CÂU TƯƠNG TỰ CÂU 39 ĐỀ THAM KHẢO 2024

Câu 39.1: Cho a và b là hai số thực dương phân biệt, khác 1 và thỏa mãn $\log_a^2\left(a^3b\right).\log_a\dfrac{b^2}{a^3}+27=0$. Giá trị của $\log_b a$ bằng

A. $\dfrac{9}{2}$. **B.** $-\dfrac{9}{2}$. **C.** $-\dfrac{2}{9}$. **D.** $\dfrac{2}{9}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log_a^2\left(a^3b\right).\log_a\dfrac{b^2}{a^3}+27=0\Leftrightarrow\left(\log_a b+3\right)^2\left(2\log_a b-3\right)+27=0$.

Đặt $t=\log_a b;\ t\neq 0$. Ta có phương trình

$$\left(t+3\right)^2\left(2t-3\right)+27=0\Leftrightarrow\left(t^2+6t+9\right)\left(2t-3\right)+27=0$$

$$\Leftrightarrow 2t^3+12t^2+18t-3t^2-18t-27+27=0\Leftrightarrow 2t^3+9t^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\ (L)\\ t=-\dfrac{9}{2}\end{array}\right..$$

Vậy $\log_a b=-\dfrac{9}{2}\Leftrightarrow\log_b a=-\dfrac{2}{9}$.

Câu 39.2: Cho a và b là hai số thực dương phân biệt, khác 1 và thỏa mãn $\log_a^2\left(a^2b^3\right).\log_a b^3-\log_a^2\left(a^2b^3\right)+4=0$. Giá trị của biểu thức $\dfrac{7}{5}\log_b a+\dfrac{2024}{5}$ bằng

A. $\dfrac{2038}{5}$. **B.** $\dfrac{2024}{5}$. **C.** $\dfrac{2031}{5}$. **D.** $\dfrac{2017}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_a^2\left(a^2b^3\right).\log_a b^3-\log_a^2\left(a^2b^3\right)+4=0$

$\Leftrightarrow\log_a^2\left(a^2b^3\right).\left(\log_a b^3-1\right)+4=0\Leftrightarrow\left(3\log_a b+2\right)^2\left(3\log_a b-1\right)+4=0$.

Đặt $t=\log_a b;\ t\neq 0$. Ta có phương trình

$$\left(3t+2\right)^2\left(3t-1\right)+4=0\Leftrightarrow\left(9t^2+12t+4\right)\left(3t-1\right)+4=0$$

$$\Leftrightarrow 27t^3+36t^2+12t-9t^2-12t-4+4=0\Leftrightarrow 27t^3+27t^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\ (L)\\ t=-1\end{array}\right..$$

Suy ra $\log_a b=-1\Leftrightarrow\log_b a=-1$

Vậy $\dfrac{7}{5}\log_b a+\dfrac{2024}{5}=\dfrac{2017}{5}$.

Câu 39.3: Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $\log_3 a^2+\log_{\frac{1}{3}} b=2$. Giá trị của $\dfrac{a}{\sqrt{b}}$ bằng

A. 3. **B.** 9. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{9}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Tự luận

Với a và b là hai số thực dương, ta có:

$$\log_3 a^2+\log_{\frac{1}{3}} b=2\Leftrightarrow\log_3 a^2-\log_3 b=2\Leftrightarrow\log_3\dfrac{a^2}{b}=2\Leftrightarrow\dfrac{a^2}{b}=3^2\Leftrightarrow\dfrac{a}{\sqrt{b}}=3.$$

Cách 2: Sử dụng máy tính cầm tay

Chọn a hoặc b. Dùng chức năng SOLVE để tìm giá trị còn lại. Tính giá trị và thay vào đáp án để kiểm tra. Cụ thể:

+ Chọn $b = 3$ (chọn tùy ý thỏa điều kiện bài toán).

+ Bấm: $\log_3 x^2 + \log_{\frac{1}{3}} 3 = 2 \xrightarrow{SOLVE} x \approx 5.196152423 \xrightarrow{STO} A$

```
log3(x²)+log1/3(3)=2        Ans→A
x=       5.196152423
L-R=               0        5.196152423
```

+ Tính $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{A}{\sqrt{3}} = 3$ ta được đáp án A.

Câu 39.4: Cho a,b,c là các số thực dương, khác 1 và thỏa mãn $\log_a b^2 = x; \log_{b^2} \sqrt{c} = y$. Giá trị của $\log_a c$ bằng

A. $2xy$. **B.** $\frac{xy}{2}$. **C.** $\frac{2}{xy}$. **D.** $\frac{1}{2xy}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Tự luận

Với a,b,c là các số thực dương, khác 1, ta có:

$\log_a b^2 = x \Leftrightarrow 2\log_a b = x \Leftrightarrow \log_a b = \frac{x}{2}$.

$\log_{b^2} \sqrt{c} = y \Leftrightarrow \frac{1}{4}\log_b c = y \Leftrightarrow \log_b c = 4y$.

Khi đó: $\log_a b.\log_b c = \frac{x}{2}.4y = 2xy \Leftrightarrow \log_a c = 2xy$.

Cách 2: Sử dụng máy tính:

Chọn $b = 3, x = 4, y = 2$ (bạn đọc chọn tùy ý các số thỏa mãn điều kiện bài toán).

Dùng chức năng SOLVE để tìm a,c và dùng chức năng STO để gán vào biến A,C

Cụ thể:

+ Bấm $\log_x 3^2 = 4 \xrightarrow{SOLVE} x \approx 1,732050808 \xrightarrow{STO} A$ ta được:

```
logx(3²)=4                  Ans→A
x=       1.732050808
L-R=               0        1.732050808
```

+ Bấm $\log_{3^2} \sqrt{x} = 2 \xrightarrow{SOLVE} x = 6561 \xrightarrow{STO} C$ ta được:

```
log3²(√x)=2                 Ans→C
x=              6561
L-R=               0               6561
```

+ Bấm $\log_A C = 16$

+ Kiểm tra bằng cách thay $x = 4, y = 2$ (đã chọn) vào đáp án ta được đáp án A.

Câu 39.5: Biết phương trình $\log_2^2 x + 3\log_{\frac{1}{2}} x = 4$ có hai nghiệm phân biệt là a, b với $a < b$. Tìm khẳng định **sai**.

A. $b > 10$. **B.** $2a + b = 17$. **C.** $a < 1$. **D.** $b = 16a$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x > 0$.

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow$ $\log_2^2 x - 3\log_2 x - 4 = 0$.

Đặt $\log_2 x = t$, ta suy ra phương trình: $t^2 - 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 4 \end{array}\right.$.

Với $t = -1 \Rightarrow \log_2 x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$, thỏa mãn đk $x > 0$.

Với $t=4 \Rightarrow \log_2 x = 4 \Leftrightarrow x=16$, thỏa mãn đk $x>0$.

Khi đó $a=\dfrac{1}{2}$, $b=16$ nên khẳng định $b=16a$ là sai.

Câu 39.6: Biết phương trình $\log_3\left(3^x-1\right).\left[1+\log_3\left(3^x-1\right)\right]=6$ có hai nghiệm là $x_1<x_2$ và tỉ số $\dfrac{x_1}{x_2}=\log\dfrac{a}{b}$ trong đó $a,b\in\mathbb{N}^*$ và a, b có ước chung lớn nhất bằng 1. Tính $a+b$.

A. $a+b=55$. **B.** $a+b=37$. **C.** $a+b=56$. **D.** $a+b=38$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_3\left(3^x-1\right).\left[1+\log_3\left(3^x-1\right)\right]=6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3\left(3^x-1\right)=-3\\ \log_3\left(3^x-1\right)=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_1=\log_3\dfrac{28}{27}\\ x_2=\log_3 10\end{array}\right.$

$\Rightarrow \dfrac{x_1}{x_2}=\log\dfrac{28}{27} \Rightarrow a=28,\ b=27 \Rightarrow a+b=55$.

Câu 39.7: Phương trình $\log_2^2 x+\log_3\dfrac{6}{x}=\left(1+\log_3\dfrac{6}{x}\right)\log_2 x$ có số nghiệm bằng

A. 2 nghiệm. **B.** 3 nghiệm. **C.** vô nghiệm. **D.** 1 nghiệm.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $x>0$.

PT đã cho $\Leftrightarrow \log_2^2 x+\log_3\dfrac{6}{x}-\log_2 x-\log_2 x.\log_3\dfrac{6}{x}=0$

$\Leftrightarrow \log_2 x(\log_2 x-1)+\log_3\dfrac{6}{x}(1-\log_2 x)=0$

$\Leftrightarrow (\log_2 x-1)(\log_2 x-\log_3\dfrac{6}{x})=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\log_2 x-1=0 & (1)\\ \log_2 x-\log_3\dfrac{6}{x}=0 & (2)\end{array}\right.$

Giải (1): $(1)\Leftrightarrow x=2\ (t/m)$

Giải (2): $(2)\Leftrightarrow \log_2 x=\log_3\dfrac{6}{x} \Leftrightarrow \log_2 x=\dfrac{\log_2\dfrac{6}{x}}{\log_2 3} \Leftrightarrow \log_2 3.\log_2 x=\log_2 6-\log_2 x$

$\Leftrightarrow \log_2 x.(1+\log_2 3)=\log_2 6 \Leftrightarrow \log_2 x.(\log_2 2+\log_2 3)=\log_2 6 \Leftrightarrow \log_2 x=1 \Leftrightarrow x=2\ (t/m)$

Vậy PT đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$.

Câu 39.8: Cho x,y là các số thực dương thoản mãn $\log_5 x^2=\log_2 y=\log_9(x^2+y^2)$. Giá trị của $\dfrac{x^2}{y}$ bằng

A. $\log_5\left(\dfrac{5}{2}\right)$. **B.** $\log_2\left(\dfrac{5}{2}\right)$. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\log_5 x^2=\log_2 y=\log_9(x^2+y^2)=t \Rightarrow \begin{cases}x^2=5^t\\ y=2^t\\ x^2+y^2=9^t\end{cases} \Leftrightarrow 5^t+4^t=9^t\,(1)$.

$(1)\Leftrightarrow \left(\dfrac{4}{9}\right)^t+\left(\dfrac{5}{9}\right)^t=1$. Đặt $f(t)=\left(\dfrac{4}{9}\right)^t+\left(\dfrac{5}{9}\right)^t \Rightarrow f'(t)=\left(\dfrac{4}{9}\right)^t\ln\dfrac{4}{9}+\left(\dfrac{5}{9}\right)^t\ln\dfrac{5}{9}<0$.

Hàm số $f(t)$ nghịch biến nên phương trình (1) có duy nhất 1 nghiệm

$t=1\Leftrightarrow x^2=5; y=2\Rightarrow \dfrac{x^2}{y}=\dfrac{5}{2}$.

Câu 39.9: Cho a và b là hai số thực dương phân biệt, khác 1 và thỏa mãn $\log_a\left(a^2b\right)\cdot\log_a^2\dfrac{b}{a}-2=0$. Giá trị của $\left(\log_b a\right)^2$ bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** 3. **C.** $\dfrac{1}{9}$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_a\left(a^2b\right)\cdot\log_a^2\dfrac{b}{a}-2=0\Leftrightarrow\left(\log_a b+2\right)\left(\log_a b-1\right)^2-2=0$.

Đặt $t=\log_a b;\ t\neq 0$. Ta có phương trình

$$\left(t+2\right)\left(t-1\right)^2-2=0\Leftrightarrow\left(t+2\right)\left(t^2-2t+1\right)-2=0\ \Leftrightarrow t^3-3t=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\ (L)\\ t=-\sqrt{3}\\ t=\sqrt{3}\end{array}\right..$$

Vậy $\left(\log_a b\right)^2=3\Leftrightarrow\left(\log_b a\right)^2=\dfrac{1}{3}$.

Câu 39.10: Cho a và b là hai số thực dương phân biệt, khác 1 và thỏa mãn $\log_a^2\left(\dfrac{a^2}{b}\right)\cdot\log_a ab-4=0$. Giá trị của $\log_b a$ bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** 3. **C.** $-\dfrac{1}{3}$. **D.** -3.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_a^2\left(\dfrac{a^2}{b}\right)\cdot\log_a ab-4=0\Leftrightarrow\left(2-\log_a b\right)^2\left(\log_a b+1\right)-4=0$.

Đặt $t=\log_a b;\ t\neq 0$. Ta có phương trình

$$\left(2-t\right)^2\left(t+1\right)-4=0\Leftrightarrow\left(t^2-4t+4\right)\left(t+1\right)-4=0\ \Leftrightarrow t^3-3t^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\ (L)\\ t=3\end{array}\right..$$

Vậy $\log_a b=3\Leftrightarrow\log_b a=\dfrac{1}{3}$.

Câu 39.11: Cho a và b là hai số thực dương phân biệt, khác 1 và thỏa mãn $\dfrac{\log_a a^2b\cdot\log_a ab-2}{\log_a b}=5$. Giá trị của $\log_b a$ bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** 4. **C.** $-\dfrac{1}{4}$. **D.** -4.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\dfrac{\log_a a^2b\cdot\log_a^2 ab-2}{\log_a b}=5\Leftrightarrow\left(2+\log_a b\right)\left(1+\log_a b\right)^2-2=5\log_a b$.

Đặt $t=\log_a b;\ t\neq 0$. Ta có phương trình

$$\left(2+t\right)\left(t+1\right)^2-2=5t\Leftrightarrow\left(t^2+2t+1\right)\left(t+2\right)-2=5t\Leftrightarrow t^3+4t^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\ (L)\\ t=-4\end{array}\right..$$

Vậy $\log_a b = -4 \Leftrightarrow \log_b a = -\frac{1}{4}$.

Câu 39.12: Cho a và b là hai số thực dương phân biệt, khác 1 và thỏa mãn $\log_a \frac{b}{a} = \frac{\log_a \frac{1}{b}}{\log_a b - 4}$. Giá trị của $\log_b a$ bằng bao nhiêu?

A. $-\frac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** -2.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log_a \frac{b}{a} = \frac{\log_a \frac{1}{b}}{\log_a b - 4} \Leftrightarrow \log_a b - 1 = \frac{-\log_a b}{\log_a b - 4}$.

Đặt $t = \log_a b;\ t \neq 0$. Ta có phương trình $t - 1 = \frac{-t}{t-4} \Leftrightarrow t^2 - 4t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Vậy $\log_a b = 2 \Leftrightarrow \log_b a = \frac{1}{2}$.

CÂU TƯƠNG TỰ CÂU 40 ĐỀ THAM KHẢO 2024

Câu 40.1: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = x^3 - 3(2m+1)x^2 + (12m+5)x + 2$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$. Số phần tử của S bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 - 6(2m+1)x + 12m + 5$.

Hàm số đồng biến trong khoảng $(2;+\infty)$ khi $y' \geq 0$, $\forall x \in (2;+\infty)$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 6(2m+1)x + 12m + 5 \geq 0$, $\forall x \in (2;+\infty)$.

$3x^2 - 6(2m+1)x + 12m + 5 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{3x^2 - 6x + 5}{12(x-1)}$

Xét hàm số $g(x) = \frac{3x^2 - 6x + 5}{12(x-1)}$ với $x \in (2;+\infty)$.

$g'(x) = \frac{3x^2 - 6x + 1}{12(x-1)^2} > 0$ với $\forall x \in (2;+\infty)$ $\Rightarrow$ hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Do đó $m \leq g(x), \forall x \in (2;+\infty) \Rightarrow m \leq g(2) \Leftrightarrow m \leq \frac{5}{12}$.

Vậy không có giá trị nguyên dương nào của m thỏa mãn bài toán.

Câu 40.2: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2024;2024]$ để ứng với mỗi m hàm số hàm số $y = \frac{\cos x - 2}{\cos x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

A. 4046 **B.** 2022 **C.** 2026 **D.** 2023

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \cos x$. Do $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ nên $t \in (0;1)$. Nhận thấy hàm số $t = \cos x$ nghịch biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

ta phát biểu lại bài toán như sau: Tìm m để hàm số $y=\dfrac{t-2}{t-m}$ nghịch biến trên $(0;1)$.

Ycbt thỏa mãn khi $y'<0\ \forall t\in(0;1)$

$$\Leftrightarrow y'=\frac{-m+2}{(t-m)^2}<0 \forall t\in(0;1)\Leftrightarrow\begin{cases}-m+2<0\\ m\notin(0;1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m>2\\ \left[\begin{array}{l}m\in(-\infty;0]\\ m\in[1;+\infty)\end{array}\right.\end{cases}\Rightarrow m>2$$

Do m nguyên thuộc đoạn $[-2024;2024]$ nên có 2022 giá trị của m thỏa mãn ycđb

Câu 40.3: Gọi T là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=x^4-2mx^2+1$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$. Tổng giá trị các phần tử của T bằng

A. 9. **B.** 45. **C.** 55. **D.** 36.

Lời giải

Chọn B

+ Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

+ Ta có $y'=4x^3-4mx=4x(x^2-m)$

Theo đề $m>0$ nên $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt $x=-\sqrt{m},x=0,x=\sqrt{m}$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{m}$		0		$\sqrt{m}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$ thì $y'\ge 0,\forall x\in(3;+\infty)\Leftrightarrow\sqrt{m}\le 3\Leftrightarrow m\le 9$

Vì m nguyên dương nên $m=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$ (là cấp số cộng)

Vậy Tổng giá trị các phần tử của T bằng $\dfrac{9}{2}(1+9)=45$.

Câu 40.4: Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y=2^{x^3-x^2+mx+1}$ đồng biến trên $(1;2)$.

A. $m>-8$. **B.** $m\le -8$. **C.** $m\ge -1$. **D.** $m<-1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y'=(3x^2-2x+m).2^{x^3-x^2+mx+1}.\ln 2$

Hàm số đồng biến trên $(1;2)\Leftrightarrow y'\ge 0$, $\forall x\in(1;2)$

$\Leftrightarrow(3x^2-2x+m).2^{x^3-x^2+mx+1}.\ln 2\ge 0$, $\forall x\in(1;2)$

$\Leftrightarrow 3x^2-2x+m\ge 0$, $\forall x\in(1;2)$

$\Leftrightarrow m\ge -3x^2+2x$, $\forall x\in(1;2)$

Xét hàm số $f(x)=-3x^2+2x$, với $x\in(1;2)$.

Ta có: $f'(x)=-6x+2$.

Cho $f'(x)=0\Leftrightarrow -6x+2=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$.

Bảng biến thiên:

x	1		2
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	-8

Từ BBT ta có $m \ge f(x)$, $\forall x \in (1;2)$ khi $m \ge -1$.

Câu 40.5: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 6x^2 + mx + 3$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

A. $m \le 12$. **B.** $m \ge 0$. **C.** $m \le 0$. **D.** $m \ge 12$.

Lời giải

Chọn D

$y' = 3x^2 - 12x + m$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $y' \ge 0$, với mọi $x \in (0;+\infty)$

$\Leftrightarrow m \ge -3x^2 + 12x$, $\forall x > 0$.

Xét $f(x) = -3x^2 + 12x$ với $x > 0$.

Ta có $f'(x) = -6x + 12$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	12	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta được giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m \ge 12$.

Câu 40.6: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-100;100]$ sao cho hàm số $f(x) = (m-1)x^3 + (m-1)x^2 + (2m+1)x + 3m - 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 99. **B.** 100. **C.** 200. **D.** 154.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x) = 3(m-1)x^2 + 2(m-1)x + 2m + 1$

Để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $f'(x) \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (*)

(Dấu "$=$" xảy ra tại hữu hạn $x \in \mathbb{R}$)

TH1: $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$

Ta có : $f'(x) = 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow m = 1$ (nhận).

TH2 : $m \ne 1$.

Để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $f'(x) \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(m-1) > 0 \\ (m-1)^2 - 3(m-1)(2m+1) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ (m-1)(-5m-4) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \le -\dfrac{4}{5} \vee m \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1.$$

Kết hợp 2 TH $\Rightarrow m \ge 1 \xrightarrow{m \in [-100;100]} m \in \{1;2;..;100\}$: có 100 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 40.7: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x+6}{x+5m}$ nghịch biến trên khoảng $(10;+\infty)$?

A. 3 **B.** Vô số **C.** 4 **D.** 5

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D = \mathbb{R} \backslash \{-5m\}$.

Ta có $y' = \dfrac{5m - 6}{(x+5m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên $(10;+\infty)$ khi và chỉ khi $y'<0,\forall x\in(10;+\infty)\Leftrightarrow\begin{cases}5m-6<0\\-5m\notin(10;+\infty)\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}5m-6<0\\-5m\le 10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<\dfrac{6}{5}\\m\ge -2\end{cases}$. Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-2;-1;0;1\}$.

Câu 40.8: Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mx-9}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ là

A. $(-3;0]$. **B.** $(-3;0)$. **C.** $[-3;0]$. **D.** $[-3;0)$.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$.

Ta có $y'=\dfrac{-m^2+9}{(x-m)^2}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow\begin{cases}-m^2+9>0\\m\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3<m<3\\m\le 0\end{cases}\Leftrightarrow -3<m\le 0$.

Câu 40.9: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[1;25]$ sao cho ứng với mỗi m, hàm số $y=\dfrac{-x^2+2x-m+5}{2x-m}$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$.

A. 24. **B.** 2. **C.** 20. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{m}{2}\right\}$.

Ta có $y'=\dfrac{-2x^2+2mx-10}{(2x-m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;3)$ thì $y'\ge 0,\forall x\in(1;3)$.

tức là $\begin{cases}-2x^2+2mx-10\ge 0,\forall x\in(1;3)\\x\ne\dfrac{m}{2},\forall x\in(1;3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge\dfrac{x^2+5}{x},\forall x\in(1;3)\ \left(Do\ x>0,\forall x\in(1;3)\right)\\\left[\begin{array}{l}\dfrac{m}{2}\le 1\\\dfrac{m}{2}\ge 3\end{array}\right.\end{cases}$.

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{x^2+5}{x},\forall x\in[1;3]$.

Ta có $g'(x)=\dfrac{x^2-5}{x^2}$. $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{5}\\x=-\sqrt{5}\end{array}\right.(x\ne 0)$.

Bảng biến thiên

x	1		$\sqrt{5}$		3
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	6	$\searrow$	$2\sqrt{5}$	$\nearrow$	$\frac{14}{3}$

Từ bảng biến thiên, ta có $\begin{cases} m \ge \dfrac{x^2+5}{x}, \forall x \in (1;3) \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{m}{2} \le 1 \\ \dfrac{m}{2} \ge 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 6 \\ \left[\begin{array}{l} m \le 2 \\ m \ge 6 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m \ge 6$.

