo lập hình trụ có bán kính đáy $r=4(cm)$ và thể tích $V=224\pi(cm)$

Lời giải

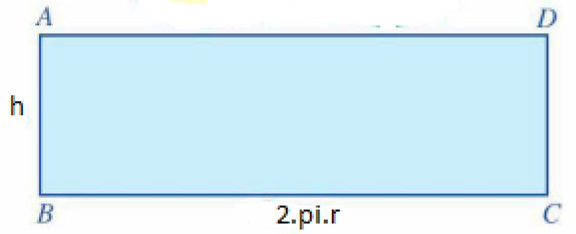
Chiều cao hình trụ là: $h=\dfrac{V}{\pi r^2}=\dfrac{224\pi}{16\pi}=14(cm)$

Bước 1: Cắt hai miếng bìa có dạng hình tròn với bán kính $r=4(cm)$ (hình 1).



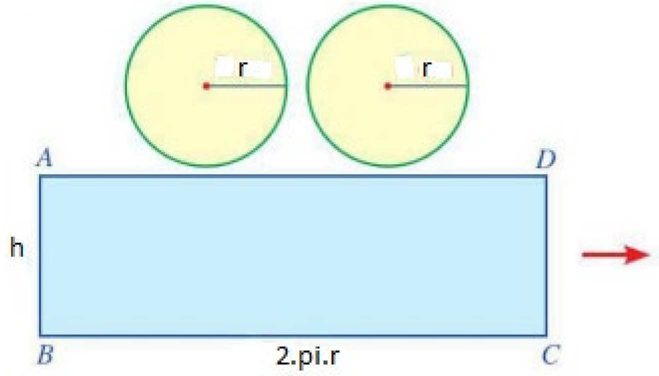
Hình 1

Bước 2: Cắt một tấm bìa hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $h=14(cm)$ và cạnh $2\pi.r=2\pi.4\approx 25,1(cm)$ (hình 2).

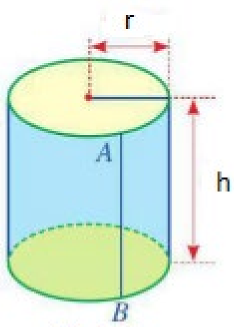


Hình 2

Bước 3: Ghép và dán các miếng bìa vừa cắt ở bước 1, bước 2 (hình 3), ta được một hình trụ có bán kính đáy $r=4(cm)$ và chiều cao $h=14(cm)$ hay một hình trụ có bán kính đáy $r=4(cm)$ và thể tích $V=224\pi(cm)$ (hình 4).



Hình 3



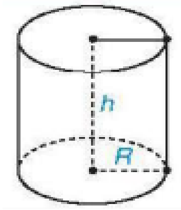
Hình 4

DẠNG 2
TÍNH BÁN KÍNH ĐÁY, ĐƯỜNG CAO, DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH CỦA HÌNH TRỤ

Cho hình trụ có bán kính đáy r và chiều cao h.

- Diện tích xung quanh: $S_{xq}=2\pi rh$
- Diện tích toàn phần: $S_{tp}=2\pi r\left(h+r\right)$
- Thể tích: $V=\pi r^2h$

Bài 1. Thay dấu "?" bằng giá trị thích hợp và hoàn thành bảng sau:

Hình trụ	Bán kính đáy (cm)	Chiều cao (cm)	Diện tích xung quanh (cm^2)	Diện tích toàn phần (cm^2)	Thể tích (cm^3)
	3	7	?	?	?
	4	?	20π	?	?
	?	8	?	18π	?
	?	5	?	?	150π

Lời giải

- Với $r=3,h=7$

$S_{xq}=2\pi rh=42\pi\left(cm^2\right)$

$S_{tp}=2\pi r\left(h+r\right)=60\pi\left(cm^2\right)$

$V=\pi r^2h=63\pi\left(cm^3\right)$

- Với $r=3,S_{xq}=20\pi\left(cm^2\right)$

$S_{xq}=2\pi rh\Rightarrow h=\dfrac{S_{xq}}{2\pi r}=2,5\left(cm\right)$

$S_{tp}=2\pi r\left(h+r\right)=52\pi\left(cm^2\right)$

$V=\pi r^2h=40\pi\left(cm^3\right)$

- Với $h=8,S_{xq}=18\pi\left(cm^2\right)$

$S_{tp}=2\pi r\left(h+r\right)$

$18\pi=2\pi r\left(h+r\right)$

$r^2+8r-9=0$

$\Rightarrow r=1$

$S_{xq}=2\pi rh=16\pi\left(cm^2\right)$

$V = \pi r^2 h = 8\pi\left(cm^3\right)$

- Với $h = 5, V = 150\pi$

$V = \pi r^2 h \Rightarrow h = \dfrac{V}{\pi r^2} = \dfrac{150\pi}{25\pi} = 6\left(cm\right)$

$S_{xq} = 2\pi rh = 60\pi\left(cm^2\right)$

$S_{tp} = 2\pi r\left(h + r\right) = 110\pi\left(cm^2\right)$

Bài 2. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng $5\left(dm\right)$. Biết rằng hình trụ đó có diện tích toàn phần gấp đôi diện tích xung quanh. Tính chiều cao hình trụ.

Lời giải

Ta có: $S_{tp} = 2S_{xq}$

$2\pi r\left(h + r\right) = 2.2\pi rh$

$2\pi.5\left(h + 5\right) = 2.2\pi.5h$

$5\left(h + 5\right) = 10h$

$h = 5\left(dm\right)$

Bài 3. Hỏi nếu tăng chiều cao của khối trụ lên 2 lần, bán kính của nó lên 3 lần thì thể tích của khối trụ mới sẽ tăng bao nhiêu lần so với khối trụ ban đầu?

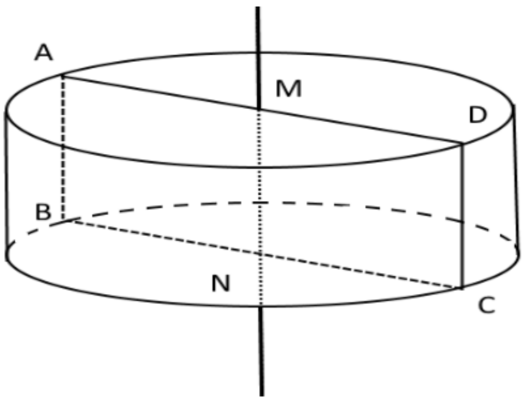
Lời giải

Giả sử ban đầu khối trụ có chiều cao h_1 và bán kính r_1. Khi đó, khối trụ có thể tích là $V_1 = \pi r_1^2 h_1$.

Sau khi tăng chiều cao của khối trụ lên 2 lần, bán kính của nó lên 3 lần thì khối trụ có chiều cao $2h_1$ và bán kính $3r_1$. Khi đó, khối trụ mới có thể tích là $V_2 = \pi\left(3r_1\right)^2.2h_1 = 18\pi r_1 h_1 = 18V_1$.

Vậy thể tích của khối trụ mới sẽ tăng 18 lần so với khối trụ ban đầu

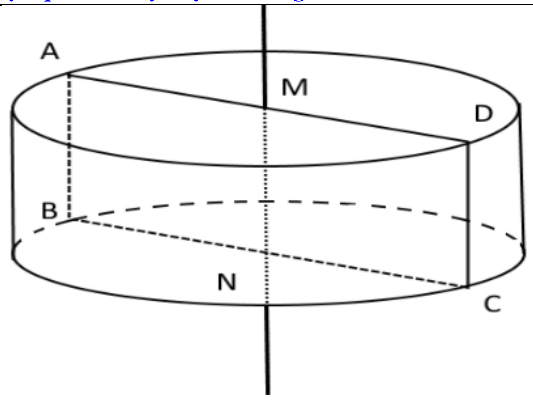
Bài 4. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 1\left(cm\right), AD = 2\left(cm\right)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Quay hình chữ nhật đó xung quanh trục MN ta được một hình trụ như hình vẽ.



a) Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ đó.

b) Tính thể tích hình trụ đó.

Lời giải



Hình trụ đã cho có chiều cao là $h = AB = 1(cm)$ và đáy là hình tròn tâm M bán kính $r = \frac{AD}{2} = 1(cm)$.

a) $S_{tp} = 2\pi r(h+r) = 2\pi.1(1+1) = 4\pi\left(cm^2\right)$

a) $V = \pi r^2 h = \pi(cm)$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 5. Cho hình trụ có bán kính hình tròn đáy bằng r và chiều cao bằng h. Hỏi nếu tăng chiều cao lên 4 lần và giảm bán kính đáy 2 lần thì thể tích của khối trụ mới sẽ tăng hay giảm?

Lời giải

Giả sử ban đầu khối trụ có chiều cao h_1 và bán kính r_1. Khi đó, khối trụ có thể tích là $V_1 = \pi r_1^2 h_1$.

Sau khi tăng chiều cao của khối trụ lên 4 lần, bán kính của nó giảm 2 lần thì khối trụ có chiều cao $4h_1$ và bán kính $\frac{1}{2}r_1$. Khi đó, khối trụ mới có thể tích là $V_2 = \pi\left(\frac{1}{2}r_1\right)^2.4h_1 = \pi r_1 h_1 = V_1$.

Vậy thể tích của khối trụ mới không hay đổi so với khối trụ ban đầu

Bài 6. Cho hình trụ có diện tích toàn phần là $4\pi\left(dm^2\right)$ và bán kính đáy bằng nửa chiều cao. Tính thể tích hình trụ?

A. $\frac{\pi\sqrt{6}}{12}$ **B.** $\frac{\pi\sqrt{6}}{9}$ **C.** $\frac{4\pi}{9}$ **D.** $\frac{4\pi\sqrt{6}}{9}$

Lời giải

Chọn D.

Hình trụ có bán kính đáy bằng nửa chiều cao suy ra: $h = 2r$

Hình trụ có diện tích toàn phần là 4π suy ra:

$S_{tp} = 2\pi r(h+r)$

$4\pi = 2\pi.r(2r+r)$

$4\pi = 6\pi.r^2$

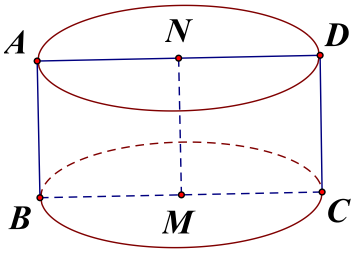
$r^2 = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow r = \frac{\sqrt{6}}{3}(dm)$

Nên $r = \dfrac{\sqrt{6}}{3}(dm)$, $l = h = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}(dm)$

Thể tích hình trụ: $V = \pi r^2.h = \dfrac{4\pi\sqrt{6}}{9}\left(dm^2\right)$

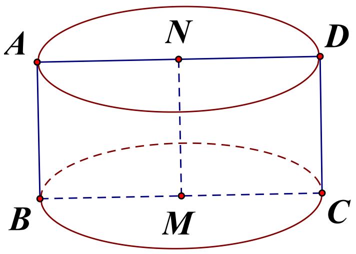
Bài 7. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$, $AD = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và AD. Khi quay hình chữ nhật trên quanh đường thẳng MN ta nhận được một hình trụ như hình vẽ.



a) Tính diện tích toàn phần của hình trụ theo a.

b) Tính thể tích của hình trụ theo a.

Lời giải



Quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh trục HK ta được hình trụ có đường cao là $h = AB = a$, bán kính đường tròn đáy là $R = BK = \dfrac{1}{2}BC = a$.

a) Vậy diện tích toàn phần của hình trụ là: $S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 4\pi a^2$ (đvdt)

b) Thể tích khối tròn xoay (T) là: $V = \pi a^2.a = \pi a^3$ (đvtt)

DẠNG 3
ỨNG DỤNG CỦA HÌNH TRỤ TRONG THỰC TIỄN

Cho hình trụ có bán kính đáy r và chiều cao h.

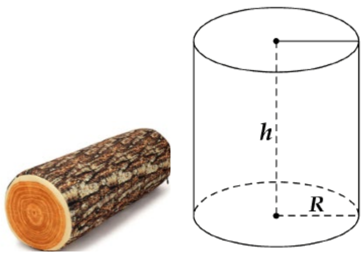
- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2\pi rh$
- Diện tích toàn phần: $S_{tp} = 2\pi r\left(h+r\right)$
- Thể tích: $V = \pi r^2 h$

Bài 1. Một khúc gỗ hình trụ có đường kính đáy bằng 1,2 *m*, chiều cao bằng bán kính đáy (như hình vẽ).

a) Tính diện tích xung quanh của khúc gỗ đó (làm tròn kết quả đến phần trăm).

b) Với thành hiện tại, 1 m^3 gỗ trên bán được 5 triệu đồng. Hãy tính giá thành khúc gỗ trên nếu đem đi bán.

Lời giải



a) Vì khúc gỗ hình trụ cón bán kính đáy $r = \dfrac{1,2}{2} = 0,6m$ và chiều cao $r = h = 0,6m$ nên diện tích xung quanh của khúc gỗ là:

$$S_{xq} = 2\pi rh = 2.\pi.0,6.0,6 \approx 2,26m^2$$

Vậy diện tích xung quanh khúc gỗ là $2,26m^2$

b) Thể tích khúc gỗ là: $V = \pi r^2 h = \pi.\left(0,6\right)^2.0,6 \approx 0,68m^3$

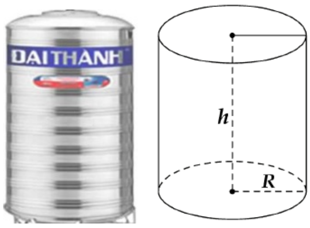
1 m^3 gỗ trên bán được 5 triệu đồng nên $0,68m^3$ gỗ sẽ bán được $0,68.5 = 3,4$ triệu đồng

Bài 2. Một bồn nước inox Đại Thanh có dạng hình trụ với chiều cao 1,75 *m* và diện tích đáy là 0,32 m^2.

a) Tính bán kính đáy của bồn nước inox Đại Thanh (làm tròn kết quả đến phần trăm).

b) Hỏi bồn nước này đựng đầy được bao nhiêu mét khối nước? (Bỏ qua bề dày của bồn).

Lời giải



a) Vì đáy của bồn nước inox là đường tròn nên bán kính đáy là:

$S_{đáy} = \pi . r^2$

$r^2 = \frac{S_{đáy}}{\pi} = \frac{0,32}{\pi}$

$r \approx 0,32m$

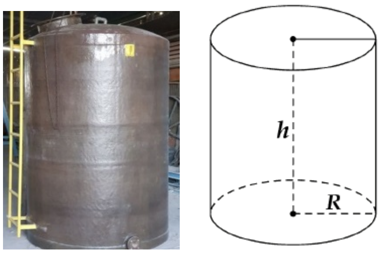
b) Vì bồn nước hình trụ có chiều cao $h = 1,75m$ và diện tích đáy $S_{đáy} = 0,32m^2$ nên thể tích của bồn là:

$V = S_{đáy}.h = 0,32.1,75 = 0,56m^3$

Vậy bồn đựng đầy được $0,56m^3$ nước.

Bài 3. Người ta dự định làm dự định làm một chiếc bồn chứa dầu bằng sắt hình trụ có chiều cao 1,8 *m*, đường kính đáy 1,2 *m*. Hỏi chiếc bồn đó chứa đầy được bao nhiêu lít dầu, biết rằng 1 m^3 = 1000 *lít* (Bỏ qua bề dày của bồn, lấy $\pi = 3,14$)

Lời giải



Thể tích hình trụ: $V = \pi r^2 h$

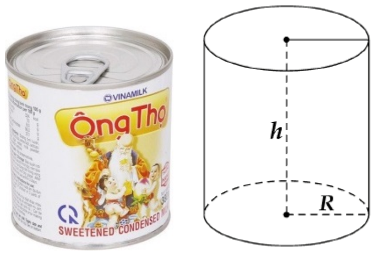
Vì chiếc bồn hình trụ có chiều cao $h = 1{,}8m$ và bán kính đáy $r = 1{,}2 : 2 = 0{,}6m$ nên thể tích chiếc bồn là:

$V = \pi r^2 h = 3{,}14.(0{,}6)^2.1{,}8 = 2{,}03m^3 = 2030(lit)$

Vậy chiếc bồn đó chứa đầy được 2030 lít dầu.

Bài 4. Một doanh nghiệp sản xuất vỏ hộp sữa ông thọ dạng hình trụ, có chiều cao bằng 12 *cm*. Biết thể tích của hộp là 192π cm^3. Tính số tiền mà doanh nghiệp cần chi để sản xuất 10 000 vỏ hộp sữa ông thọ (kể cả hai nắp hộp), biết chi phí để sản xuất vỏ hộp đó là 80 000 đồng/m^2. (làm tròn kết quả đến phần ngàn).

Lời giải



Vì hộp sữa hình trụ có chiều cao h = 12 cm và thể tích $V_{hộp} = 192\pi$ cm^3 nên:

$V = \pi r^2 h$

$192\pi = 12\pi r^2$

$r^2 = 16$

$\Rightarrow r = 4cm$

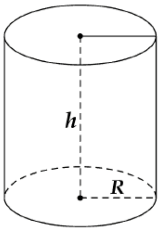
Vì hộp sữa hình trụ có $r = 4cm$ và chiều cao h = 12 cm nên diện tích toàn phần của hộp sữa là:

$S_{tp} = 2\pi r(h + r) = 2\pi.4(12 + 4) \approx 402{,}124(cm^2) \approx 0{,}04m^2$

Chi phí sản xuất 10 000 vỏ hộp sữa là : $0{,}04.10000.80000 = 32000000$ đồng

Bài 5. Khi uống nước giải khát, người ta hay sử dụng ống hút nhựa dạng hình trụ đường kính đáy là 0,4 *cm*, chiều dài ống hút là 18 *cm*. Hỏi khi thải ra môi trường, diện tích nhựa gây ô nhiễm cho môi trường do 100 ống hút này gây ra là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến phần ngàn).

Lời giải

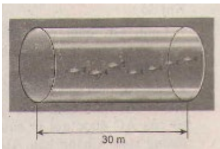


Vì ống hút hình trụ có bán kính đáy $R = 0{,}4 : 2 = 0{,}2$ *cm* và chiều cao h = 18 *cm* nên diện tích xung quanh của ống hút là:

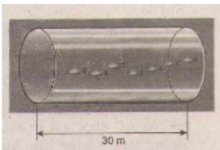
$S_{xq} = 2\pi rh = 2\pi.0{,}2.18 \approx 22{,}608\left(cm^2\right)$

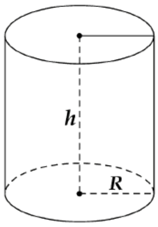
Vậy khi thải ra môi trường, diện tích nhựa gây ô nhiễm cho môi trường do 100 ống hút này gây ra là $100.\,22{,}608 = 2260{,}8\ \ cm^2$.

Bài 6. Đường ống nối hai bể cá trong một thủy cung miền nam nước Pháp có dạng một hình trụ, độ dài của đường ống là 30 *m*. Dung tích của đường ống nói trên là 1 800 000 *lít*. Tính diện tích đáy của đường ống.



Lời giải





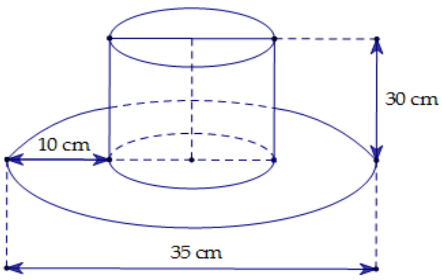
Vì ống nối hình trụ thể tích $V_{\text{ống nối}}$ = 1.800.000 lít = 1.800 m^3 và chiều cao h = 30 *m* nên:

$V_{\text{ống nối}} = S_{\text{đáy}}.h$

$\Longrightarrow S_{\text{đáy}} = \dfrac{V_{\text{ống nối}}}{h} = \dfrac{1.800}{30} = 60\ (m^2)$

Vậy diện tích đáy của đường ống là 60 m^2.

Bài 7. Một cái mũ bằng vải của nhà ảo thuật có dạng hình trụ và với kích thước mô phỏng như hình vẽ.



a) Hãy tính tổng diện tích vải cần có để làm nên cái mũ đó (không tính phần viền, mép dán) (làm tròn kết quả đến phần trăm).

b) Hãy tính thể tích phần có dạng hình nón của chiếc mũ đó (làm tròn kết quả đến phần trăm).

Lời giải

a) Bán kính hình trụ của cái mũ là $r=\dfrac{35-10-10}{2}=\dfrac{15}{2}(cm)$.

Đường cao hình trụ của cái mũ là $30\ cm$.

Diện tích xung hình trụ là: $S_{xq}=2\pi rl=2.\pi.\dfrac{15}{2}.30=450\pi\left(cm^2\right)$.

Diện tích vành mũ là: $S_v=\pi\left(\dfrac{35}{2}\right)^2-\pi\left(\dfrac{15}{2}\right)^2=250\pi\left(cm^2\right)$.

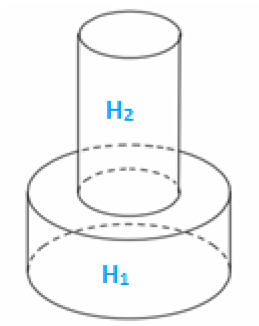
Vậy tổng diện tích vải cần có để làm nên cái mũ đó (không tính phần viền, mép dán) là:

$S=S_{xq}+S_v=450\pi+250\pi=200\pi\approx 628,32\left(cm^2\right)$.

b) thể tích phần có dạng hình nón của chiếc mũ là

$V=\pi r^2h=\pi\left(\dfrac{15}{2}\right)^2.30=\dfrac{3375}{2}\pi\approx 5301,44\left(cm^3\right)$

Bài 8. Một khối đồ chơi gồm hai hình trụ $\left(H_1\right),\left(H_2\right)$ xếp chồng lên nhau, lần lượt có bán kính đáy và chiều cao tương ứng là r_1,h_1,r_2,h_2 thỏa mãn $r_2=\dfrac{1}{2}r_1,h_2=2h_1$ (tham khảo hình vẽ). Biết rằng thể tích của toàn bộ khối đồ chơi bằng $30cm^3$. Tính thể tích khối trụ $\left(H_1\right)$.



Lời giải

Gọi V_1,V_2 lần lượt là thể tích khối trụ $\left(H_1\right),\left(H_2\right)$

$V_2=\pi r_2^2h_2=\pi\left(\dfrac{1}{2}r_1\right)^2 2h_1=\dfrac{V_1}{2}$

$\Rightarrow V_1=2V_2$

mà $V_1+V_2=30\Rightarrow V_1=20cm^3$

Bài 9. Người ta làm tạ tập cơ tay như hình vẽ với hai đầu là hai khối trụ bằng nhau và tay cầm cũng là khối trụ. Biết hai đầu là hai khối trụ đường kính đáy bằng $12(cm)$, chiều cao bằng $6(cm)$, chiều dài tạ bằng $30(cm)$ và bán kính tay cầm là $2(cm)$. Hãy tính thể tích vật liệu làm nên tạ tay đó (làm tròn kết quả đến phần trăm).

Lời giải

Gọi h_1, R_1, V_1 lần lượt là chiều cao, bán kính đáy, thể tích khối trụ nhỏ mỗi đầu.

$V_1 = h_1.\pi.R_1^2 = 6.\pi.6^2 = 216\pi$.

Gọi h_2, R_2, V_2 lần lượt là chiều cao, bán kính đáy, thể tích của tay cầm.

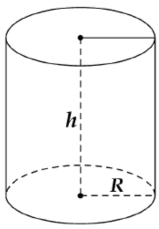
$V_2 = h_2.\pi.R_2^2 = (30-2.6).\pi.2^2 = 72\pi$.