Mà m là số nguyên thuộc đoạn $[1;25]$ nên $m \in \{6;7;8;9;10;....;25\}$.

Vậy có 20 giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[1;25]$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 40.10: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2;25]$ sao cho ứng với mỗi m, hàm số $y = \dfrac{x^2+5x-m-1}{5x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(1;4)$.

A. 8. **B.** 15. **C.** 14. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{m}{5}\right\}$.

Ta có $y' = \dfrac{5x^2-2mx+5}{(5x-m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;4)$ thì $y' \le 0, \forall x \in (1;4)$.

tức là $\begin{cases} 5x^2-2mx+5 \le 0, \forall x \in (1;4) \\ x \ne \dfrac{m}{5}, \forall x \in (1;4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge \dfrac{5x^2+5}{2x}, \forall x \in (1;4) \ (Do\ 2x > 0, \forall x \in (1;4)) \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{m}{5} \le 1 \\ \dfrac{m}{5} \ge 4 \end{array}\right. \end{cases}$.

Xét hàm số $g(x) = \dfrac{5x^2+5}{2x}, \forall x \in [1;4]$.

Ta có $g'(x) = \dfrac{5x^2-5}{2x^2} > 0, \forall x \in [1;4]$. Hàm số đồng biến trên $(1;4)$.

Suy ra $\underset{x\in[1;4]}{Max}\, g(x) = g(4) = \dfrac{85}{8}$.

Khi đó, ta có $\begin{cases} m \ge \dfrac{5x^2+5}{2x}, \forall x \in (1;4) \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{m}{5} \le 1 \\ \dfrac{m}{5} \ge 4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge \dfrac{85}{8} \\ \left[\begin{array}{l} m \le 5 \\ m \ge 20 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m \ge 20$.

Mà m là số nguyên thuộc đoạn $[-2;25]$ nên $m \in \{20;21;22;23;24;25\}$.

Vậy có 6 giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2;25]$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 40.11: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-25;3]$ sao cho ứng với mỗi m, hàm số $y = \dfrac{-x^2+4x-m-5}{4x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-3;-1)$.

A. 17. **B.** 15. **C.** 14. **D.** 16.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{m}{4}\right\}$.

Ta có $y' = \dfrac{-4x^2+2mx+20}{(4x-m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3;-1)$ thì $y' \ge 0, \forall x \in (-3;-1)$.

tức là

$$\begin{cases} -4x^2+2mx+20 \ge 0, \forall x \in (-3;-1) \\ x \ne \dfrac{m}{4}, \forall x \in (-3;-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le \dfrac{2x^2-10}{x}, \forall x \in (-3;-1) \ (Do\ x<0, \forall x \in (-3; \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{m}{4} \le -3 \\ \dfrac{m}{4} \ge -1 \end{array}\right. \end{cases}$$

.

Xét hàm số $g(x) = \dfrac{2x^2-10}{x}, \forall x \in [-3;-1]$.

Ta có $g'(x) = \dfrac{2x^2+10}{x^2} > 0, \forall x \in [-3;-1]$. Suy ra hàm số đồng biến trên $(-3;-1)$.

Suy ra $\underset{[-3;-1]}{Min}\, g(x) = g(-3) = -\dfrac{8}{3}$.

Khi đó, ta có

$$\begin{cases} m \le \dfrac{2x^2-10}{x}, \forall x \in (-3;-1) \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{m}{4} \le -3 \\ \dfrac{m}{4} \ge -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le -\dfrac{8}{3} \\ \left[\begin{array}{l} m \le -12 \\ m \ge -4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty;-12] \cup \left[-4;-\dfrac{8}{3}\right].$$

Mà m là số nguyên thuộc đoạn $\left[-25;3\right]$ nên $m\in\left\{-25;-24;-23;...;-12\right\}\cup\left\{-4;-3\right\}$
.

Vậy 16 giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $\left[-25;3\right]$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 40.12: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $\left[-2024;2024\right]$ sao cho ứng với mỗi m, hàm số $y=\dfrac{mx-6m+5}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(2;7\right)$.

A. 1027. **B.** 4045. **C.** 4043. **D.** 2025.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{m\right\}$.

Ta có $y'=\dfrac{-m^2+6m-5}{\left(x-m\right)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(2;7\right)$ thì $y'<0,\forall x\in\left(2;7\right)$.

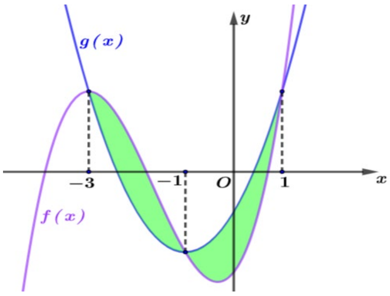
tức là $\begin{cases}-m^2+6m-5<0\\ x\neq m,\forall x\in\left(2;7\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m<1\\ m>5\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}m\le 2\\ m\ge 7\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m\in\left(-\infty;1\right)\cup\left[7;+\infty\right)$.

Mà m là số nguyên thuộc đoạn $\left[-2024;2024\right]$ nên $m\in\left\{-2024;-2023;...;0\right\}\cup\left\{7;8;9;...;2024\right\}$.

Vậy có 4043 giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $\left[-2024;2024\right]$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

CÂU TƯƠNG TỰ CÂU 41 ĐỀ THAM KHẢO 2024

Câu 41.1. Cho hai hàm số $f\left(x\right)=mx^3+nx^2+px-\dfrac{5}{2}\left(m,n,p\in\mathbb{R}\right)$ và $g\left(x\right)=x^2+2x-1$ có đồ thị cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-3;\,-1;\,1$ (tham khảo hình vẽ bên dưới).



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f\left(x\right)$ và $g\left(x\right)$ bằng

A. $\dfrac{18}{5}$. **B.** 4. **C.** 5. **D.** $\dfrac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$f\left(x\right)=g\left(x\right)\Leftrightarrow f\left(x\right)-g\left(x\right)=0\Leftrightarrow mx^3+\left(n-1\right)x^2+\left(p-2\right)x-\dfrac{3}{2}=0$.

Vì hai đồ thị cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-3;\,-1;\,1$ nên ta có:

$mx^3+\left(n-1\right)x^2+\left(p-2\right)x-\dfrac{3}{2}=m\left(x+3\right)\left(x+1\right)\left(x-1\right)$

$\Leftrightarrow mx^3+(n-1)x^2+(p-2)x-\frac{3}{2}=mx^3+3mx^2-mx-3m$ (*).

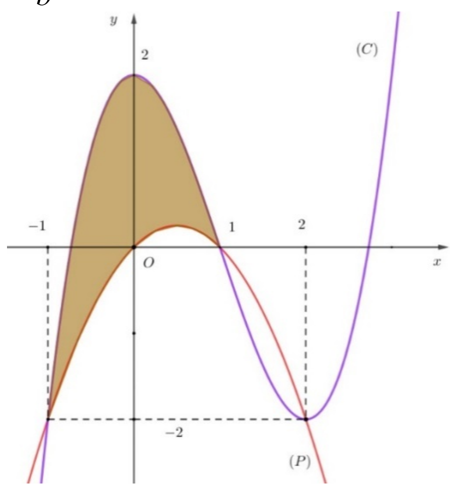
Đồng nhất thức hai vế phương trình (*) ta được $\begin{cases} n-1=3m \\ p-2=-m \\ -\frac{3}{2}=-3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\frac{1}{2} \\ n=\frac{5}{2} \\ p=\frac{3}{2} \end{cases}$.

Suy ra $f(x)-g(x)=\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$.

Khi đó Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và $g(x)$ là

$S=\int_{-3}^{-1}\left(\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)\mathrm{d}x-\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)\mathrm{d}x=2+2=4.$

Câu 41.2. Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm đa thức bậc ba và parabol (P) có trục đối xứng vuông góc với trục hoành. Phần tô đậm như hình vẽ có diện tích bằng $\frac{a}{b}$, với a,b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $T=a-b$.



A. 5. **B.** 7. **C.** 11. **D.** 25.

Lời giải

Chọn A

Gọi dạng của hàm số bậc ba có đồ thị (C) là $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\,(a\neq 0)$. Dựa vào hình vẽ, đồ thị (C) đi qua các điểm $A(0;2)$, $B(-1;-2), C(1;0), D(2;-2)$. Suy ra hệ phương trình:

$\begin{cases} d=2 \\ -a+b-c+d=-2 \\ a+b+c+d=0 \\ 8a+4b+2c+d=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=2 \\ -a+b-c=-4 \\ a+b+c=-2 \\ 8a+4b+2c=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=2 \\ a=1 \\ b=-3 \\ c=0 \end{cases}$. Hay $f(x)=x^3-3x^2+2$.

Gọi dạng của parabol (P) có trục đối xứng vuông góc với trục hoành là $g(x)=mx^2+nx+p\,(m\neq 0)$. Dựa vào hình vẽ, (P) đi qua ba điểm $O(0;0)$, $B(-1;-2), C(1;0)$. Suy ra hệ phương trình: $\begin{cases} p=0 \\ m-n+p=-2 \\ m+n+p=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=0 \\ m-n=-2 \\ m+n=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=0 \\ m=-1 \\ m=1 \end{cases}$. Hay $g(x)=-x^2+x$.

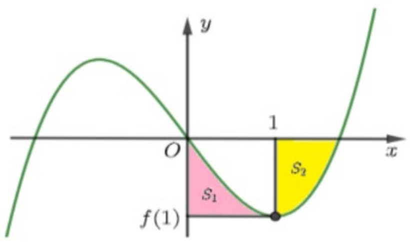
Diện tích của hình phẳng (H) là: $S=\int_{-1}^{1}\left|f(x)-g(x)\right|dx=\int_{-1}^{1}\left|x^3-3x^2+2-\left(-x^2+x\right)\right|\mathrm{d}x$

$=\int_{-1}^{1}\left|x^3-2x^2-x+2\right|dx=\int_{-1}^{1}\left(x^3-2x^2-x+2\right)dx=\frac{8}{3}$.

Suy ra $a=8,\ b=3$.

Vậy $T=8-3=5$.

Câu 41.3. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ, biết $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x=1$ và thỏa mãn $\left[f(x)+1\right]$ và $\left[f(x)-1\right]$ lần lượt chia hết cho $(x-1)^2$ và $(x+1)^2$. Gọi S_1,S_2 lần lượt là diện tích như trong hình bên. Tính $2S_2+8S_1$



A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** 4. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

+ Đồ thị hàm số $y=f(x)$ là hàm số bậc ba và đi qua gốc tọa độ O, nên có dạng

$y=f(x)=ax^3+bx^2+cx\,(a\neq 0)\Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c$

+ Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x=1\Rightarrow f'(1)=3a+2b+c=0 \quad (1)$

+ Ta có $\left[f(x)+1\right]$ và $\left[f(x)-1\right]$ lần lượt chia hết cho $(x-1)^2$ và $(x+1)^2$

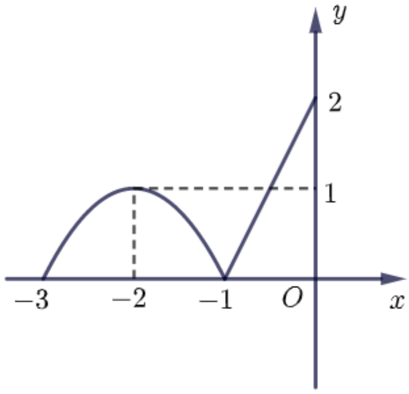
$$\Rightarrow\begin{cases}f(x)+1=(x-1)^2h(x)\\ f(x)-1=(x+1)^2g(x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(1)+1=0\\ f(-1)-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(1)=-1\\ f(-1)=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b+c=-1\\ -a+b-c=1\end{cases}\ (2)$$

Từ $(1),(2)$ ta có hệ phương trình: $\begin{cases}3a+2b+c=0\\ a+b+c=-1\\ -a+b-c=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\ b=0\\ c=-\frac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x$

$$f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-\sqrt{3}\\ x=\sqrt{3}\end{array}\right.$$

+ Từ đồ thị ta có: $\begin{cases}S_1=\int_0^1\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x+1\right)dx=\left(\frac{x^4}{8}-\frac{3x^2}{4}+x\right)\Big|_0^1=\frac{3}{8}\\ S_2=\int_1^{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x\right)dx=\left(-\frac{x^4}{8}+\frac{3x^2}{4}\right)\Big|_1^{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow 2S_2+8S_1=4$.

Câu 41.4. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị $y=f'(x)$ trên $[-3;0]$ như hình vẽ sau (phần đường cong của đồ thị là một phần của parabol $y=ax^2+bx+c$).



Cho $\int\limits_{e^{-3}}^{1} \frac{f(\ln x)}{x}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$, giá trị $f(0)$ bằng

A. 1. **B.** $-\frac{7}{9}$. **C.** 2. **D.** $\frac{14}{9}$.

Lời giải

Chọn D

- Xét $y = ax^2 + bx + c$, đồ thị đi qua 3 điểm có tọa độ $(-3;0),(-2;1),(-1;0)$ ta có:

$$\begin{cases} 9a - 3b + c = 0 \\ 4a - 2b + c = 1 \\ a - b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -4 \\ c = -3 \end{cases} \Rightarrow y = -x^2 - 4x - 3 \Rightarrow f'(x) = -x^2 - 4x - 3 \text{ trên } -3 \le x \le 0$$

- Xét $y = ax + b$, đồ thị hàm số đi qua 2 điểm có tọa độ $(-1;0),(0;2)$ ta có:

$$\begin{cases} -a + b = 0 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow y = 2x + 2 \Rightarrow f'(x) = 2x + 2 \text{ trên } -1 < x \le 0$$

Khi đó: $f'(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x - 3, -3 \le x \le -1 \\ 2x + 2, -1 \le x \le 0 \end{cases}$, suy ra $f(x) = \begin{cases} -\frac{x^3}{3} - 2x^2 - 3x + C_1, -3 \le x \le -1 \\ x^2 + 2x + C_2, -1 \le x \le 0 \end{cases}$

Xét: $\int\limits_{e^{-3}}^{1} \frac{f(\ln x)}{x}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$

Đặt $t = \ln x$, $x = e^{-3} \Rightarrow t = -3, x = 1 \Rightarrow t = 0$

Khi đó

$$\int\limits_{-3}^{0} f(t)dt = \int\limits_{-3}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-3}^{-1} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-3}^{-1}\left(-\frac{x^3}{3} - 2x^2 - 3x + C_1\right)\mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^{0}\left(x^2 + 2x + C_2\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{4}{3} + C_1x\Big|_{-3}^{-1} + \left(-\frac{2}{3}\right) + C_2x\Big|_{-1}^{0} = \frac{2}{3} + (-C_1 + 3C_1) + (0 + C_2) = \frac{2}{3} + 2C_1 + C_2.$$

Theo đề bài: $\frac{2}{3} + 2C_1 + C_2 = \frac{2}{3} \Rightarrow 2C_1 + C_2 = 0 \, (1)$.

Mặt khác hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = -1$

nên $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) \Leftrightarrow \frac{4}{3} + C_1 = -1 + C_2 \Rightarrow C_1 - C_2 = -\frac{7}{3} \, (2)$

Từ (1), (2) ta có: $\begin{cases} C_1 = -\frac{7}{9} \\ C_2 = \frac{14}{9} \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -\frac{x^3}{3} - 2x^2 - 3x - \frac{7}{9}, -3 \le x \le -1 \\ x^2 + 2x + \frac{14}{9}, -1 \le x \le 0 \end{cases}$

Suy ra: $f(0)=0^2+2.0+\frac{14}{9}=\frac{14}{9}$.

Câu 41.5: Xét $f(x)=ax^4+bx^2+c(a,b,c\in\mathbb{R},a>0)$ sao cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị là A,B và $C(2;-1)$. Gọi $y=g(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị đi qua ba điểm A,B và C. Khi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f(x),y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=0,x=2$ có diện tích bằng $\frac{64}{15}$, tích phân $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{226}{15}$. **B.** $\frac{25}{13}$. **C.** $-\frac{17}{15}$. **D.** $-\frac{226}{15}$.

Lời giải

Chọn A

Dễ thấy $f'(x)$ có ba nghiệm $x=0,x=2,x=-2$ suy ra $f'(x)=4ax(x^2-4)$.

Từ đó ta có $f(x)=ax^4-8ax^2+c$.

Đồ thị hàm số $y=f(x)$ đi qua điểm $C(2;-1)$ nên ta có: $-1=16a-32a+c\Leftrightarrow c=16a-1$.

Mặt khác, từ giả thiết đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại hai điểm có hoành độ $x=\pm2$ và tiếp xúc tại điểm có hoành độ $x=0$ nên $f(x)-g(x)=ax^2(x^2-4)$.

Từ hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f(x),y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=0,x=2$ có diện tích bằng $\frac{64}{15}$ ta có phương trình $\int_0^2\left|ax^2(x^2-4)\right|dx=\frac{64}{15}$.

$\Leftrightarrow a\int_0^2\left|x^4-4x^2\right|dx=\frac{64}{15}\Leftrightarrow a=1\Rightarrow c=15\Rightarrow f(x)=x^4-8x^2+15$.

Ta có: $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2\left(x^4-8x^2+15\right)dx=\frac{226}{15}$.

Câu 41.6: Xét $f(x)=ax^4+bx^2+c(a,b,c\in\mathbb{R},a<0)$ sao cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị là A,B và $C(2;1)$. Gọi $y=g(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị đi qua ba điểm A,B và C. Khi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f(x),y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=0,x=2$ có diện tích bằng $\frac{64}{15}$, tích phân $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{226}{15}$. **B.** $\frac{25}{13}$. **C.** $-\frac{17}{15}$. **D.** $-\frac{226}{15}$.

Lời giải

Chọn D

Dễ thấy $f'(x)$ có ba nghiệm $x=0,x=2,x=-2$ suy ra $f'(x)=4ax(x^2-4)$.

Từ đó ta có $f(x)=ax^4-8ax^2+c$.

Đồ thị hàm số $y=f(x)$ đi qua điểm $C(2;1)$ nên ta có: $1=16a-32a+c\Leftrightarrow c=16a+1$.

Mặt khác, từ giả thiết đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại hai điểm có hoành độ $x=\pm2$ và tiếp xúc tại điểm có hoành độ $x=0$ nên $f(x)-g(x)=ax^2(x^2-4)$.

Từ hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f(x),y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=0,x=2$ có diện tích bằng $\frac{64}{15}$ ta có phương trình $\int_0^2\left|ax^2(x^2-4)\right|dx=\frac{64}{15}$.

$$\Leftrightarrow -a\int_0^2\left|x^4-4x^2\right|dx=\frac{64}{15}\Leftrightarrow a=-1\Rightarrow c=-15\Rightarrow f(x)=-x^4+8x^2-15$$

Ta có: $\int\limits_0^2 f(x)dx=\int\limits_0^2(-x^4+8x^2-15)dx=-\dfrac{226}{15}$.

Câu 41.7: Cho hai hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+3x$ và $g(x)=mx^3+nx^2-x$, với $a,b,c,m,n\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f(x)-g(x)$ có ba điểm cực trị là -1, 2 và 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ bằng

A. $\dfrac{32}{3}$. **B.** $\dfrac{71}{9}$. **C.** $\dfrac{71}{6}$. **D.** $\dfrac{64}{9}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có : $f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+3$ và $g'(x)=3mx^2+2nx-1$.

Suy ra: $h'(x)=f'(x)-g'(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt là -1, 2 và 3.

Nên $f'(x)-g'(x)=4a(x+1)(x-2)(x-3)$ $(*)$.

Thay $x=0$ vào hai vế của $(*)$ ta được: $f'(0)-g'(0)=4\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{6}$.

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn: $S=\int\limits_{-1}^{3}\left|\dfrac{2}{3}(x+1)(x-2)(x-3)\right|\mathrm{d}x=\dfrac{71}{9}$.

Câu 41.8: Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với a, b, c là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -5 và 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ bằng

A. $2\ln 3$. **B.** $\ln 2$. **C.** $\ln 15$. **D.** $3\ln 2$.

Lời giải

Chọn A

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c\Rightarrow f'(x)=3x^2+2ax+b$, $f''(x)=6x+2a$, $f'''(x)=6$.

$g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)\Rightarrow g'(x)=f'(x)+f''(x)+f'''(x)=f'(x)+f''(x)+6$.

Do $g(x)$ có hai cực trị là -5 và 3 nên $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\\x=x_2\end{array}\right.$ với $g(x_1)=-5$, $g(x_2)=3$.

Ta có: $\dfrac{f(x)}{g(x)+6}=1\Leftrightarrow\dfrac{-f'(x)-f''(x)-6}{g(x)+6}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\\x=x_2\end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ là

$$S=\left|\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)+6}-1\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\int\limits_{x_1}^{x_2}\dfrac{-f'(x)-f''(x)-6}{g(x)+6}\mathrm{d}x\right|$$

$$=\left|\int\limits_{x_1}^{x_2}\dfrac{1}{g(x)+6}\mathrm{d}\left(g(x)+6\right)\right|=\left|\left(\ln\left|g(x)+6\right|\right)\Big|_{x_1}^{x_2}\right|$$

$$=\left|\ln\left|g(x_2)+6\right|-\ln\left|g(x_1)+6\right|\right|=\left|\ln 1-\ln 9\right|=2\ln 3.$$

Câu 41.9: Xét $f(x)=ax^4+bx^2+c(a,b,c\in\mathbb{R},a>0)$ sao cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị là A,B và $C\left(1;-\dfrac{3}{5}\right)$. Gọi $y=g(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị đi qua ba điểm A,B và C. Khi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f\left(x\right), y=g\left(x\right)$ và hai đường thẳng $x=0, x=1$ có diện tích bằng $\frac{2}{5}$, tích phân $\int_{0}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{27}{20}$. **B.** $\frac{44}{15}$. **C.** 1. **D.** $\frac{94}{30}$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hàm số bậc hai đi qua 3 điểm A, B và C. là: $y=g(x)=mx^2+nx+p$.

Hàm số bậc hai đi qua điểm $A(0:c)$ suy ra $p=c$

Hàm số bậc hai có trục tung là trục đối xứng $n=0$ và đi qua $C\left(\sqrt{\frac{-b}{2a}};-\frac{b^2}{4a}+c\right)$ suy ra $m=\frac{1}{2}b$

.