Thể tích vật liệu làm nên tạ tay bằng $V = 2V_1 + V_2 = 504\pi \approx 1583,36\left(cm^2\right)$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 10. Một thùng nước hình trụ có chiều cao bằng đường kính đáy và bằng 1 m. Thùng nước này có thể đựng được 1 m^3 nước không? Tại sao? (lấy $\pi = 3,14$)

Lời giải



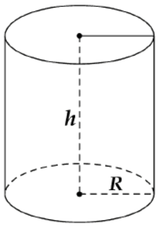
Vì thùng nước hình trụ có chiều cao h = 1m và bán kính đáy r = 1 : 2 = 0,5 m nên:

$V = \pi r^2 h = 3,24.(0,5)^2.1 = 0,785m^3$

Vì $V = 0,785m^3 < 1m^3$ nên thùng nước không đựng được 1 m^3 nước.

Bài 11. Một bể nước hình trụ có chiều cao 2,5 m và diện tích đáy là 4,8 m^2. Một vòi nước được đặt phái trên miệng bể và chảy được 4.800 lít nước mỗi giờ. Hỏi vòi nước chảy sau bao lâu đầy bể (Biết ban đầu bể cạn nước, bỏ qua bề dày của thành bể và 1 m^3 = 1000 *lít*)

Lời giải



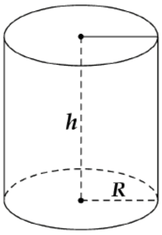
Vì bể hình trụ có chiều cao $h = 2,5$ m và diện tích đáy $S_{đáy} = 4,8$ m nên thể tích của bể là:

$V = S_{đáy}.h = 4,8.2,5 = 12m^3 = 12000(lit)$

Vậy vòi nước chảy sau 12.000 : 4.800 = 2,5 giờ thì đầy bể.

Bài 12. Một hộp đựng chè hình trụ có đường kính đáy bằng 8 cm và chiều cao bằng 12 cm. Tính diện tích giấy carton để làm một hộp chè đó, biết tỉ lệ giấy carton hao hụt khi làm một hộp chè là 5% (lấy π = 3,14).

Lời giải



Vì hộp đựng chè hình trụ có bán kính đáy $R = 8 : 2 = 4cm$ và chiều cao $h = 12cm$ nên diện tích toàn phần của hộp chè là:

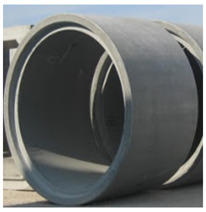
$S_{tp} = S_{xq} + 2.S_{đáy}$

$= 2\pi Rh + 2\pi R^2$

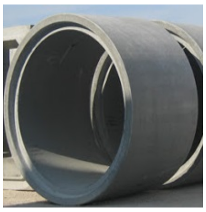
$= 2.3,14.4.12 + 2.3,14.4^2 = 401,92\ (cm^2)$

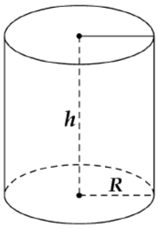
Vậy diện tích giấy carton cần dụng để làm hộp chè là $105\%.401,92 = \mathbf{422,016}\ cm^2$.

Bài 13. Một đoạn ống nước hình trụ dài 5 m, có dung tích 32 m^3. Tính diện tích đáy của ống nước đó.



Lời giải





Vì ống nước hình trụ có chiều cao $h = 5m$ và dung tích

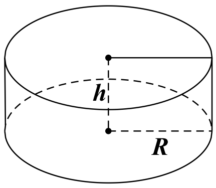
$V_{\text{ống}} = 32m^3$ nên:

$V_{\text{ống}} = S_{\text{đáy}}.h \Longrightarrow S_{\text{đáy}} = \dfrac{V}{h} = \dfrac{32}{5} = 6{,}4\ (m^2)$

Vậy diện tích đáy của ống là $6{,}4m^2$.

Bài 14. Một hộp phô mai gồm có 8 miếng, độ dày mỗi miếng là 2 cm. Nếu xếp chúng lại trên một đĩa thì tạo thành chiếc bánh hình trụ có đướng kính đáy bằng 10 cm. Hỏi mỗi miếng phô mai có thể tích bao nhiêu cm^3 (lấy $\pi = 3{,}14$).

Lời giải



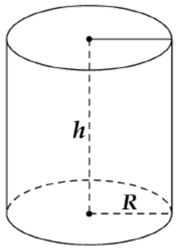
Vì chiếc bánh hình trụ có $h = 2cm$ và bán kính đáy $R = 10 : 2 = 5cm$ nên thể tích của chiếc bánh là:

$V_{\text{bánh}} = \pi R^2 h = 3{,}14.5^2.2 = 157\ (\text{cm}^3)$

Vậy mỗi miếng phô mai có thể tích là 157 : 8 = 1925 cm^3.

Bài 15. Một lọ thuốc hình trụ có chiều cao 10 cm và bán kính đáy bằng 5 cm. Nhà sản xuất phủ kín mặt xung quanh của lọ thuốc bằng giấy in các thông tìn về loại thuốc ấy. Hãy tính diện tích phần giấy cần dùng của lọ thuốc đó (*Độ dày của giấy in và lọ thuốc không đáng kể*)?

Lời giải

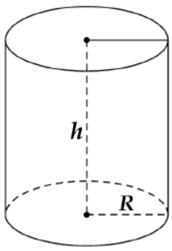
Vì lọ thuốc hình trụ có chiều cao $h = 10cm$ và bán kính đáy $R = 5cm$ nên diện tích xung quanh của lọ thuộc là:

$$S_{xq} = P_{đáy}.h = 2\pi Rh$$
$$= 2.3{,}14.5.10 = \mathbf{314}\ (cm^2)$$

Vậy diện tích phần giấy cần dùng là của lọ thuốc là $314cm^2$.

Bài 16. Để hưởng ứng cuộc vận động "*Nói không với rác thải nhựa dùng một lần*", một nhà hàng dùng hộp giấy để đựng sữa chua. Hộp giấy có dạng hình trụ có đường kính đáy là 6 cm; chiều cao 7 cm và có lắp đậy làm bằng nhựa. Tính số m^2 giấy để sản xuất 100 hộp giấy trên. (Biết 1 m^2 = 10.000 cm^2; lấy π = 3,14 và bỏ qua các mép dán vỏ hộp).

Lời giải



Vì hộp giấy hình trụ có bán kính đáy $R = 6 : 2 = 3cm$ và chiều cao $h = 7cm$ nên diện tích hộp giấy không có lắp là:

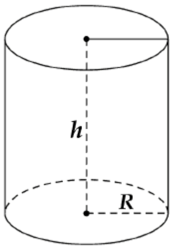
$$S_{\text{không lắp}} = S_{xq} + S_{đáy} = 2\pi Rh + \pi R^2$$
$$= 2.3{,}14.3.7 + 3{,}14.3^2$$
$$= 160{,}14\ (\text{cm}^3)$$

Vậy diện tích giấy để làm 100 hộp sữa chua là:

$$160{,}14\,.100 = \mathbf{16014}\ (cm^2) = \mathbf{1{,}6014}\ m^2$$

Bài 17. Một cốc thủy tinh hình trụ có chiều cao bằng 10 *cm* và thể tích bằng 90π *cm*^{3}. Tính bán kính của đáy cốc thủy tinh đó?

Lời giải



Vì cốc thủy tinh hình trụ có chiều cao h = 10 *cm* và thể tích $V_{cốc}$ = 90π *cm*^{3} nên:

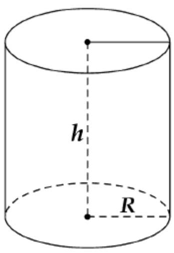
$$V_{cốc} = S_{đáy}.h = \pi R^2.h$$

$$\Longrightarrow R^2 = \frac{V_{cốc}}{\pi h} = \frac{90\pi}{\pi.10} = 9 \Longrightarrow R = 3\ (cm)$$

Vậy bán kính đáy cốc thủy tinh là 3 *cm*.

Bài 18. Một ống đong hình trụ có chiều cao gấp 5 lần bán kính. Biết thể tích ống đong bằng 40π cm^3. Tính chiều cao của ống đong đó.

Lời giải



Vì ống đong hình trụ có $h = 5r$ nên:

$V = \pi r^2.h$

$40\pi = \pi r^2.5r$

$r^3 = 8$

$\Rightarrow r = 2$

$\Rightarrow h = 5.2 = 10cm$

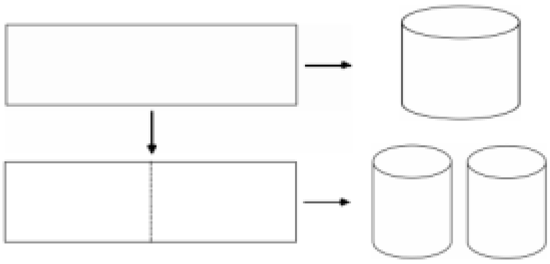
Vậy chiều cao của ống đong là 10cm.

Bài 19. Từ một tấm tôn hình chữ nhật kích thước $50\,\text{cm} \times 240\,\text{cm}$, người ta làm các thùng đựng nước hình trụ có chiều cao bằng $50\,\text{cm}$, theo hai cách sau (xem hình minh họa dưới đây):

• Cách 1: Gò tấm tôn ban đầu thành mặt xung quanh của thùng.

• Cách 2: Cắt tấm tôn ban đầu thành hai tấm bằng nhau, rồi gò mỗi tấm đó thành mặt xung quanh của một thùng.

Kí hiệu V_1 là thể tích của thùng gò được theo cách 1 và V_2 là tổng thể tích của hai thùng gò được theo cách 2. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.



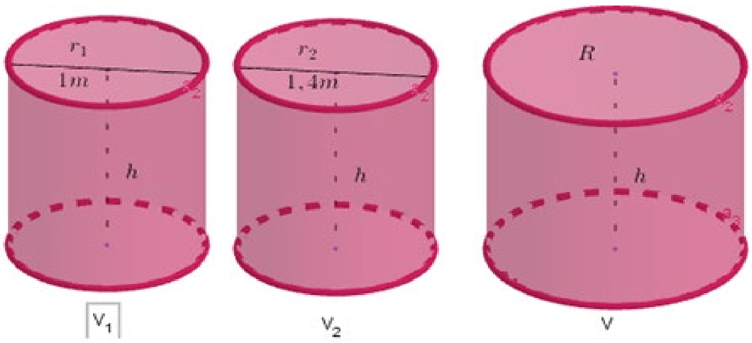
Lời giải

Ở cách 1, thùng hình trụ có chiều cao $h = 50\,\text{cm}$, chu vi đáy $C_1 = 240\,\text{cm}$ nên bán kính đáy $R_1 = \dfrac{C_1}{2\pi} = \dfrac{120}{\pi}\,\text{cm}$. Do đó thể tích của thùng là $V_1 = \pi R_1^2 h$.

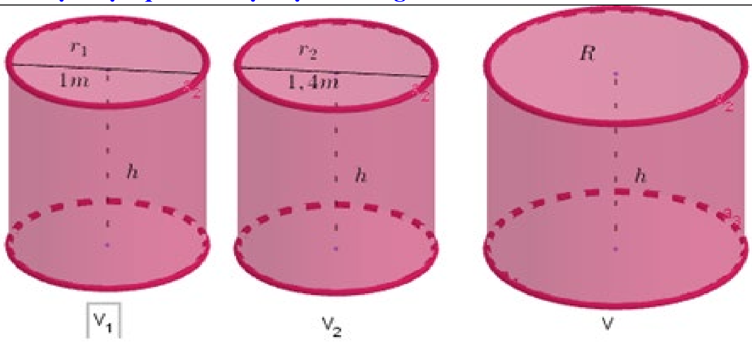
Ở cách 2, hai thùng đều có có chiều cao $h = 50\,\text{cm}$, chu vi đáy $C_2 = 120\,\text{cm}$ nên bán kính đáy $R_1 = \dfrac{C_2}{2\pi} = \dfrac{60}{\pi}\,\text{cm}$. Do đó tổng thể tích của hai thùng là $V_2 = 2\pi R_2^2 h$.

Vậy $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\pi R_1^2 h}{2\pi R_2^2 h} = \dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{\frac{120}{\pi}}{\frac{60}{\pi}}\right)^2 = 2$.

Bài 20. Một cơ sở sản xuất có hai bể nước hình trụ có chiều cao bằng nhau, bán kính đáy lần lượt bằng $1m$ và $1,4\ m$. Chủ cơ sở dự định làm một bể nước mới, hình trụ, có cùng chiều cao và có thể tích bằng tổng thể tích của hai bể nước trên (như hình vẽ). Tính bán kính đáy của bể nước dự định làm (làm tròn kết quả đến phần trăm).



Lời giải



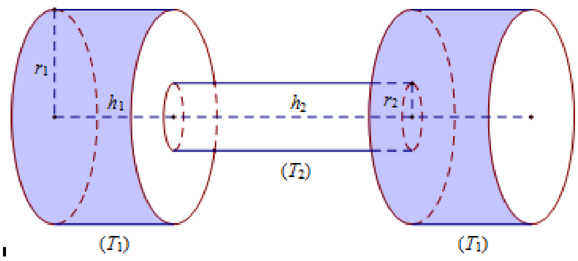
Ta có:

$V = V_1 + V_2$

$h\pi R^2 = h\pi r_1^2 + h\pi r_2^2$.

$\Rightarrow R = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} \approx 1,72\,m$.

Bài 21. Một chiếc tạ tay có hình dạng gồm 3 khối trụ, trong đó hai khối trụ ở hai đầu bằng nhau và khối trụ làm tay cầm ở giữa. Gọi khối trụ làm đầu tạ là (T_1) và khối trụ làm tay cầm là (T_2) lần lượt có bán kính và chiều cao tương ứng là r_1, h_1, r_2, h_2 thỏa mãn $r_1 = 4r_2$, $h_1 = \frac{1}{2}h_2$ (tham khảo hình vẽ).



Biết rằng thể tích của khối trụ tay cầm (T_2) bằng 30 (cm^3) và chiếc tạ làm bằng inox có khối lượng riêng là $D = 7,7\,g/cm^3$. Khối lượng của chiếc tạ tay bằng

Lời giải

Thể tích của hai khối trụ làm đầu tạ (T_1): $V_1 = 2\pi r_1^2 h_1 = 2\pi(4r_2)^2 \frac{1}{2}h_2 = 16\pi r_2^2 h_2 = 16.30 = 480\left(cm^3\right)$.

Tổng thể tích của chiếc tạ tay: $V = V_1 + V_2 = 480 + 30 = 510\left(cm^3\right)$.

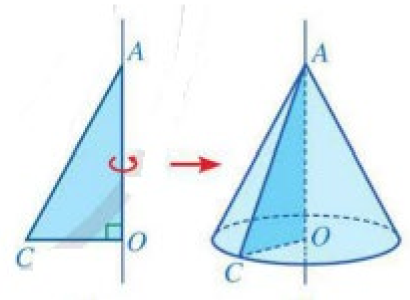
Khối lượng của chiếc tạ: $m = D.V = 7,7.510 = 3927(g) = 3,927(kg)$.

BÀI 2

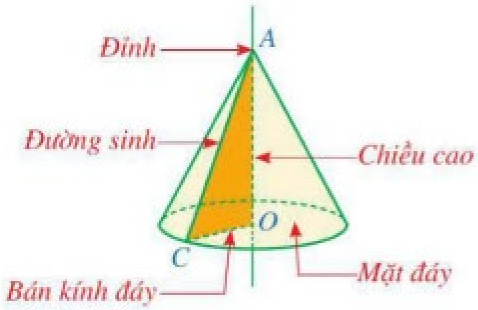
HÌNH NÓN

1. Hình nón

a. Nhận biết hình nón



Khi quay một hình tam giác vuông một vòng xung quanh đường thẳng cố định chứa một cạnh góc vuông của tam giác đóc thì được một **hình nón**.



Với hình nón trên, ta có:

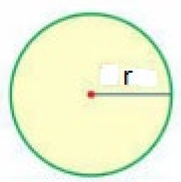
- Điểm A được gọi là **đỉnh**.
- Hình tròn tâm (O), bán kính OC được gọi là **mặt đáy**.
- Độ dài cạnh OC được gọi là **bán kính đáy**.
- Đoạn AO được gọi là **chiều cao**.
- Cạnh AC quét nên **mặt xung quanh** của hình nón, mỗi vị trí của AC được gọi là một **đường sinh**.

Chú ý: Nếu gọi độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính của hình nón lần lượt là l, h và r thì theo định lí Pythagore ta có: $l^2 = h^2 + r^2$

b. Tạo lập hình nón

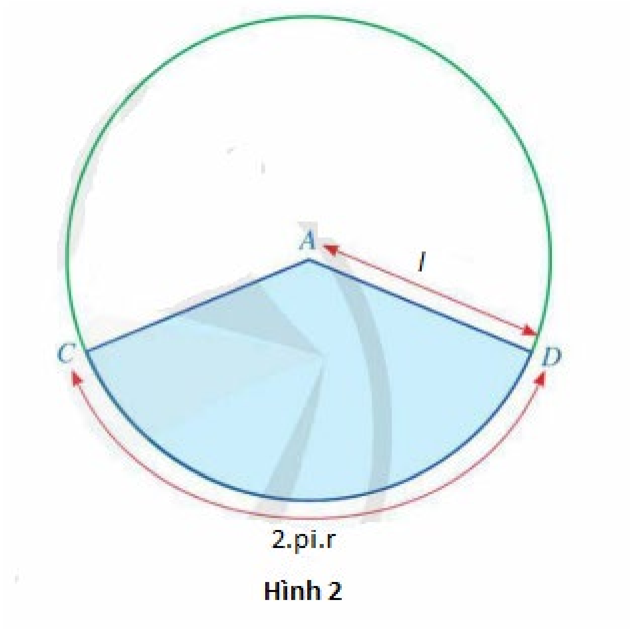
Để tạo hình nón có chiều cao h và bán kính đáy r, ta làm ba bước như sau:

Bước 1: Cắt miếng bìa có dạng hình tròn với bán kính r (hình 1).



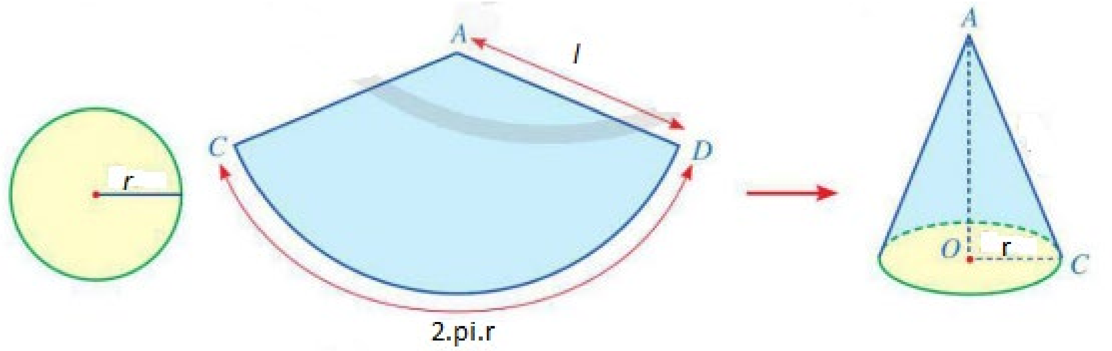
Hình 1

Bước 2: Cắt một tấm bìa hình quạt tròn có bán kính bằng độ dài đường sinh $l=\sqrt{h^2+r^2}$ và độ dài cung của hình quạt tròn bằng $2\pi r$ (hình 2).



Hình 2

Bước 3: Ghép và dán các miếng bìa vừa cắt ở bước 1, bước 2 (hình 3), ta được một hình nón (hình 4).



Hình 3 **Hình 4**

2. Diện tích xung quanh của hình nón

Diện tích xung quanh của hình nón bằng nửa tích của chu vi đáy với độ dài đường sinh:

$$S_{xq}=\frac{1}{2}C.l=\pi rl$$

Trong đó:

S_{xq} là diện tích xung quanh của hình nón.

C là chu vi đáy.

r là bán kính đáy.

l là độ dài đường sinh của hình nón.

Chú ý:

• Tổng của diện tích xung quanh và diện tích đáy của hình nón gọi là diện tích toàn phần của hình nón đó.

• Diện tích toàn phần của hình nón: $S_{tp}=S_{xq}+S_{đáy}=\pi rl+\pi r^2=\pi r\left(l+r\right)$

Trong đó:

S_{tp} là diện tích toàn phần của hình nón.

S_{xq} là diện tích xung quanh của hình nón.

$S_{đáy}$ là diện tích đáy.

r là bán kính đáy.

l là độ dài đường sinh của hình nón.

3. Thể tích của hình nón

Thể tích của hình nón bằng một phần ba tích của diện tích đáy với chiều cao:

$$V = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Trong đó:

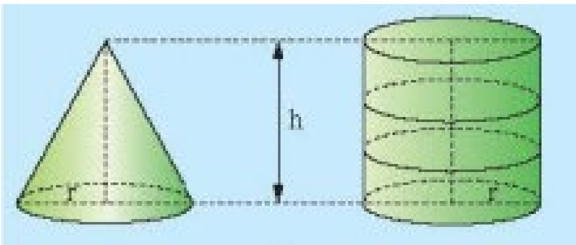
V là thể tích của hình nón.

S là diện tích đáy.

r là bán kính đáy.

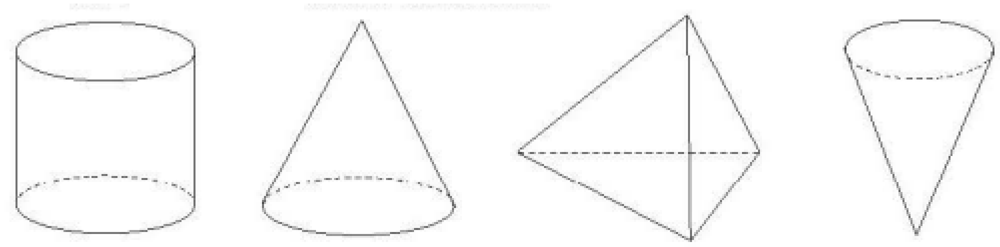
h là chiều cao của hình nón.

Chú ý: Hình nón và hình trụ có cùng chiều cao h và cùng bán kính đáy r thì: $V_{nón} = \frac{1}{3}V_{tru}$



DẠNG 1
NHẬN DẠNG HÌNH NÓN

Bài 1. Trong các hình sau đây, hình nào là hình nón?



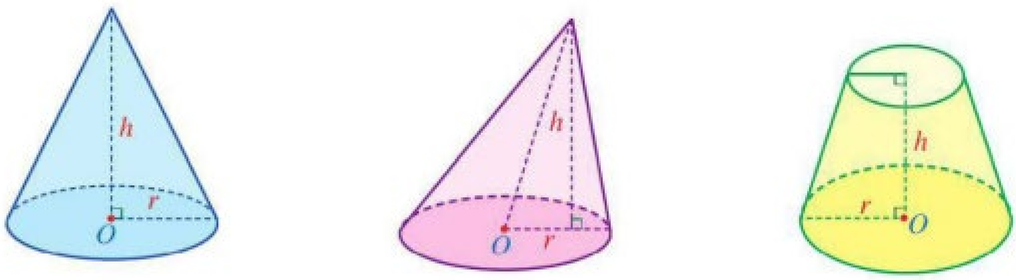
a) b) c) d)

Bài 2. Trong các vật thể ở các hình dưới đây, vật thể nào có dạng hình nón?

a) b) c) d) e)

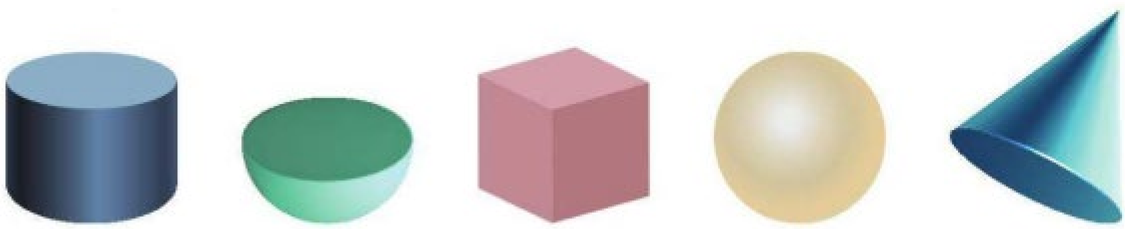
BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Trong các hình sau đây, hình nào là hình nón có O là tâm của mặt đáy, r là bán kính đáy, h là chiều cao?



a) b) c)

Bài 4. Trong các vật thể ở các hình dưới đây, vật thể nào có dạng hình nón?



a) b) c) d) e)

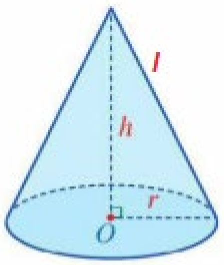
DẠNG 2
TÍNH BÁN KÍNH ĐÁY, ĐƯỜNG CAO, DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH CỦA HÌNH NÓN

Cho hình nón có bán kính đáy r, đường cao h và đường sinh l.

- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \dfrac{1}{2}C.l = \pi rl$
- Diện tích toàn phần: $S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy} = \pi rl + \pi r^2 = \pi r\left(l + r\right)$
- Thể tích: $V = \dfrac{1}{3}S.h = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$

Chú ý: Hình nón và hình trụ có cùng chiều cao h và cùng bán kính đáy r thì: $V_{nón} = \dfrac{1}{3}V_{tru}$

Bài 1. Cho hình nón có bán kính đáy r, đường cao h và đường sinh l như hình vẽ. Hãy thay dấu “?”bằng giá trị thích hợp và hoàn thành bảng sau:

Hình nón	Bán kính đáy (cm)	Chiều cao (cm)	Đường sinh (cm)	Diện tích xung quanh (cm^2)	Diện tích toàn phần (cm^2)	Thể tích (cm^3)
	3	4	?	?	?	?
	?	8	10	?	?	?
	2	?	?	14π	?	?
	4	?	9	?	?	

Bài 2. Nếu giữ nguyên bán kính đáy của một hình nón và giảm chiều cao của nó 2 lần thì thể tích của hình nón này thay đổi như thế nào so với ban đầu?

Bài 3. Cho tam giác OIM vuông tại I có $OI = 4cm$ và $IM = 3cm$. Khi quay tam giác OIM quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OIM tạo thành hình nón.

a) Tính độ dài đường sinh hình nón.

b) Tính diện tích xung quanh hình nón.

c) Tính diện tích toàn phần hình nón.

d) Tính thể tích hình nón.

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại cân A, gọi I là trung điểm của BC, $BC = 2dm$. Khi quay tam giác ABC xung quanh trục AI ta được hình nón.

a) Tính diện tích xung quanh hình nón.

b) Tính thể tích hình nón.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 5. Cho tam giác vuông ABC tại A, $AB = a$ và $AC = a\sqrt{3}$. Khi quay tam giác ABC xung quanh trục AB, ta thu được hình nón.

a) Tính độ dài đường sinh l của hình nón

b) Tính thể tích hình nón.

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = a$ và $\widehat{ACB} = 30^o$. Tính thể tích V của hình nón nhận được khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC.

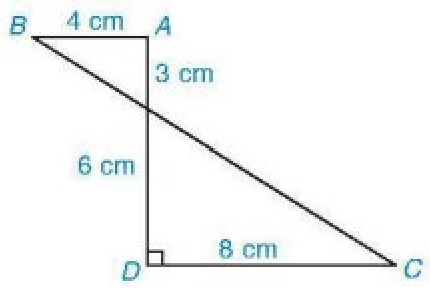
A. $V = \pi a^3$ **B.** $V = \sqrt{3}\pi a^3$ **C.** $V = \dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{9}$ **D.** $V = \dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$

Bài 7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính diện tích toàn phần của hình nón thu được khi quay tam giác $AA'C$ quanh trục AA'.

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông tại A, cạnh $AB = 6$, $AC = 8$ và M là trung điểm của cạnh AC. Tính thể tích của hình nón thu được do tam giác BMC quanh quanh AB.

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = 6cm, AC = 8cm$. Gọi V_1 là thể tích hình nón tạo thành khi quay tam giác ABC quanh cạnh AB và V_2 là thể tích hình nón tạo thành khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC. Tính tỷ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

Bài 10. Cho hình $ABCD$ như hình vẽ. Khi quanh quanh AD một vòng ta thu được một hình.



a) Tính diện tích toàn phần hình vừa tạo trên.

b) Tính thể tích hình được tạo ra.

DẠNG 3
ỨNG DỤNG CỦA HÌNH NÓN TRONG THỰC TIỄN

Bài 1. Một chiếc nón có bán kính đáy bằng 15 *cm* và chiều cao bằng 20 *cm*. Hỏi chiếc nón múc đầy được bao nhiêu cm^3 nước (lấy $\pi = 3{,}14$).

Bài 2. Thầy Nam có một đống cát hình nón cao 2*m*, đường kính đáy 6 *m*. Thầy Nam tính rằng để sửa xong ngôi nhà của mình cần 30 m^3 cát. Hỏi thầy Nam cần mua bổ sung bao nhiêu m^3 cát nữa để đủ cát sửa nhà (lấy $\pi = 3{,}14$ và các kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

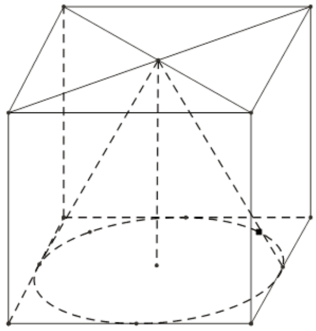
BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Một chiếc nón có đường kính đáy bằng 28 *cm* và đường sinh bằng 30 *cm*. Tính diện tích lá dùng để làm nón, biết tỉ lệ hao hụt là 10% (lấy $\pi = 3{,}14$).

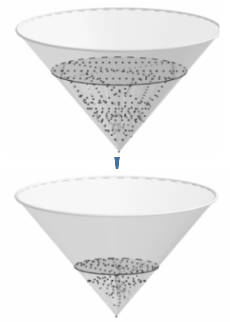
Bài 4. Chiếc nón do một làng nghề ở Việt Nam sản xuất là hình nón có đường sinh bằng 30 *cm*, đường kính đáy bằng 40 *cm*. Người ta dùng hai lớp lá để phủ lên bề mặt xung quanh của nón. Tính diện tích lá cần dùng làm 5000 chiếc nón.

Bài 5. Lượng nguyên liệu cần dùng để làm ra một chiếc nón lá được ước lượng qua phép tính diện tích xung quanh của mặt nón. Cứ $1kg$ lá dùng để làm nón có thể làm ra số nón có tổng diện tích xung quanh là $6{,}13\,m^2$. Hỏi nếu muốn làm ra 1000 chiếc nón lá giống nhau có đường trình vành nón $50\,cm$, chiều cao $30\,cm$ thì cần bao nhiêu khối lượng lá? (coi mỗi chiếc nón có hình dạng là một hình nón)

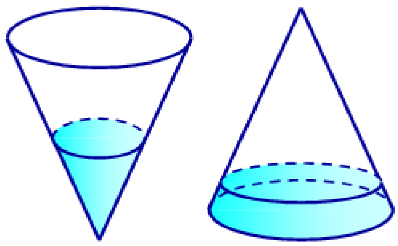
Bài 6. Một chiếc thùng chứa đầy nước có hình một khối lập phương. Đặt vào trong thùng đó một khối nón sao cho đỉnh khối nón trùng với tâm một mặt của khối lập phương, đáy khối nón tiếp xúc với các cạnh của mặt đối diện. Tính tỉ số thể tích của lượng nước trào ra ngoài và lượng nước còn lại ở trong thùng.



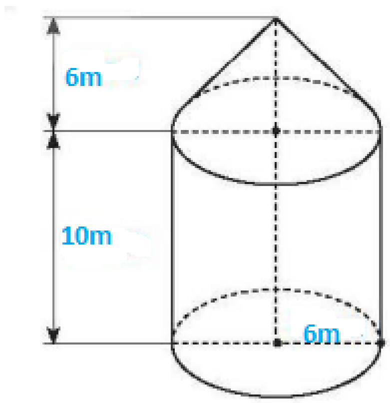
Bài 7. Hai hình nón bằng nhau có chiều cao bằng 2 dm được đặt như hình vẽ bên (mỗi hình đều đặt thẳng đứng với đỉnh nằm phía dưới). Lúc đầu, hình nón trên chứa đầy nước và hình nón dưới không chứa nước. Sau đó, nước được chảy xuống hình nón dưới thông qua lỗ trống ở đỉnh của hình nón trên. Hãy tính chiều cao của nước trong hình nón dưới tại thời điểm khi mà chiều cao của nước trong hình nón trên bằng 1 dm.



Bài 8. Một cái phễu có dạng hình nón, chiều cao của phễu là $20cm$. Người ta đổ một lượng nước vào phễu sao cho chiều cao của cột nước trong phễu là $10cm$. Nếu bịt kín miệng phễu rồi lật ngược lên thì chiều cao của cột nước trong phễu bằng bao nhiêu?



Bài 9. Một thùng chứa xăng gồm một phần có dạng hình trụ và một phần có dạng hình nón với kích thước như hình vẽ.



a) Thùng chứa xăng trên chứa được tối đa bao nhiêu lít xăng?

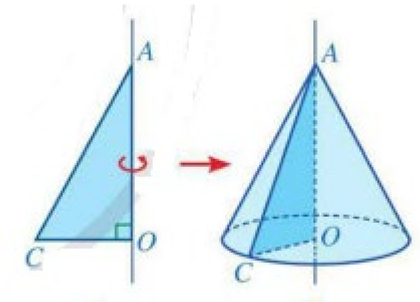
b) Một doanh nghiệp mua bán xăng dầu muốn đặt làm một thùng chứa xăng như trên. Biết chi phí 150000 đồng/m^2, Hỏi doanh nghiệp đó cần bỏ ra số tiền bao nhiêu để làm được một thùng chứa xăng như trên.

BÀI 2

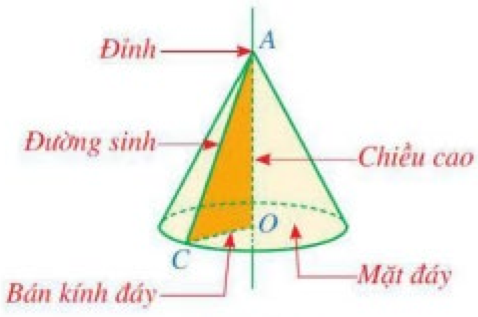
HÌNH NÓN

1. Hình nón

a. Nhận biết hình nón



Khi quay một hình tam giác vuông một vòng xung quanh đường thẳng cố định chứa một cạnh góc vuông của tam giác đóc thì được một **hình nón**.



Với hình nón trên, ta có:

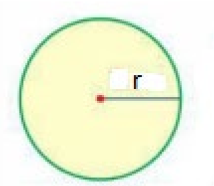
- Điểm A được gọi là **đỉnh**.
- Hình tròn tâm (O), bán kính OC được gọi là **mặt đáy**.
- Độ dài cạnh OC được gọi là **bán kính đáy**.
- Đoạn AO được gọi là **chiều cao**.
- Cạnh AC quét nên **mặt xung quanh** của hình nón, mỗi vị trí của AC được gọi là một **đường sinh**.

Chú ý: Nếu gọi độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính của hình nón lần lượt là l, h và r thì theo định lí Pythagore ta có: $l^2 = h^2 + r^2$

b. Tạo lập hình nón

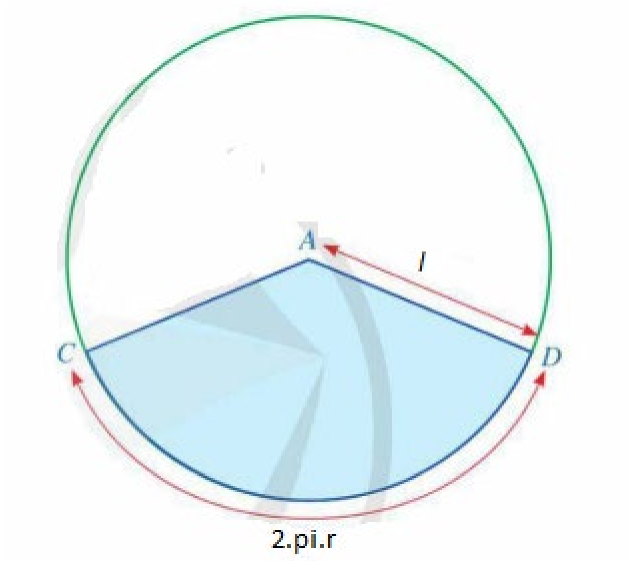
Để tạo hình nón có chiều cao h và bán kính đáy r, ta làm ba bước như sau:

Bước 1: Cắt miếng bìa có dạng hình tròn với bán kính r (hình 1).



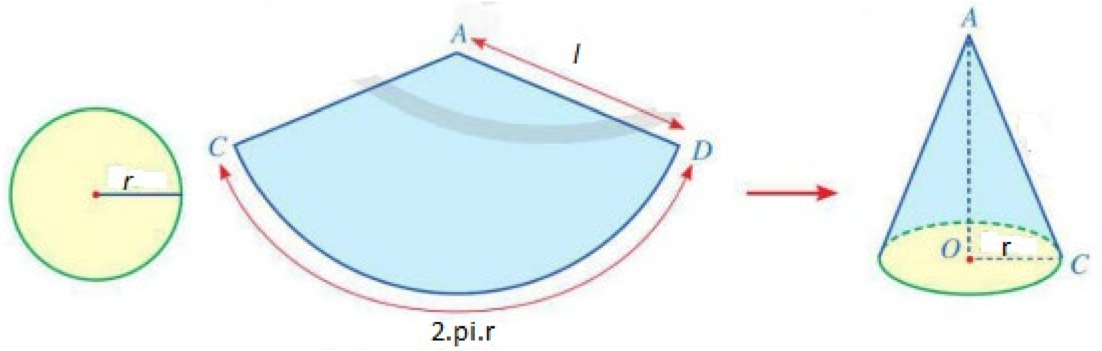
Hình 1

Bước 2: Cắt một tấm bìa hình quạt tròn có bán kính bằng độ dài đường sinh $l=\sqrt{h^2+r^2}$ và độ dài cung của hình quạt tròn bằng $2\pi r$ (hình 2).



Hình 2

Bước 3: Ghép và dán các miếng bìa vừa cắt ở bước 1, bước 2 (hình 3), ta được một hình nón (hình 4).



Hình 3 Hình 4

2. Diện tích xung quanh của hình nón

Diện tích xung quanh của hình nón bằng nửa tích của chu vi đáy với độ dài đường sinh:

$$S_{xq}=\frac{1}{2}C.l=\pi rl$$

Trong đó:

S_{xq} là diện tích xung quanh của hình nón.

C là chu vi đáy.

r là bán kính đáy.

l là độ dài đường sinh của hình nón.

Chú ý:

- Tổng của diện tích xung quanh và diện tích đáy của hình nón gọi là diện tích toàn phần của hình nón đó.
- Diện tích toàn phần của hình nón: $S_{tp}=S_{xq}+S_{đáy}=\pi rl+\pi r^2=\pi r\left(l+r\right)$

Trong đó:

S_{tp} là diện tích toàn phần của hình nón.

S_{xq} là diện tích xung quanh của hình nón.

$S_{đáy}$ là diện tích đáy.

r là bán kính đáy.

l là độ dài đường sinh của hình nón.

3. Thể tích của hình nón

Thể tích của hình nón bằng một phần ba tích của diện tích đáy với chiều cao:

$$V = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Trong đó:

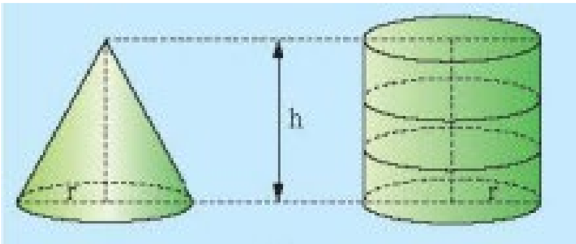
V là thể tích của hình nón.

S là diện tích đáy.

r là bán kính đáy.

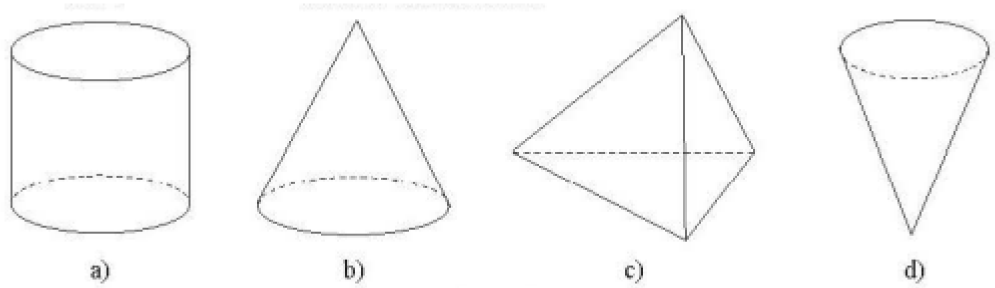
h là chiều cao của hình nón.

Chú ý: Hình nón và hình trụ có cùng chiều cao h và cùng bán kính đáy r thì: $V_{nón} = \frac{1}{3}V_{tru}$



DẠNG 1
NHẬN DẠNG HÌNH NÓN

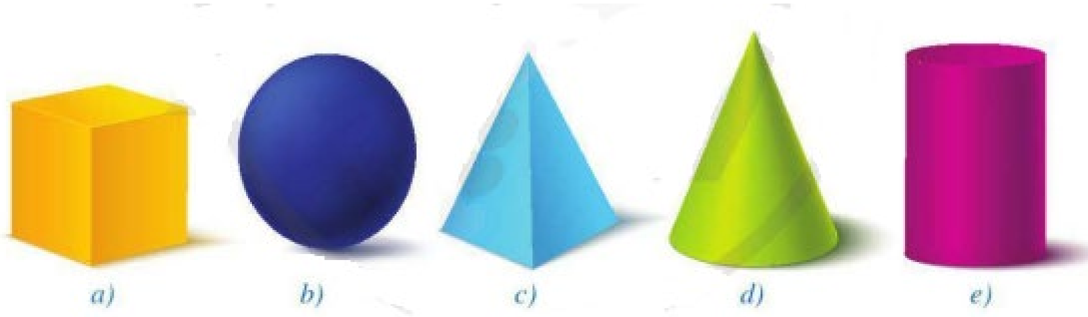
Bài 1. Trong các hình sau đây, hình nào là hình nón?



Lời giải

+ Hình b) và hình c) là hình nón

Bài 2. Trong các vật thể ở các hình dưới đây, vật thể nào có dạng hình nón?

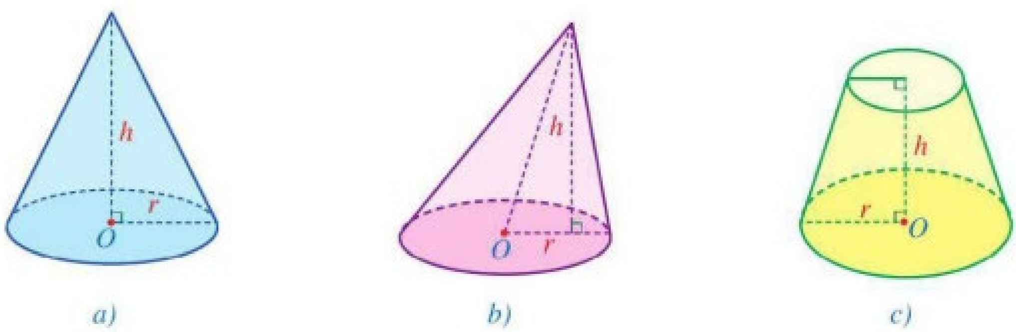


Lời giải

+ Vật thể d) là vật thể có dạng hình nón

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

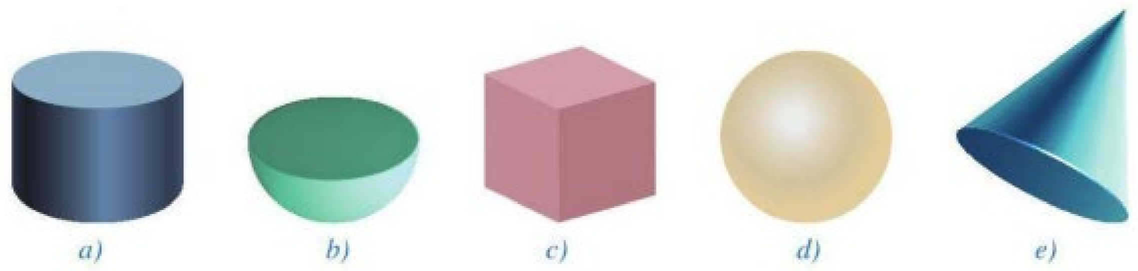
Bài 3. Trong các hình sau đây, hình nào là hình nón có O là tâm của mặt đáy, r là bán kính đáy, h là chiều cao?



Lời giải

+ Hình a) là hình nón

Bài 4. Trong các vật thể ở các hình dưới đây, vật thể nào có dạng hình nón?



Lời giải

+ Vật thể e) là vật thể có dạng hình nón

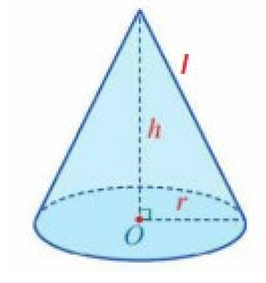
DẠNG 2
TÍNH BÁN KÍNH ĐÁY, ĐƯỜNG CAO, DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH CỦA HÌNH NÓN

Cho hình nón có bán kính đáy r, đường cao h và đường sinh l.

- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \frac{1}{2}C.l = \pi rl$
- Diện tích toàn phần: $S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy} = \pi rl + \pi r^2 = \pi r\left(l+r\right)$
- Thể tích: $V = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Chú ý: Hình nón và hình trụ có cùng chiều cao h và cùng bán kính đáy r thì: $V_{nón} = \frac{1}{3}V_{tru}$

Bài 1. Cho hình nón có bán kính đáy r, đường cao h và đường sinh l như hình vẽ. Hãy thay dấu "?"bằng giá trị thích hợp và hoàn thành bảng sau:

Hình nón	Bán kính đáy (cm)	Chiều cao (cm)	Đường sinh (cm)	Diện tích xung quanh (cm²)	Diện tích toàn phần (cm²)	Thể tích (cm³)
	3	4	?	?	?	?
	?	8	10	?	?	?
	2	?	?	14π	?	?
	4	?	9	?	?	