Suy ra $y=g(x)=\frac{1}{2}bx^2+c$

Ta có: $\begin{cases} f(1)=-\frac{3}{5} \\ f'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=-\frac{3}{5} \\ 4a+2b=0 \end{cases} \quad (II)$

Theo đề ta có: $\int_{0}^{1}\left|g(x)-f(x)\right|.dx=\frac{2}{5}$

$\Leftrightarrow \int_{0}^{1}\left[-ax^4-\frac{1}{2}bx^2\right].dx=\frac{2}{5} \Leftrightarrow -\frac{a}{5}-\frac{b}{6}=\frac{2}{5} \quad (III)$

Từ (II) và (III) ta có: $a=3:b=-6:c=\frac{12}{5}$

Vậy $\int_{0}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x=1$.

Câu 41.10: Xét $f\left(x\right)=ax^4+bx^2+c(a,b,c\in\mathbb{R}, a<0)$ sao cho đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có ba điểm cực trị là A, B và $C\left(-2;\frac{27}{7}\right)$. Gọi $y=g\left(x\right)$ là hàm số bậc hai có đồ thị đi qua ba điểm A, B và C. Khi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f\left(x\right), y=g\left(x\right)$ và hai đường thẳng $x=-2, x=0$ có diện tích bằng $\frac{16}{15}$, tích phân $\int_{0}^{2} f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{27}{20}$. **B.** $\frac{44}{15}$. **C.** $\frac{362}{105}$. **D.** $\frac{94}{30}$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hàm số bậc hai đi qua 3 điểm A, B và C. là: $y=g(x)=mx^2+nx+p$.

Hàm số bậc hai đi qua điểm $A(0:c)$ suy ra $p=c$

Hàm số bậc hai có trục tung là trục đối xứng $n=0$ và đi qua $C\left(\sqrt{\frac{-b}{2a}};-\frac{b^2}{4a}+c\right)$ suy ra $m=\frac{1}{2}b$

.

Suy ra $y=g(x)=\frac{1}{2}bx^2+c$

Ta có: $\begin{cases} f(2) = -\dfrac{3}{5} \\ f'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16a + 4b + c = \dfrac{27}{7} \\ 8a + b = 0 \end{cases} \quad (II)$

Theo đề ta có: $\int\limits_{-2}^{0} |g(x) - f(x)|.dx = \dfrac{16}{15}$

$\Leftrightarrow \int\limits_{-2}^{0} \left[ax^4 + \dfrac{1}{2}bx^2 \right].dx = \dfrac{16}{15} \Leftrightarrow \dfrac{4a}{5} + 2\dfrac{b}{6} = \dfrac{2}{15} \quad (III)$

Từ (II) và (III) ta có: $a = -\dfrac{1}{4} : b = 2 : c = -\dfrac{1}{7}$

Vậy $\int\limits_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{362}{105}$

Câu 41.11: Xét $f(x) = ax^4 + bx^2 + c (a, b, c \in \mathbb{R}, a < 0)$ sao cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có ba điểm cực trị là A, B và $C\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{1}{20}\right)$. Gọi $y = g(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị đi qua ba điểm A, B và C. Khi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = 0, x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ có diện tích bằng $\dfrac{\sqrt{2}}{60}$, tích phân $\int\limits_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{27}{20}$. **B.** $\dfrac{44}{15}$. **C.** $-\dfrac{\sqrt{2}}{24}$. **D.** $\dfrac{94}{30}$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hàm số bậc hai đi qua 3 điểm A, B và C. là: $y = g(x) = mx^2 + nx + p$.
Hàm số bậc hai đi qua điểm $A(0 : c)$ suy ra $p = c$

Hàm số bậc hai có trục tung là trục đối xứng $n = 0$ và đi qua $C\left(\sqrt{\dfrac{-b}{2a}}; -\dfrac{b^2}{4a} + c\right)$ suy ra $m = \dfrac{1}{2}b$

.

Suy ra $y = g(x) = \dfrac{1}{2}bx^2 + c$

Ta có: $\begin{cases} f(\dfrac{\sqrt{2}}{2}) = \dfrac{1}{20} \\ f'(\dfrac{\sqrt{2}}{2}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{4}a + \dfrac{1}{2}b + c = \dfrac{1}{20} \\ a + b = 0 \end{cases} \quad (II)$

Theo đề ta có: $\int\limits_{0}^{1} |g(x) - f(x)|.dx = \dfrac{2}{5}$

$\Leftrightarrow \int\limits_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left[ax^4 \dfrac{1}{2}bx^2 \right].dx = \dfrac{\sqrt{2}}{60} \Leftrightarrow \dfrac{a}{40} + \dfrac{b}{24} = \dfrac{1}{60} \quad (III)$

Từ (II) và (III) ta có: $a = -1 : b = 1 : c = \dfrac{-1}{5}$

Vậy $\int\limits_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x)\mathrm{d}x = -\dfrac{\sqrt{2}}{24}$

Câu 41.12: Xét $f(x)=ax^4+bx^2+c(a,b,c\in\mathbb{R},a>0)$ sao cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị là A,B và $C\left(\sqrt{2};-\dfrac{2}{3}\right)$. Gọi $y=g(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị đi qua ba điểm A,B và C. Khi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f(x),y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=0,x=\sqrt{2}$ có diện tích bằng $\dfrac{2\sqrt{2}}{15}$, tích phân $\int\limits_0^{\sqrt{2}} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{27}{20}$. **B.** $\dfrac{44}{15}$. **C.** $-\dfrac{2\sqrt{2}}{15}$. **D.** $\dfrac{94}{30}$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hàm số bậc hai đi qua 3 điểm A,B và C. là: $y=g(x)=mx^2+nx+p$.

Hàm số bậc hai đi qua điểm $A(0:c)$ suy ra $p=c$

Hàm số bậc hai có trục tung là trục đối xứng $n=0$ và đi qua $C\left(\sqrt{\dfrac{-b}{2a}};-\dfrac{b^2}{4a}+c\right)$ suy ra $m=\dfrac{1}{2}b$

.

Suy ra $y=g(x)=\dfrac{1}{2}bx^2+c$

Ta có: $\begin{cases} f(\sqrt{2})=-\dfrac{2}{3} \\ f'(\sqrt{2})=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+2b+c=-\dfrac{2}{3} \\ 4a+b=0 \end{cases} \quad (II)$

Theo đề ta có: $\int\limits_0^{\sqrt{2}} |g(x)-f(x)|.dx=\dfrac{2}{5}$

$\Leftrightarrow \int\limits_0^{\sqrt{2}}\left[-ax^4-\dfrac{1}{2}bx^2\right].dx=\dfrac{2\sqrt{2}}{15} \Leftrightarrow -\dfrac{4a}{5}-\dfrac{b}{3}=\dfrac{2}{15} \quad (III)$

Từ (II) và (III) ta có: $a=\dfrac{1}{4}:b=-1:c=\dfrac{1}{3}$

Vậy $\int\limits_0^{\sqrt{2}} f(x)\mathrm{d}x=-\dfrac{2\sqrt{2}}{15}$

Câu 41.13: Cho hàm số $f(x)=3x^4+ax^3+bx^2+cx+d\ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có ba điểm cực trị là -2, -1 và 1. Gọi $y=g(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị đi qua ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f(x)$ và $y=g(x)$ bằng

A. $\dfrac{500}{81}$. **B.** $\dfrac{36}{5}$. **C.** $\dfrac{2932}{405}$. **D.** $\dfrac{2948}{405}$.

Lời giải

Chọn D

Theo đề ta có $f'(x)=12x^3+3ax^2+2bx+c=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$

Suy ra $f'(x)=12x^3+3ax^2+2bx+c=12(x+2)(x+1)(x-1)=12x^3+24x^2-12x-24$.

Đồng nhất hệ số ta được $\begin{cases} 3a=24 \\ 2b=-12 \\ c=-24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=8 \\ b=-6 \\ c=-24 \end{cases}$.

Suy ra $f(x)=3x^4+8x^3-6x^2+24x+d$.

Theo đề, ta có đồ thị hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị là $(-2;8+d)$, $(-1;13+d)$, $(1;-19+d)$.

Gọi (P) là Parabol đi qua ba điểm $(-2;8)$, $(-1;13)$, $(1;-19)$. Khi đó $(P): y=-7x^2-16x+4$.

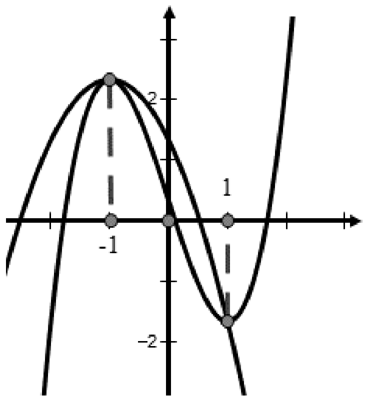
Suy ra $g(x)=-7x^2-16x+4+d$.

Xét phương trình $f(x)-g(x)=0 \Leftrightarrow 3x^4+8x^3+x^2-8x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-1 \\ x=-\dfrac{2}{3} \\ x=1 \end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là

$$S=\int_{-2}^{1}\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x=\int_{-2}^{1}\left|3x^4+8x^3+x^2-8x-4\right|\mathrm{d}x=\frac{2948}{405}.$$

Câu 41.14: Cho hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ có đồ thị (C) và $y=mx^2+nx+p$ $(m,n,p\in\mathbb{R})$ có đồ thị (P) như hình vẽ. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và (P) có giá trị nằm trong khoảng nào sau đây?



A. $(0;1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(3;4)$.

Lời giải

Chọn B

Căn cứ đồ thị ta thấy

+ Hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ đạt cực trị tại $x=\pm1$ nên ta có

$$\begin{cases} y'(1)=0 \\ y'(-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b+3=0 \\ -2a+b+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-3 \end{cases}.$$

+ Hàm số $y=mx^2+nx+p$ đạt cực đại tại $x=-1$ và (P) cắt (C) tại hai điểm có hoành độ $x=\pm1$ nên ta có

$$\begin{cases} -2m+n=0 \\ 1+a+b+c=m+n+p \\ -1+a-b+c=m-n+p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=-2 \\ m=-1 \\ p-c=1 \end{cases}$$

Suy ra $S=\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(mx^2+nx+p-x^3-ax^2-bx-c\right)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\left(-x^3-x^2+x+1\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\in(1;2)$.

Câu 41.15: Xét $f\left(x\right)=ax^4+bx^2+c(a,b,c\in\mathbb{R},a>0)$ sao cho đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có ba điểm cực trị là A,B và $C\left(1;-\frac{3}{5}\right)$. Gọi $y=g\left(x\right)$ là hàm số bậc hai có đồ thị đi qua ba điểm A,B và C. Khi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f\left(x\right),y=g\left(x\right)$ và hai đường thẳng $x=0,x=1$ có diện tích bằng $\frac{2}{5}$, tích phân $\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** -1. **C.** $-\frac{17}{15}$. **D.** $\frac{17}{15}$.

Lời giải

Chọn A

Dễ thấy $f'(x)$ có ba nghiệm $x=0,x=1,x=-1$ suy ra $f'(x)=4ax(x^2-1)$.

Từ đó ta có $f(x)=ax^4-2ax^2+c$.

Mặt khác, từ giả thiết đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại hai điểm có hoành độ $x=\pm1$ và tiếp xúc tại điểm có hoành độ $x=0$ nên $f(x)-g(x)=ax^2(x^2-1)$.

Từ hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f\left(x\right),y=g\left(x\right)$ và hai đường thẳng $x=0,x=1$ có diện tích bằng $\frac{2}{5}$ ta có phương trình $\int_0^1\left|ax^2(x^2-1)\right|dx=\frac{2}{5}$

$\Leftrightarrow a\int_0^1\left(x^2-x^4\right)dx=\frac{2}{5}\Leftrightarrow a=3\Rightarrow f\left(x\right)=3x^4-6x^2+\frac{12}{5}$

$\Rightarrow\int_0^1 f\left(x\right)dx=\int_0^1\left(3x^4-6x^2+\frac{12}{5}\right)dx=1$.

Câu 41.16: Xét $f\left(x\right)=ax^4+bx^2+c(a,b,c\in\mathbb{R},a>0)$ sao cho đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có ba điểm cực trị là A,B và $C\left(1;-1\right)$. Gọi $y=g\left(x\right)$ là hàm số bậc hai có đồ thị đi qua ba điểm A,B và C. Khi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f\left(x\right),y=g\left(x\right)$ và hai đường thẳng $x=0,x=1$ có diện tích bằng $\frac{4}{5}$, tích phân $\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** $-\frac{8}{15}$. **D.** $\frac{8}{15}$.

Lời giải

Chọn B

Dễ thấy $f'(x)$ có ba nghiệm $x=0,x=1,x=-1$ suy ra $f'(x)=4ax(x^2-1)$.

Từ đó ta có $f(x)=ax^4-2ax^2+c$.

Mặt khác, từ giả thiết đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại hai điểm có hoành độ $x=\pm1$ và tiếp xúc tại điểm có hoành độ $x=0$ nên $f(x)-g(x)=ax^2(x^2-1)$.

Từ hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f\left(x\right),y=g\left(x\right)$ và hai đường thẳng $x=0,x=1$ có diện tích bằng $\frac{4}{5}$ ta có phương trình $\int_0^1\left|ax^2(x^2-1)\right|dx=\frac{4}{5}$

$\Leftrightarrow a\int_0^1\left(x^2-x^4\right)dx=\frac{4}{5}\Leftrightarrow a=6\Rightarrow f\left(x\right)=6x^4-12x^2+5\Rightarrow\int_0^1 f\left(x\right)dx=\int_0^1\left(6x^4-12x^2+5\right)dx=3$

Câu 41.17: Xét $f\left(x\right)=ax^4+bx^2+c(a,b,c\in\mathbb{R},a>0)$ sao cho đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có ba điểm cực trị là A,B và $C\left(1;6\right)$. Gọi $y=g\left(x\right)$ là hàm số bậc hai có đồ thị đi qua ba điểm A,B và C. Khi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f(x), y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=0, x=1$ có diện tích bằng $\frac{4}{15}$, tích phân $\int_0^1 \frac{1}{2}f(x)\mathrm{dx}$ bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** $-\frac{53}{15}$. **D.** $\frac{53}{15}$.

Lời giải

Chọn D

Dễ thấy $f'(x)$ có ba nghiệm $x=0, x=1, x=-1$ suy ra $f'(x)=4ax(x^2-1)$.

Từ đó ta có $f(x)=ax^4-2ax^2+c$.

Mặt khác, từ giả thiết đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại hai điểm có hoành độ $x=\pm 1$ và tiếp xúc tại điểm có hoành độ $x=0$ nên $f(x)-g(x)=ax^2(x^2-1)$.

Từ hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f(x), y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=0, x=1$ có diện tích bằng $\frac{4}{15}$ ta có phương trình $\int_0^1 \left|ax^2(x^2-1)\right|dx=\frac{4}{15}$

$\Leftrightarrow a\int_0^1 (x^2-x^4)dx=\frac{4}{15} \Leftrightarrow a=2 \Rightarrow f(x)=2x^4-4x^2+8$

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{2}f(x)dx=\int_0^1 (x^4-2x^2+4)dx=\frac{53}{15}$

Câu 41.18: Xét $f(x)=ax^4+bx^2+c(a,b,c\in\mathbb{R}, a>0)$ sao cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị là A, B và $C(1;-5)$. Gọi $y=g(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị đi qua ba điểm A, B và C. Khi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f(x), y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=0, x=1$ có diện tích bằng $\frac{14}{15}$, tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{dx}$ bằng

A. 5. **B.** 3. **C.** $\frac{23}{15}$. **D.** $\frac{53}{15}$.

Lời giải

Chọn C

Dễ thấy $f'(x)$ có ba nghiệm $x=0, x=1, x=-1$ suy ra $f'(x)=4ax(x^2-1)$.

Từ đó ta có $f(x)=ax^4-2ax^2+c$.

Mặt khác, từ giả thiết đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại hai điểm có hoành độ $x=\pm 1$ và tiếp xúc tại điểm có hoành độ $x=0$ nên $f(x)-g(x)=ax^2(x^2-1)$.

Từ hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f(x), y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=0, x=1$ có diện tích bằng $\frac{14}{15}$ ta có phương trình $\int_0^1 \left|ax^2(x^2-1)\right|dx=\frac{14}{15}$

$\Leftrightarrow a\int_0^1 (x^2-x^4)dx=\frac{14}{15} \Leftrightarrow a=7 \Rightarrow f(x)=7x^4-14x^2+2$

$\Rightarrow \int_{-1}^0 f(x)dx=\int_{-1}^0 (7x^4-14x^2+2)dx=\frac{23}{15}$

Câu 41.19: Xét $f(x)=ax^4+bx^2+c(a,b,c\in\mathbb{R}, a>0)$ sao cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị là A, B và $C(1;-5)$. Gọi $y=g(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị đi qua ba điểm A, B và C.

Khi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f\left(x\right), y=g\left(x\right)$ và hai đường thẳng $x=0, x=1$ có diện tích bằng $\frac{14}{15}$, tích phân $\int_{-1}^{0} f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 5. **B.** 3. **C.** $\frac{23}{15}$. **D.** $\frac{53}{15}$.

Lời giải

Chọn C

Dễ thấy $f'(x)$ có ba nghiệm $x=0, x=1, x=-1$ suy ra $f'(x)=4ax(x^2-1)$.

Từ đó ta có $f(x)=ax^4-2ax^2+c$.

Mặt khác, từ giả thiết đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại hai điểm có hoành độ $x=\pm1$ và tiếp xúc tại điểm có hoành độ $x=0$ nên $f(x)-g(x)=ax^2(x^2-1)$.

Từ hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f\left(x\right), y=g\left(x\right)$ và hai đường thẳng $x=0, x=1$ có diện tích bằng $\frac{14}{15}$ ta có phương trình $\int_0^1\left|ax^2(x^2-1)\right|dx=\frac{14}{15}$

$\Leftrightarrow a\int_0^1\left(x^2-x^4\right)dx=\frac{14}{15} \Leftrightarrow a=7 \Rightarrow f\left(x\right)=7x^4-14x^2+2$

$\Rightarrow \int_{-1}^{0} f\left(x\right)dx=\int_{-1}^{0}\left(7x^4-14x^2+2\right)dx=\frac{23}{15}$

Câu 41.20: Xét $f\left(x\right)=ax^4+bx^2+c(a,b,c\in\mathbb{R}, a>0)$ sao cho đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có ba điểm cực trị là A, B và $C\left(2;-12\right)$. Gọi $y=g\left(x\right)$ là hàm số bậc hai có đồ thị đi qua ba điểm A, B và C. Khi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f\left(x\right), y=g\left(x\right)$ và hai đường thẳng $x=0, x=2$ có diện tích bằng $\frac{64}{15}$, tích phân $\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 5. **B.** 3. **C.** $\frac{26}{15}$. **D.** $\frac{23}{15}$.

Lời giải

Chọn D

Dễ thấy $f'(x)$ có ba nghiệm $x=0, x=2, x=-2$ suy ra $f'(x)=4ax(x^2-4)$.

Từ đó ta có $f(x)=ax^4-8ax^2+c$.

Mặt khác, từ giả thiết đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại hai điểm có hoành độ $x=\pm2$ và tiếp xúc tại điểm có hoành độ $x=0$ nên $f(x)-g(x)=ax^2(x^2-4)$.

Từ hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f\left(x\right), y=g\left(x\right)$ và hai đường thẳng $x=0, x=2$ có diện tích bằng $\frac{64}{15}$ ta có phương trình $\int_0^2\left|ax^2(x^2-4)\right|dx=\frac{64}{15}$

$\Leftrightarrow a\int_0^2\left(4x^2-x^4\right)dx=\frac{64}{15} \Leftrightarrow a=1 \Rightarrow f\left(x\right)=x^4-8x^2+4 \Rightarrow \int_0^1 f\left(x\right)dx=\int_0^1\left(x^4-8x^2+4\right)dx=\frac{23}{15}$

CÂU TƯƠNG TỰ CÂU 42 ĐỀ THAM KHẢO 2024

Câu 42.1: Cho hai số phức z_1, $z_2\neq2$ thỏa mãn các điều kiện $\left|z_1\right|=2$, $\frac{z_2+2}{z_2-2}$ là số thuần ảo và $\left|z_1+2z_2\right|=4$. Giá trị của $\left|2z_1-z_2\right|$ bằng

A. $2\sqrt{6}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** $3\sqrt{6}$. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

• Đặt $z_2 = a+bi,(a,b\in\mathbb{R})$,

• Ta có:

$$\frac{z_2+2}{z_2-2}=\frac{(a+2)+bi}{(a-2)+bi}=\frac{\left[(a+2)+bi\right]\left[(a-2)-bi\right]}{(a-2)^2+b^2}=\frac{\left(a^2-4+b^2\right)}{(a-2)^2+b^2}+\frac{\left((a-2)b-(a+2)b\right)i}{(a-2)^2+b^2}$$

$\dfrac{z_2+2}{z_2-2}$ là số thuần ảo $\Rightarrow a^2+b^2=4\Rightarrow |z_2|^2=4$.

• $|z_1+2z_2|=4\Rightarrow 16=|z_1+2z_2|^2\Leftrightarrow (z_1+2z_2)\left(\overline{z_1}+2\overline{z_2}\right)=16$

$\Rightarrow |z_1|^2+4|z_2|^2+2\left(z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}\right)=16\Rightarrow\left(z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}\right)=-2$

Ta có $|2z_1-z_2|^2=(2z_1-z_2)\left(2\overline{z_1}-\overline{z_2}\right)=4|z_1|^2+|z_2|^2-2\left(z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}\right)=24$

$\Rightarrow |2z_1-z_2|=2\sqrt{6}$

Câu 42.2: Cho M là tập hợp các số phức z thỏa $|2z-i|=|2+iz|$. Gọi z_1, z_2 là hai số phức thuộc tập hợp M sao cho $|z_1-z_2|=\sqrt{3}$. Tính giá trị của biểu thức $P=|z_1+z_2|$.

A. $P=\sqrt{3}$. **B.** $P=1$. **C.** $P=\dfrac{1}{2}$. **D.** $P=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $z=x+yi$ với x, $y\in\mathbb{R}$.

Ta có: $|2z-i|=|2+iz|\Leftrightarrow |2x+(2y-1)i|=|2-y+xi|\Leftrightarrow x^2+y^2=1$.

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng phức là đường tròn $(O;1)$

$\Rightarrow |z_1|=|z_2|=1$.

Ta có: $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)\Rightarrow P^2=1\Rightarrow P=1$.