Lời giải

- Với $r = 3, h = 4$

Đường sinh của hình nón: $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi rl = 15\pi\left(cm^2\right)$

Diện tích toàn phần: $S_{tp} = \pi r\left(l+r\right) = 24\pi\left(cm^2\right)$

Thể tích: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = 12\pi\left(cm^2\right)$

- Với $h = 4, l = 10$

Bán kính của hình nón: $r = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$

Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi rl = 60\pi\left(cm^2\right)$

Diện tích toàn phần: $S_{tp} = \pi r\left(l+r\right) = 64\pi\left(cm^2\right)$

Thể tích: $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{144}{3}\pi\left(cm^2\right)$

• Với $r=2, S_{xq}=14\pi$

Đường sinh của hình nón: $S_{xq}=\pi rl\Rightarrow l=\frac{S_{xq}}{\pi r}=\frac{14\pi}{2\pi}=7cm$

Chiều cao của hình nón: $h=\sqrt{l^2-r^2}=\sqrt{7^2-2^2}=3\sqrt{5}cm$

Diện tích toàn phần: $S_{tp}=\pi r\left(l+r\right)=18\pi\left(cm^2\right)$

Thể tích: $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=4\sqrt{5}\pi\left(cm^2\right)$

• Với $r=4, l=9$

Chiều cao của hình nón: $h=\sqrt{l^2-r^2}=\sqrt{81-16}=\sqrt{65}cm$

Diện tích xung quanh: $S_{xq}=\pi rl=36\pi\left(cm^2\right)$

Diện tích toàn phần: $S_{tp}=\pi r\left(l+r\right)=42\pi\left(cm^2\right)$

Thể tích: $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{16\sqrt{65}\pi}{3}\left(cm^2\right)$

Bài 2. Nếu giữ nguyên bán kính đáy của một hình nón và giảm chiều cao của nó 2 lần thì thể tích của hình nón này thay đổi như thế nào so với ban đầu?

Lời giải

Gọi r,h lần lượt là bán kính đường tròn đáy và chiều cao của hình nón ban đầu.

Thể tích hình nón ban đầu là $V_1=\frac{1}{3}\pi r^2h$.

Giữ nguyên bán kính đáy của hình nón và giảm chiều cao của nó 2 lần thì thể tích của hình nón này là

$V_2=\frac{1}{3}\pi.R^2.\frac{h}{2}=\frac{1}{2}V_1.V_2=\frac{1}{3}\pi r^2\frac{h}{2}=\frac{1}{2}.\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{2}V_1$

Thể tích của hình nón này giảm 2 lần so với ban đầu

Bài 3. Cho tam giác OIM vuông tại I có $OI=4cm$ và $IM=3cm$. Khi quay tam giác OIM quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OIM tạo thành hình nón.

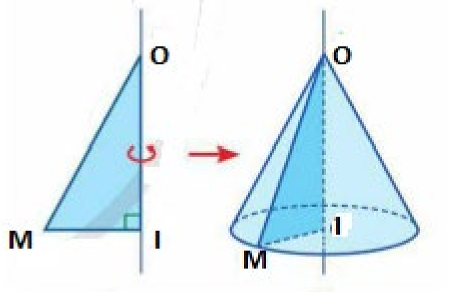
a) Tính độ dài đường sinh hình nón.

b) Tính diện tích xung quanh hình nón.

c) Tính diện tích toàn phần hình nón.

d) Tính thể tích hình nón.

Lời giải



a) Xét tam giác OIM vuông tại I ,Theo pythagore ta có :

$$OM^2 = IM^2 + OI^2$$
$$OM^2 = 3^2 + 4^2$$
$$OM^2 = 25$$
$$\Rightarrow OM = 5$$

Khi quay tam giác OIM quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OIM tạo thành hình nón có bán kính đáy $r = IM = 3cm$, chiều cao $h = OI = 4cm$ và đường sinh là cạnh huyền $l = OM = 5cm$.

Vậy độ dài đường sinh của hình nón là $5cm$.

b) Diện tích xung quanh hình nón là: $S_{xq} = \pi rl = \pi.3.5 = 15\pi\left(cm^2\right)$

c) Diện tích toàn phần hình nón là: $S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy} = \pi r\left(l + r\right) = \pi.3\left(5 + 3\right) = 24\pi\left(cm^2\right)$

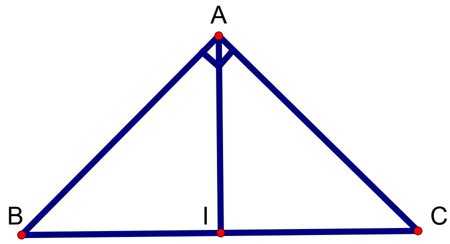
d) Thể tích hình nón là: $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi.3^2.4 = 12\pi\left(cm^3\right)$

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại cân A, gọi I là trung điểm của BC, $BC = 2dm$. Khi quay tam giác ABC xung quanh trục AI ta được hình nón.

a) Tính diện tích xung quanh hình nón.

b) Tính thể tích hình nón.

Lời giải



a) khi quay tam giác ABC xung quanh trục AI, tao ra hình nón có:

bán kính đáy $r = \dfrac{BC}{2} = 1dm$, đường sinh là $l = AB = AC = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$

Diện tích xung quanh hình nón là: $S_{xq} = \pi R = \sqrt{2}\pi$

b) Chiều cao của hình nón: $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 - 1} = 1dm$

thể tích hình nón: $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi.1.1 = \dfrac{1}{3}\pi\left(dm^3\right)$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

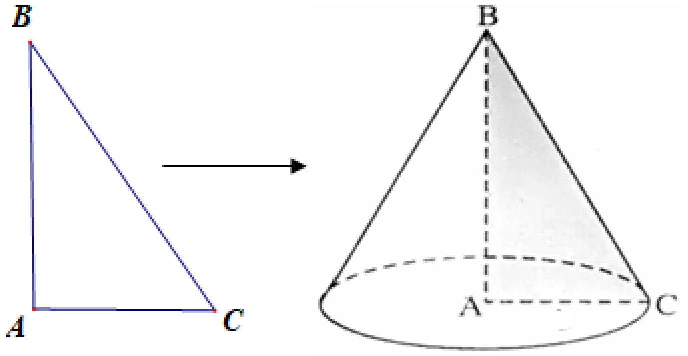
Bài 5. Cho tam giác vuông ABC tại A, $AB = a$ và $AC = a\sqrt{3}$. Khi quay tam giác ABC xung quanh trục AB, ta thu được hình nón.

a) Tính độ dài đường sinh l của hình nón

b) Tính thể tích hình nón.

Lời giải

Chọn B



a) Khi quay tam giác ABC xung quanh trục AB, ta thu được hình nón có bán kính đáy $r = AC = a$, chiều cao $h = AB = a\sqrt{3}$ và đường sinh là cạnh huyền $l = BC$.

Xét tam giác ABC vuông tại A, theo pythagore, ta có:

$BC^2 = AC^2 + AB^2 = 2a^2$

$\Rightarrow BC = 2a \Rightarrow l = 2a$

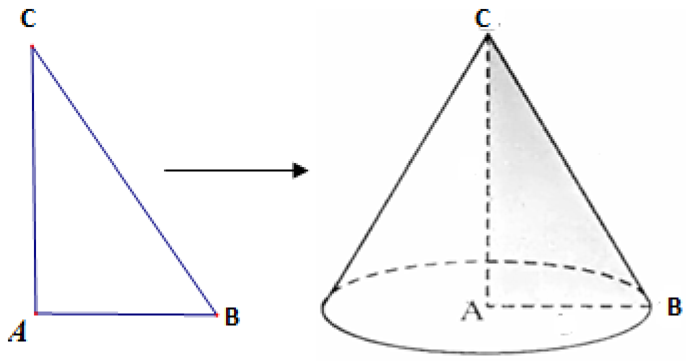
Đường sinh của hình nón $2a$ (đvđd)

b) Thể tích hình nón là: $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi . a^2 . a\sqrt{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}\pi}{3}$ (đvtt)

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = a$ và $\widehat{ACB} = 30^o$. Tính thể tích V của hình nón nhận được khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC.

A. $V = \pi a^3$ **B.** $V = \sqrt{3}\pi a^3$ **C.** $V = \dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{9}$ **D.** $V = \dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$

Lời giải



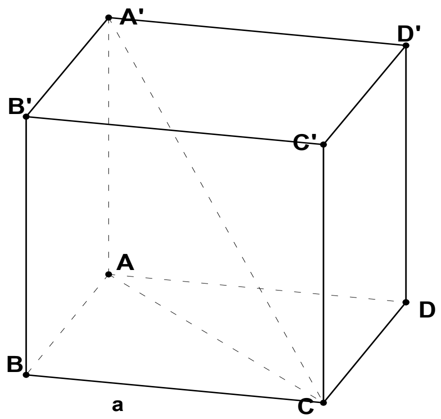
Khi quay tam giác ABC xung quanh trục AC, ta thu được hình nón có bán kính đáy $r = AB = a$, chiều cao $h = AC$ và đường sinh là cạnh huyền $l = BC$.

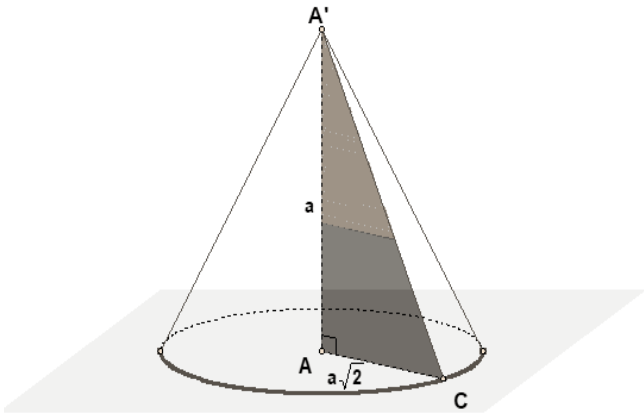
Xét tam giác ABC vuông tại A, ta có $AC = AB.\cot 30^o = a\sqrt{3}$.

Vậy thể tích hình nón là : $V = \dfrac{1}{3}\pi a^2.a\sqrt{3} = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$.

Bài 7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính diện tích toàn phần của hình nón thu được khi quay tam giác $AA'C$ quanh trục AA'.

Lời giải



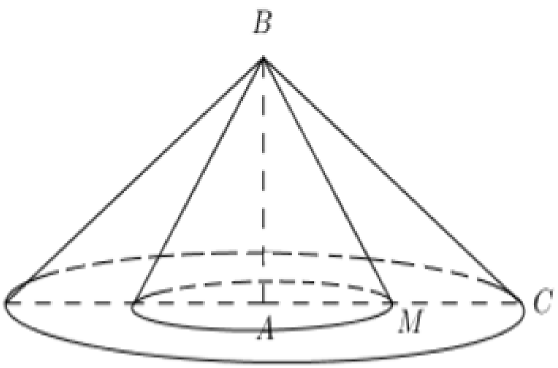


Quay tam giác $AA'C$ một vòng quanh trục AA' tạo thành hình nón có chiều cao $AA' = a$, bán kính đáy $r = AC = a\sqrt{2}$, đường sinh $l = A'C = \sqrt{AA'^2 + AC^2} = a\sqrt{3}$.

Diện tích toàn phần của hình nón: $S = \pi r(r + l) = \pi a\sqrt{2}\left(a\sqrt{2} + a\sqrt{3}\right) = \pi\left(\sqrt{6} + 2\right)a^2$.

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông tại A, cạnh $AB = 6$, $AC = 8$ và M là trung điểm của cạnh AC. Tính thể tích của hình nón thu được do tam giác BMC quanh quanh AB.

Lời giải

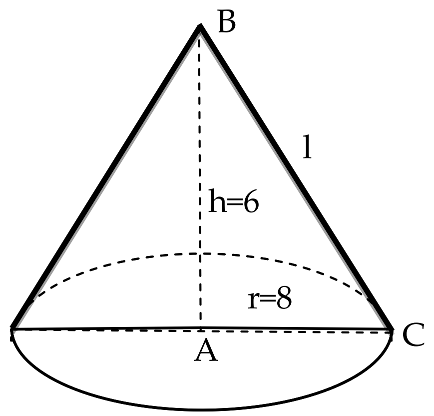


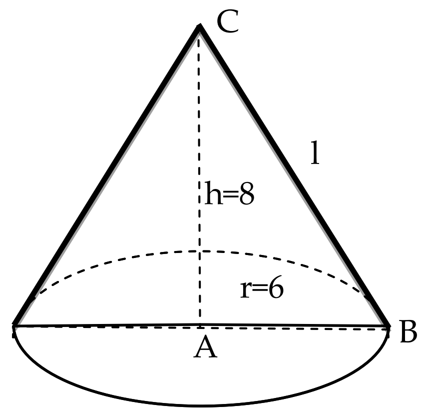
Khi tam giác BMC quanh quanh trục AB thì thể tích hình nón tạo thành là hiệu của thể tích hình nón có đường cao AB, đường sinh BC và hình nón có đường cao AB, đường sinh BM.

Nên $V = \dfrac{1}{3}AB.\pi.AC^2 - \dfrac{1}{3}AB.\pi.AM^2 = \dfrac{1}{4}AB.\pi.AC^2 = 96\pi$.

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = 6cm, AC = 8cm$. Gọi V_1 là thể tích hình nón tạo thành khi quay tam giác ABC quanh cạnh AB và V_2 là thể tích hình nón tạo thành khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC. Tính tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$.

Lời giải





Ta có công thức tính thể tích hình nón có chiều cao h và bán kính r là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

+ Khi quay tam giác ABC quanh cạnh AB thì:

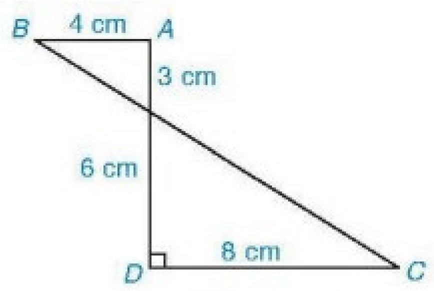
$h = AB = 6cm$ và $r = AC = 8cm$ thì $V_1 = \frac{1}{3}\pi.8^2.6 = 128\pi$

+ Khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC thì:

$h = AC = 8cm$ và $r = AB = 6cm$ thì $V_2 = \frac{1}{3}\pi.6^2.8 = 96\pi$

Vậy: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{4}{3}$

Bài 10. Cho hình $ABCD$ như hình vẽ. Khi quanh quanh AD một vòng ta thu được một hình.



a) Tính diện tích toàn phần hình vừa tạo trên.

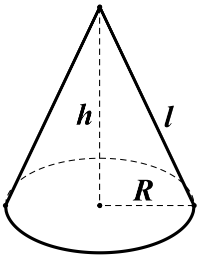
b) Tính thể tích hình được tạo ra.

Lời giải

DẠNG 3
ỨNG DỤNG CỦA HÌNH NÓN TRONG THỰC TIỄN

Bài 1. Một chiếc nón có bán kính đáy bằng 15 *cm* và chiều cao bằng 20 *cm*. Hỏi chiếc nón múc đầy được bao nhiêu cm^3 nước (lấy $\pi = 3,14$).

Lời giải



Vì chiếc nón hình nón có bán kính đáy $R = 15cm$ và chiều cao $h = 20cm$ nên thể tích của chiếc nón là:

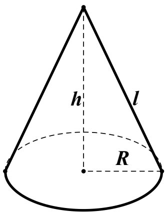
$$V_{\text{chiếc nón}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

$$= \frac{1}{3}.3,14.15^2.20 = 4710\ (\text{cm}^3)$$

Vậy chiếc nón múc đầy được $4710cm^3$ nước.

Bài 2. Thầy Nam có một đống cát hình nón cao $2m$, đường kính đáy 6 *m*. Thầy Nam tính rằng để sửa xong ngôi nhà của mình cần 30 m^3 cát. Hỏi thầy Nam cần mua bổ sung bao nhiêu m^3 cát nữa để đủ cát sửa nhà (lấy $\pi = 3,14$ và các kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải



Thể tích hình nón: $V_{\text{nón}} = \frac{1}{3}V_{\text{trụ}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

Vì đống cát hình nón có chiều cao $h = 2m$ và bán kính đáy $R = 6 : 2 = 3m$ nên thể tích của đống cát là:

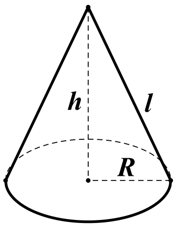
$$V_{\text{đống cát}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}.3,14.3^2.2 = 18,84\ (m^3)$$

Vậy để đủ cát sửa nhà, thầy Nam cần mua bổ sung thêm số cát là 30 – 18,84 = 11,16m^3.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Một chiếc nón có đường kính đáy bằng 28 *cm* và đường sinh bằng 30 *cm*. Tính diện tích lá dùng để làm nón, biết tỉ lệ hao hụt là 10% (lấy π = 3,14).

Lời giải



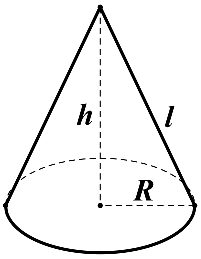
Vì chiếc nón hình nón có bán kính đáy R = 28 : 2 = 14*cm* và đường sinh l = 30*cm* nên diện tích xung quanh của chiếc nón là:

$S_{xq} = \pi Rl = 3{,}14.14.30 = 1318{,}8\ (cm^2)$

Vậy diện tích lá dùng để làm nón là $110\%.1318{,}8 = \mathbf{1450{,}68}cm^2$.

Bài 4. Chiếc nón do một làng nghề ở Việt Nam sản xuất là hình nón có đường sinh bằng 30 *cm*, đường kính đáy bằng 40 *cm*. Người ta dùng hai lớp lá để phủ lên bề mặt xung quanh của nón. Tính diện tích lá cần dùng làm 5000 chiếc nón.

Lời giải



Vì chiếc nón hình nón có đường sinh l = 30*cm* và bán kính đáy R = 40 : 2 = 20*cm* nên diện tích xung quanh của chiếc nón là:

$$S_{xq} = \pi Rl = \pi\ .\ 20.\ 30 = 600\pi\ (cm^2)$$

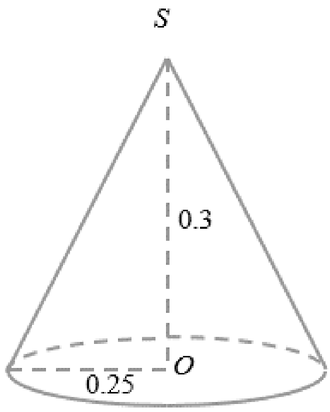
diện tích là cần dùng cho một chiếc nón là: 2. 600π = 1200π cm^2.

Vậy diện tích là cần dùng làm 5000 chiếc nón là: 500. 1200π = 600000π cm^2.

Bài 5. Lượng nguyên liệu cần dùng để làm ra một chiếc nón lá được ước lượng qua phép tính diện tích xung quanh của mặt nón. Cứ $1kg$ lá dùng để làm nón có thể làm ra số nón có tổng diện tích xung quanh là $6,13m^2$. Hỏi nếu muốn làm ra 1000 chiếc nón lá giống nhau có đường trình vành nón $50cm$, chiều cao $30cm$ thì cần bao nhiêu khối lượng lá? (coi mỗi chiếc nón có hình dạng là một hình nón)

Lời giải

Theo giả thiết mỗi chiếc nón lá là một hình nón có bán kính đáy $R=\frac{50}{2}=25(cm)=0,25(m)$ và đường cao $h=30(cm)=0,3(m)$.



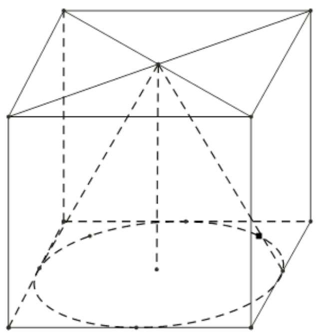
Gọi l là chiều cao của hình nón $\Rightarrow l=\sqrt{R^2+h^2}=\frac{\sqrt{61}}{20}(m)$.

Diện tích xung quanh của 1 chiếc nón lá là $S_{xq}=\pi Rl=\pi.0,25.\frac{\sqrt{61}}{20}=\frac{\pi\sqrt{61}}{80}\left(m^2\right)$

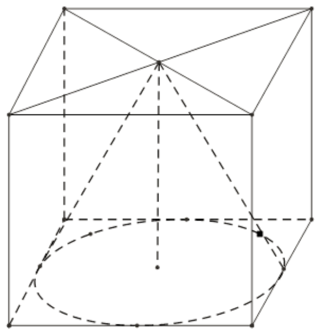
Tổng diện tích xung quanh của 1000 chiếc nón là $S=1000.\frac{\pi\sqrt{61}}{80}=\frac{25\pi\sqrt{61}}{2}\left(m^2\right)$

Do đó khối lượng lá cần dùng là $\frac{S}{6,13}\approx 50,03(kg)$.

Bài 6. Một chiếc thùng chứa đầy nước có hình một khối lập phương. Đặt vào trong thùng đó một khối nón sao cho đỉnh khối nón trùng với tâm một mặt của khối lập phương, đáy khối nón tiếp xúc với các cạnh của mặt đối diện. Tính tỉ số thể tích của lượng nước trào ra ngoài và lượng nước còn lại ở trong thùng.



Lời giải



Coi khối lập phương có cạnh 1. Thể tích khối lập phường là $V=1$.

Từ giả thiết ta suy ra khối nón có chiều cao $h=1$, bán kính đáy $r=\dfrac{1}{2}$.

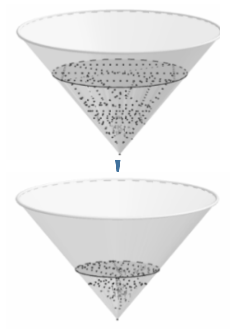
Thể tích lượng nước trào ra ngoài là thể tích V_1 của khối nón.

Ta có: $V_1=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{1}{3}\pi.\dfrac{1}{4}.1=\dfrac{\pi}{12}$.

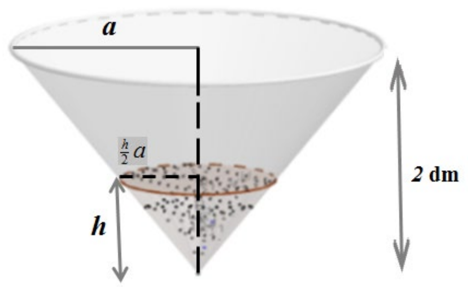
Thể tích lượng nước còn lại trong thùng là: $V_2=V-V_1=1-\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{12-\pi}{12}$.

Do đó: $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{\pi}{12-\pi}$.

Bài 7. Hai hình nón bằng nhau có chiều cao bằng 2 dm được đặt như hình vẽ bên (mỗi hình đều đặt thẳng đứng với đỉnh nằm phía dưới). Lúc đầu, hình nón trên chứa đầy nước và hình nón dưới không chứa nước. Sau đó, nước được chảy xuống hình nón dưới thông qua lỗ trống ở đỉnh của hình nón trên. Hãy tính chiều cao của nước trong hình nón dưới tại thời điểm khi mà chiều cao của nước trong hình nón trên bằng 1 dm.



Lời giải



Gọi *a* là bán kính đáy hình nón;

V_1,V_2 lần lượt là thể tích của hình nón trên lúc chứa đầy nước và khi chiều cao của nước bằng 1 dm;

$h,\ V_3$ lần lượt là chiều cao của nước, thể tích của hình nón dưới khi chiều cao của nước trong hình nón trên bằng 1 dm;

$R,\ r$ lần lượt là bán kính của hình nón trên của nước, bán kính của hình nón dưới của nước khi chiều cao của nước trong hình nón trên bằng 1 dm.

Ta có: $\frac{R}{a}=\frac{1}{2}\Rightarrow R=\frac{a}{2}$.

Thể tích nước của hình nón trên khi chiều cao bằng 1 là $V_2=\frac{1}{3}.1.\pi\left(\frac{1}{2}a\right)^2=\frac{\pi a^2}{12}$.

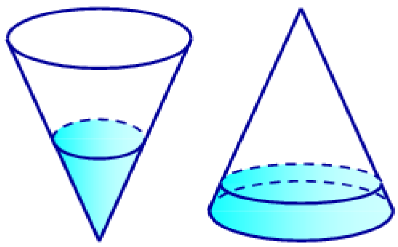
Mặt khác: $\frac{r}{a}=\frac{h}{2}\Rightarrow r=\frac{ah}{2}$.

Do đó thể tích nước hình nón dưới $V_3=\frac{1}{3}.h.\pi\left(\frac{h}{2}a\right)^2=\frac{\pi a^2h^3}{12}$.

Thể tích nước của hình nón trên khi đầy nước $V_1=\frac{1}{3}.2.\pi a^2$.

Lại có: $V_3=V_1-V_2\Rightarrow\frac{\pi a^2h^3}{12}=\frac{1}{3}.2.\pi a^2-\frac{\pi a^2}{12}\Leftrightarrow 1+h^3=8\Leftrightarrow h=\sqrt[3]{7}$.

Bài 8. Một cái phễu có dạng hình nón, chiều cao của phễu là $20cm$. Người ta đổ một lượng nước vào phễu sao cho chiều cao của cột nước trong phễu là $10cm$. Nếu bịt kín miệng phễu rồi lật ngược lên thì chiều cao của cột nước trong phễu bằng bao nhiêu?



Lời giải

Gọi R là bán kính đáy của cái phễu ta có $\frac{R}{2}$ là bán kính của đáy chứa cột nước

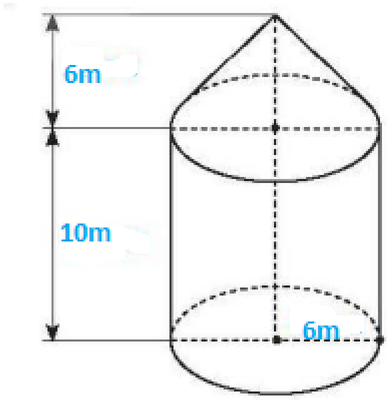
Ta có thể tích phần nón không chứa nước là $V=\frac{1}{3}\pi(R)^2.20-\frac{1}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2.10=\frac{35}{6}\pi R^2$.

Khi lật ngược phễu Gọi h chiều cao của cột nước trong phễu.phần thể tích phần nón không chứa nước là

$$V=\frac{1}{3}\pi(20-h)\left(\frac{R(20-h)}{20}\right)^2=\frac{1}{1200}\pi(20-h)^3R^2.$$

$$\frac{1}{1200}\pi(20-h)^3R^2=\frac{35}{6}\pi R^2\Rightarrow(20-h)^3=7000\Rightarrow h\approx 0,87$$

Bài 9. Một thùng chứa xăng gồm một phần có dạng hình trụ và một phần có dạng hình nón với kích thước như hình vẽ.



a) Thùng chứa xăng trên chứa được tối đa bao nhiêu lít xăng?

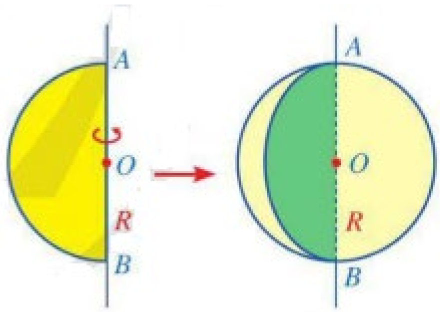
b) Một doanh nghiệp mua bán xăng dầu muốn đặt làm một thùng chứa xăng như trên. Biết chi phí 150000 đồng/m^2, Hỏi doanh nghiệp đó cần bỏ ra số tiền bao nhiêu để làm được một thùng chứa xăng như trên.

Lời giải

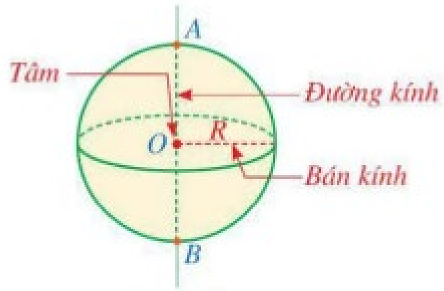
BÀI 3
HÌNH CẦU

1. Hình cầu

a. Nhận biết hình cầu



Khi quay nửa hình tròn tâm O, bán kính R một vòng quanh đường kính AB cố định thì được một **hình cầu**.



Với hình cầu trên, ta có:

• Nửa đường tròn đường kính AB quét nên **mặt cầu**. Như vậy, mặt cầu là hình được tạo ra khi quay một nửa đường tròn một vòng xung quanh đường thẳng cố định chứa đường kính của nó.

• Điểm O được gọi là **tâm của hình cầu** (hay **tâm của mặt cầu**).

• AB là **đường kính của hình cầu** (hay **đường kính của mặt cầu**).

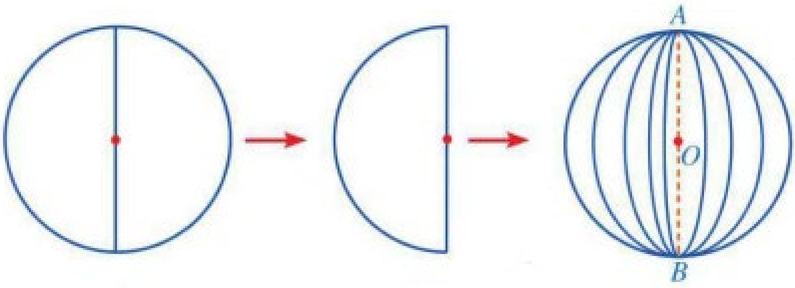
• R là **bán kính của hình cầu** (hay **bán kính của mặt cầu**).

b. Tạo lập hình cầu

Cắt một số miếng bìa có dạng hình tròn có cùng đường kính (hình 1).

Mỗi miếng bìa tròn đó được cắt hai nửa hình tròn (hình 2).

Ghép các miếng bìa có dạng nửa hình tròn đó để được một hình cầu như dưới đây (hình 3).



Hình 1 Hình 2 Hình 3

c. Nhận biết phần chung giữa mặt phẳng và hình cầu

- Nếu cắt một hình cầu bởi một mặt phẳng thì phần chung giữa chúng là một hình tròn.

Đặc biệt, nếu cắt một hình cầu bởi một mặt phẳng đi qua tâm hình cầu thì phần chung giữa chúng là một hình tròn lớn.

- Khi cắt mặt cầu bởi một mặt phẳng thì phần chung giữa chúng là một đường tròn.

2. Diện tích mặt cầu

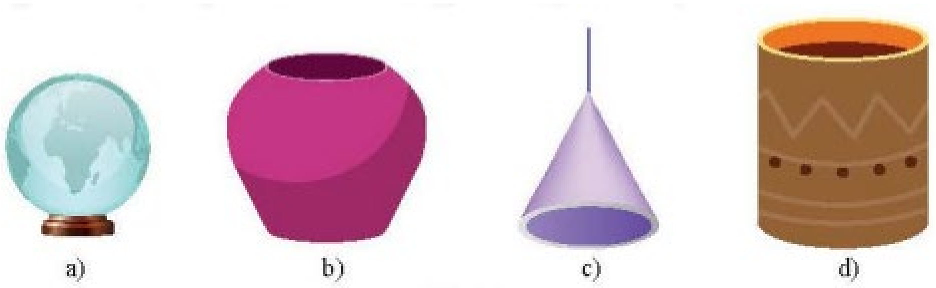
Diện tích mặt cầu có bán kính R là: $S = 4\pi R^2$

3. Thể tích của hình cầu

Thể tích của hình cầu có bán kính R là: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$

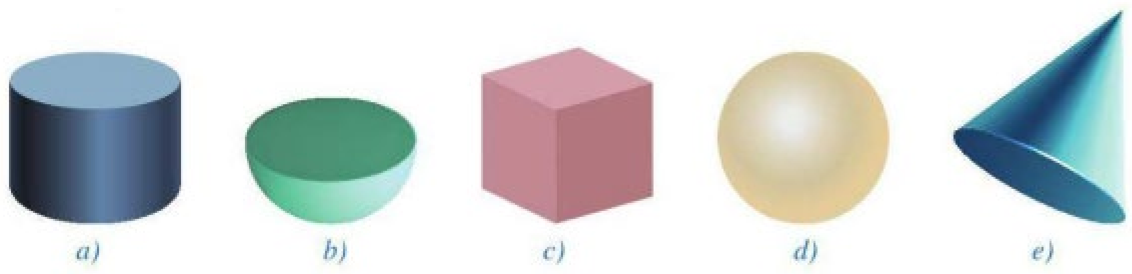
DẠNG 1
NHẬN DẠNG MẶT CẦU

Bài 1. Trong các vật thể ở các hình dưới đây, vật thể nào có dạng hình trụ, hình nón, hình cầu?



Bài 2. Trong các vật thể ở các hình dưới đây, vật thể nào có dạng hình trụ, hình nón, hình cầu?

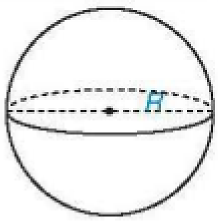
Bài 3. Trong các vật thể ở các hình dưới đây, vật thể nào có dạng hình trụ, hình nón, hình cầu?



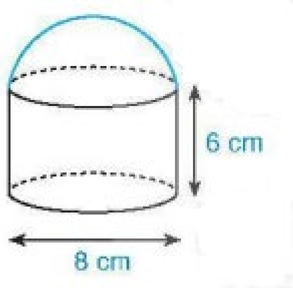
DẠNG 2
TÍNH BÁN KÍNH , DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH CỦA MẶT CẦU

- Diện tích mặt cầu có bán kính R là: $S = 4\pi R^2$
- Thể tích của hình cầu có bán kính R là: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$

Bài 1. Cho hình cầu có bán kính R như hình vẽ. Hãy thay dấu "?"bằng giá trị thích hợp và hoàn thành bảng sau:

Hình cầu	Bán kính (dm)	Diện tích mặt cầu (dm^2)	Thể tích hình cầu (dm^3)
	4	?	?
	?	144π	?
	?	?	36π
	?	196π	

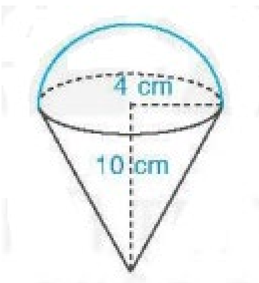
Bài 2. Cho hình vẽ dưới đây, được tạo bởi từ nửa hình cầu, hình trụ (có cùng bán kính).



a) Tính diện tích xung quanh của hình trên.

b) Tính thể tích của của hình trên.

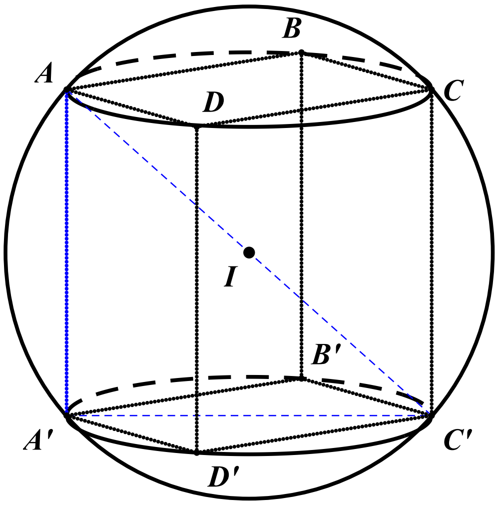
Bài 3. Cho hình vẽ dưới đây, được tạo bởi từ nửa hình cầu và hình nón (có cùng bán kính).



a) Tính diện tích xung quanh của hình trên.

b) Tính thể tích của của hình trên.

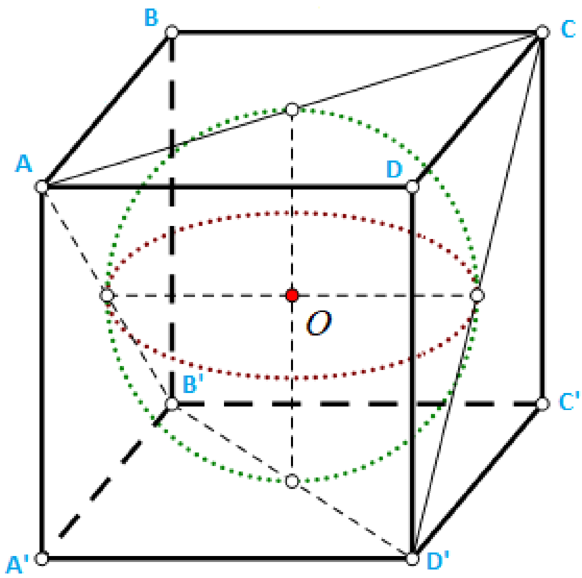
Bài 4. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $2cm$. Một mặt cầu đi qua tám đỉnh $A, B, C, D, A', B', C', D'$ của hình lập phương đó (như hình vẽ).



a) Tính bán kính hình cầu trên.

b) Tính thể tích hình cầu trên.

Bài 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $3cm$. Một mặt cầu tiếp xúc sáu mặt của hình lập phương tại trung điểm các đường chéo của sáu mặt hình lập phương (như hình vẽ).

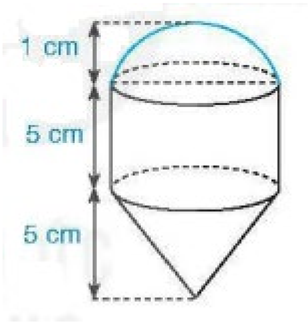


a) Tính diện tích mặt cầu trên.

b) Tính thể tích hình cầu trên.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

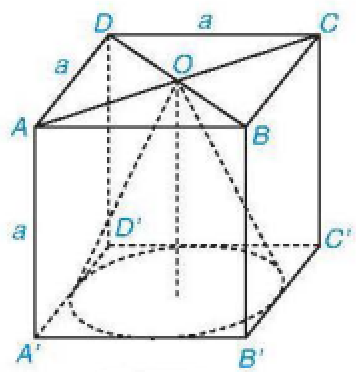
Bài 6. Cho hình vẽ dưới đây, được tạo bởi từ nửa hình cầu, hình trụ và hình nón (có cùng bán kính).



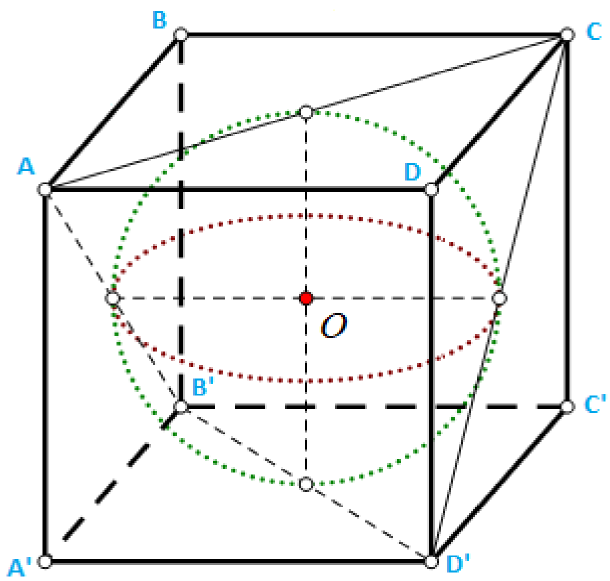
a) Tính diện tích xung quanh của hình trên.

b) Tính thể tích của của hình trên.

Bài 7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh $10cm$. Tính diện tích toàn phần hình nón có đỉnh là tâm O của hình vuông $ABCD$ và đáy là hình tròn tiếp xúc các cạnh của hình vuông $A'B'C'D'$ như hình vẽ.



Bài 8. Cho hình cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của một hình lập phương (như hình vẽ). Gọi V_1; V_2 lần lượt là thể tích của hình cầu và hình lập phương đó. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.



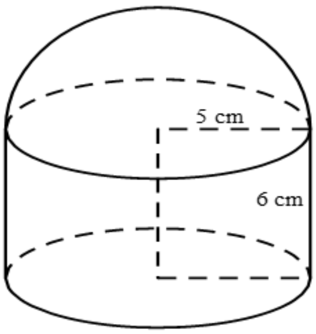
DẠNG 3
ỨNG DỤNG CỦA MẶT CẦU TRONG THỰC TIỄN

Bài 1. Một quả bóng bàn dạng một hình cầu có bán kính bằng 2 *cm*. Tính diện tích bề mặt của quả bóng bàn đó (lấy $\pi \approx 3,14$).

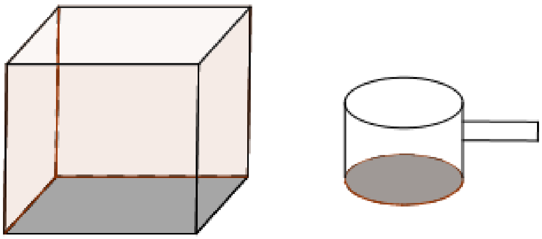
Bài 2. Một quả pha lê hình cầu có diện tích mặt cầu bằng $144\pi\ cm^2$. Tính thể tích quả pha lê đó.

Bài 3. Trái Đất, hành tinh chúng ta đang sống, dạng hình cầu có bán kính là 6370 *km*. Biết rằng 29% diện tích bề mặt Trái Đất bị bao phủ bởi nước bao gồm núi, sa mạc, cao nguyên, đồng bằng và các địa hình khác. Tính diện tích bề mặt mặt Trái Đất bị bao phủ bởi nước (Lấy $\pi = 3,14$; kết quả làm tròn đến chữ số hàng đơn vị).

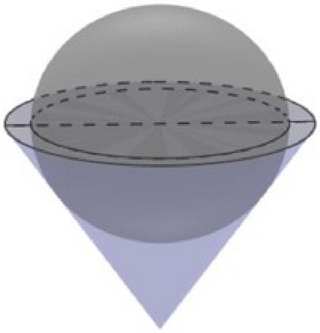
Bài 4. Một hộp đựng mỹ phẩm được thiết kế (tham khảo hình vẽ) có thân hộp là hình trụ có bán kính hình tròn đáy $r = 5cm$, chiều cao $h = 6cm$ và nắp hộp là một nửa hình cầu. Người ta cần sơn mặt ngoài của cái hộp đó (không sơn đáy) thì diện tích S cần sơn là bao nhiêu?



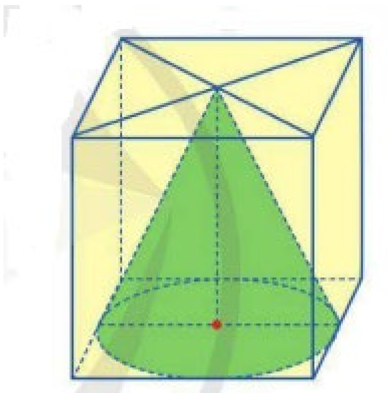
Bài 5. Cho một cái bể nước hình hộp chữ nhật có ba kích thước 2m, 3m, 2m của lòng trong đựng nước của bể. Hàng ngày bạn Đạt lấy nước ra ở trong bể bởi một cái gáo hình trụ có chiều cao là 5cm và bán kính đường tròn đáy là 4cm. Trung bình một ngày bạn Đạt múc ra 170 gáo nước để sử dụng (*Biết mỗi lần múc là múc đầy gáo*). Hỏi sau bao nhiêu ngày thì bể hết nước biết rằng ban đầu bể đầy nước?



Bài 6. Một bình đựng nước dạng hình nón (không có đáy), đựng đầy nước. Người ta thả vào đó một khối cầu có đường kính bằng chiều cao của bình nước và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là $18\pi\,\text{dm}^3$. Biết rằng hình cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của hình nón và đúng một nửa của hình cầu chìm trong nước (hình bên dưới). Tính thể tích V của nước còn lại trong bình.



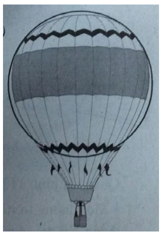
Bài 7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh $5m$. Đặt một hình nón có đỉnh trùng tâm của hình vuông và đáy là hình tròn tiếp xúc các cạnh của hình vuông như hình vẽ. Người ta đổ đầy nước vào hình lập phương, tính lượng nước cần đổ (giả sử hình nón đặc, không bị rỗng).



BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 8. Một quả bóng bằng da có đường kính 22 *cm*. Tính diện tích da cần dùng để làm quả bóng nếu không tính tỉ lệ hao hụt (lấy π = 3,14).

Bài 9. Ngày 4 – 6 – 1783, anh em nhà Mông-gôn-fi-ê (người Pháp) phát minh ra khinh khí cầu dùng không khí nóng. Coi khinh khí cầu này là hình cầu có đường kính 11 *m* và được làm bằng vải dù. Hãy tính diện tích vải dù để làm khinh khí cầu đó (lấy $\pi = 3{,}14$ và làm tròn kết quả đến chữ số thập phần thứ hai)



Bài 10. Một tháp nước có bể chứa hình cầu, đường kính bên trong của bể đo được là 6 *m*.

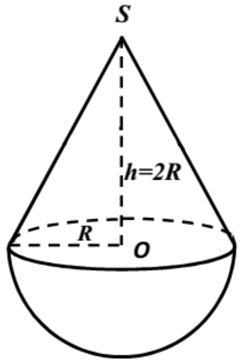
a) Tính thể tích của tháp nước đó?

b) Biết rằng lượng nước đựng đầu trong bể đủ dùng cho một khu dân cư trong 5 ngày. Cho biết khu dân cư có 1304 người. Hỏi trong một ngày mức bình quân mỗi người dùng bao nhiêu lít nước (lấy $\pi = 3{,}14$; biết 1 m^3 = 1000 *lít*).

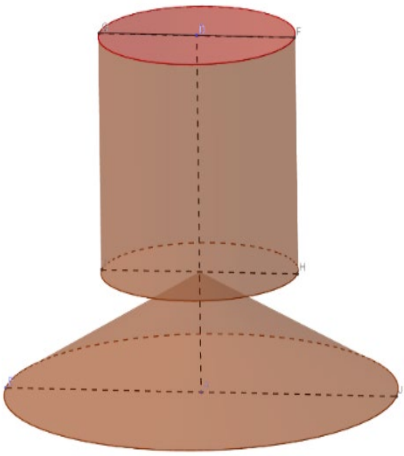
Bài 11. Một cốc thủy tinh hình trụ đựng đầy nước có chiều cao bằng 10 *cm* và thể tích bằng 90π cm^3. Người ta thả vào cốc một viên bi sắt hình cầu có bán kính bằng bán kính đáy cốc nước, viên bi sắt ngập toàn bộ trong nước. Tính lượng nước bị tràn ra khỏi cốc?

Bài 12. Người ta thả một quả trứng vào một cốc thủy tinh có nước, hình trụ; thấy trứng chìm hoàn toàn xuống đáy và nằm ngang thì chứng tỏ quả trứng đó còn tươi, mới được để từ một đến hai ngày. Hãy tính thể tích quả trứng đó, biết diện tích đáy của cột nước hình trụ là 16,7 cm^2 và nước trong lọ dâng lên 0,82 *cm* khi qủa trứng chìm hoàn toàn trong nước.

Bài 13. Một đồ vật được thiết kế bởi một nửa khối cầu và một khối nón úp vào nhau sao cho đáy của khối nón và thiết diện của nửa mặt cầu chồng khít lên nhau như hình vẽ bên dưới. Biết hình nón có đường cao gấp đôi bán kính đáy, thể tích của toàn bộ khối đồ vật bằng $36\pi\, cm^3$. Tính diện tích bề mặt của toàn bộ đồ vật đó.

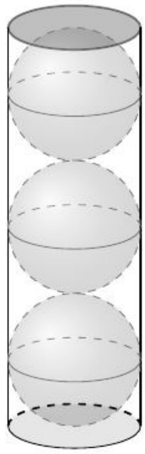


Bài 14. Một khối đồ chơi gồm một khối hình trụ (T) gắn chồng lên một khối hình nón (N), lần lượt có bán kính đáy và chiều cao tương ứng là r_1, h_1, r_2, h_2 thỏa mãn $r_2 = 2r_1$, $h_1 = 2h_2$ (hình vẽ). Biết rằng thể tích của hình nón (N) bằng $20\,\text{cm}^3$. Tính thể tích của toàn bộ khối đồ chơi.