Câu 42.3: Xét hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|=2$ và $|2z_1-3z_2|=2\sqrt{7}$. Giá trị của $|2z_1-z_2|$ bằng:

A. $2\sqrt{3}$. **B.** 12. **C.** $2\sqrt{7}$. **D.** 28.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$|2z_1-3z_2|^2-3|2z_1-z_2|^2=4|z_1|^2+9|z_2|^2-6\left(z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}\right)-12|z_1|^2-3|z_2|^2+6\left(z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}\right)$

$\Leftrightarrow 28-3|2z_1-z_2|^2=-32+24\Leftrightarrow |2z_1-z_2|=\sqrt{12}$

Câu 42.4: Cho số phức z thay đổi thoả mãn $|z|=|z-6-6i|$. Gọi S là tập hợp các số phức $w=\dfrac{12z}{\left|z^2\right|}$. Biết rằng w_1,w_2 là hai số thuộc S sao cho $|w_1-w_2|=2$, mô đun của số phức w_1+w_2-2-2i bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

$$w=\frac{12z}{\left|z^2\right|}=\frac{12z}{|z|^2}=\frac{12z}{z.\overline{z}}=\frac{12}{\overline{z}}\Rightarrow \overline{z}=\frac{12}{w}$$

Theo giả thiết ta có $|z|=|z-6-6i|\Rightarrow\left|\dfrac{12}{\overline{w}}\right|=\left|\dfrac{12}{\overline{w}}-6-6i\right|$

$\Leftrightarrow 12=\left|12-(6+6i)\overline{w}\right| \Leftrightarrow \dfrac{12}{6\sqrt{2}}=\left|1-i-\overline{w}\right|$

$\Leftrightarrow |w-1-i|=\sqrt{2}$

Đặt $t=w-1-i \Rightarrow |t|=\sqrt{2}$

$|t_1-t_2|=|w_1-w_2|=2$

$\Rightarrow |w_1+w_2-2-2i|^2=|t_1+t_2|^2=2\left(|t_1|^2+|t_2|^2\right)-|t_1-t_2|^2=2(2+2)-4=4$

$\Rightarrow |w_1+w_2-2-2i|=2$.

Câu 42.5: Xét các số phức z,w thỏa mãn $|z|=2$ và $(\mathrm{w}-3+4i)\left(\overline{\mathrm{w}}+3+4i\right)$ là số thuần ảo. Khi $|z-w|=3\sqrt{2}$, giá trị của $|2z+w|$ bằng

A. $\sqrt{41}$. **B.** $\sqrt{47}$. **C.** $\sqrt{63}$. **D.** $4\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

• Đặt $w=a+bi,(a,b\in\mathbb{R})$, $P=|2z+w|$

• Ta có:

$(\mathrm{w}-3+4i)\left(\overline{\mathrm{w}}+3+4i\right)=\left(a-3+(b+4)i\right)\left(a+3+(-b+4)i\right)$

$(\mathrm{w}-3+4i)\left(\overline{\mathrm{w}}+3+4i\right)$ là số thuần ảo $\Rightarrow a^2+b^2=25 \Rightarrow |w|=5$.

• $|z-w|=3\sqrt{2} \Rightarrow 18=|z-w|^2=(z-w)(\overline{z}-\overline{w}) \Rightarrow 18=|z|^2-(z\overline{w}+\overline{z}w)+|w|^2$

$\Leftrightarrow 18=4-(z\overline{w}+\overline{z}w)+25 \Rightarrow z\overline{w}+\overline{z}w=11$

• $P^2=|2z+w|^2=(2z+w)(2\overline{z}+\overline{w})=4|z|^2+2(z\overline{w}+\overline{z}w)+|w|^2=16+22+25=63$

$\Rightarrow P=\sqrt{63}$.

Câu 42.6: Xét các số phức z,w thỏa mãn $|z-1+2i|=1$ và $(\mathrm{w}-1+2i)\left(\overline{\mathrm{w}}-1-2i\right)=4$. Khi $|z-w|=2$, giá trị của $|z+w-2+4i|$ bằng

A. $2\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

• Đặt $u=z-1+2i$ suy ra $|z-1+2i|=1 \Leftrightarrow |u|=1$

Đặt $v=\mathrm{w}-1+2i$ suy ra $(\mathrm{w}-1+2i)\left(\overline{\mathrm{w}}-1-2i\right)=4 \Leftrightarrow v.\overline{v}=4 \Leftrightarrow |v|^2=4 \Leftrightarrow |v|=2$.

• $|z-w|=2 \Leftrightarrow \left|(z-1+2i)-(w-1+2i)\right| \Leftrightarrow |u-v|=2$.

$\Rightarrow 4=|u|^2-(u\overline{v}+\overline{u}v)+|v|^2 \Rightarrow u\overline{v}+\overline{u}v=1$

• $P^2=|z+w-2+4i|^2=\left|(z-1+2i)+(w-1+2i)\right|^2=|u+v|^2=|u|^2+|v|^2+u\overline{v}+\overline{u}v=6$.

Vậy $P=|z+w-2+4i|=\sqrt{6}$

Câu 42.7: Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn điều kiện $\begin{cases}|z_1|=|z_2|=|z_3|=1\\ {z_1}^2=z_2z_3\\ |z_1-z_2|=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\end{cases}$, với $M=|z_2-z_3|-|z_3-z_1|$.

Tính M^2.

A. $3+\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}-2}{2}$. **D.** $\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}+2}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$|z_1-z_2|^2+|z_1+z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$

$\Leftrightarrow |z_1+z_2|^2=4-\frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2}{4} \Leftrightarrow |z_1+z_2|=\sqrt{4-\frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2}{4}}$

Khi đó, $M=|z_2-z_3|-|z_3-z_1|=\left|z_2-\frac{z_1^2}{z_2}\right|-|z_1||z_3-z_1|$

$=\left|\frac{z_2^2-z_1^2}{z_2}\right|-\left|z_1z_3-z_1^2\right|=\frac{|z_1-z_2|.|z_1+z_2|}{|z_2|}-|z_1z_3-z_2z_3| =\frac{|z_1-z_2|.|z_1+z_2|}{|z_2|}-|z_3|.|z_1-z_2|$

$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}.\sqrt{4-\frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2}{4}}-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}=\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}+2}{2}$.

Khi đó $M^2=3+\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

Câu 42.8: Gọi z_1, z_2 là hai trong các số phức z thỏa mãn $|z-3+5i|=5$ và $|z_1-z_2|=6$. Tìm bình phương của môđun số phức $w=z_1+z_2-6+10i$.

A. 16. **B.** 36. **C.** 8. **D.** 64.

Lời giải

Chọn D

Giả sử $z=x+yi$ với $(x,y\in\mathbb{R})$. Khi đó $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

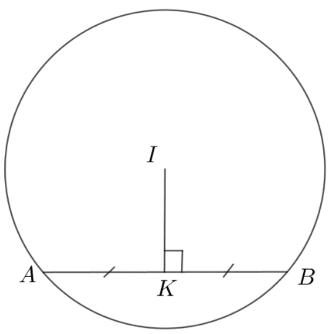
Ta có: $|z-3+5i|=5 \Rightarrow M(x;y)$ thuộc đường tròn (C) có tâm $I(3;-5)$, bán kính $R=5$.

Xét $|w|=|z_1+z_2-6+10i| \Rightarrow \frac{|w|}{2}=\left|\frac{z_1+z_2}{2}-\frac{6}{2}+\frac{10i}{2}\right|=\left|\frac{z_1+z_2}{2}-3+5i\right|$.

Gọi A, B lần lượt biểu diễn z_1, z_2; Khi đó điểm K biểu diễn $\frac{z_1+z_2}{2}$ là trung điểm của AB.

Ta có $|z_1-z_2|=6 \Rightarrow AB=6$, $KB=3$.

Do $\frac{|w|}{2}=\left|\frac{z_1+z_2}{2}-3+5i\right|$ nên $|w|=2IK$.



Vì $IK\perp AB$ nên $IK=\sqrt{IB^2-KB^2}=4$.

Vậy $|w|=2IK=8$. Khi đó bình phương của môđun số phức $w=z_1+z_2-6+10i$ bằng 64.

Câu 42.9: Xét các số phức $z,w\left(w\ne 4\right)$ thỏa mãn $\left|z\right|=3$ và $\dfrac{w+4}{w-4}$ là số thuần ảo. Khi $\left|z-w\right|=\sqrt{13}$, giá trị của $\left|3z+2w\right|$ bằng

A. $\sqrt{74}$. **B.** $\sqrt{73}$. **C.** $\sqrt{219}$. **D.** $\sqrt{217}$.

Lời giải

Chọn D

+) Ta có: $\dfrac{w+4}{w-4}=ai\Rightarrow w=\dfrac{-4\left(1+ai\right)}{1-ai}\Rightarrow \left|w\right|=4$

+) $\left|z-w\right|=\sqrt{13}\Rightarrow \left(z-w\right)\left(\overline{z-w}\right)=\left(z-w\right)\left(\overline{z}-\overline{w}\right)=13$

$\Rightarrow {{\left|z\right|}^{2}}-\left(z\overline{w}+\overline{z}w\right)+{{\left|w\right|}^{2}}=13\Rightarrow z\overline{w}+\overline{z}w=12$

+) $P^2={{\left|3z+2w\right|}^{2}}=\left(3z+2w\right)\left(3\overline{z}+2\overline{w}\right)=9{{\left|z\right|}^{2}}+6\left(z\overline{w}+\overline{z}w\right)+4{{\left|w\right|}^{2}}=9.9+6.12+4.4^2=217$

$\Rightarrow$ $P=\sqrt{217}$.

Câu 42.10: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn các điều kiện $\left|z\right|=2,\left(w+i\right)\left(\overline{w}+i\right)+\left(4+i\right)\left(1+7i\right)$ là số thuần ảo và $\left|z+2w\right|=4$. Giá trị của $\left|2z-w\right|$ bằng

A. $2\sqrt{6}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** $3\sqrt{6}$. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Gọi $w=a+bi$, $(a,\ b\in\mathbb{R})$

$\left(w+i\right)\left(\overline{w}+i\right)+\left(4+i\right)\left(1+7i\right)=w.\overline{w}-1+i\left(w+\overline{w}\right)-3+29i=a^2+b^2-4+\left(2a+29\right)i$

$\left(w+i\right)\left(\overline{w}+i\right)+\left(4+i\right)\left(1+7i\right)$ là số thuần ảo $\Rightarrow a^2+b^2-4=0\Rightarrow \left|w\right|=2$

+) $\left|z+2w\right|=4\Rightarrow \left(z+2w\right)\left(\overline{z+2w}\right)=\left(z+w\right)\left(\overline{z}+2\overline{w}\right)=16$

$\Rightarrow {{\left|z\right|}^{2}}+2\left(z\overline{w}+\overline{z}w\right)+4{{\left|w\right|}^{2}}=16\Rightarrow z\overline{w}+\overline{z}w=-2$

+) ${{\left|2z-w\right|}^{2}}=\left(2z-w\right)\left(2\overline{z}-\overline{w}\right)=4{{\left|z\right|}^{2}}-2\left(z\overline{w}+\overline{z}w\right)+{{\left|w\right|}^{2}}=4.4-2.\left(-2\right)+4=24$

$\Rightarrow$ $\left|2z-w\right|=2\sqrt{6}$.

Câu 42.11: Cho hai số phức $z_1;z_2$ thỏa mãn: $\left|z-2i\right|=\left|\left(i-1\right)z+1+i\right|$; $\left|w-2i\right|=\left|\left(i+1\right)w+1-i\right|$. Biết $\left|z-w\right|=1$, tính $\left|z+w\right|$

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** 7. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Đặt: $\begin{cases} z=a+bi \\ w=c+di \end{cases}$ $\left(a,b,c,d\in\mathbb{R}\right)$.

Ta có:

✔ $\left|z-2i\right|=\left|\left(i-1\right)z+1+i\right|\Leftrightarrow \left|z-2i\right|=\left|\left(i-1\right)\right|\left|z-i\right|$

$\Leftrightarrow \left|z-2i\right|=\sqrt{2}\left|z-i\right|$

$\Leftrightarrow a^2+\left(b-2\right)^2=2\left[a^2+\left(b-1\right)^2\right]\Leftrightarrow a^2+b^2=2\ (1)$

✔ $\left|w-2i\right|=\left|\left(i+1\right)w+1-i\right|\Leftrightarrow \left|w-2i\right|=\left|\left(i+1\right)\right|\left|w-i\right|$

$\Leftrightarrow \left|w-2i\right|=\sqrt{2}\left|w-i\right|$

$\Leftrightarrow a^2+\left(b-2\right)^2=2\left[a^2+\left(b-1\right)^2\right]\Leftrightarrow a^2+b^2=2\ (2)$

Mà: $|z-w|=1 \Leftrightarrow (a-c)^2+(b-d)^2=1 \Leftrightarrow 2ac+2bd=3$ (do (1) và (2))

Vậy: $|z+w|=\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}=\sqrt{(a^2+b^2)+(c^2+d^2)+2(ac+bd)}=\sqrt{7}$.

Câu 42.12: Cho hai số phức z, w thỏa mãn điều kiện $|2z-3i|=\sqrt{3}|2+iz|$ và $|z-w|=2$. Môđun $|2z+3w|$ bằng

A. $\sqrt{52}$. **B.** $\sqrt{53}$. **C.** $5\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{51}$.

Lời giải

Chọn D

$|2z-3i|=\sqrt{3}|2+iz| \Leftrightarrow |2x+(2y-3)i|=\sqrt{3}|(2-y)+ai|$

$\Leftrightarrow (2x)^2+(2y-3)^2=3(2-y)^2+3x^2 \Leftrightarrow x^2+y^2=3$

$\Rightarrow |z|=|w|=\sqrt{3}$

Giả sử $z=a+bi$, (a, $b\in\mathbb{R}$); $w=c+di$, (c, $d\in\mathbb{R}$).

Theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases}|z|=\sqrt{3}\\|w|=\sqrt{3}\\|z-w|=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2+b^2=3\\c^2+d^2=3\\(a-c)^2+(b-d)^2=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2+b^2=3 & (1)\\c^2+d^2=3 & (2)\\a^2+b^2+(c^2+d^2)-2(ac+bd)=4 & (3)\end{cases}$$

Thay $(1),(2)$ vào (3) ta được $ac+bd=1$ (4).

Ta có $|2z+3w|=\sqrt{(2a+3c)^2+(2b+3d)^2}$

$=\sqrt{4(a^2+b^2)+9(c^2+d^2)+12(ac+bd)}=\sqrt{4.3+9.3+12.1}=\sqrt{51}$.

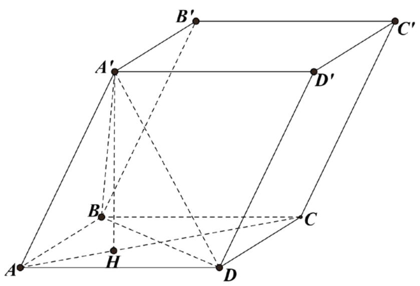
CÂU TƯƠNG TỰ CÂU 43 ĐỀ THAM KHẢO 2024

Câu 43.1: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bằng $2a$. Biết $\widehat{BAD}=\widehat{A'AB}=\widehat{A'AD}=60^\circ$. Tính thể tích V của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $4\sqrt{2}a^3$. **B.** $2\sqrt{2}a^3$. **C.** $8a^3$. **D.** $\sqrt{2}a^3$.

Lời giải

Chọn A



Từ giả thuyết ta có các tam giác ΔABD, $\Delta A'AD$ và $A'AB$ là các tam giác đều.

$\Rightarrow A'A=A'B=A'D$ nên hình chiếu H của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABD.

$\Rightarrow AH=\frac{2}{3}.2a.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}a$

$\Rightarrow A'H=\sqrt{A'A^2-AH^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}a$.

Thể tích của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$: $V=A'H.S_{ABCD}=\frac{2\sqrt{6}}{3}a.2.\frac{4a^2.\sqrt{3}}{4}=4\sqrt{2}a^3$.

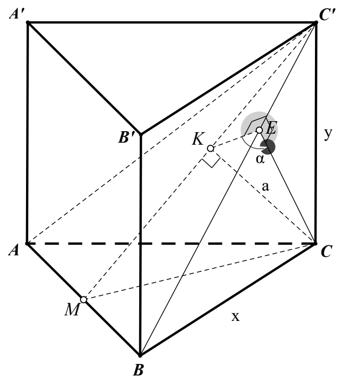
thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V_{ABC.A'B'C'}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\dfrac{a\sqrt{6}}{3}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

Câu 43.2: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Biết khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (ABC') bằng a, góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và $(BCC'B')$ bằng α với $\cos\alpha=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **B.** $V=\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $V=\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{8}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm của AB.

Do $\begin{cases} AB\perp CC' \\ AB\perp CM \end{cases}\Rightarrow AB\perp(MCC')\Rightarrow(ABC')\perp(MCC')$.

Kẻ CK vuông góc với CM tại K thì ta được $CK\perp(ABC')$, do đó $CK=d\left(C;(ABC')\right)=a$.

Đặt $BC=x, CC'=y, (x>0, y>0)$, ta được: $CM=\dfrac{x\sqrt{3}}{2}$

$\dfrac{1}{CM^2}+\dfrac{1}{CC'^2}=\dfrac{1}{CK^2}\Leftrightarrow\dfrac{4}{3x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{a^2}\ (1)$.

Kẻ $CE\perp BC'$ tại E, ta được $\widehat{KEC}=\alpha$, $EC=\dfrac{KC}{\sin\alpha}=\dfrac{a}{\sqrt{1-\dfrac{1}{12}}}=a\sqrt{\dfrac{12}{11}}$.

Lại có $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{CE^2}=\dfrac{11}{12a^2}\ (2)$.

Giải $(1),(2)$ ta được $x=2a, y=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

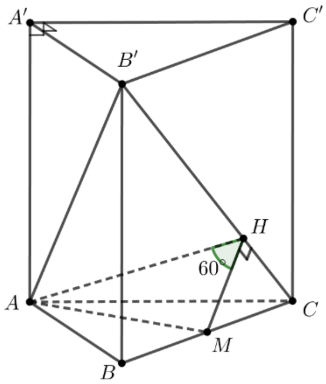
$V=y.\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}.\dfrac{4a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{3\sqrt{2}a^3}{2}$.

Câu 43.3: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A, cạnh $BC=a\sqrt{6}$. Góc giữa mặt phẳng $(AB'C)$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng $60°$. Tính thể tích V của khối đa diện $AB'CA'C'$.

A. $a^3\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Khối đa diện $AB'CA'C'$ là hình chóp $B'.ACC'A'$ có $A'B' \perp (ACC'A')$.

Từ giả thiết tam giác ABC vuông cân tại A, cạnh $BC = a\sqrt{6}$ ta suy ra $AB = AC = a\sqrt{3}$.

Gọi M là trung điểm của BC, suy ra $AM \perp BC$ và $AM = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Ta có $\begin{cases} AM \perp BC \\ AM \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AM \perp (BCC'B') \Rightarrow AM \perp B'C$ (1).

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên $B'C$, suy ra $MH \perp B'C$ (2).

Từ (1) và (2) ta suy ra $B'C \perp (AMH)$. Từ đó suy ra góc giữa mặt phẳng $(AB'C)$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ là góc giữa AH và MH. Mà tam giác AMH vuông tại H nên $\Rightarrow \widehat{AHM} = 60°$.

$\Rightarrow MH = AM.\cot 60° = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}.\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

$$\sin \widehat{HCM} = \frac{MH}{MC} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow 1 + \tan^2 \widehat{MCH} = \frac{1}{1 - \sin^2 \widehat{MCH}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \Rightarrow \tan \widehat{MCH} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow BB' = BC.\tan \widehat{MCH} = a\sqrt{6}.\frac{\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{3}$$

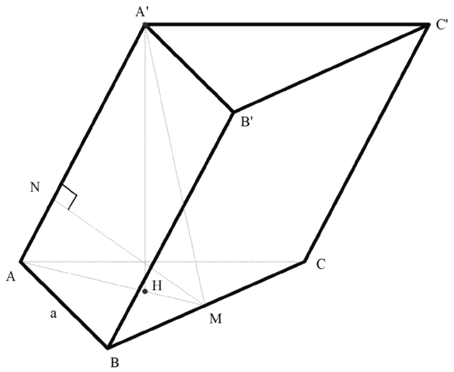
$$\Rightarrow V_{AB'CA'C'} = V_{B'.ACC'A'} = \frac{1}{3}B'A'.AC.BB' = \frac{1}{3}.a\sqrt{3}.a\sqrt{3}.a\sqrt{3} = a^3\sqrt{3}.$$

Câu 43.4: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính theo a thể tích khối lăng trụ đó.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Lời giải

Chọn A

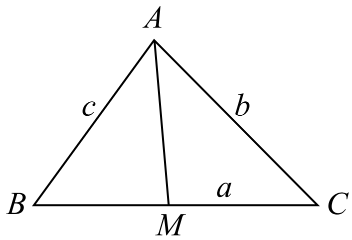


+ Gọi M là trung điểm BC, H là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow A'H \perp (ABC)$.

+ $AM \perp BC$ và $AH \perp BC$ $\Rightarrow BC \perp (AA'M)$.

+ Trong tam giác $AA'M$, kẻ $MN \perp AA'$ tại N

$MN \perp BC$ tại M vì $BC \perp (AA'M)$.



$\Rightarrow MN$ là đoạn vuông góc chung của AA' và BC $\Rightarrow MN = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

+ Tam giác $AA'M$ có $S_{\Delta AA'M} = \dfrac{1}{2}A'H.AM = \dfrac{1}{2}MN.AA'$

$\Rightarrow A'H.AM = MN.AA' \Leftrightarrow A'H.AM = MN.\sqrt{A'H^2 + AH^2}$

$$\Rightarrow A'H = \frac{MN.\sqrt{A'H^2+AH^2}}{AM} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{4}\sqrt{A'H^2+\left(\frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{A'H^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}}{2}.$$

$$\Rightarrow 4A'H^2 = A'H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow A'H = \frac{a}{3}.$$

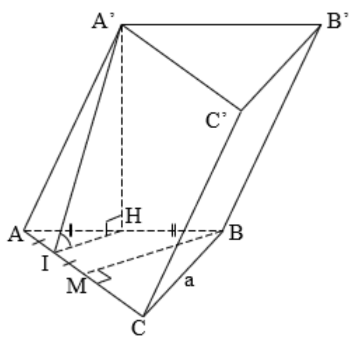
Vậy thể tích khối lăng trụ $V_{ABC.A'B'C'} = A'H.S_{\Delta ABC} = \dfrac{a}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 43.5: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a. Hình chiếu vuông góc của A' trên (ABC) là trung điểm của AB. Mặt phẳng $(AA'C'C)$ tạo với đáy một góc bằng $45°$. Thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $V = \dfrac{3a^3}{16}$. **B.** $V = \dfrac{3a^3}{8}$. **C.** $V = \dfrac{3a^3}{4}$. **D.** $V = \dfrac{3a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi *H, M, I* lần lượt là trung điểm của *AB, AC, AM.*

Ta có *IH* là đường trung bình của tam giác AMB, *MB* là trung tuyến của tam giác đều *ABC.*

Do đó: $\begin{cases} IH \,//\, MB \\ MB \perp AC \end{cases} \Rightarrow IH \perp AC$.