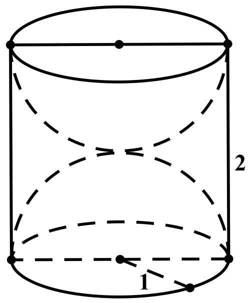


Bài 15. Thả một quả cầu đặc có bán kính 3 (cm) vào một vật hình nón (có đáy nón không kín) (như hình vẽ bên dưới). Cho biết khoảng cách từ tâm quả cầu đến đỉnh nón là 5 (cm). Tính thể tích (theo đơn vị cm^3) phần không gian kín giới hạn bởi bề mặt quả cầu và bề mặt trong của vật hình nón.

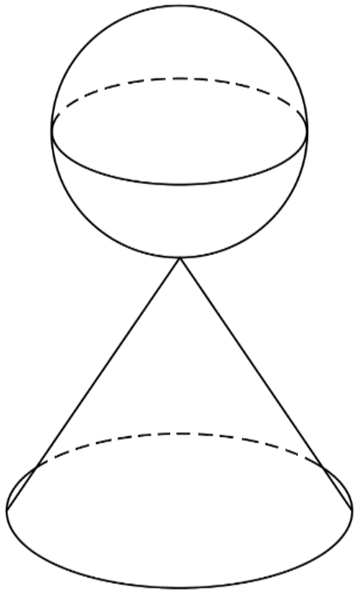
Bài 16. Một hộp đựng bóng tennis có dạng hình trụ. Biết rằng hộp chứa vừa khít ba quả bóng tennis được xếp theo chiều dọc, các quả bóng tennis có kích thước như nhau. Thể tích phần không gian còn trống chiếm tỉ lệ $a\%$ so với hộp đựng bóng tennis. Tính a gần.



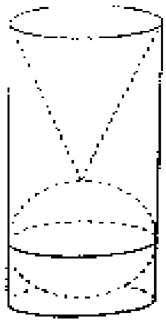
Bài 17. Một khối gỗ hình trụ tròn xoay có bán kính đáy bằng 1, chiều cao bằng 2. Người ta khoét từ hai đầu khối gỗ hai nửa khối cầu mà đường tròn đáy của khối gỗ là đường tròn lớn của mỗi nửa hình cầu. Tính tỉ số thể tích phần còn lại của khối gỗ và cả khối gỗ ban đầu.



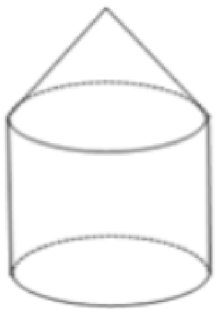
Bài 18. Một khối cầu pha lê gồm một hình cầu (H_1) bán kính R và một hình nón (H_2) có bán kính đáy và đường sinh lần lượt là r, l thỏa mãn $r = \frac{1}{2}l$ và $l = \frac{3}{2}R$ xếp chồng lên nhau (hình vẽ). Biết tổng diện tích mặt cầu (H_1) và diện tích toàn phần của hình nón (H_2) là $91cm^2$. Tính diện tích của mặt cầu (H_1)



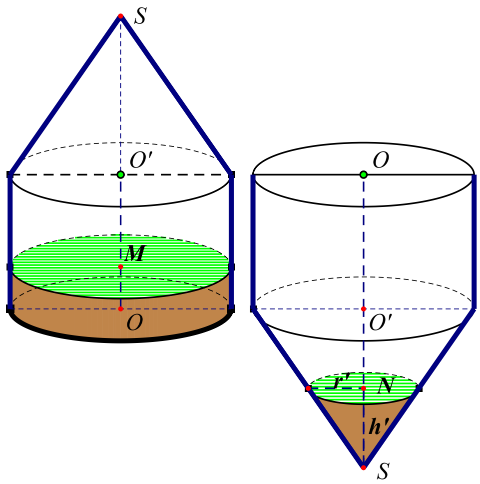
Bài 19. Trên bàn có một cốc nước hình trụ chứa đầy nước có chiều cao bằng 3 lần đường kính của đáy; một viên bi và một hình nón đều bằng thủy tinh. Biết viên bi là một khối cầu có đường kính bằng của cốc nước. Người ta từ từ thả vào cốc nước viên bi và khối nón đó (như hình vẽ) thì thấy nước trong cốc tràn ra ngoài. Tính tỉ số thể tích của lượng nước còn lại trong cốc và lượng nước ban đầu(bỏ qua bề dày của lớp vỏ thủy tinh)



Bài 20. Một khối đồ chơi gồm một hình trụ và một hình nón có cùng bán kính được chồng lên nhau, độ dài đường sinh hình trụ bằng độ dài đường sinh hình nón và bằng đường kính hình trụ, hình nón (tham khảo hình vẽ). Biết thể tích toàn bộ khối đồ chơi là $50cm^3$, tính thể tích hình trụ.



Bài 21. Cho một dụng cụ đựng chất lỏng được tạo bởi một hình trụ và hình nón được lắp đặt như hình bên. Bán kính đáy hình nón bằng bán kính đáy hình trụ. Chiều cao hình trụ bằng chiều cao hình nón và bằng h. Trong bình, lượng chất lỏng có chiều cao bằng $\frac{1}{24}$ chiều cao hình trụ. Lật ngược dụng cụ theo phương vuông góc với mặt đất. Tính độ cao phần chất lỏng trong hình nón theo h.

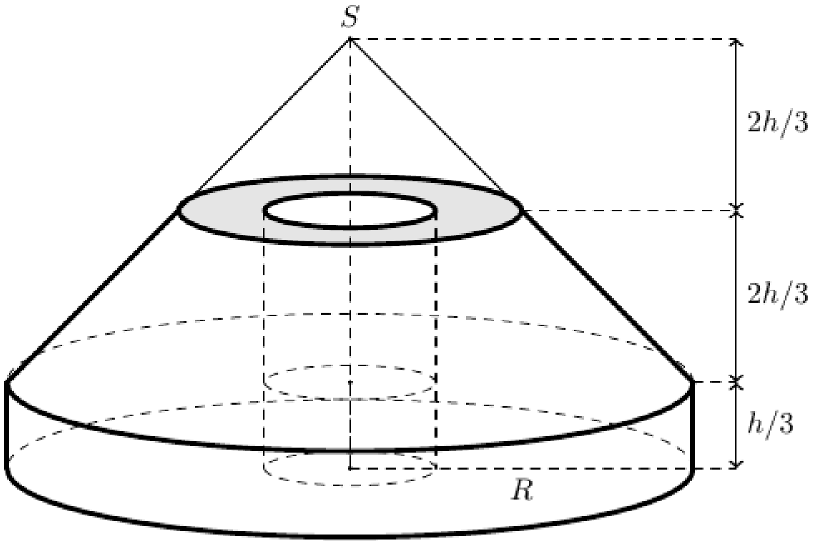


Bài 22. Để định vị một trụ điện, người ta cần đúc một khối bê tông có chiều cao $h = 1,5\,\text{m}$ gồm:

- Phần dưới có dạng hình trụ bán kính đáy $R = 1\,\text{m}$ và có chiều cao bằng $\frac{1}{3}h$;

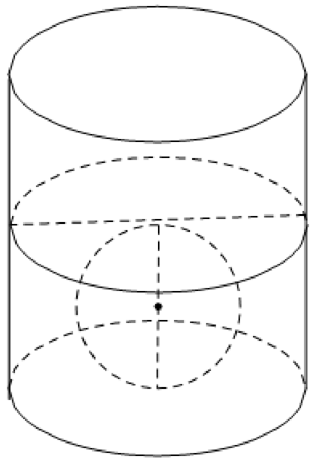
- Phần trên có dạng hình nón bán kính đáy bằng R đã bị cắt bỏ bớt một phần hình nón có bán kính đáy bằng $\frac{1}{2}R$ ở phía trên (*người ta thường gọi hình đó là hình nón cụt);*

- Phần ở giữa rỗng có dạng hình trụ bán kính đáy bằng $\frac{1}{4}R$ *(tham khảo hình vẽ bên dưới).*

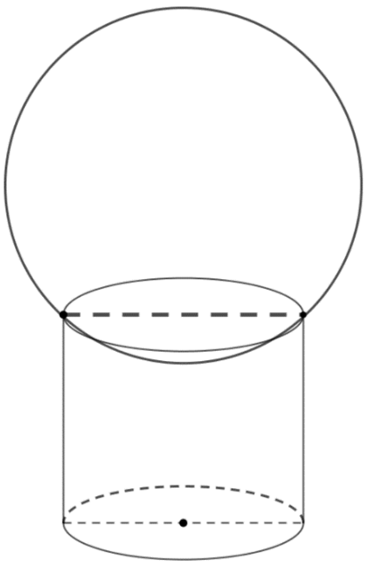


Tính thể tích của khối bê tông *(làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba)*.

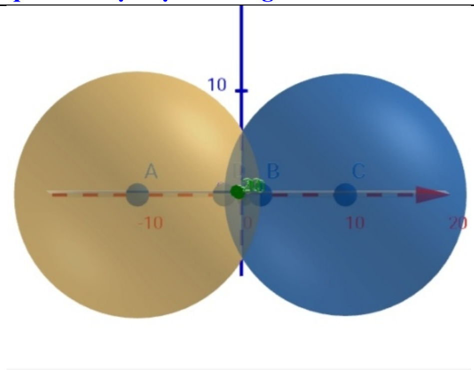
Bài 23. Người ta thả một viên bi có dạng hình cầu có bán kính $2,7\,cm$ vào một chiếc cốc hình trụ đang chứa nước (tham khảo hình vẽ dưới). Biết rằng bán kính của phần trong đáy cốc bằng $5,4\,cm$ và chiều cao của mực nước ban đầu trong cốc bằng $4,5\,cm$. Khi đó chiều cao của mực nước trong cốc là bao nhiêu?



Bài 24. Một trái banh và một chiếc chén hình trụ có cùng chiều cao. Người ta đặt trái banh lên hình trụ thấy phần ở bên ngoài của quả bóng có chiều cao bằng $\frac{3}{4}$ chiều cao của nó. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của quả bóng và chiếc chén, tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.



Bài 25. Công ty vàng bạc đá quý muốn làm một món đồ trang sức có hình hai hình cầu bằng nhau giao nhau như hình vẽ. Khối cầu có bán kính $25cm$ khoảng cách giữa hai tâm hình cầu là $40cm$. Giá mạ vàng $1m^2$ là 470.000 đồng. Nhà sản xuất muốn mạ vàng xung quanh món đồ trang sức đó. Tính số tiền cần dùng để mạ vàng khối trang sức đó.

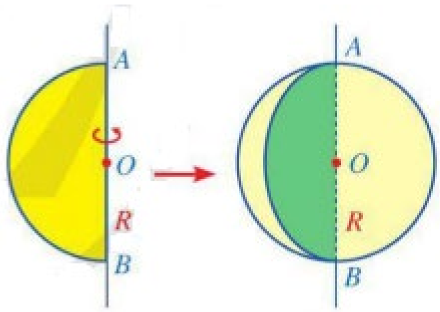


10
A
B
C
-10
0
10
20

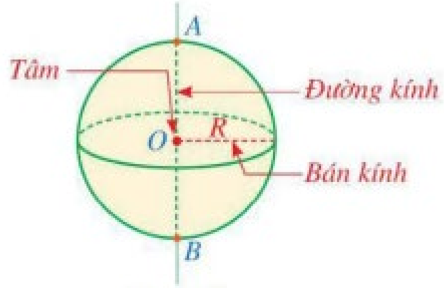
BÀI 3
HÌNH CẦU

1. Hình cầu

a. Nhận biết hình cầu



Khi quay nửa hình tròn tâm O, bán kính R một vòng quanh đường kính AB cố định thì được một **hình cầu**.



Với hình cầu trên, ta có:

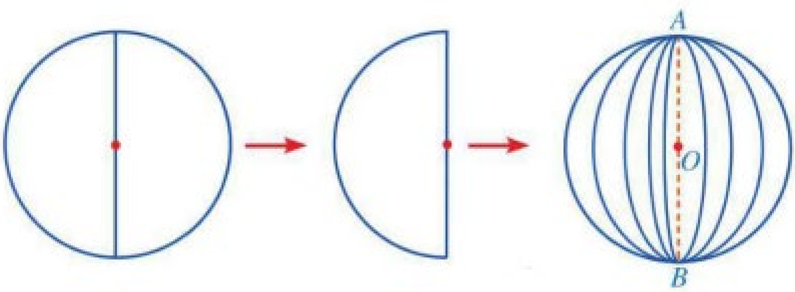
- Nửa đường tròn đường kính AB quét nên **mặt cầu**. Như vậy, mặt cầu là hình được tạo ra khi quay một nửa đường tròn một vòng xung quanh đường thẳng cố định chứa đường kính của nó.
- Điểm O được gọi là **tâm của hình cầu** (hay **tâm của mặt cầu**).
- AB là **đường kính của hình cầu** (hay **đường kính của mặt cầu**).
- R là **bán kính của hình cầu** (hay **bán kính của mặt cầu**).

b. Tạo lập hình cầu

Cắt một số miếng bìa có dạng hình tròn có cùng đường kính (hình 1).

Mỗi miếng bìa tròn đó được cắt hai nửa hình tròn (hình 2).

Ghép các miếng bìa có dạng nửa hình tròn đó để được một hình cầu như dưới đây (hình 3).



Hình 1 Hình 2 Hình 3

c. Nhận biết phần chung giữa mặt phẳng và hình cầu

- Nếu cắt một hình cầu bởi một mặt phẳng thì phần chung giữa chúng là một hình tròn.

Đặc biệt, nếu cắt một hình cầu bởi một mặt phẳng đi qua tâm hình cầu thì phần chung giữa chúng là một hình tròn lớn.

- Khi cắt mặt cầu bởi một mặt phẳng thì phần chung giữa chúng là một đường tròn.

2. Diện tích mặt cầu

Diện tích mặt cầu có bán kính R là: $S = 4\pi R^2$

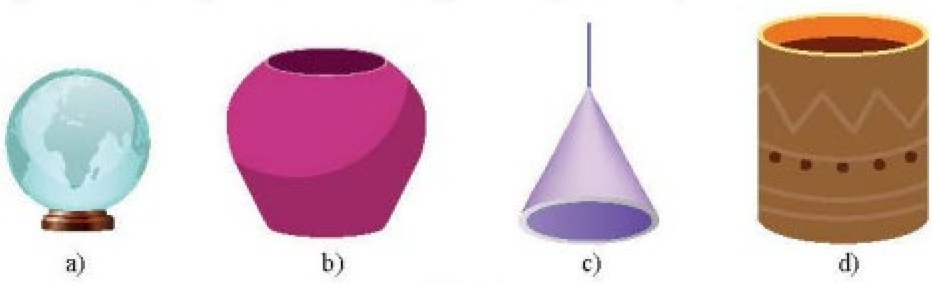
3. Thể tích của hình cầu

Thể tích của hình cầu có bán kính R là: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

DẠNG 1

NHẬN DẠNG MẶT CẦU

Bài 1. Trong các vật thể ở các hình dưới đây, vật thể nào có dạng hình trụ, hình nón, hình cầu?



Lời giải

+ Hình d) là dạng hình trụ

+ Hình c) là dạng hình nón

+ Hình a) là dạng hình cầu

Bài 2. Trong các vật thể ở các hình dưới đây, vật thể nào có dạng hình trụ, hình nón, hình cầu?

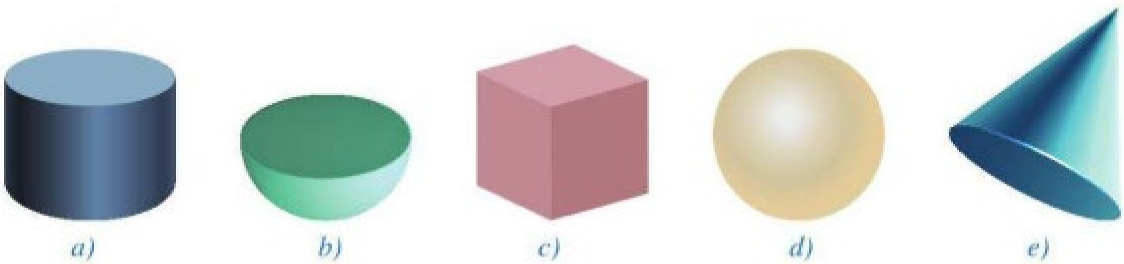
Lời giải

+ Hình e) là dạng hình trụ

+ Hình d) là dạng hình nón

+ Hình b) là dạng hình cầu

Bài 3. Trong các vật thể ở các hình dưới đây, vật thể nào có dạng hình trụ, hình nón, hình cầu?



Lời giải

+ Hình a) là dạng hình trụ

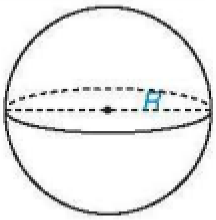
+ Hình e) là dạng hình nón

+ Hình d) là dạng hình cầu

DẠNG 2
TÍNH BÁN KÍNH , DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH CỦA MẶT CẦU

- Diện tích mặt cầu có bán kính R là: $S = 4\pi R^2$
- Thể tích của hình cầu có bán kính R là: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$

Bài 1. Cho hình cầu có bán kính R như hình vẽ. Hãy thay dấu "?"bằng giá trị thích hợp và hoàn thành bảng sau:

Hình cầu	Bán kính (dm)	Diện tích mặt cầu (dm^2)	Thể tích hình cầu (dm^3)
	4	?	?
	?	144π	?
	?	?	36π
	?	196π	

Lời giải

- Với $R = 3$

+ Diện tích mặt cầu có bán kính R là: $S = 4\pi R^2 = 4\pi.4^2 = 64\pi\left(dm^2\right)$

+ Thể tích của hình cầu có bán kính R là: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi.4^3 = \dfrac{256}{3}\pi\left(dm^3\right)$

- Với $S = 144\pi$

+ Bán kính mặt cầu là:

$S = 4\pi R^2$

$R^2 = \dfrac{S}{4\pi}$

$R^2 = \dfrac{144\pi}{4\pi}$

$R^2 = 36$

$\Rightarrow R = 6\left(dm\right)$

+ Thể tích của hình cầu có bán kính R là: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi.6^3 = 288\pi\left(dm^3\right)$

- Với $V = 36\pi$

+ Bán kính mặt cầu là:

$V=\frac{4}{3}\pi R^3$

$R^3=\frac{3V}{4\pi}$

$R^3=\frac{3.36\pi}{4\pi}$

$R^3=27$

$R=3(dm)$

+ Diện tích mặt cầu có bán kính R là: $S=4\pi R^2=4\pi.3^2=36\pi\left(dm^2\right)$

• Với $S=196\pi$

+ Bán kính mặt cầu là:

$S=4\pi R^2$

$R^2=\frac{S}{4\pi}$

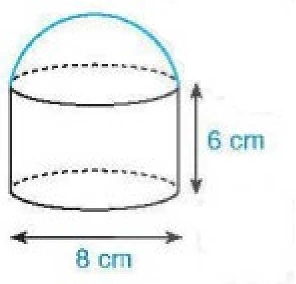
$R^2=\frac{196\pi}{4\pi}$

$R^2=49$

$\Rightarrow R=7(dm)$

+ Thể tích của hình cầu có bán kính R là: $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi.7^3=\frac{1372}{3}\pi\left(dm^3\right)$

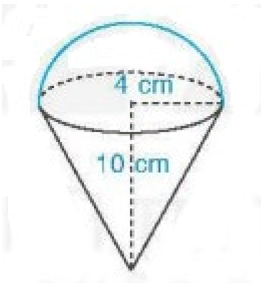
Bài 2. Cho hình vẽ dưới đây, được tạo bởi từ nửa hình cầu, hình trụ (có cùng bán kính).



a) Tính diện tích xung quanh của hình trên.

b) Tính thể tích của của hình trên.

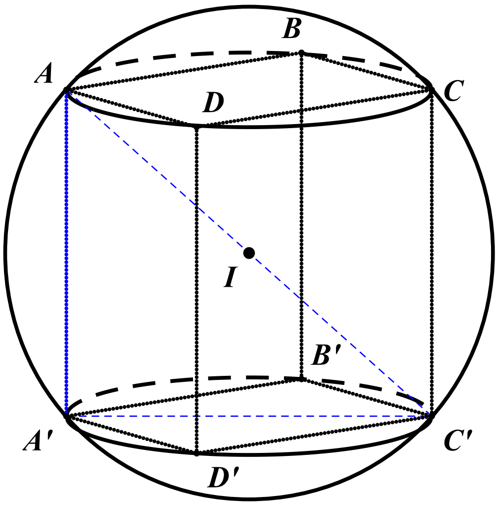
Bài 3. Cho hình vẽ dưới đây, được tạo bởi từ nửa hình cầu và hình nón (có cùng bán kính).



a) Tính diện tích xung quanh của hình trên.

b) Tính thể tích của của hình trên.

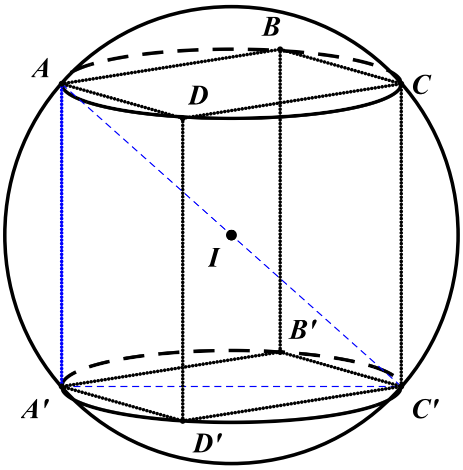
Bài 4. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $2cm$. Một mặt cầu đi qua tám đỉnh A,B,C,D,A',B',C',D' của hình lập phương đó (như hình vẽ).



a) Tính bán kính hình cầu trên.

b) Tính thể tích hình cầu trên.

Lời giải



a) Tâm I của mặt cầu ngoại tiếp lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là trung điểm của đường chéo AC' và

$R = IA = \dfrac{AC'}{2}$

Khối lập phương cạnh *a* nên:

$AA' = 2cm,\ A'C' = 2\sqrt{2}cm$

$\Rightarrow AC' = \sqrt{AA'^2 + A'C'^2} = \sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2} = 2\sqrt{3}$

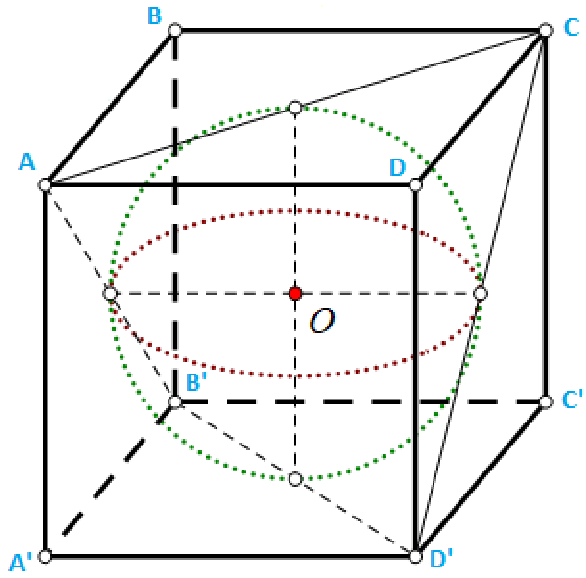
$\Rightarrow R = \dfrac{AC'}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

Vậy bán kính hình cầu trên là $R = \sqrt{3}cm$

b)Vậy thể tích khối cầu cần tính là:

$V = \dfrac{4}{3}.\pi.R^3 = \dfrac{4}{3}.\pi.\left(\sqrt{3}\right)^3 = \dfrac{4}{3}\pi.3\sqrt{3} = 4\sqrt{3}\pi\left(cm^3\right)$

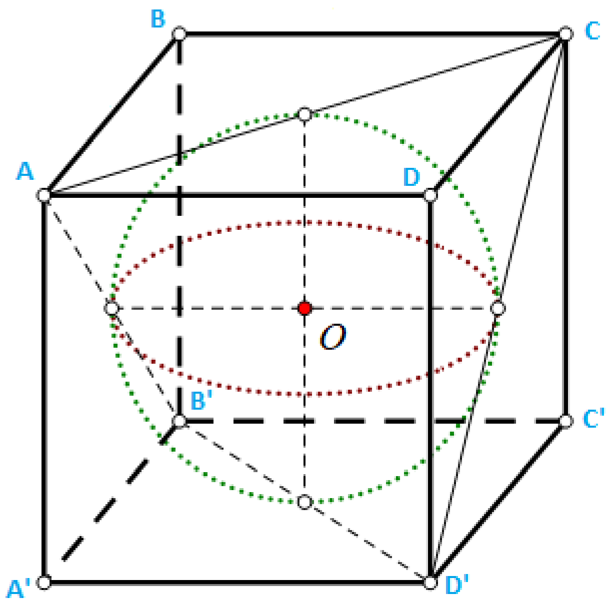
Bài 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $3cm$. Một mặt cầu tiếp xúc sáu mặt của hình lập phương tại trung điểm các đường chéo của sáu mặt hình lập phương (như hình vẽ).



a) Tính diện tích mặt cầu trên.

b) Tính thể tích hình cầu trên.

Lời giải



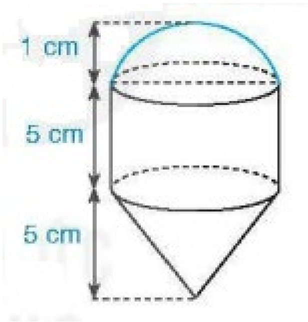
a) Do mặt cầu tiếp xúc hết sáu mặt của hình lập phương tại trung điểm các đường chéo của sáu mặt hình lập phương nên bán kính của hình cầu bằng nửa cạnh hình lập phương hay $R = \frac{3}{2}cm$.

Diện tích mặt cầu là: $S = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 9\pi\left(cm^2\right)$

b) Thể tích hình cầu $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi.\left(\frac{3}{2}\right)^3 = 9\pi\left(cm^3\right)$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

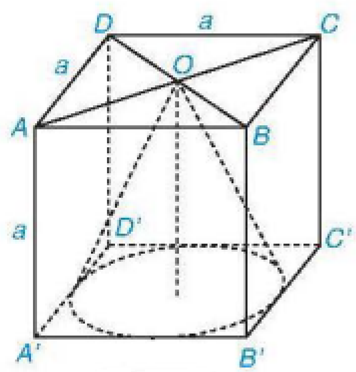
Bài 6. Cho hình vẽ dưới đây, được tạo bởi từ nửa hình cầu, hình trụ và hình nón (có cùng bán kính).



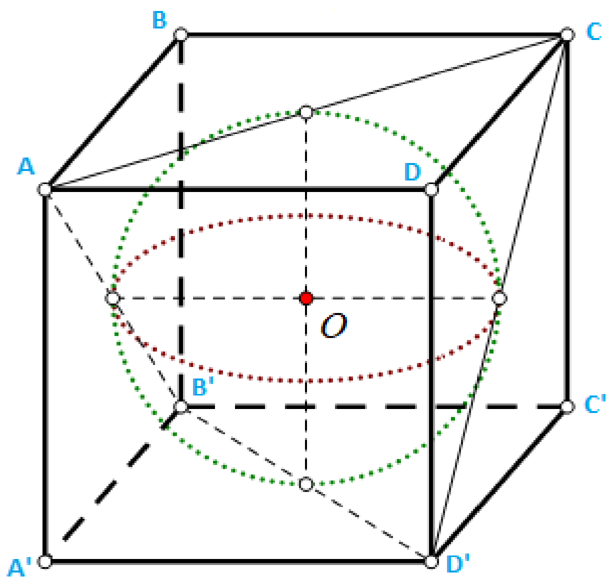
a) Tính diện tích xung quanh của hình trên.

b) Tính thể tích của của hình trên.

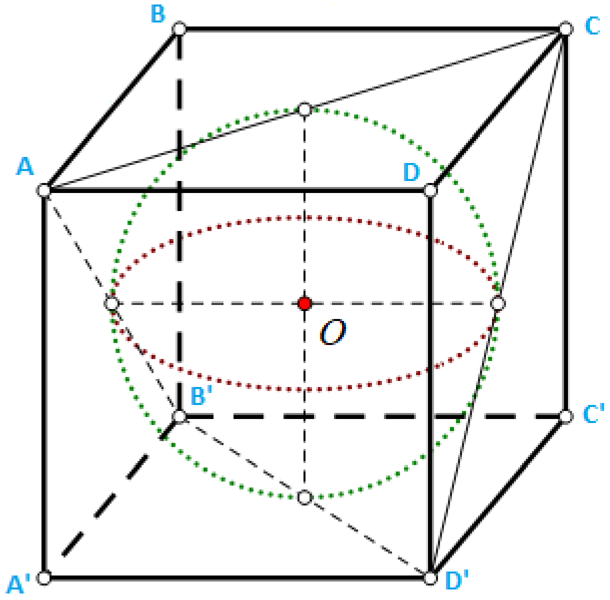
Bài 7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh $10cm$. Tính diện tích toàn phần hình nón có đỉnh là tâm O của hình vuông $ABCD$ và đáy là hình tròn tiếp xúc các cạnh của hình vuông $A'B'C'D'$ như hình vẽ.



Bài 8. Cho hình cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của một hình lập phương (như hình vẽ). Gọi V_1; V_2 lần lượt là thể tích của hình cầu và hình lập phương đó. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.



Lời giải



Gọi a là cạnh của hình lập phương đã cho.

Bán kính của khối cầu là $R = \frac{a}{2}$, nên thể tích của nó là $V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi.\left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{\pi a^3}{6}$.

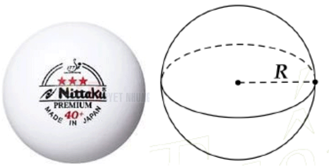
Thể tích khối lập phương là $V_2 = a^3$.

Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi}{6}$.

DẠNG 3
ỨNG DỤNG CỦA MẶT CẦU TRONG THỰC TIỄN

Bài 1. Một quả bóng bàn dạng một hình cầu có bán kính bằng 2 *cm*. Tính diện tích bề mặt của quả bóng bàn đó (lấy π ≈ 3,14).

Lời giải



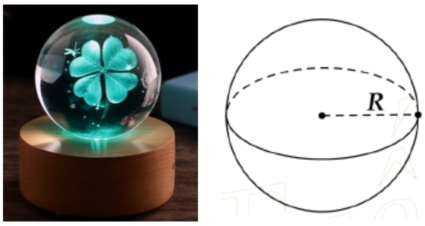
Vì quả bóng bàn hình cầu có bán kính $R = 2cm$ nên diện tích bề mặt quả bón là:

$S = 4\pi R^2 = 4.3,14.2^2 = 50,24\left(cm^2\right)$

Vậy diện tích bề mặt quả bóng bàn là 50,24cm^2.

Bài 2. Một quả pha lê hình cầu có diện tích mặt cầu bằng 144π cm^2. Tính thể tích quả pha lê đó.

Lời giải



Vì quả pha lê hình cầu có diện tích $S_{\text{mặt cầu}} = 144\pi$ cm^2 nên:

$S = 4\pi R^2$

$R^2 = \dfrac{S}{4\pi}$

$R^2 = \dfrac{144\pi}{4\pi}$

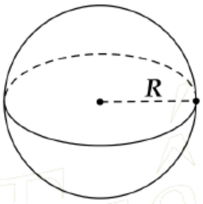
$R^2 = 36$

$\Rightarrow R = 6\left(cm\right)$

Vậy thể tích quả pha lê là: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi.6^3 = 228\pi\ cm^3$.

Bài 3. Trái Đất, hành tinh chúng ta đang sống, dạng hình cầu có bán kính là 6370 *km*. Biết rằng 29% diện tích bề mặt Trái Đất bị bao phủ bởi nước bao gồm núi, sa mạc, cao nguyên, đồng bằng và các địa hình khác. Tính diện tích bề mặt mặt Trái Đất bị bao phủ bởi nước (Lấy π = 3,14; kết quả làm tròn đến chữ số hàng đơn vị).

Lời giải

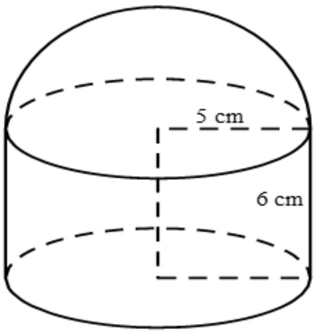


Vì Trái Đất hình cầu có bán kính R = 6370 km nên diện tích bề mặt Trái Đất là:

$$S_{\text{bề mặt}} = 4\pi R^2 = 4.\,3{,}14.\,6370^2 = 509.645.864\ (km^2)$$

Vậy diện tích bề mặt Trái Đất bị bao phủ bởi nước là (100% – 29%). 509.645.864 = 361.848.563 (km^2)

Bài 4. Một hộp đựng mỹ phẩm được thiết kế (tham khảo hình vẽ) có thân hộp là hình trụ có bán kính hình tròn đáy $r = 5cm$, chiều cao $h = 6cm$ và nắp hộp là một nửa hình cầu. Người ta cần sơn mặt ngoài của cái hộp đó (không sơn đáy) thì diện tích S cần sơn là bao nhiêu?



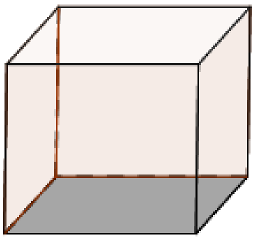
Lời giải

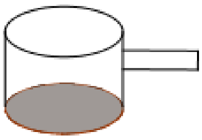
Diện tích nắp hộp cần sơn là: $S_1 = \dfrac{4\pi r^2}{2} = 50\pi\ cm^2$.

Diện tích than hộp cần sơn là: $S_2 = 2\pi rh = 60\pi\ cm^2$.

Diện tích S cần sơn là: $S = S_1 + S_2 = 50\pi + 60\pi = 110\pi\ cm^2$.

Bài 5. Cho một cái bể nước hình hộp chữ nhật có ba kích thước 2m, 3m, 2m của lòng trong đựng nước của bể. Hàng ngày bạn Đạt lấy nước ra ở trong bể bởi một cái gáo hình trụ có chiều cao là 5cm và bán kính đường tròn đáy là 4cm. Trung bình một ngày bạn Đạt múc ra 170 gáo nước để sử dụng (*Biết mỗi lần múc là múc đầy gáo*). Hỏi sau bao nhiêu ngày thì bể hết nước biết rằng ban đầu bể đầy nước?





Lời giải

+ Thể tích nước được đựng đầy trong bể là $V = 2.3.2 = 12\left(\text{m}^3\right)$.

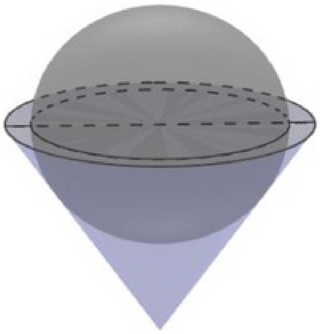
+ Thể tích nước đựng đầy trong gáo là $V_g = \pi 4^2.5 = 80\pi\left(\text{cm}^3\right) = \dfrac{\pi}{12500}\left(\text{m}^3\right)$.

+ Mội ngày bể được múc ra 170 gáo nước tức là trong một ngày lượng được được lấy ra bằng.

$V_m = 170.V_g = \dfrac{17}{1250}\pi\left(\text{m}^3\right)$.

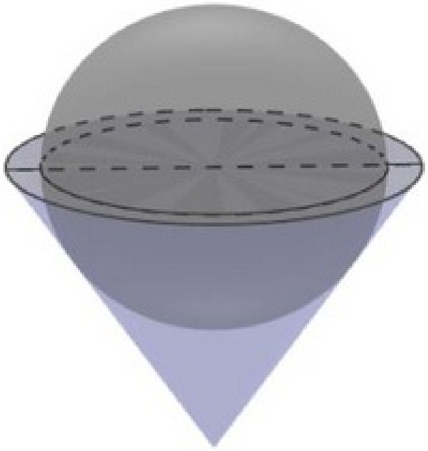
+ Ta có $\dfrac{V}{V_m} = \dfrac{12}{\dfrac{17}{1250}\pi} \simeq 280,8616643 \Rightarrow$ sau 281 ngày bể sẽ hết nước.

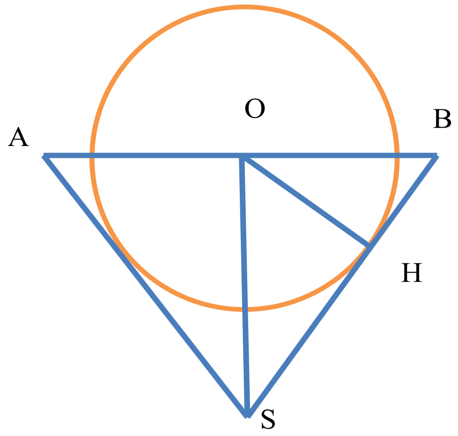
Bài 6. Một bình đựng nước dạng hình nón (không có đáy), đựng đầy nước. Người ta thả vào đó một khối cầu có đường kính bằng chiều cao của bình nước và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là $18\pi\,\text{dm}^3$. Biết rằng hình cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của hình nón và đúng một nửa của hình cầu chìm trong nước (hình bên dưới). Tính thể tích V của nước còn lại trong bình.



Lời giải

Chọn B





Đường kính của hình cầu bằng chiều cao của bình nước nên $OS = 2OH$.

Ta có thể tích nước tràn ra ngoài là thể tích của nửa quả cầu chìm trong bình nước:

$$18\pi = \frac{V_C}{2} = \frac{2\pi OH^3}{3}$$

$$\Rightarrow OH = 3.$$

Lại có:

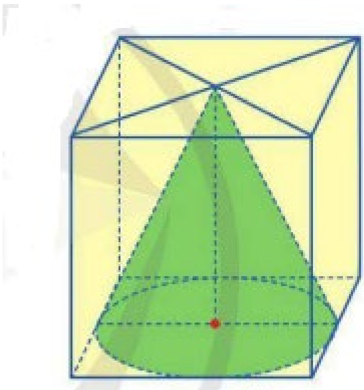
$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OB^2}$$

$$\Rightarrow OB^2 = 12.$$

Thể tích bình nước (thể tích nước ban đầu): $V_n = \dfrac{\pi.OS.OB^2}{3} = 24\pi \ \left(\text{dm}^3\right)$.

Thể tích nước còn lại là: $24\pi - 18\pi = 6\pi \ \left(\text{dm}^3\right)$.

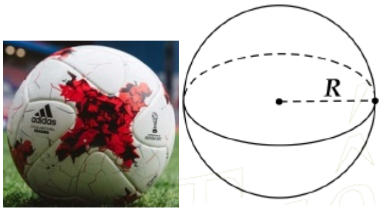
Bài 7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh $5m$. Đặt một hình nón có đỉnh trùng tâm của hình vuông và đáy là hình tròn tiếp xúc các cạnh của hình vuông như hình vẽ. Người ta đổ đầy nước vào hình lập phương, tính lượng nước cần đổ (giả sử hình nón đặc, không bị rỗng).



BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 8. Một quả bóng bằng da có đường kính 22 *cm*. Tính diện tích da cần dùng để làm quả bóng nếu không tính tỉ lệ hao hụt (lấy π = 3,14).

Lời giải

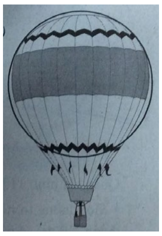


Vì quả bóng da hình cầu có bán kính $R = 22 : 2 = 11$ *cm* nên diện tích bề mặt của quả bóng là:

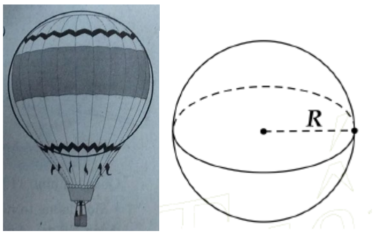
$S = 4\pi R^2 = 4.3,14.11^2 = 1519,8\left(cm^2\right)$

Vậy diện tích da cần dùng để làm quả bóng là $1519,8\left(cm^2\right)$

Bài 9. Ngày 4 – 6 – 1783, anh em nhà Mông-gôn-fi-ê (người Pháp) phát minh ra khinh khí cầu dùng không khí nóng. Coi khinh khí cầu này là hình cầu có đường kính 11 *m* và được làm bằng vải dù. Hãy tính diện tích vải dù để làm khinh khí cầu đó (lấy π = 3,14 và làm tròn kết quả đến chữ số thập phần thứ hai)



Lời giải



Vì khinh khí cầu hình cầu có bán kính R = 11 : 2 = 5,5 *m* nên:

$S = 4\pi R^2 = 4.3,14.(5,5)^2 = 379,94\left(m^2\right)$

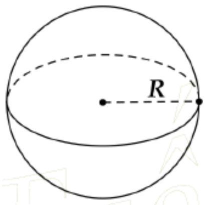
Vậy diện tích vải dù dùng để làm khinh khí cầu là 379,94 m^2

Bài 10. Một tháp nước có bể chứa hình cầu, đường kính bên trong của bể đo được là 6 *m*.

a) Tính thể tích của tháp nước đó?

b) Biết rằng lượng nước đựng đầu trong bể đủ dùng cho một khu dân cư trong 5 ngày. Cho biết khu dân cư có 1304 người. Hỏi trong một ngày mức bình quân mỗi người dùng bao nhiêu lít nước (lấy $\pi = 3,14$; biết 1 $m^3 = 1000$ *lít*).

Lời giải



a) Vì tháp nước hình cầu có R = 6 : 2 = 3 *m* nên thể tích của tháp nước là:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 4.3,14.3^2 = 113,04\left(m^3\right) = 113040\left(lit\right)$$

Vậy thể tích của tháp nước là 113040 *lít*.

b) Một ngày khu dân cư dùng hết số nước là: $113040 : 5 = 22608\left(lit\right)$

Vậy trong một ngày mức bình quân mỗi người dùng 22608 : 1304 = 13,34 *lít*.

Bài 11. Một cốc thủy tinh hình trụ đựng đầy nước có chiều cao bằng 10 *cm* và thể tích bằng 90π cm^3. Người ta thả vào cốc một viên bi sắt hình cầu có bán kính bằng bán kính đáy cốc nước, viên bi sắt ngập toàn bộ trong nước. Tính lượng nước bị tràn ra khỏi cốc?

Lời giải

Vì cốc nước hình trụ có chiều cao h = 10 *cm* và thể tích

$V_{cốc} = 160\pi$ cm^3 nên:

$$V_{cốc} = S_{đáy}.h = \pi R^2.h$$

$$\Rightarrow R^2 = \frac{V_{cốc}}{\pi h} = \frac{90\pi}{\pi.10} = 9 \Rightarrow R = 3\ (cm)$$

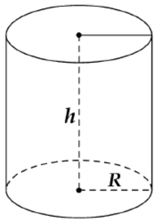
Vì viên bi sắt hình cầu có R = 3 *cm* nên:

$V_{\text{viên bi}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}.\pi.3^3 = 36\pi\ (cm^3)$

Vậy lượng nước bị tràn ra ngoài là $36\pi\ cm^3$.

Bài 12. Người ta thả một quả trứng vào một cốc thủy tinh có nước, hình trụ; thấy trứng chìm hoàn toàn xuống đáy và nằm ngang thì chứng tỏ quả trứng đó còn tươi, mới được để từ một đến hai ngày. Hãy tính thể tích quả trứng đó, biết diện tích đáy của cột nước hình trụ là 16,7 cm^2 và nước trong lọ dâng lên 0,82 cm khi qủa trứng chìm hoàn toàn trong nước.

Lời giải



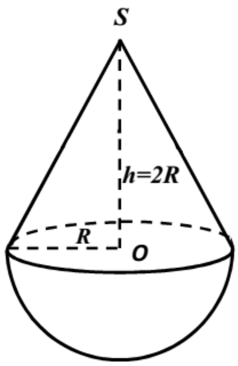
Vì phần nước dâng lên hình trụ có diện tích đáy

$S_{đáy} = 16,7cm^2$ và chiều cao $h = 0,82cm$ nên thể tích phần nước dâng lên là:

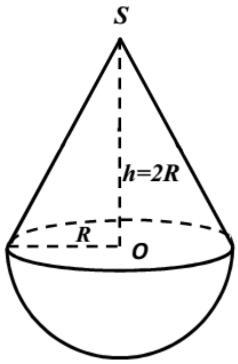
$V_{\text{phần nước dâng}} = S_{\text{đáy}}.h = 16,7.0,82 = 13,694\ (cm^3)$

Vậy thể tích quả trứng đó là 13,694 cm^3.

Bài 13. Một đồ vật được thiết kế bởi một nửa khối cầu và một khối nón úp vào nhau sao cho đáy của khối nón và thiết diện của nửa mặt cầu chồng khít lên nhau như hình vẽ bên dưới. Biết hình nón có đường cao gấp đôi bán kính đáy, thể tích của toàn bộ khối đồ vật bằng $36\pi\, cm^3$. Tính diện tích bề mặt của toàn bộ đồ vật đó.



Lời giải



Thể tích hình nón là $V_1 = \frac{1}{3}\pi.R^2.2R = \frac{2}{3}\pi.R^3$

Thể tích nửa hình cầu là $V_2 = \frac{1}{2}.\frac{4}{3}\pi.R^3 = \frac{2}{3}\pi.R^3$

Thể tích của toàn bộ khối đồ vật là:

$V_1 + V_2 = 36\pi$

$\frac{4}{3}\pi.R^3 = 36\pi$

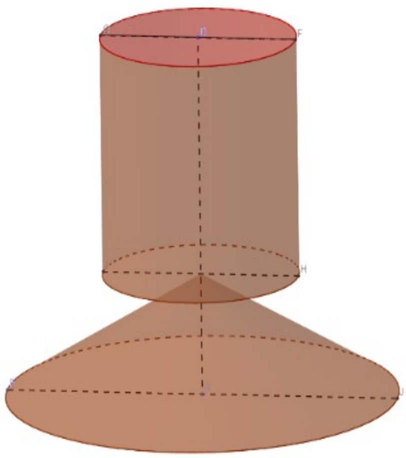
$\Rightarrow R = 3$

Diện tích xung quanh của mặt nón là $S_1 = \pi R.\sqrt{4R^2 + R^2} = \pi R^2\sqrt{5} = 9\sqrt{5}\pi$

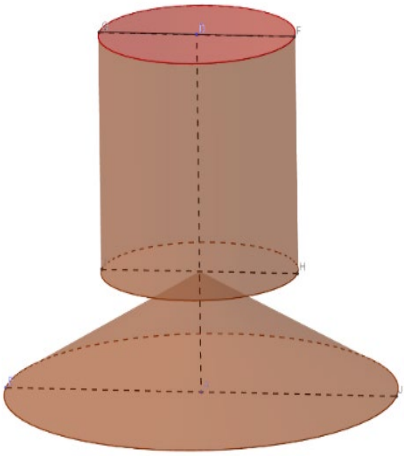
Diện tích của nửa mặt cầu là $S_2 = \frac{1}{2}.4\pi R^2 = 18\pi$

Diện tích bề mặt của toàn bộ đồ vật bằng $S_1 + S_2 = 9\pi\left(\sqrt{5} + 2\right)\ cm^2$.

Bài 14. Một khối đồ chơi gồm một khối hình trụ (T) gắn chồng lên một khối hình nón (N), lần lượt có bán kính đáy và chiều cao tương ứng là r_1, h_1, r_2, h_2 thỏa mãn $r_2 = 2r_1$, $h_1 = 2h_2$ (hình vẽ). Biết rằng thể tích của hình nón (N) bằng $20\,\text{cm}^3$. Tính thể tích của toàn bộ khối đồ chơi.