Có: $\begin{cases} AC \perp A'H \\ AC \perp IH \end{cases} \Rightarrow AC \perp (A'HI) \Rightarrow AC \perp A'I$

Có: $\begin{cases} (ABC) \cap (ACC'A') = AC \\ (ABC): AC \perp IH \\ (ACC'A'): AC \perp A'I \end{cases} \Rightarrow \widehat{A'IH}$ là góc nhọn và là góc gữa hai mặt phẳng $(AA'C'C)$

và $(ABCD) \Rightarrow \widehat{A'IH} = 45°$.

Trong tam giác $A'HI$ vuông tại H, ta có: $\tan 45° = \dfrac{A'H}{HI}$

$\Rightarrow A'H = IH.\tan 45^\circ = IH = \dfrac{1}{2}MB = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

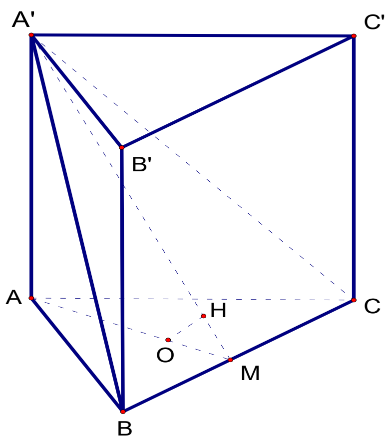
Vậy $V = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a^3}{16}$

Câu 43.6: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, biết đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Khoảng cách từ tâm O của tam giác ABC đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\dfrac{a}{6}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{8}$. **B.** $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{28}$. **C.** $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{16}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M là trung điểm của BC. Ta có $(A'AM) \perp (A'BC)$ theo giao tuyến $A'M$.

Trong $(A'AM)$ kẻ $OH \perp A'M \; (H \in A'M)$.

$\Rightarrow OH \perp (A'BC)$.

Suy ra: $d(O,(A'BC)) = OH = \dfrac{a}{6}$.

Xét hai tam giác vuông $A'AM$ và OHM có góc $\widehat{M}$ chung nên chúng đồng dạng.

Suy ra: $\dfrac{OH}{A'A} = \dfrac{OM}{A'M} \Rightarrow \dfrac{\frac{a}{6}}{A'A} = \dfrac{\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{A'A^2 + AM^2}} \Rightarrow \dfrac{1}{A'A} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{A'A^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}}$.

$\Rightarrow A'A = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

$+\ S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

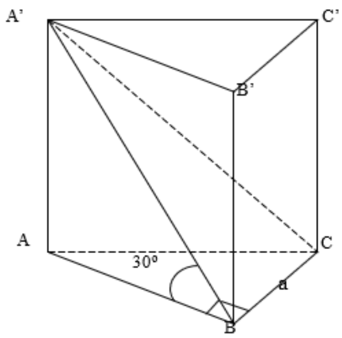
Thể tích: $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.A'A = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a^3\sqrt{2}}{16}$.

Câu 43.7: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BC = a$, mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy một góc $30°$ và tam giác $A'BC$ có diện tích bằng $a^2\sqrt{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$ **B.** $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{4}$ **C.** $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$ **D.** $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{2}$

Lời giải

Chọn D



Do $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AA'B'B) \Rightarrow BC \perp A'B$

Và $\begin{cases} BC = (ABC) \cap (A'BC) \\ (ABC): BC \perp AB \\ (A'BC): BC \perp A'B \end{cases}$

$\Rightarrow \left(\widehat{(ABC),(A'BC)}\right) = \left(\widehat{AB, A'B}\right) = \widehat{ABA'} = 30^0$

Ta có:

$S_{\Delta A'BC} = \dfrac{1}{2}A'B.BC$

$\Rightarrow A'B = \dfrac{2.S_{\Delta A'BC}}{BC} = \dfrac{2.a^2\sqrt{3}}{a} = 2a\sqrt{3}$.

$AB = A'B.\cos\widehat{ABA'} = 2a\sqrt{3}.\cos 30^0 = 3a;\ AA' = A'B.\sin\widehat{ABA'} = 2a\sqrt{3}.\sin 30^0 = a\sqrt{3}$

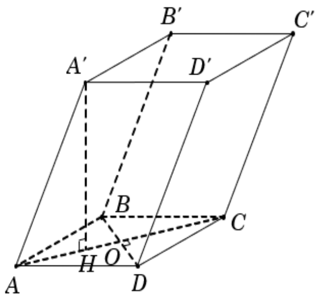
$V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.AA' = \dfrac{1}{2}.AB.BC.AA' = \dfrac{1}{2}.3a.a.a\sqrt{3} = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 43.8: Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, tâm O và $\widehat{ABC} = 120^0$. Góc giữa cạnh bên AA' và mặt đáy bằng 60^0. Đỉnh A' cách đều các điểm A, B, D. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \dfrac{3a^3}{2}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $V = a^3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C



Từ giả thiết suy ra tam giác ABD đều cạnh a.
Gọi H là tâm của tam giác ABD.
Vì A' cách đều các điểm A, B, D nên $A'H \perp (ABD)$.

Do đó $\left(\widehat{AA',(ABCD)}\right) = \left(\widehat{AA',HA}\right) = \widehat{A'AH} = 60^0$.

Ta có $AH = \dfrac{2}{3}AO = \dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác vuông $A'AH$, có $A'H = AH.\tan\widehat{A'AH} = a$.

Diện tích hình thoi $S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABD} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

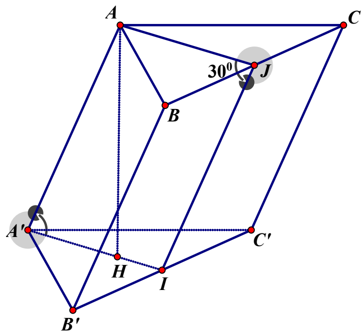
Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD}.A'H = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 43.9: Cho khối lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều, $AA' = AB' = AC' = a$. Biết góc giữa hai mặt phẳng $(BCC'B')$ và (ABC) bằng 30°, thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{24}$. **B**. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{8}$. **C**. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **D**. $\dfrac{a^3}{8}$.

Lời giải

Chọn C



I là trung điểm của $B'C'$, H là trọng tâm $\Delta A'B'C'$
Chóp $A.A'B'C'$ đều nên ta có $AH \perp (A'B'C')$. Suy ra AH là chiều cao và $BC \perp (AA'IJ)$

Suy ra góc giữa hai mặt phẳng $(BCC'B')$ và (ABC) là $\widehat{AJI} = \widehat{AA'I} = 30^\circ$,

$\Delta A'B'C'$ đều cạnh a nên $A'I = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A'H = \dfrac{2}{3}A'I = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

$\Delta AA'H$ vuông tại H ta có $\tan\widehat{AA'H} = \dfrac{AH}{A'H} \Leftrightarrow AH = A'H.\tan 30^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a}{3}$

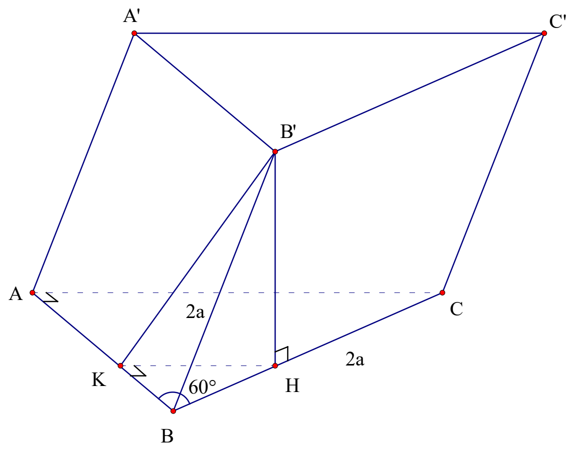
$S_{\Delta A'B'C'} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = B.h = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a}{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Câu 43.10: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, cạnh $BC = 2a$ và $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Biết tứ giác $BCC'B'$ là hình thoi có $\widehat{B'BC}$ nhọn. Biết $(BCC'B')$ vuông góc với (ABC) và $(ABB'A')$ tạo với (ABC) góc 45°. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{a^3}{\sqrt{7}}$. **B.** $\dfrac{6a^3}{\sqrt{7}}$. **C.** $\dfrac{a^3}{3\sqrt{7}}$. **D.** $\dfrac{3a^3}{\sqrt{7}}$.

Lời giải

Chọn D



Do ABC là tam giác vuông tại A, cạnh $BC=2a$ và $\widehat{ABC}=60°$ nên $AB=a$, $AC=a\sqrt{3}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B' lên $BC \Rightarrow H$ thuộc đoạn BC (do $\widehat{B'BC}$ nhọn)
$\Rightarrow B'H \perp (ABC)$ (do $(BCC'B')$ vuông góc với (ABC)).

Kẻ HK song song AC $(K \in AB) \Rightarrow HK \perp AB$ (do ABC là tam giác vuông tại A).

$\Rightarrow \left[\widehat{(ABB'A'),(ABC)}\right] = \widehat{B'KH} = 45° \Rightarrow B'H = KH \quad (1)$

Ta có $\Delta BB'H$ vuông tại $H \Rightarrow BH = \sqrt{4a^2 - B'H^2} \quad (2)$

Mặt khác HK song song $AC \Rightarrow \dfrac{BH}{BC} = \dfrac{HK}{AC} \Rightarrow BH = \dfrac{HK.2a}{a\sqrt{3}} \quad (3)$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\sqrt{4a^2 - B'H^2} = \dfrac{B'H.2a}{a\sqrt{3}} \Rightarrow B'H = a\sqrt{\dfrac{12}{7}}$.

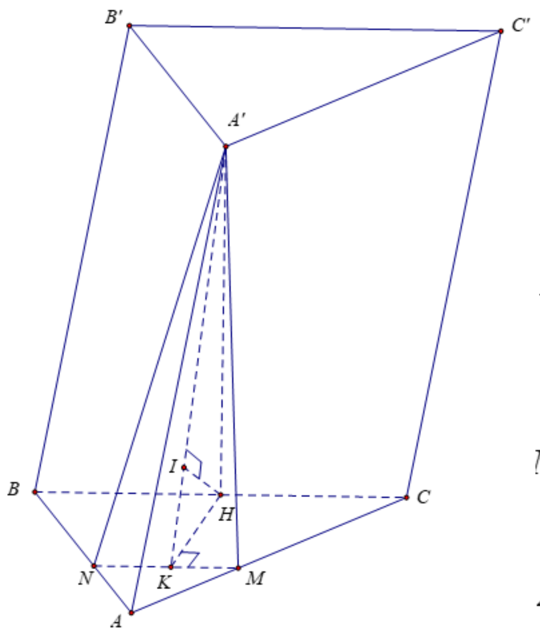
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.B'H = \dfrac{1}{2}AB.AC.B'H = \dfrac{3a^3}{\sqrt{7}}$.

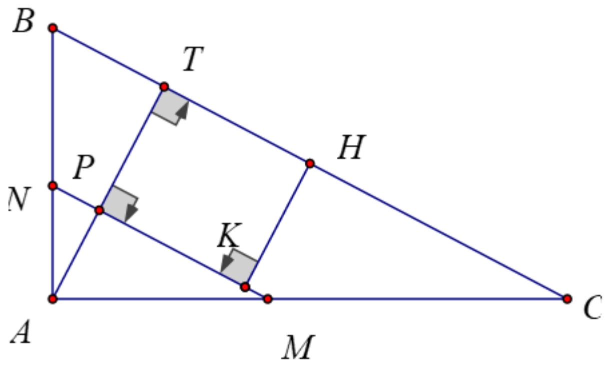
Câu 43.11: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=a$, $AC=a\sqrt{3}$, $A'A = A'B = A'C$. Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho $CM = 2MA$. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'M$ và BC bằng $\dfrac{a}{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V=a^3$. **B.** $V=\dfrac{3a^3}{2}$. **C.** $V=\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn D





$d\left(A'M;BC\right)=d\left(BC;\left(A'MN\right)\right)=d\left(H;\left(A'MN\right)\right)=HI\Rightarrow HI=\dfrac{a}{2}$.

Kẻ $AT\,//\,HK$, $AT\cap MN=P\Rightarrow HK=PT=\dfrac{2}{3}AT$

Tam giác ABC vuông tại $A\Rightarrow\dfrac{1}{AT^2}=\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AC^2}=\dfrac{4}{3a^2}\Rightarrow HK=\dfrac{2}{3}AT=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Tam giác $A'HK$ vuông tại $H\Rightarrow\dfrac{1}{A'H^2}=\dfrac{1}{HI^2}-\dfrac{1}{HK^2}=\dfrac{4}{a^2}-\dfrac{3}{a^2}=\dfrac{1}{a^2}\Rightarrow A'H=a$.

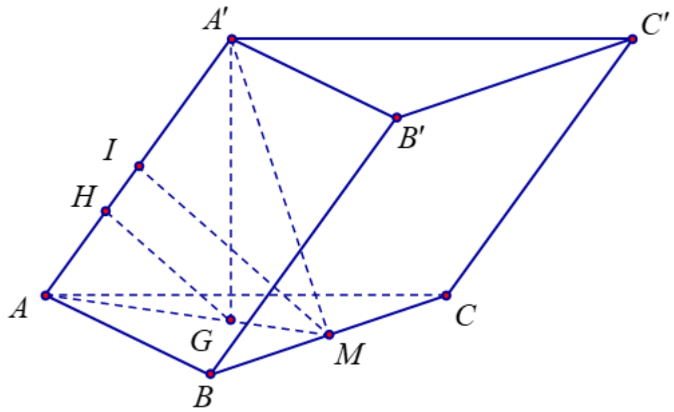
Vậy thể tích khối lăng trụ đã cho là: $V=A'H.S_{ABC}=a.\dfrac{1}{2}.a.a\sqrt{3}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 43.12: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng $\left(ABC\right)$ trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $A'G\perp\left(ABC\right)$ nên $A'G\perp BC$; $BC\perp AM$ $\Rightarrow BC\perp\left(MAA'\right)$

Kẻ $MI\perp AA'$; $BC\perp IM$ nên $d\left(AA';\,BC\right)=IM=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

Kẻ $GH \perp AA'$, ta có $\frac{AG}{AM}=\frac{GH}{IM}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow GH=\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{4}=\frac{a\sqrt{3}}{6}$

$$\frac{1}{HG^2}=\frac{1}{A'G^2}+\frac{1}{AG^2} \Leftrightarrow A'G=\frac{AG.HG}{\sqrt{AG^2-HG^2}}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{\frac{a^2}{3}-\frac{a^2}{12}}}=\frac{a}{3}$$

$V_{ABC.A'B'C'}=A'G.S_{ABC}=\frac{a}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^2\sqrt{3}}{12}$ (đvtt).

CÂU TƯƠNG TỰ CÂU 44 ĐỀ THAM KHẢO 2024

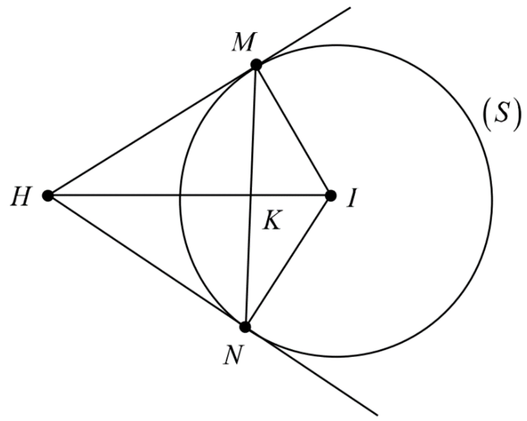
Câu 44.1: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{2}$ và mặt cầu $(S):(x-2)^2+y^2+(z-1)^2=1$. Gọi (P) và (Q) là hai mặt phẳng chứa đường thẳng d và tiếp xúc với mặt cầu (S) lần lượt tại M và N. Độ dài dây cung MN có giá trị bằng

A. 4. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Nếu gọi H là hình chiếu vuông góc của tâm $I(2;0;1)$ lên đường thẳng d, thì ta có hình vẽ minh họa hai mặt phẳng (P) và (Q) đi qua d, tiếp xúc với mặt cầu (S) như sau:



Phương trình tham số đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=-t\\z=2+2t\end{cases}$; VTCP của d: $\overrightarrow{u_d}=(2;-1;2)$.

Gọi $H(1+2t;-t;2+2t)$. Suy ra: $\overrightarrow{IH}=(2t-1;-t;2t+1)$.

Có $\overrightarrow{IH}\perp\overrightarrow{u_{(d)}} \Leftrightarrow \overrightarrow{IH}.\overrightarrow{u_{(d)}}=0 \Leftrightarrow 2(2t-1)-1(-t)+2(2t+1)=0 \Rightarrow t=0 \Rightarrow H(1;0;2)$.

Độ dài đoạn $IH=\sqrt{(2-1)^2+0^2+(1-2)^2}=\sqrt{2}$.

Áp dụng định lý Pythago suy ra: $HM=HN=\sqrt{IH^2-IM^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2-1}=1$.

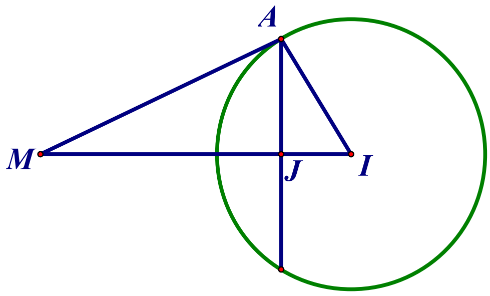
Suy ra: $MN=2MK=2.\frac{HM.IM}{IH}=2.\frac{1.1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

Câu 44.2: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$ và điểm $M(1;3;-1)$, biết rằng các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ M tới các mặt cầu đã cho luôn thuộc một đường tròn (C) có tâm $J(a;b;c)$. Giá trị $T=2a+b+c$ bằng

A. $T=\frac{134}{25}$. **B.** $T=\frac{62}{25}$. **C.** $T=\frac{84}{25}$. **D.** $T=\frac{116}{25}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $(S):(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9 \Rightarrow I(1;-1;2); R=3$.

$M(1;3;-1) \Rightarrow IM=\sqrt{0^2+4^2+(-3)^2}=5$.

Gọi A là một tiếp điểm nên $AM=\sqrt{MI^2-IA^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$.

Mặt cầu tâm M bán kính $AM=4$ dạng $(x-1)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=16$.

Toạ độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases}(x-1)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=16\\(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9\end{cases} \Rightarrow 4y-3z+1=0$.

Hay $A\in(P):4y-3z+1=0$.

J là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P). Đường thẳng IJ dạng $\begin{cases}x=1\\y=-1+4t\\z=2-3t\end{cases}$.

$J=IJ\cap(P) \Rightarrow J$ là nghiệm của hệ $\begin{cases}4y-3x+1=0\\x=1\\y=-1+4t\\z=2-3t\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=1\\y=\frac{11}{25}\\z=\frac{23}{25}\end{cases} \Rightarrow J\left(1;\frac{11}{25};\frac{23}{25}\right)$.

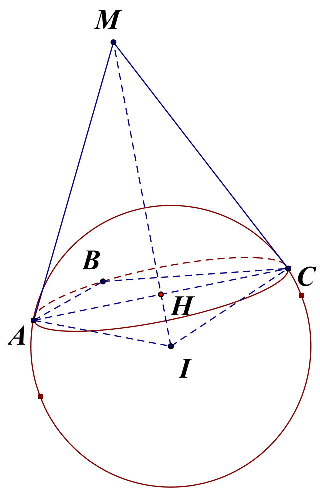
Nên $T=2a+b+c=\frac{84}{25}$.

Câu 44.3: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{1}$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z-13=0$. Lấy điểm $M(a;b;c)$ với $a<0$ thuộc đường thẳng d sao cho từ M kẻ được ba tiếp tuyến MA, MB, MC đến mặt cầu (S) (A,B,C là tiếp điểm) thỏa mãn góc $\widehat{AMB}=60°$, $\widehat{BMC}=90°$, $\widehat{CMA}=120°$. Tổng $a+b+c$ bằng

A. -2. **B.** 2. **C.** $\frac{10}{3}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-3)$, bán kính $R=3\sqrt{3}$.

Gọi $MA=MB=MC=m$.

Tam giác MAB đều $\Rightarrow AB=m$.

Tam giác MBC vuông cân tại $M \Rightarrow BC=m\sqrt{2}$.

Tam giác MAC cân tại M, $\widehat{CMA}=120° \Rightarrow AC=m\sqrt{3}$.

Ta có: $AB^2+BC^2=AC^2 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại B.

Gọi H là trung điểm của AC, suy ra, H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Vì $MA=MB=MC, IA=IB=IC$ nên M, H, I thẳng hàng.

Áp dụng hệ thức lượng cho tam giác MAI vuông tại A, ta nhận được $MI=\dfrac{AI}{\sin 60°}=6$.

$M\in d \Rightarrow M(t-1;t-2;t+1) \Rightarrow \overrightarrow{IM}=(t-2;t-4;t+4)$.

$$IM^2=36 \Rightarrow 3t^2-4t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \Rightarrow M(-1;-2;1)\ (t/m) \\ t=\dfrac{4}{3} \Rightarrow M\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{-2}{3};\dfrac{7}{3}\right)\ (l) \end{array}\right. \Rightarrow a+b+c=-2.$$

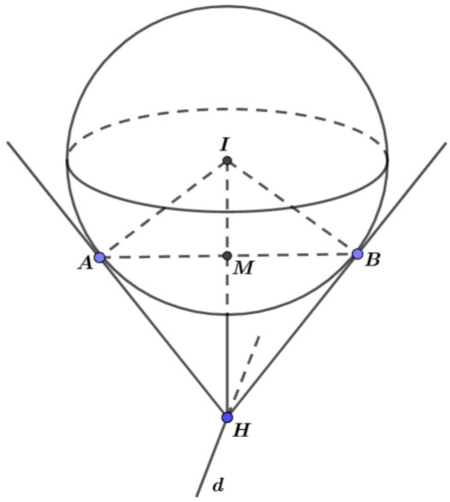
Câu 44.4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z}{1}$ và mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=6$. Hai mặt phẳng (P), (Q) chứa d và cùng tiếp xúc với (S) lần lượt tại A, B. Gọi I tà tâm mặt cầu (S). Giá trị $\cos\widehat{AIB}$ bằng

A. $-\dfrac{1}{9}$. **B.** $\dfrac{1}{9}$. **C.** $-\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;-1)$ và bán kính $R=\sqrt{6}$.