Lời giải



Ta có thể tích hình trụ là $V_1 = \pi . r_1^2 . h_1$, mà $r_2 = 2r_1,\ h_1 = 2h_2$

$V_1 = \pi . \left(\frac{r_2}{2}\right)^2 . 2h_2 = \frac{1}{2}\pi . r_2^2 h_2$.

Mặt khác thể tích hình nón là $V_2 = \frac{1}{3}\pi . r_2^2 h_2 = 20 \Rightarrow \pi . r_2^2 h_2 = 60\ \left(\text{cm}^3\right)$.

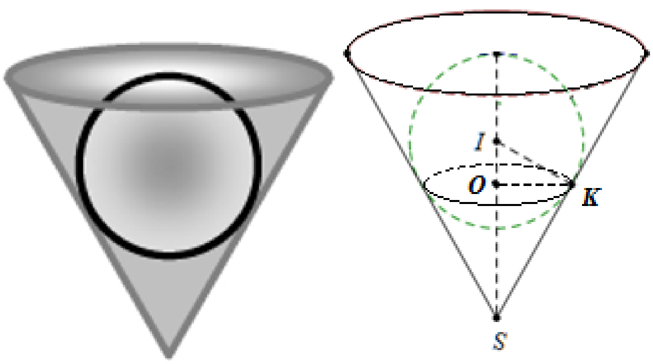
Suy ra $V_1 = \frac{1}{2}.60 = 30\ \text{cm}^3$.

Vậy thể tích toàn bộ khối đồ chơi bằng $V_1 + V_2 = 30 + 20 = 50\ \text{cm}^3$.

Bài 15. Thả một quả cầu đặc có bán kính $3\ (\text{cm})$ vào một vật hình nón (có đáy nón không kín) (như hình vẽ bên dưới). Cho biết khoảng cách từ tâm quả cầu đến đỉnh nón là $5\ (\text{cm})$. Tính thể tích (theo đơn vị cm^3) phần không gian kín giới hạn bởi bề mặt quả cầu và bề mặt trong của vật hình nón.

Lời giải

Xét hình nón và quả cầu như hình vẽ bên dưới.



$OI = \frac{IK^2}{SI} = \frac{3^2}{5} = \frac{9}{5}\ (\text{cm})$.

Thể tích chỏm cầu tâm I có bán kính OK là:

$$V_2 = \pi.(IK - OI)^2.\left(IK - \frac{IK - OI}{3}\right) = \pi.\left(3 - \frac{9}{5}\right)^2.\left(3 - \frac{3 - \frac{9}{5}}{3}\right) = \frac{468\pi}{125}\ \left(\text{cm}^3\right).$$

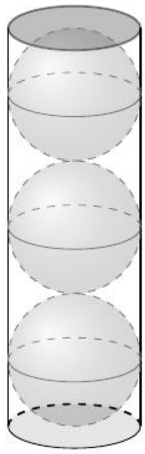
Thể tích hình nón có đỉnh S, đáy hình tròn tâm O, bán kính đáy OK là:

$$V_1 = \frac{1}{3}.SO.S_{(O;OK)}\ \frac{1}{3}.\frac{16}{5}.\pi\left(\frac{12}{5}\right)^2 = \frac{768\pi}{125}\ \left(\text{cm}^3\right).$$

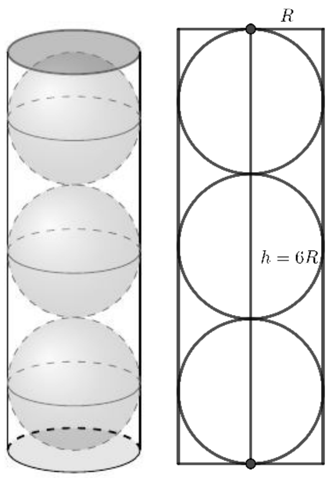
Thể tích phần không gian kín giới hạn bởi bề mặt quả cầu và bề mặt trong của vật hình nón là:

$$V_1 - V_2 = \frac{768\pi}{125} - \frac{468\pi}{125} = \frac{12\pi}{5}\ \left(\text{cm}^3\right).$$

Bài 16. Một hộp đựng bóng tennis có dạng hình trụ. Biết rằng hộp chứa vừa khít ba quả bóng tennis được xếp theo chiều dọc, các quả bóng tennis có kích thước như nhau. Thể tích phần không gian còn trống chiếm tỉ lệ $a\%$ so với hộp đựng bóng tennis. Tính a gần.



Lời giải



Đặt h, R lần lượt là đường cao và bán kính hình tròn đáy của hộp đựng bóng tennis.

Dễ thấy mỗi quả bóng tennis có cùng bán kính R với hình tròn đáy của hộp đựng bóng tennis và $h = 6R$. Do đó ta có:

Tổng thể tích của ba quả bóng là $V_1 = 3.\frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^3$;

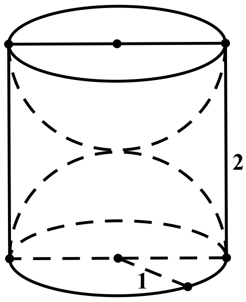
Thể tích của hình trụ (hộp đựng bóng) là $V_0 = \pi R^2 h = 6\pi R^3$;

Thể tích phần còn trống của hộp đựng bóng là $V_2 = V_0 - V_1 = 2\pi R^3$.

Khi đó tỉ lệ phần không gian còn trống so với hộp đựng bóng là $\frac{V_2}{V_0} = \frac{1}{3} \approx 0,33$.

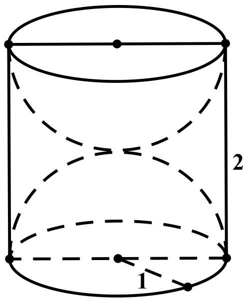
Suy ra $a \approx 33$.

Bài 17. Một khối gỗ hình trụ tròn xoay có bán kính đáy bằng 1, chiều cao bằng 2. Người ta khoét từ hai đầu khối gỗ hai nửa khối cầu mà đường tròn đáy của khối gỗ là đường tròn lớn của mỗi nửa hình cầu. Tính tỉ số thể tích phần còn lại của khối gỗ và cả khối gỗ ban đầu.



Lời giải

Theo bài toán ta có hình vẽ



Thể tích của hình trụ là $V = \pi.1^2.2 = 2\pi$.

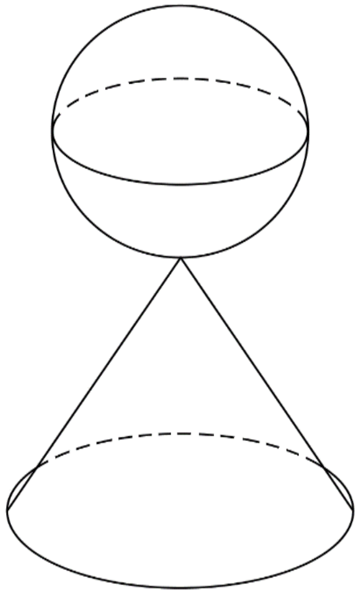
Vì đường tròn đáy của hình trụ là đường tròn lớn của mỗi nửa hình cầu nên bán kính của mỗi nửa hình cầu là $R = 1$.

Thể tích của hai nửa hình cầu bị khoét đi là $V_1 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi.1^3}{3} = \frac{4\pi}{3}$.

Thể tích của phần còn lại của khối gỗ là $V_2 = V - V_1 = 2\pi - \frac{4\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

Vậy tỉ số thể tích cần tìm là $\frac{V_2}{V} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{2\pi} = \frac{1}{3}$.

Bài 18. Một khối cầu pha lê gồm một hình cầu (H_1) bán kính R và một hình nón (H_2) có bán kính đáy và đường sinh lần lượt là r,l thỏa mãn $r=\frac{1}{2}l$ và $l=\frac{3}{2}R$ xếp chồng lên nhau (hình vẽ). Biết tổng diện tích mặt cầu (H_1) và diện tích toàn phần của hình nón (H_2) là $91cm^2$. Tính diện tích của mặt cầu (H_1)



Lời giải

$r=\frac{1}{2}l=\frac{1}{2}.\frac{3}{2}R=\frac{3}{4}R$.

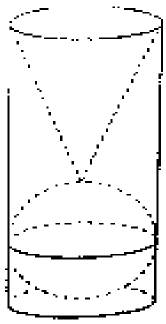
Diện tích mặt cầu $S_1=4\pi R^2$

Diện tích toàn phần của hình nón $S_2=\pi rl+\pi r^2=\pi.\frac{3}{4}R.\frac{3}{2}R+\pi.\frac{9}{16}R^2=\frac{27\pi R^2}{16}$

Theo giả thiết: $4\pi R^2+\frac{27\pi R^2}{16}=91 \Leftrightarrow \frac{91\pi R^2}{16}=91 \Leftrightarrow \pi R^2=16$

Vậy $S_1=4\pi R^2=64cm^2$

Bài 19. Trên bàn có một cốc nước hình trụ chứa đầy nước có chiều cao bằng 3 lần đường kính của đáy; một viên bi và một hình nón đều bằng thủy tinh. Biết viên bi là một khối cầu có đường kính bằng của cốc nước. Người ta từ từ thả vào cốc nước viên bi và khối nón đó (như hình vẽ) thì thấy nước trong cốc tràn ra ngoài. Tính tỉ số thể tích của lượng nước còn lại trong cốc và lượng nước ban đầu(bỏ qua bề dày của lớp vỏ thủy tinh)



Lời giải

Gọi R, h lần lượt là bán kính đáy và là chiều cao của hình trụ

$h = 6R$

Thể tích của hình trụ $V_T = \pi 6R^3$.

Khối cầu bên trong hình trụ có bán kính R nên hình cầu có thể tích $V_C = \frac{4}{3}\pi R^3$.

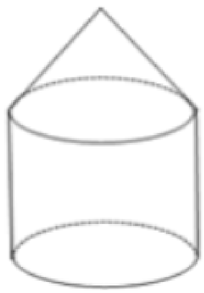
Khối nón bên trong hình trụ có bán kính R và chiều cao $h = 4R$ nên hình nón có thể tích $V_N = \frac{4}{3}\pi R^3$

Thể tích lượng nước còn lại bên trong hình trụ

$V = V_T - (V_C + V_N) = 6\pi R^3 - \frac{8}{3}\pi R^3 = \frac{10}{3}\pi R^3$.

Vậy $\frac{V}{V_T} = \frac{5}{9}$.

Bài 20. Một khối đồ chơi gồm một hình trụ và một hình nón có cùng bán kính được chồng lên nhau, độ dài đường sinh hình trụ bằng độ dài đường sinh hình nón và bằng đường kính hình trụ, hình nón (tham khảo hình vẽ). Biết thể tích toàn bộ khối đồ chơi là $50cm^3$, tính thể tích hình trụ.



Lời giải

Gọi $l; r$ lần lượt là độ dài đường sinh và bán kính đáy hình trụ.

Khi đó ta có: $l = 2r$.

Suy ra thể tích hình trụ là $V_t = \pi r^2 l = 2\pi r^3$.

Gọi $h_n; l_n$ lần lượt là chiều cao và đường sinh của hình nón.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} l_n = l \\ h_n = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{3}r \end{cases}$.

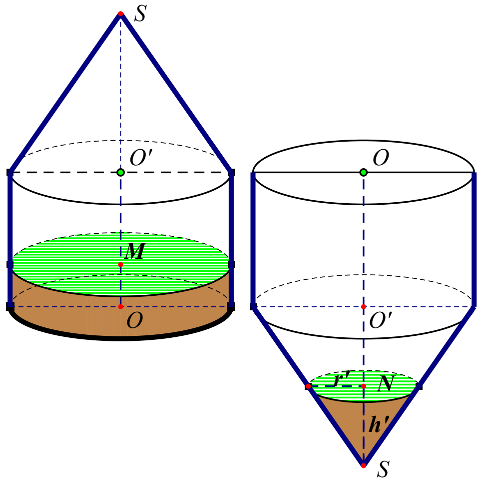
Khi đó thể tích hình nón là $V_n = \frac{1}{3}\pi r^2 h_n = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi r^3$.

Do thể tích toàn bộ khối đồ chơi là $50cm^3$ nên

$$V_t + V_n = 2\pi r^3 + \frac{\sqrt{3}}{3}\pi r^3 = \left(2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\pi r^3 = 50 \Rightarrow \pi r^3 = \frac{150}{6+\sqrt{3}}.$$

Khi đó thể tích hình trụ là $V_t = \pi r^2 l = 2\pi r^3 \approx 38,8cm^3$.

Bài 21. Cho một dụng cụ đựng chất lỏng được tạo bởi một hình trụ và hình nón được lắp đặt như hình bên. Bán kính đáy hình nón bằng bán kính đáy hình trụ. Chiều cao hình trụ bằng chiều cao hình nón và bằng *h*. Trong bình, lượng chất lỏng có chiều cao bằng $\frac{1}{24}$ chiều cao hình trụ. Lật ngược dụng cụ theo phương vuông góc với mặt đất. Tính độ cao phần chất lỏng trong hình nón theo *h*.



Lời giải

Thể tích chất lỏng $V = \pi r^2 . \frac{1}{24} h = \frac{1}{24}\pi r^2 h$.

Khi lật ngược bình, thể tích phần hình nón chứa chất lỏng là $V' = \frac{1}{3}\pi r'^2 h'$.

Mà $\frac{r'}{r} = \frac{h'}{h} \Rightarrow r' = \frac{h'}{h}.r$. Do đó $V' = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h'}{h}.r\right)^2 h' = \frac{1}{3}\pi r^2 . \frac{h'^3}{h^2}$.

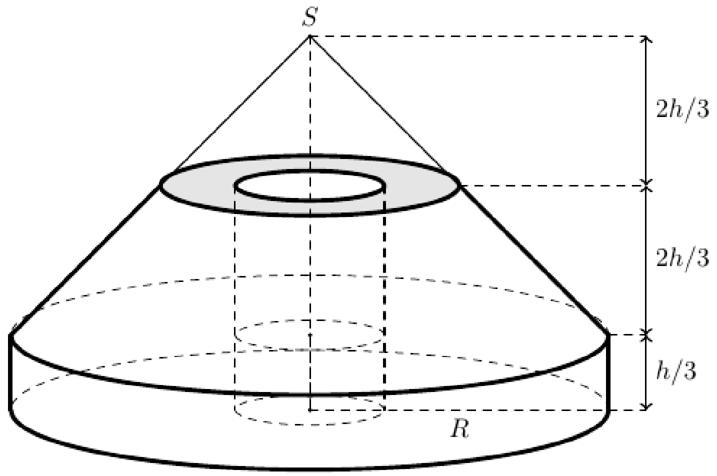
Theo bài ra, $V' = V \Leftrightarrow \frac{1}{3}\pi r^2 . \frac{h'^3}{h^2} = \frac{1}{24}\pi r^2 h \Leftrightarrow h'^3 = \frac{1}{8}h^3 \Leftrightarrow h' = \frac{h}{2}$.

Bài 22. Để định vị một trụ điện, người ta cần đúc một khối bê tông có chiều cao $h = 1,5\,\text{m}$ gồm:

- Phần dưới có dạng hình trụ bán kính đáy $R = 1\,\text{m}$ và có chiều cao bằng $\frac{1}{3}h$;

- Phần trên có dạng hình nón bán kính đáy bằng R đã bị cắt bỏ bớt một phần hình nón có bán kính đáy bằng $\frac{1}{2}R$ ở phía trên (*người ta thường gọi hình đó là hình nón cụt);*

- Phần ở giữa rỗng có dạng hình trụ bán kính đáy bằng $\frac{1}{4}R$ *(tham khảo hình vẽ bên dưới).*



Tính thể tích của khối bê tông *(làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba).*

Lời giải

Thể tích hình trụ bán kính đáy R và có chiều cao bằng $\frac{h}{3}$:

$$V_1 = \pi R^2.\frac{h}{3} = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

Thể tích hình nón cụt bán kính đáy lớn R, bán kính đáy bé $\frac{R}{2}$ và có chiều cao bằng $\frac{2h}{3}$:

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi R^2.\frac{4h}{3} - \frac{1}{3}\pi\frac{R^2}{4}.\frac{2h}{3} = \frac{7}{18}\pi R^2 h.$$

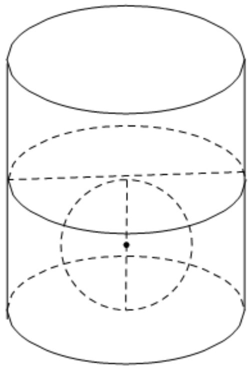
Thể tích hình trụ bán kính đáy $\frac{R}{4}$ và có chiều cao bằng h *(phần rỗng ở giữa)*:

$$V_3 = \pi\frac{R^2}{16}.h = \frac{1}{16}\pi R^2 h.$$

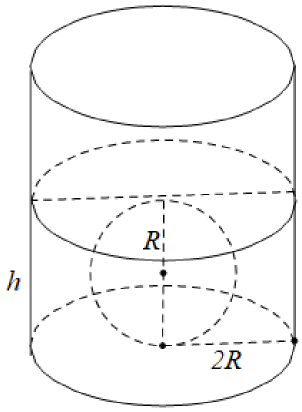
Thể tích của khối bê tông bằng:

$$V = V_1 + V_2 - V_3 = \pi R^2 h.\left(\frac{1}{3} + \frac{7}{18} - \frac{1}{16}\right) = \frac{95}{144}\pi R^2.h \approx 3{,}109\,\text{m}^3.$$

Bài 23. Người ta thả một viên bi có dạng hình cầu có bán kính $2{,}7\,cm$ vào một chiếc cốc hình trụ đang chứa nước (tham khảo hình vẽ dưới). Biết rằng bán kính của phần trong đáy cốc bằng $5{,}4\,cm$ và chiều cao của mực nước ban đầu trong cốc bằng $4{,}5\,cm$. Khi đó chiều cao của mực nước trong cốc là bao nhiêu?



Lời giải



Gọi $R = 2,7\,cm$ là bán kính của viên bi. Ta có bán kính phần trong đáy cốc là $2R$.

Thể tích nước ban đầu là: $V_1 = \pi\left(2R\right)^2.4,5 = 18\pi R^2$.

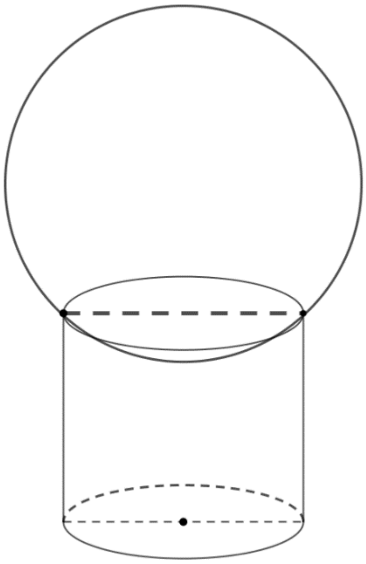
Thể tích viên bi là: $V_2 = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Thể tích nước sau khi thả viên bi là: $V = V_1 + V_2 = 18\pi R^2 + \dfrac{4}{3}\pi R^3 = 2\pi R^2\left(9 + \dfrac{2}{3}R\right)$.

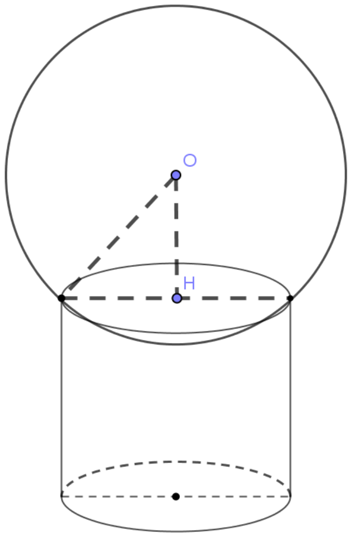
Gọi h là chiều cao mực nước sau khi thả viên bi vào.

Ta có: $V = 2\pi R^2\left(9 + \dfrac{2}{3}R\right) = \pi\left(2R\right)^2.h \Rightarrow h = \dfrac{2\pi R^2\left(9 + \dfrac{2}{3}R\right)}{\pi\left(2R\right)^2} = \dfrac{\left(9 + \dfrac{2}{3}R\right)}{2} = 5.4\left(cm\right)$.

Bài 24. Một trái banh và một chiếc chén hình trụ có cùng chiều cao. Người ta đặt trái banh lên hình trụ thấy phần ở bên ngoài của quả bóng có chiều cao bằng $\dfrac{3}{4}$ chiều cao của nó. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của quả bóng và chiếc chén, tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.



Lời giải



Gọi R là bán kính mặt cầu, r,h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao hình trụ.

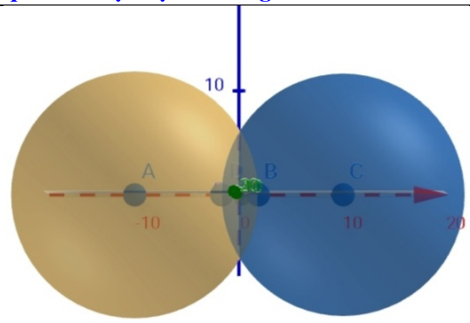
Theo bài ra ta có: $h=2R$ và $r=\sqrt{R^2-\left(\frac{R}{2}\right)^2}=\frac{R\sqrt{3}}{2}$.

$V_1=\frac{4}{3}\pi R^3$, $V_2=\pi r^2h=\pi\frac{3R^2}{4}.2R=\frac{3\pi R^3}{2}$

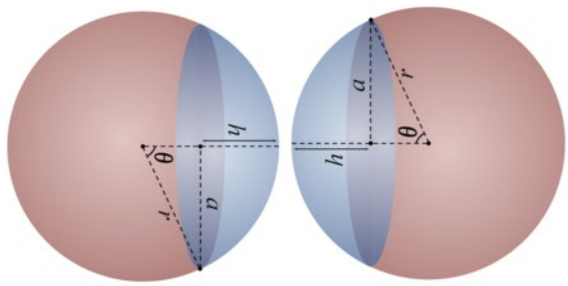
$\Rightarrow\frac{V_1}{V_2}=\frac{8}{9}$ hay $9V_1=8V_2$.

$\Rightarrow\frac{V_1}{V_2}=\frac{8}{9}$

Bài 25. Công ty vàng bạc đá quý muốn làm một món đồ trang sức có hình hai hình cầu bằng nhau giao nhau như hình vẽ. Khối cầu có bán kính $25cm$ khoảng cách giữa hai tâm hình cầu là $40cm$. Giá mạ vàng $1m^2$ là 470.000 đồng. Nhà sản xuất muốn mạ vàng xung quanh món đồ trang sức đó. Tính số tiền cần dùng để mạ vàng khối trang sức đó.



Lời giải



(Phần màu nhạt là phần giao nhau của hai khối cầu)

Gọi h là chiều cao của chỏm cầu. Ta có $h = \dfrac{2R - d}{2} = \dfrac{2.25 - 40}{2} = 5cm$

(d là khoảng cách giữa hai tâm)

Diện tích xung quanh của chỏm cầu là: $S_{xq} = 2\pi Rh$

Vì 2 khối cầu bằng nhau nên 2 hình chỏm cầu bằng nhau.

S_{xq} khối trang sức $= 2S_{xq}$ khối cầu$-2S_{xq}$ chỏm cầu.

Khối trang sức có $S_{xq} = 2.4\pi R^2 - 2.2\pi Rh = 2.4\pi.25^2 - 2.2\pi.25.5 = 4500\pi cm^2 = 0.45m^2$

Vậy số tiền dùng để mạ vàng khối trang sức đó là $470.000.0,45\pi \simeq 664.000$ đồng.