Phương trình tham số của đường thẳng $d:\begin{cases} x=-2+2t \\ y=-1-3t \\ z=t \end{cases}$, $\overrightarrow{u_d}=(2;-3;1)$.

Gọi H là hình chiếu của I lên d.

Vì $H\in d \Rightarrow H(-2+2t;-1-3t;t)$

$\Rightarrow \overrightarrow{IH}=(-4+2t;-3t;t+1)$.

Khi đó,

$\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{u_d}=0 \Leftrightarrow 2(-4+2t)-3(-3t)+(t+1)=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2} \Rightarrow H\left(-1;-\dfrac{5}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ và $IH=\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$.

Gọi M là hình chiếu của A lên IH.

Xét tam giác AIH vuông tại A có: $IA^2=IM.IH \Rightarrow IM=\dfrac{IA^2}{IH}=\dfrac{R^2}{IH}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

Xét tam giác AIM vuông tại M có $AM^2=\sqrt{IA^2-IM^2}=\sqrt{R^2-IM^2}=\dfrac{\sqrt{30}}{3} \Rightarrow AB=\dfrac{2\sqrt{30}}{3}$.

Tam giác AIB có $IA=IB=\sqrt{6}, AB=\dfrac{2\sqrt{30}}{3}$.

Áp dụng định lý côsin trong tam giác AIB ta có: $\cos\widehat{AIB}=\dfrac{IA^2+IB^2-AB^2}{2IA.IB}=-\dfrac{1}{9}$.

Câu 44.5: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $E(2;1;3)$, mặt phẳng $(P): 2x+2y-z-3=0$ và mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=36$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E, nằm trong (P) và cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách nhỏ nhất. Phương trình của Δ là

A. $\begin{cases} x=2+9t \\ y=1+9t \\ z=3+8t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=2-5t \\ y=1+3t \\ z=3 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \\ z=3 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=2+4t \\ y=1+3t \\ z=3-3t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;5)$ và bán kính $R=6$.

$IE=\sqrt{1^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}<R \Rightarrow$ điểm E nằm trong mặt cầu (S).

Gọi H là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P), A và B là hai giao điểm của Δ với (S).

Khi đó, AB nhỏ nhất $\Leftrightarrow AB\perp IE$, mà $AB\perp IH$ nên $AB\perp(HIE) \Rightarrow AB\perp IE$.

Suy ra: $\overrightarrow{u_\Delta}=\left[\overrightarrow{n_P};\overrightarrow{EI}\right]=(5;-5;0)=5(1;-1;0)$.

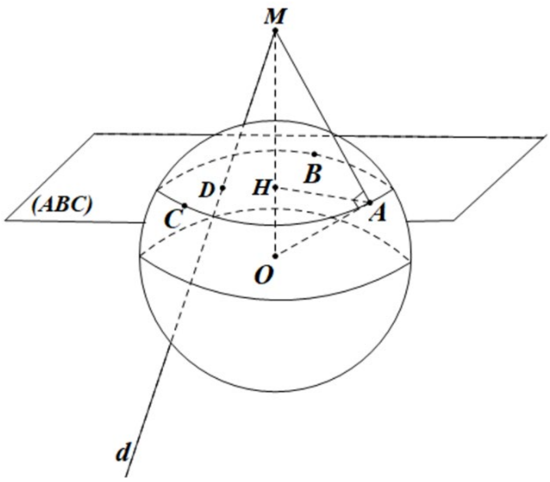
Vậy phương trình của Δ là $\begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \\ z=3 \end{cases}$.

Câu 44.6: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $x^2+y^2+z^2=9$ và điểm $M(x_0;y_0;z_0)\in d:\begin{cases}x=1+t\\y=1+2t\\z=2-3t\end{cases}$. Ba điểm A, B, C phân biệt cùng thuộc mặt cầu sao cho MA, MB, MC là tiếp tuyến của mặt cầu. Biết rằng mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $D(1;1;2)$. Tổng $T=x_0^2+y_0^2+z_0^2$ bằng

A. 30. **B.** 26. **C.** 20. **D.** 21.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $M(x_0;y_0;z_0)\in d:\begin{cases}x=1+t\\y=1+2t\\z=2-3t\end{cases}\Rightarrow x_0+y_0+z_0=4$.

Mặt cầu có phương trình $x^2+y^2+z^2=9\Rightarrow$ tâm $O(0;0;0)$, bán kính $R=3$.

MA, MB, MC là tiếp tuyến của mặt cầu $\Rightarrow MO\perp(ABC)$.

$\Rightarrow(ABC)$ đi qua $D(1;1;2)$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{OM}=(x_0;y_0;z_0)$ có phương trình dạng:

$x_0(x-1)+y_0(y-1)+z_0(z-2)=0$.

MA là tiếp tuyến của mặt cầu tại $A\Rightarrow\Delta MOA$ vuông tại $A\Rightarrow OH.OM=OA^2=R^2=9$.

Với H là hình chiếu của O lên (ABC) $(OH+HM=OM)$, ta có:

$$d(O;(ABC))=OH=\frac{|-x_0-y_0-2z_0|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}=\frac{|x_0+y_0+z_0+z_0|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}=\frac{|z_0+4|}{OM}\Rightarrow OH.OM=|z_0+4|.$$

$\Rightarrow|z_0+4|=9\Leftrightarrow z_0=5\vee z_0=-13$.

* Với $z_0=5\Rightarrow M(0;-1;5)\Rightarrow T=26$ nhận do: $OM=\sqrt{26};OH=\dfrac{|z_0+4|}{OM}=\dfrac{9}{\sqrt{26}}$;

$pt(ABC):-y+5z-9=0\Rightarrow MH=d(M;(ABC))=\dfrac{17}{\sqrt{26}}$.

$\Rightarrow OH+HM=OM$

* Với $z_0=-13\Rightarrow M(6;11;-13)\Rightarrow$ loại do: $OM=\sqrt{326};OH=\dfrac{9}{\sqrt{326}}$;

$(ABC):6x+11y-13z+9=0\Rightarrow MH=d(M;(ABC))=\dfrac{335}{\sqrt{326}}$.

$\Rightarrow OH+HM\neq OM$ (loại)

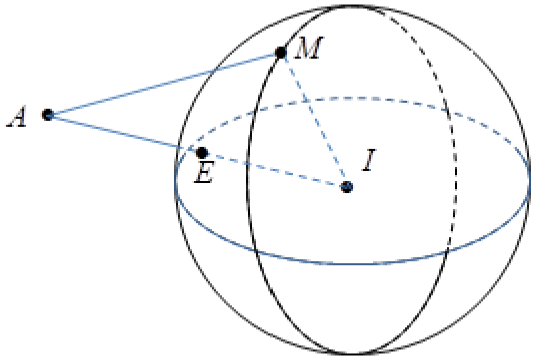
Câu 44.7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$ và điểm $A(2;2;2)$. Xét các điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho đường thẳng AM luôn tiếp xúc với (S)

. Khi đó M luôn thuộc mặt phẳng cố định có phương trình là

A. $x+y+z-6=0$. **B.** $x+y+z-4=0$. **C.** $3x+3y+3z-8=0$. **D.** $3x+3y+3z-4=0$.

Lời giải

Chọn B



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$, bán kính $R=1$. $A(2;2;2)$

Ta luôn có $\widehat{AMI}=90^{\circ}$, suy ra điểm M thuộc mặt cầu (S_1) tâm E là trung điểm của AI đường kính AI.

Với $E\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$, bán kính $R_1=IE=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Phương trình mặt cầu (S_1): $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-3x-3y-3z+6=0$.

Vậy điểm M có tọa độ thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1\\ x^2+y^2+z^2-3x-3y-3z+6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+2=0\\ x^2+y^2+z^2-3x-3y-3z+6=0\end{cases}$$

Trừ theo vế hai phương trình cho nhau ta được: $x+y+z-4=0$.

Câu 44.8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;6), B(0;1;0)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$. Mặt phẳng $(P): ax+by+cz-2=0$ đi qua A, B và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T=a+b+c$

A. $T=3$. **B.** $T=4$. **C.** $T=5$. **D.** $T=2$.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=5$

Ta có $\begin{cases}A\in(P)\\ B\in(P)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a-2b+6c-2=0\\ b-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2-2c\\ b=2\end{cases}$

Bán kính của đường tròn giao tuyến là $r=\sqrt{R^2-\left[d\left(I;(P)\right)\right]^2}=\sqrt{25-\left[d\left(I;(P)\right)\right]^2}$

Bán kính của đường tròn giao tuyến nhỏ nhất khi và chỉ khi $d\left(I;(P)\right)$ lớn nhất

Ta có $d\left(I,(P)\right)=\frac{|a+2b+3c-2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|2-2c+4+3c-2|}{\sqrt{(2-2c)^2+2^2+c^2}}=\sqrt{\frac{(c+4)^2}{5c^2-8c+8}}$

Xét $f(c)=\sqrt{\frac{(c+4)^2}{5c^2-8c+8}}\Rightarrow f'(c)=\frac{-48c^2-144c+192}{(5c^2-8c+8)^2\sqrt{\frac{(c+4)^2}{5c^2-8c+8}}}$; $f'(c)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=1\\ c=-4\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

c	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$f'(c)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(c)$	$1/\sqrt{5}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt{5}$	$\searrow$	$1/\sqrt{5}$

Vậy $d\left(I;(P)\right)$ lớn nhất bằng $\sqrt{5}$ khi và chỉ khi $c=1\Rightarrow a=0,b=2\Rightarrow a+b+c=3$.

Câu 44.9: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;5;-2)$, $B(-1;3;2)$ và mặt phẳng $(P): 2x+y-2z+9=0$. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với (P) tại điểm C. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của độ dài OC. Giá trị M^2+m^2 bằng

A. 76. **B.** 78. **C.** 72. **D.** 74.

Lời giải

Chọn A

Ta có $AB:\begin{cases} x=3-2t \\ y=5-t \\ z=-2+2t \end{cases}$. Gọi $M(3-2t;5-t;-2+2t)$ là giao điểm của AB và mặt phẳng (P).

$M\in(P)$ nên $2(3-2t)+(5-t)-2(-2+2t)+9=0\Leftrightarrow t=\dfrac{8}{3}\Rightarrow M\left(\dfrac{-7}{3};\dfrac{7}{3};\dfrac{10}{3}\right)\Rightarrow OM=\sqrt{22}$.

$\Rightarrow\begin{cases} \overrightarrow{AM}=\left(\dfrac{-16}{3};\dfrac{-8}{3};\dfrac{16}{3}\right) \\ \overrightarrow{BM}=\left(\dfrac{-4}{3};\dfrac{-2}{3};\dfrac{4}{3}\right) \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} AM=8 \\ BM=2 \end{cases}\Rightarrow MC^2=MA.MB=16\Leftrightarrow MC=4$ do MC là tiếp tuyến của mặt cầu (S).

Khi đó tập hợp điểm C là đường tròn giao tuyến (C) nằm trên (P) có tâm là $M\left(\dfrac{-7}{3};\dfrac{7}{3};\dfrac{10}{3}\right)$ và bán kính là 4.

Gọi C' và C'' lần lượt là hai điểm trên đường tròn (C) sao cho OC' và OC'' lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của độ dài OC, khi đó C', M và C'' theo thứ tự thẳng hàng.

Do đó $M^2+m^2=OC'^2+OC''^2=2OM^2+\dfrac{C'C''^2}{2}=2.\sqrt{22}^2+\dfrac{8^2}{2}=76$.

Câu 44.10: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=27$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua hai điểm $A(0;0;-4), B(2;0;0)$ và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) sao cho khối nón đỉnh là tâm của (S) và đáy là (C) có thể tích lớn nhất. Biết phương trình của (α) có dạng $ax+by-z+c=0,(a,b,c\in\mathbb{R})$. Giá trị của $a-b+c$ bằng

A. -4. **B.** 0. **C.** 8. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;3)$ và bán kính $R=3\sqrt{3}$.

Điểm $A(0;0;-4)\in(\alpha)\Rightarrow 4+c=0\Rightarrow c=-4$.

Điểm $B(2;0;0)\in(\alpha)\Rightarrow 2a+c=0\Rightarrow a=-\dfrac{c}{2}=2$.

Mặt phẳng (α) có dạng $2x+by-z-4=0$.

Gọi d là khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (α) và r là bán kính của đường tròn (C).

Khi đó khối nón có đỉnh I và đáy là đường tròn (C) có thể tích là:

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 d=\frac{1}{3}\pi\left(R^2-d^2\right)d=\frac{1}{3}\pi\left(27-d^2\right)d$$

Đặt $f(d)=\left(27-d^2\right)d=-d^3+27d,\left(0<d<3\sqrt{3}\right)$.

Suy ra $f'(d)=-3d^2+27$ và $f'(d)=0\Leftrightarrow -3d^2+27=0\Leftrightarrow d=3$ (vì $0<d<3\sqrt{3}$).

Bảng biến thiên:

d	0		3		$3\sqrt{3}$
$f'(d)$		$+$	0	$-$	
$f(d)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $f(d)$ đạt giá trị lớn nhất khi $d=3$ hay thể tích khối nón đạt giá trị lớn nhất khi $d=3\Leftrightarrow d^2=9$.

Mà $d=d(I,(\alpha))=\frac{|-5-2b|}{\sqrt{5+b^2}}$ nên $\frac{(-5-2b)^2}{5+b^2}=9\Leftrightarrow 5b^2-20b+20=0\Leftrightarrow b=2$.

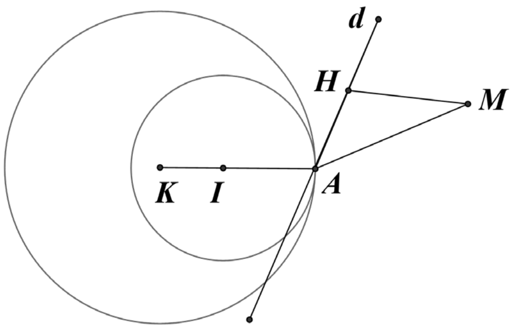
Vậy $a-b+c=-4$.

Câu 44.11: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S):(x-1)^2+y^2+(z-3)^2=36$ và $(S'):(x+1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=81$. Gọi d là đường thẳng tiếp xúc với cả hai mặt cầu trên và cách điểm $M(4;-1;-7)$ một khoảng lớn nhất. Gọi $E(m;n;p)$ là giao điểm của d với mặt phẳng $(P):2x-y+z-17=0$. Biểu thức $T=m+n+p$ có giá trị bằng

A. $T=81$. **B.** $T=92$. **C.** $T=79$. **D.** $T=88$.

Lời giải

Chọn D



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;3)$ và có bán kính $R=6$.

Mặt cầu (S') có tâm $K(-1;1;1)$ và có bán kính $R'=9$.

Lại có $\overrightarrow{KI}=(2;-1;2)\Rightarrow KI=\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=3\Rightarrow KI=R'-R$ suy ra hai mặt cầu tiếp xúc trong tại điểm $A(a;b;c)$, mà $KA=R'=9=3KI\Rightarrow\overrightarrow{KA}=3\overrightarrow{KI}\Rightarrow\begin{cases}a+1=6\\b-1=-3\\c-1=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=5\\b=-2\\c=7\end{cases}$.

Do đó $A(5;-2;7)$. Vì d là đường thẳng tiếp xúc với cả hai mặt cầu trên nên d đi qua A và vuông góc với KI. Kẻ $MH\perp d\Rightarrow MH\le MA$, nên MH lớn nhất khi và chỉ khi H trùng A.
Khi đó d là đường thẳng đi qua A và vuông góc với KI và AM suy ra d có một véc tơ chỉ phương $\vec{u}=\left[\overrightarrow{KI},\overrightarrow{AM}\right]$. Ta có $\overrightarrow{AM}=(-1;1;-14)\Rightarrow\vec{u}=(12;26;1)$.

Nên phương trình tham số của d là $\begin{cases} x = 5 + 12t \\ y = -2 + 26t \\ z = 7 + t \end{cases}$.

Vì $E = d \cap (P)$ suy ra $E(5+12t; -2+26t; 7+t)$.

Vì $E \in (P)$ suy ra $2(5+12t) - (-2+26t) + (7+t) - 17 = 0 \Leftrightarrow t = 2$ suy ra $E(29;50;9)$.

Mà $E(m;n;p)$ suy ra $\begin{cases} m = 29 \\ n = 50 \\ p = 9 \end{cases}$. Vậy $T = 88$.

Câu 44.12: Cho hai đường thẳng $(d): \dfrac{x}{4} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-3}{1}$ và $(d'): \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{1}$. Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu đi qua $A(3;2;2)$ và tiếp xúc với đường thẳng (d). Biết I nằm trên (d') và $a < 2$. Tính $T = a + b + c$

A. 8. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có $M(0;2;3) \in d$, $I = (1+t;t;1+t) \in d' \Rightarrow \overrightarrow{AI} = (t-2;t-2;t-1) \Rightarrow AI = \sqrt{3t^2 - 10t + 9}$.

$\overrightarrow{MI} = (t+1;t-2;t-2) \Rightarrow \left[\overrightarrow{MI}, \vec{u}\right] = (0;3t-9;-3t+9) \Rightarrow d(I,d) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{u_d}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|} = |t-3|$.

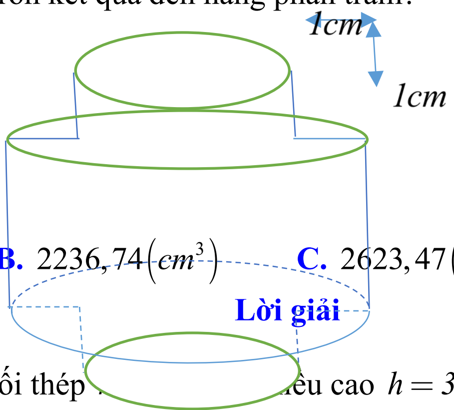
Mặt khác mặt cầu đi qua $A(3;2;2)$ và tiếp xúc với đường thẳng (d) nên $AI = d(I,d)$

$\sqrt{3t^2 - 10t + 9} = |t-3| \Leftrightarrow 2t^2 - 4t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 2(loai) \end{array}\right.$

Khi đó: $a = 1, b = 0, c = 1 \Rightarrow T = 2$

CÂU TƯƠNG TỰ CÂU 45 ĐỀ THAM KHẢO 2024

Câu 45.1: Để chế tạo một chi tiết máy, từ một khối thép hình trụ có đường kính $10cm$ và chiều cao $30cm$, người ta tiện bỏ xung quanh hai đầu rộng $1cm$ và sâu $1cm$ (tham khảo hình vẽ). Tinh thể tích của chi tiết máy đó, làm tròn kết quả đến hàng phần trăm?



A. $2326,47\left(cm^3\right)$ **B.** $2236,74\left(cm^3\right)$ **C.** $2623,47\left(cm^3\right)$ **D.** $2326,74\left(cm^3\right)$

Lời giải

Chọn D

Giả thiết cho bán kính khối thép ... ều cao $h = 30cm$

Thể tích khối thép là $V_1 = \pi.r^2.h = \pi(5)^2.30$.

Sau khi tiện thì phần thép hai đầu có bán kính là $r' = 4cm$ và chiều cao phần tiện là $h' = 1cm$

Thể tích khối thép ở hai đầu bị tiện bỏ là

$V_2 = \pi.r^2.h' - \pi.r'^2.h' = \pi.h'\left(r^2 - r'^2\right) = \pi.1\left(5^2 - 4^2\right) = 9\pi$.

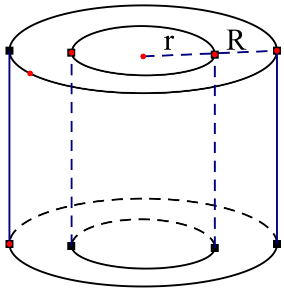
Thể tích chi tiết máy là: $V = V_1 - V_2 = 750\pi - 9\pi = 741\pi \approx 2326,74\ \left(cm^3\right)$

Câu 45.2: Người ta cần đổ một ống cống thoát nước hình trụ với chiều cao $2m$, độ dày thành ống là $10cm$. Đường kính ống là $50cm$. Tính lượng bê tông cần dùng để làm ra ống thoát nước đó (làm tròn đến 2 chữ số thập phân sau dấu phẩy).

A. $0,57\left(m^3\right)$. **B.** $0,14\left(m^3\right)$. **C.** $1,57\left(m^3\right)$. **D.** $0,25\left(m^3\right)$.

Lời giải

Chọn D



Gọi R,r lần lượt là bán kính đáy của hình trụ lớn và hình trụ nhỏ

$\Rightarrow R=0,25m$ và $r=0,15m$.

Thể tích hình trụ lớn là $V_1=\pi.R^2.h=\pi(0,25)^2.2$.

Thể tích hình trụ nhỏ là $V_2=\pi.r^2.h=\pi.(0,15)^2.2$

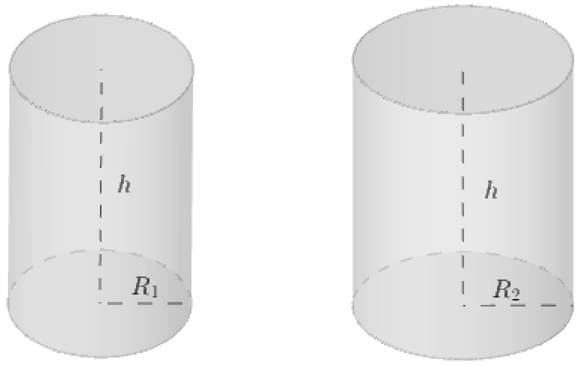
Lượng bê tông cần dùng là $V=V_1-V_2=2\pi(0,25)^2-2\pi(0,15)^2\approx 0,25\left(m^3\right)$.

Câu 45.3: Một cơ sở sản xuất có hai bể nước hình trụ có chiều cao bằng nhau, bán kính đáy lần lượt bằng $1m$ và $1,2m$. Chủ cơ sở dự định làm một bể nước mới hình trụ, có cùng chiều cao và có thể tích bằng tổng thể tích của hai bể nước trên. Bán kính đáy của bể nước dự định làm **gần nhất** với kết quả nào dưới đây?

A. $1,8m.$. **B.** $1,4m.$. **C.** $2,2m.$. **D.** $1,6m.$

Lời giải

Chọn D



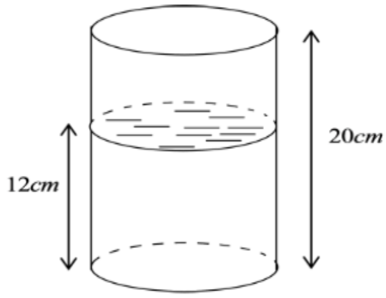
$V_1=\pi R_1^2h=\pi h$ và $V_2=\pi R_2^2h=\dfrac{36\pi}{25}h.$

Theo đề bài:

$V=V_1+V_2=V_1=\pi h+\dfrac{36\pi}{25}h=\dfrac{61\pi}{25}h=\pi R^2h.$

$\Leftrightarrow R^2=\dfrac{61}{25}\Leftrightarrow R=1,56(m)$ $(V,R$ lần lượt là thể tích và bán kính của bể nước cần tính)

Câu 45.4: Một cốc hình trụ có bán kính đáy bằng 3cm, chiều cao 20cm, trong cốc đang có một ít nước, khoảng cách giữa đáy cốc và mặt nước là 12cm. Một con quạ muốn uống được nước trong cốc thì mặt nước phải cách miệng cốc không quá 6cm. Con quạ thông minh đã mổ những viên sỏi hình cầu có bán kính $0,8\,\text{cm}$ thả vào cốc để mực nước dâng lên. Hỏi để uống được nước, con quạ cần thả ít nhất bao nhiêu viên sỏi?



A. 26. **B.** 27. **C.** 28. **D.** 29.

Lời giải

Chọn B

Con quạ uống được nước đựng trong cốc khi mặt nước cách miệng cốc không quá $6\,cm$ nên mực nước dâng lên tối thiểu là $20-12-6=2\,\text{cm}$.

Thể tích nước tối thiểu cần tăng thêm là $V=\pi R^2h=\pi.3^2.2=18\pi\left(\text{cm}^3\right)$.

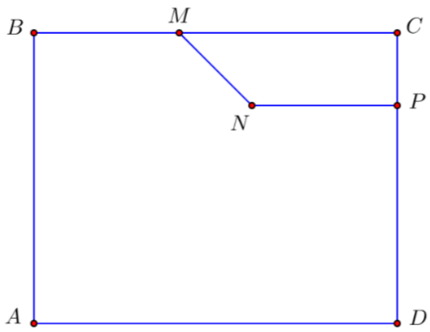
Thể tích nước tăng lên khi con quạ thả x viên sỏi là:

$V_1=x.\dfrac{4}{3}\pi r^3=x.\dfrac{4}{3}.\pi.0,8^3=\dfrac{256}{375}\pi x\left(\text{cm}^3\right)$.

Để con quạ uống được nước ta có điều kiện $V_1\ge V\Leftrightarrow\dfrac{256}{375}\pi x\ge 18\pi\Leftrightarrow x\ge 26,37$.

Vậy con quạ cần thả ít nhất 27 viên sỏi để uống được nước trong cốc.

Câu 45.5: Cho hình chữ nhật $ABCD$ với $AB=4cm$, $AD=5cm$. Cắt hình chữ nhật đã cho theo đường gấp khúc MNP như hình vẽ bên với $BM=2cm$, $NP=2cm$, $PD=3cm$ và giữ lại hình phẳng lớn (H). Tính thể tích V của vật thể tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục AB.



A. $V=75\pi\,\text{cm}^3$. **B.** $V=94\pi\,\text{cm}^3$. **C.** $V=\dfrac{94\pi}{3}\text{cm}^3$. **D.** $V=\dfrac{244\pi}{3}\text{cm}^3$.

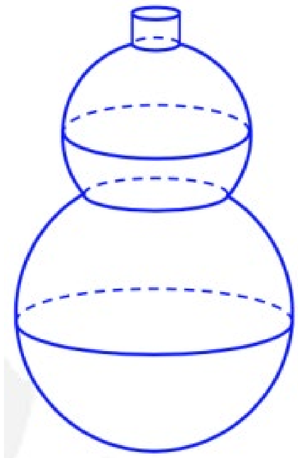
Lời giải

Chọn D

Thể tích vật thể tròn xoay tạo thành bằng tổng thể tích của khối trụ có $r=5$ cm, $h=3$ cm và thể tích của khối nón cụt có $r_1=2$ cm, $r_2=3$ cm, $h=1$ cm.

Vậy $V=\pi 5^2.3+\dfrac{\pi.1}{3}\left(2^2+3^2+2.3\right)=75\pi+\dfrac{19\pi}{3}=\dfrac{244\pi}{3}$ cm^3.

Câu 45.6: Người ta cắt hai hình cầu có bán kính lần lượt là $R=13cm$ và $r=\sqrt{41}\,cm$ để làm hồ lô đựng rượu như hình vẽ sau.

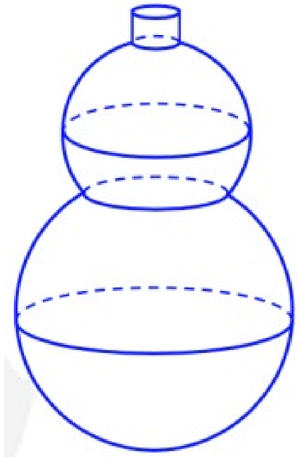


Biết đường tròn giao của hai hình cầu có bán kính $r' = 5cm$ và nút uống rượu là một hình trụ có bán kính đáy bằng $\sqrt{5}cm$, chiều cao bằng $4cm$. Giả sử độ dày vỏ hồ lô không đáng kể. Hỏi hồ lô đựng được bao nhiêu lít rượu? (Kết quả làm tròn đến một chữ số sau dấu phẩy).

A. $9,5$. **B.** $10,2$. **C.** $8,2$. **D.** $11,4$.

Lời giải

Chọn B



Thể tích khối trụ trên cùng là $V_3 = \pi\left(\sqrt{5}\right)^2.4 = 20\pi\left(cm^3\right)$.

Phần dưới cùng là một chỏm cầu.

Khoảng cách từ tâm của cầu lớn đến đường tròn giao của hai cầu là

$\sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12(cm)$

Do đó khối chỏm cầu lớn có chiều cao $h = R + 12 = 13 + 12 = 25(cm)$ và có thể tích

$V_1 = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right) = \pi.25^2\left(13 - \frac{25}{3}\right) = \frac{8750\pi}{3}\left(cm^3\right)$.

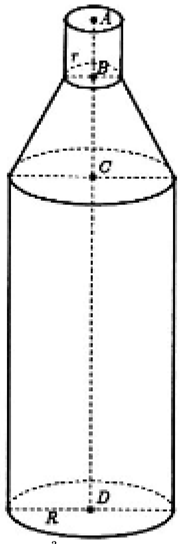
Phần ở giữa có thể tích bằng thể tích khối cầu nhỏ trừ đi thể tích hai khối chỏm cầu có chiều cao lần lượt là $h_1 = r - \sqrt{r^2 - r'^2} = \sqrt{41} - \sqrt{41 - 25} = \sqrt{41} - 4$;

$h_2 = r - \sqrt{r^2 - \sqrt{5}^2} = \sqrt{41} - \sqrt{41 - 5} = \sqrt{41} - 6$.

Do đó $V_2 = \frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{41}\right)^3 - \pi\left(\sqrt{41} - 4\right)^2\left(\sqrt{41} - \frac{\sqrt{41} - 4}{3}\right) - \pi\left(\sqrt{41} - 6\right)^2\left(\sqrt{41} - \frac{\sqrt{41} - 6}{3}\right)$

Suy ra $V = V_1 + V_2 + V_3 \approx 10220,648cm^3 \approx 10,2(l)$.

Câu 45.7: Phần không gian bên trong của chai nước ngọt có hình dạng như hình vẽ bên dưới.



Biết bán kính đáy chai $R=5\,cm$, bán kính cổ chai $r=2\,cm$, $AB=3\,cm$, $BC=6\,cm$ và $CD=16\,cm$. Tính thể tích phần không gian bên trong của chai nước ngọt đó.

A. $V=495\pi\,cm^3$. **B.** $V=490\pi\,cm^3$. **C.** $V=462\pi\,cm^3$. **D.** $V=412\pi\,cm^3$.

Lời giải

Chọn B

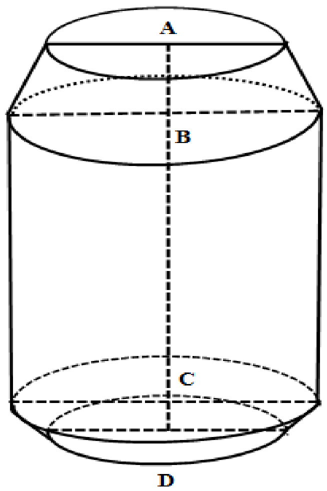
+ Khối trụ có bán kính đáy $r=2\,cm$ và chiều cao $AB=3\,cm$ nên có thể tích là $V_1=\pi.2^2.3=12\pi\,cm^3$.

+ Khối nón cụt có bán kính đáy lần lượt là $R=5\,cm$, $r=2\,cm$ và chiều cao $h=BC=6\,cm$ nên có thể tích là $V_2=\frac{1}{3}\pi h\left(R^2+r^2+Rr\right)=78\pi\,cm^3$.

+ Khối trụ có bán kính đáy $R=5\,cm$ và chiều cao $DC=16\,cm$ nên có thể tích là $V_3=\pi.5^2.16=400\pi\,cm^3$.

Vậy thể tích phần không gian bên trong của chai nước ngọt đó là $V=V_1+V_2+V_3=490\pi\,cm^3$.

Câu 45.8: Tính thể tích V của một lon nước ngọt có hình dạng là một vật thể tròn xoay như hình vẽ bên. Biết bán kính nắp và đáy lon bằng nhau và bằng $2,5\,cm$; bán kính thân chai bằng $3\,cm$ và $AB=1,5\,cm, BC=8\,cm, CD=0,5\,cm,$ (giả thiết độ dày vỏ lon không đáng kể).



A. $V=\frac{379\pi}{4}\left(cm^3\right)$. **B.** $V=\frac{523\pi}{6}\left(cm^3\right)$.

C. $V=95\pi\left(cm^3\right)$. **D.** $V=79\pi\left(cm^3\right)$.

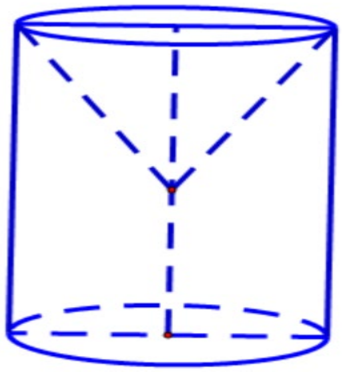
Lời giải

Chọn B

Thể tích lon nước bằng tổng thể tích của khối nón cụt có $r_1 = 2,5\,cm, r_2 = 3\,cm, h = 1,5\,cm$; thể tích khối trụ có $r = 3\,cm, h = 8\,cm$; thể tích của khối nón cụt có $r_1 = 2,5\,cm, r_2 = 3\,cm, h = 0,5\,cm$.

Thể tích lon nước là $V = \pi 3^2.8 + \dfrac{\pi(1,5+0,5)}{3}\left(2,5^2 + 3^2 + 2,5.3\right) = \dfrac{523\pi}{6}\left(cm^3\right)$.

Câu 45.9: Để chế tạo dụng cụ như hình, từ một khối thép hình trụ có bán kính 10 cm và chiều cao 20 cm người ta khoét bỏ một hình nón có bán kính đáy 10 cm và chiều cao 10 cm (tham khảo hình vẽ sau). Tính thể tích của dụng cụ đó, làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn.



A. $6235,988\text{ cm}^3$. **B.** $5235,988\text{ cm}^3$.
C. $5325,988\text{ cm}^3$. **D.** $4235,988\text{ cm}^3$.

Lời giải

Chọn B

Thể tích của khối trụ là: $V_1 = \pi.10^2.20 = 2000\pi$.

Thể tích của khối nón bị khoét là: $V_2 = \dfrac{1}{3}\pi.10^2.10 = \dfrac{1000\pi}{3}$.

Vậy thể tích của dụng cụ là: $V = V_1 - V_2 = 2000\pi - \dfrac{1000\pi}{3} = \dfrac{5000\pi}{3} = 5235,988\ \left(\text{cm}^3\right)$.

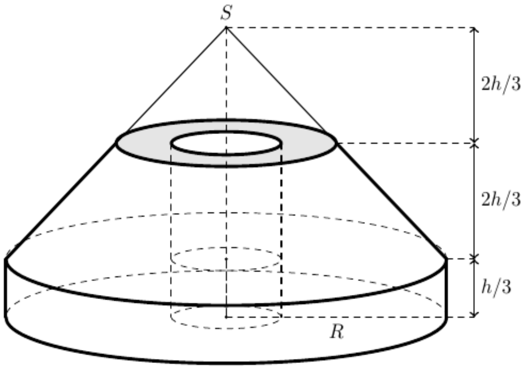
Câu 45.10: Để định vị một trụ điện, người ta cần đúc một khối bê tông có chiều cao là $h = 1,8\text{ m}$ gồm

+ Phần dưới có dạng hình trụ bán kính đáy $R = 1\text{ m}$ và có chiều cao bằng $\dfrac{1}{3}h$;

+ Phần trên có dạng hình nón bán kính đáy bằng R đã bị cắt bỏ bớt một phần hình nón có bán kính đáy bằng $\dfrac{1}{2}R$ ở phía trên (*người ta thường gọi hình đó là hình nón cụt);*

+ Phần ở giữa rỗng có dạng hình trụ bán kính đáy bằng $\dfrac{1}{4}R$ *(tham khảo hình vẽ bên dưới).*

Thể tích của khối bê tông *(làm tròn đến chữ số thập phân nghìn)* bằng



A. $3,881\text{m}^3$ **B.** $2,731\text{m}^3$ **C.** $3,203\text{m}^3$ **D.** $3,731\text{m}^3$

Lời giải

Chọn D

Thể tích hình trụ bán kính đáy R và có chiều cao bằng $\frac{h}{3}$: $V_1 = \pi R^2.\frac{h}{3} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$.

Thể tích hình nón cụt bán kính đáy lớn R, bán kính đáy bé $\frac{R}{2}$ và có chiều cao bằng $\frac{2h}{3}$:

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi R^2.\frac{4h}{3} - \frac{1}{3}\pi\frac{R^2}{4}.\frac{2h}{3} = \frac{7}{18}\pi R^2 h.$$

Thể tích hình trụ bán kính đáy $\frac{R}{4}$ và có chiều cao bằng h *(phần rỗng ở giữa)*:

$$V_3 = \pi\frac{R^2}{16}.h = \frac{1}{16}\pi R^2 h.$$

Thể tích của khối bê tông bằng:

$$V = V_1 + V_2 - V_3 = \pi R^2 h.\left(\frac{1}{3} + \frac{7}{18} - \frac{1}{16}\right) = \frac{95}{144}\pi R^2.h \approx 3,731\,\mathrm{m}^3.$$

Câu 45.11: Một chiếc bút chì có dạng hình trụ có chiều cao 200 mm và bán kính đáy 3 mm. Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng hình trụ có chiều cao bằng chiều cao của bút và đáy là hình tròn có bán kính bằng 1 mm. Tính thể tích của phần thân bút chì làm bằng gỗ (với $\pi = 3,14$)

A. 502 m^3. **B.** $5,024.10^{-6}\text{ m}^3$.

C. $5,024\text{ m}^3$. **D.** $6,024.10^{-6}\text{ m}^3$.

Lời giải

Chọn B

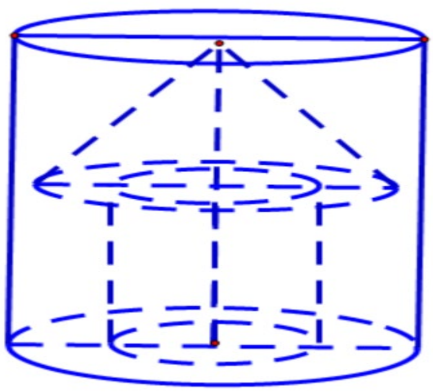
Thể tích phần phần lõi được làm bằng than chì: $V_r = \pi R^2 h = \pi.10^{-6}.0,2 = 0,2.10^{-6}\pi\ \left(m^3\right)$.

Thể tích chiếc bút chì: $V = \pi R^2 h = \pi.9.10^{-6}.0,2 = 1,8.10^{-6}\pi\ \left(m^3\right)$.

Thể tích phần thân bút chì được làm bằng gỗ:

$V_t = V - V_r = 1,8.10^{-6}\pi - 0,2.10^{-6}\pi = 5,024.10^{-6}\ \left(m^3\right)$.

Câu 45.12: Để chế tạo một khuôn như hình từ một khối thép hình trụ có chiều cao 20 cm và bán kính đáy 20 cm, người ta khoét bỏ một hình nón có bán kính đáy 15 cm và chiều cao 10 cm và một hình trụ có chiều cao bán kính đáy 10 cm và chiều cao 10 cm. Tính thể tích của dụng cụ đó, với $\pi = 3,14$.



A. 8988 cm^3. **B.** 19625 cm^3.

C. 588 cm^3. **D.** 9625 cm^3.

Lời giải

Chọn B

Thể tích của khối trụ thép là: $V_1 = \pi.20^2.20 = 8000\pi$.

Thể tích của khối nón bị khoét là: $V_2 = \frac{1}{3}\pi.15^2.10 = \frac{2250\pi}{3}$.

Thể tích của khối trụ bị khoét là: $V_3 = \pi.10^2.10 = 1000\pi$.

Vậy thể tích của dụng cụ là: $V = V_1 - V_2 - V_3 = 8000\pi - \frac{2250\pi}{3} - 1000\pi = 6250\pi = 19625\ \left(\text{cm}^3\right)$.

Câu 45.13: Người ta làm tạ tập cơ tay như hình vẽ với hai đầu là hai khối trụ bằng nhau và tay cầm cũng là khối trụ. Biết hai đầu là hai khối trụ đường kính đáy bằng 12, chiều cao bằng 6, chiều dài tạ bằng 30 và bán kính tay cầm là 2. Hãy tính thể tích vật liệu làm nên tạ tay đó.

A. 108π. **B.** 6480π. **C.** 502π. **D.** 504π.

Lời giải

Chọn D

Gọi h_1, R_1, V_1 lần lượt là chiều cao, bán kính đáy, thể tích khối trụ nhỏ mỗi đầu.

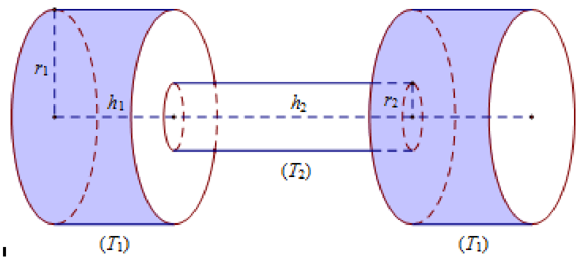
$V_1 = h_1.\pi.R_1^2 = 6.\pi.6^2 = 216\pi$.

Gọi h_2, R_2, V_2 lần lượt là chiều cao, bán kính đáy, thể tích của tay cầm.

$V_2 = h_2.\pi.R_2^2 = (30-2.6).\pi.2^2 = 72\pi$.

Thể tích vật liệu làm nên tạ tay bằng $V = 2V_1 + V_2 = 504\pi$.

Câu 45.14: Một chiếc tạ tay có hình dạng gồm 3 khối trụ, trong đó hai khối trụ ở hai đầu bằng nhau và khối trụ làm tay cầm ở giữa. Gọi khối trụ làm đầu tạ là (T_1) và khối trụ làm tay cầm là (T_2) lần lượt có bán kính và chiều cao tương ứng là r_1, h_1, r_2, h_2 thỏa mãn $r_1 = 4r_2$, $h_1 = \frac{1}{2}h_2$ (tham khảo hình vẽ).



Biết rằng thể tích của khối trụ tay cầm (T_2) bằng $30\ \left(cm^3\right)$ và chiếc tạ làm bằng inox có khối lượng riêng là $D = 7,7g/cm^3$. Khối lượng của chiếc tạ tay bằng

A. $3,927(kg)$. **B.** $2,927(kg)$. **C.** $3,279(kg)$. **D.** $2,279(kg)$.

Lời giải

Chọn A

Thể tích của hai khối trụ làm đầu tạ (T_1):

$$V_1 = 2\pi r_1^2 h_1 = 2\pi(4r_2)^2 \frac{1}{2}h_2 = 16\pi r_2^2 h_2 = 16.30 = 480\left(cm^3\right).$$

Tổng thể tích của chiếc tạ tay: $V = V_1 + V_2 = 480 + 30 = 510\left(cm^3\right)$.

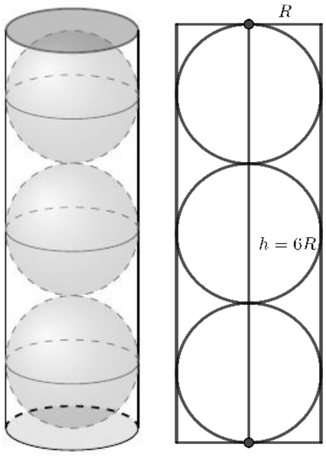
Khối lượng của chiếc tạ: $m = D.V = 7,7.510 = 3927(g) = 3,927(kg)$.

Câu 45.15: Một hộp đựng bóng tennis có dạng hình trụ. Biết rằng hộp chứa vừa khít ba quả bóng tennis được xếp theo chiều dọc, các quả bóng tennis có kích thước như nhau. Thể tích phần không gian còn trống chiếm tỉ lệ $a\%$ so với hộp đựng bóng tennis. Số a gần đúng với số nào sau đây?

A. 50. **B.** 66. **C.** 30. **D.** 33.

Lời giải

Chọn D



Đặt h, R lần lượt là đường cao và bán kính hình tròn đáy của hộp đựng bóng tennis.
Dễ thấy mỗi quả bóng tennis có cùng bán kính R với hình tròn đáy của hộp đựng bóng tennis và $h = 6R$.
Do đó ta có:

Tổng thể tích của ba quả bóng là $V_1 = 3.\frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^3$;

Thể tích của hình trụ (hộp đựng bóng) là $V_0 = \pi R^2 h = 6\pi R^3$;

Thể tích phần còn trống của hộp đựng bóng là $V_2 = V_0 - V_1 = 2\pi R^3$.

Khi đó tỉ lệ phần không gian còn trống so với hộp đựng bóng là $\frac{V_2}{V_0} = \frac{1}{3} \approx 0,33$.

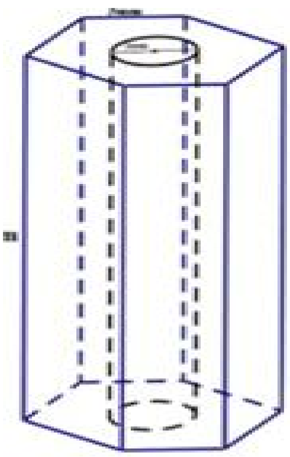
Suy ra $a \approx 33$.

Câu 45.16: Một công ty sản xuất bút chì có dạng hình lăng trụ lục giác đều có chiều cao $18\,\text{cm}$ và đáy là hình lục giác nội tiếp đường tròn đường kính $1\,\text{cm}$. Bút chì được cấu tạo từ hai thành phần chính là than chì và bột gỗ ép, than chì là một khối trụ ở trung tâm có đường kính $\frac{1}{4}\text{cm}$, giá thành 540 đồng$/\text{cm}^3$. Bột gỗ ép xung quanh có giá thành 100 đồng$/\text{cm}^3$. Tính giá của một cái bút chì được công ty bán ra biết giá nguyên vật liệu chiếm $15,58\%$ giá thành sản phẩm.

A. 10000 đồng. **B.** 8000 đồng. **C.** 5000 đồng. **D.** 3000 đồng.

Lời giải

Chọn A



Gọi R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp lục giác đều và bán kính của lõi than chì.

Ta có $R = \frac{1}{2}\text{cm}$ và $r = \frac{1}{8}\text{cm}$.

Suy ra diện tích của lục giác đều là $S = 6.R^2\frac{\sqrt{3}}{4} = 6.\frac{1}{4}.\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Gọi V là thể tích của khối lăng trụ lục giác đều. V_1, V_2 lần lượt là thể tích của khối than chì và bột gỗ dùng để làm ra một cây bút chì.

Ta có $V = S.h = \frac{3\sqrt{3}}{8}.18 = \frac{27\sqrt{3}}{4}\left(\text{cm}^3\right)$; $V_1 = \pi r^2 h = \pi.\frac{1}{8^2}.18 = \frac{9\pi}{32}\left(\text{cm}^3\right)$.

$\Rightarrow V_2 = V - V_1 = \frac{27\sqrt{3}}{4} - \frac{9\pi}{32}\left(\text{cm}^3\right)$.

Do đó, giá nguyên vật liệu dùng để làm một cây bút chì là $540V_1 + 100V_2$ (đồng).

Vậy giá bán ra của cây bút chì là

$$\left(540V_1 + 100V_2\right).\frac{100}{15,58} = \left[540.\frac{9\pi}{32} + 100\left(\frac{27\sqrt{3}}{4} - \frac{9\pi}{32}\right)\right].\frac{100}{15,58} \approx 10000 \text{ (đồng)}.$$

CÂU TƯƠNG TỰ CÂU 46 ĐỀ THAM KHẢO 2024

Câu 46.1: Cho a là số nguyên dương lớn nhất thỏa mãn $3\log_3\left(1+\sqrt{a}+\sqrt[3]{a}\right)>2\log_2\sqrt{a}$. Tìm phần nguyên của $\log_2(2024a)$.

A. 14. **B.** 22. **C.** 16. **D.** 19.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\sqrt[6]{a}, t>0$, từ giả thiết ta có $3\log_3\left(1+t^3+t^2\right)>2\log_2 t^3$

$\Leftrightarrow f(t)=\log_3\left(1+t^3+t^2\right)-\log_2 t^2>0$

$$f'(t)=\frac{1}{\ln 3}.\frac{3t^2+2t}{t^3+t^2+1}-\frac{2}{\ln 2}.\frac{1}{t}=\frac{(3\ln 2-2\ln 3)t^3+(2\ln 2-2\ln 3)t^2-2\ln 3}{\ln 2.\ln 3.\left(t^4+t^3+t\right)}$$

Vì đề xét a nguyên dương nên ta xét $t\geq 1$.

Xét $g(t)=(3\ln 2-2\ln 3)t^3+(2\ln 2-2\ln 3)t^2-2\ln 3$

Ta có $g'(t)=3\ln\frac{8}{9}t^2+2\ln\frac{4}{9}t=t\left(3\ln\frac{8}{9}t+2\ln\frac{4}{9}\right)$

$$g'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{2\ln\left(\frac{9}{4}\right)}{3\ln\left(\frac{8}{9}\right)}\approx -4,59<0 \\ t=0\end{array}\right..$$

Lập bảng biến thiên suy ra hàm số $g(t)$ ta được:

t	1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(t)$	$-$

Suy ra $g(t)\leq g(1)=5\ln 2-6\ln 3<0\Rightarrow f'(t)<0$.

Suy ra hàm số $f(t)$ luôn giảm trên khoảng $[1;+\infty)$.

Lại có $f(4)=0$ nên $t=4$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(t)=0$.

Suy ra $f(t)>0\Leftrightarrow f(t)>f(4)\Leftrightarrow t<4\Leftrightarrow\sqrt[6]{a}<4\Leftrightarrow a<4096$.

Nên số nguyên a lớn nhất thỏa mãn giả thiết bài toán là $a=4095$.

Lúc đó $\log_2(2024a)\approx 22,9826$. Nên phần nguyên của $\log_2(2024a)$ bằng 22.

Câu 46.2: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_3\frac{2x+y+1}{x+y}=x+2y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\frac{1}{x}+\frac{2}{\sqrt{y}}$.

A. $3+\sqrt{3}$. **B.** 4. **C.** $3+2\sqrt{3}$. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_3\frac{2x+y+1}{x+y}=x+2y \Leftrightarrow \log_3(2x+y+1)-\log_3(x+y)=x+2y$

$\Leftrightarrow \log_3(2x+y+1)=\log_3(3x+3y)+x+2y-1$

$\Leftrightarrow \log_3(2x+y+1)+2x+y+1=\log_3(3x+3y)+3x+3y$ (*)

Xét hàm số $f(t)=\log_3 t+t$ với $t>0$.

Khi đó $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 3}+1>0,\forall t>0$, suy ra hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Do đó $(*)\Leftrightarrow 2x+y+1=3x+3y\Leftrightarrow x+2y=1\Leftrightarrow x=1-2y$.

Vì $x,y>0\Rightarrow 0<y<\dfrac{1}{2}$.

Xét $T=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{\sqrt{y}}=\dfrac{1}{1-2y}+\dfrac{2}{\sqrt{y}}=\dfrac{1}{1-2y}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có $T\ge 3.\sqrt[3]{\dfrac{1}{y(1-2y)}}=3.\sqrt[3]{\dfrac{2}{2y(1-2y)}}\ge 3.\sqrt[3]{8}=6$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x=1-2y\\1-2y=\sqrt{y}\\2y=1-2y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\y=\dfrac{1}{4}\end{cases}$.

Câu 46.3: Cho $a,\ b,\ c$ là các số thực lớn hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{4}{\log_{\sqrt{bc}}a}+\frac{1}{\log_{ac}\sqrt{b}}+\frac{8}{3\log_{ab}\sqrt[3]{c}}$$

A. $P_{\min}=20$. **B.** $P_{\min}=10$. **C.** $P_{\min}=18$. **D.** $P_{\min}=12$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $P=\dfrac{4}{2\log_{bc}a}+\dfrac{1}{\frac{1}{2}\log_{ac}b}+\dfrac{8}{\log_{ab}c}=2\log_a bc+2\log_b ac+8\log_c ab$

$=2\log_a b+2\log_a c+2\log_b a+2\log_b c+8\log_c a+8\log_c b$

$=(2\log_a b+2\log_b a)+(2\log_a c+8\log_c a)+(2\log_b c+8\log_c b)$.

Vì $a,\ b,\ c$ là các số thực lớn hơn 1 nên: $\log_a b,\ \log_b a,\ \log_a c,\ \log_c a,\ \log_b c,\ \log_c b>0$. Do đó áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$P\ge 2\sqrt{2\log_a b.2\log_b a}+2\sqrt{2\log_a c.8\log_c a}+2\sqrt{2\log_b c.8\log_c b}=4+8+8=20$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\log_a b=\log_b a\\\log_a c=4\log_c a\\\log_b c=4\log_c b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b\\c=a^2\\c=b^2\end{cases}\Leftrightarrow a=b=\sqrt{c}>1$.

Vậy $P_{\min}=20$.

Câu 46.4: Gọi x,y là các số thực lớn hơn 1 thỏa mãn đẳng thức $1+\log_{2y}x=\log_y x$ và $A=\dfrac{x}{y^3}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó điểm $M(x;y)$ thuộc đồ thị hàm số nào trong các hàm số sau?

A. $y=x^3-4x^2+x-1$ **B.** $y=x^2-4x+1$. **C.** $y=\dfrac{x+2}{x-1}$. **D.** $y=x^4-18x^2+12$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $1+\log_{2y}x=\log_y x\Leftrightarrow 1+\dfrac{\log_2 x}{\log_2(2y)}=\dfrac{\log_2 x}{\log_2 y}$

$\Leftrightarrow \log_2 y(1+\log_2 y)+\log_2 x.\log_2 y=\log_2 x(1+\log_2 y)$

$\Leftrightarrow \log_2 y+(\log_2 y)^2+\log_2 x.\log_2 y=\log_2 x+\log_2 x.\log_2 y$

$\Leftrightarrow \log_2 y+(\log_2 y)^2=\log_2 x$

Đặt $t=\log_2 y$, suy ra $\log_2 x=t^2+t$

Khi đó ta có

$$A=\frac{x}{y^3}\Rightarrow \log_2 A=\log_2 x-\log_2 y^3=t^2-2t\ge -1$$

Dấu "=" xảy ra khi $t=1$ ứng với $x=4; y=2$. Suy ra $M(4;2)$.

Ta thấy $M(4;2)$ thuộc đồ thị của $y=\dfrac{x+2}{x-1}$.

Câu 46.5: Gọi x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_2 x+\log_2 y+1\ge \log_2\left(x^2+2y\right)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x+2y$ là bao nhiêu?

A. $2\sqrt{2}+3$ **B.** $2+3\sqrt{2}$ **C.** $3+\sqrt{3}$ **D.** 9

Lời giải

Chọn A

Với $x>0, y>0$ ta có

$$\log_2 x+\log_2 y+1\ge \log_2\left(x^2+2y\right)\Leftrightarrow \log_2 2xy\ge \log_2\left(x^2+2y\right)$$

$$\Leftrightarrow 2xy\ge x^2+2y\Leftrightarrow 2y(x-1)\ge x^2\Leftrightarrow x-1\ge \frac{x^2}{2y}>0\Rightarrow x>1$$

Đặt $m=x+2y$

Ta có $x(m-x)\ge x^2-x+m\Leftrightarrow m\ge \dfrac{2x^2-x}{x-1}$

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{2x^2-x}{x-1}, x>1$

Ta có $g'(x)=\dfrac{2x^2-4x-1}{(x-1)^2}$, $g'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}<1 \\ x_2=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}>1 \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên của $g(x)$

x	$-\infty$		x_1		1		x_2		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	↗		↘ $-\infty$	‖ $+\infty$	↘		↗	$+\infty$

Xét sự biến thiên của hàm $g(x)$ trên $(1;+\infty)$

Ta có $\min\limits_{(1;+\infty)} g(x)=g(x_2)=g\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right)=3+2\sqrt{2}$ khi $x=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$

Vậy $m\ge 3+2\sqrt{2}$ Dấu $=$ xảy ra khi $\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2} \\ y=\dfrac{4+3\sqrt{2}}{4} \end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Vậy GTNN của $x+2y$ là $3+2\sqrt{2}$

Câu 46.6: Gọi x, y là các số thực dương thỏa mãn $\ln(x-y)+\dfrac{1}{2}\ln(xy)=\ln(x+y)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=x+y$ là bao nhiêu?

A. $2\sqrt{2}$ **B.** 2 **C.** 4 **D.** 16

Lời giải

Chọn C

Với $x>0, y>0$ ta có $\ln(x-y)+\frac{1}{2}\ln(xy)=\ln(x+y)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln(xy)=\ln(x+y)-\ln(x-y)$

$\Leftrightarrow \ln(xy)=\ln\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2$

$\Leftrightarrow xy=\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2$

$\Leftrightarrow (x-y)^2 xy=(x+y)^2$ (1)

Đặt $\begin{cases} u=x+y>0 \\ v=xy>0 \end{cases}$

Ta có $(1)\Leftrightarrow (u^2-4v)v=u^2 \Leftrightarrow (v-1)u^2=4v^2$

Vì $v>0$ nên $4v^2>0$. Do đó $(v-1).u^2>0$. Suy ra $v-1>0$ hay $v>1$.

Ta có

$(v-1)u^2=4v^2 \Leftrightarrow u^2=\frac{4v^2}{v-1}=f(v), (v>1)$

Ta có $f'(v)=\frac{8v(v-1)-4v^2}{(v-1)^2}=\frac{4v(v-2)}{(v-1)^2}$

$f'(v)=0\Leftrightarrow v=2$ (vì $v>1$)

Ta có bảng biến thiên

v	1		2		$+\infty$
$f'(v)$		$-$	0	$+$	
$f(v)$	$+\infty$	$\searrow$	16	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $\min(x+y)=\min u=4 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ xy=2 \\ x>y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+\sqrt{2} \\ y=2-\sqrt{2} \end{cases}$.

Khi đó $x+y=4$.

Câu 46.7: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của y để tồn tại số thực $x\in\left(\frac{1}{3},9\right)$ thỏa mãn đẳng thức $y+x^2.9^y+\log_3 x=x\left(3^{x+y}+1\right)$. Tổng các phần tử của S là

A. 36. **B.** 35. **C.** 28. **D.** 21.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y+x^2.9^y+\log_3 x=x\left(3^{x+y}+1\right)\Leftrightarrow (x.3^y)^2+\log_3(x.3^y)=x.3^y.3^x+\log_3 3^x$

$\Leftrightarrow x.3^y(x.3^y-3^x)=\log_3\frac{3^x}{x.3^y}$ $(*)$.

Nếu $x.3^y>3^x \Rightarrow VT(*)>0>VP(*)$.

Nếu $x.3^y < 3^x \Rightarrow VT(*) < 0 < VP(*)$.

Nếu $x.3^y = 3^x \Rightarrow VT(*) = 0 = VP(*)$.

Vậy $3^y = \dfrac{3^x}{x} \Rightarrow y = x - \log_3 x$ mà $x \in \left(\dfrac{1}{3}, 9\right)$ nên $y \in \{1,2,3,4,5,6\}$.

Tổng các phần tử của S là 21.

Câu 46.8: Cho hai số thực x, y thỏa mãn hệ thức $\log_2 \sqrt{x^2+1} = 2^{4y-1} - 2x^2 + 2y - 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = x^4 - 4^{2y+2}$ bằng

A. $(0;+\infty)$. **B.** -9760. **C.** -1088. **D.** 2530.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log_2 \sqrt{x^2+1} = 2^{4y-1} - 2x^2 + 2y - 3 \Leftrightarrow 2\log_2 \sqrt{x^2+1} = 2^{4y} - 4x^2 + 4y - 6$

$\Leftrightarrow \log_2(x^2+1) = 2^{4y} - 4x^2 + 4y - 6 \Leftrightarrow 2 + \log_2(x^2+1) = 2^{4y} - 4(x^2+1) + 4y$

$\Leftrightarrow 4(x^2+1) + \log_2 4(x^2+1) = 2^{4y} + 4y \Leftrightarrow 4(x^2+1) + \log_2 4(x^2+1) = t + \log_2 t$ (với $t = 2^{4y}$)

Xét hàm số $f(u) = u + \log_2 u \Rightarrow f'(u) = 1 + \dfrac{1}{u\ln 2} > 0$ nên hàm số $f(u)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ suy ra $t = 4x^2 + 4 \Leftrightarrow 2^{4y} = 4x^2 + 4$.

Vậy $T = x^4 - 4^{2y+2} = x^4 - 16.2^{4y} = x^4 - 16(4x^2+4) = x^4 - 64x^2 - 64 = (x^2-32)^2 - 1088 \geq -1088$

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là -1088 khi $x^2 = 32$ và $y = \dfrac{1}{4}\log_2 132$.

Câu 46.9: Có bao nhiêu giá trị nguyên $y \leq 2024$ để ứng với mỗi y tồn tại hai số thực x thỏa mãn bất phương trình $e^{x^2} + (y + \ln x).e^{y+\ln x} \leq (x^3 + x)e^y$?

A. 2023 **B.** 2024 **C.** 2025 **D.** 2026

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $x > 0$.

Ta có: $e^{x^2} + (y + \ln x).e^{y+\ln x} \leq (x^3 + x).e^y$

Chia 2 vế cho $e^y.x$ ta được

$\dfrac{e^{x^2-y}}{x} + y + \ln x \leq x^2 + 1 \Leftrightarrow e^{x^2-y-\ln x} - (x^2 - y - \ln x) \leq 1$.

Mà $e^{x^2-y-\ln x} - (x^2 - y - \ln x) \geq 1$ vì $e^t \geq t + 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$

Từ đó suy ra $x^2 - y - \ln x = 0 \Rightarrow y = x^2 - \ln x = f(x)$.

$f'(x) = 2x - \dfrac{1}{x}$; $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (vì $x > 0$).

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $y \geq \frac{1}{2} - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 0,85$.

Vậy có 2024 giá trị nguyên của y thỏa bất phương trình đã cho.

Câu 46.10: Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $2020^{2019(x^2-y+4)} = \frac{4x+y}{(x+2)^2}$. Khi biểu thức $y-2x$ đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị của biểu thức $x-2y$ bằng

A. -6. **B.** -7. **C.** -8. **D.** -9.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2020^{2019(x^2-y+4)} = \frac{4x+y}{(x+2)^2} \Leftrightarrow 2020^{2019\left[(x+2)^2-(4x+y)\right]} = \frac{4x+y}{(x+2)^2} \Leftrightarrow \frac{2020^{2019(x+2)^2}}{2020^{2019(4x+y)}} = \frac{4x+y}{(x+2)^2}$

$\Leftrightarrow 2020^{2019(x+2)^2}(x+2)^2 = 2020^{2019(4x+y)}(4x+y)$ (1)

Xét hàm số $f(t) = 2020^{2019t}t$ với $t>0$.

Ta có $f'(t) = 2020^{2019t} + 2020^{2019t}t\ln 2020^{2019} > 0$, $\forall t > 0$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow (x+2)^2 = 4x+y \Leftrightarrow y = x^2+4$.

Nên $P = y-2x = x^2+4-2x = (x-1)^2+3 \geq 3$.

$\min P = 3$ khi $\begin{cases} x=1 \\ y=5 \end{cases}$

Vậy $x-2y = 1-2.5 = -9$.

Câu 46.11: Xét các số thực không âm x, y thỏa mãn $\log_2(4y+4) - x = 1+2^x-y$. Khi biểu thức $y+2^x$ đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị của biểu thức $x+2^y$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

$\log_2(4y+4) + y = x+1+2^x \Leftrightarrow \log_2 4 + \log_2(y+1) + y = x+1+2^x$

$\Leftrightarrow \log_2(y+1) + (y+1) = 2^x + x$

$\Leftrightarrow \log_2(y+1) + (y+1) = \log_2 2^x + 2^x$ (1)

Xét hàm số $f(u) = \log_2 u + u$, với $u \geq 1$.

Ta có $f'(u) = 1 + \frac{1}{u\ln 2} > 0$ với $u \geq 1$ $\Rightarrow f(u)$ đồng biến trên $[1;+\infty)$

Khi đó $(1) \Leftrightarrow y+1 = 2^x \Leftrightarrow y = 2^x - 1$.

Nên $P = y+2^x = 2.2^x - 1 \geq 1$.

$\min P = 1$ khi $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

Vậy $x+2^y = 0+2^0 = 1$.

Câu 46.12: Xét các số thực không âm x, y thỏa mãn $\log_5\left[(x+2)(y+1)\right]^{y+1} = 125-(x-1)(y+1)$. Khi biểu thức $x+5y$ đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị của biểu thức $5x+y$ bằng

A. 117. **B.** 118. **C.** 119. **D.** 120.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_5\left[(x+2)(y+1)\right]^{y+1} = 125-(x-1)(y+1)$

$\Leftrightarrow (y+1)\log_5[(x+2)(y+1)] = 125 - [(x+2)-3](y+1)$

$\Leftrightarrow \log_5[(x+2)(y+1)] = \dfrac{125}{y+1} - [(x+2)-3]$

$\Leftrightarrow \log_5(x+2) + \log_5(y+1) = \dfrac{125}{y+1} - (x+2) + 3$

$\Leftrightarrow \log_5(x+2) + (x+2) = \dfrac{125}{y+1} + \log_5(y+1)^{-1} + \log_5 125$

$\Leftrightarrow \log_5(x+2) + (x+2) = \dfrac{125}{y+1} + \log_5\left(\dfrac{1}{y+1}\right) + \log_5 125$

$\Leftrightarrow \log_5(x+2) + (x+2) = \log_5\left(\dfrac{125}{y+1}\right) + \dfrac{125}{y+1}\ (1)$

Xét hàm số $f(t) = \log_5 t + t$

Ta có: $f'(t) = \dfrac{1}{t\ln 5} + 1 > 0, \forall t \in (0;+\infty)$

Suy ra $f(t) = \log_5 t + t$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow x+2 = \dfrac{125}{y+1}$ $\Leftrightarrow x = \dfrac{125}{y+1} - 2$

Nên $P = x + 5y = \dfrac{125}{y+1} - 2 + 5y = \dfrac{125}{y+1} + 5(y+1) - 7 \geq 2\sqrt{\dfrac{125}{y+1}\cdot 5(y+1)} - 7 = 43, \forall y \geq 0$.

$\min P = 43$ khi $\dfrac{125}{y+1} = 5(y+1) \Leftrightarrow y = 4 \Rightarrow x = 23$

Vậy $5x + y = 5.23 + 4 = 119$.

Câu 46.13: Cho các số thực x, y thỏa mãn $0 \leq x, y \leq 1$ và $\log_3\dfrac{x+y}{1-xy} + (x+1)(y+1) - 2 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = 2x + y$.

A. 2. **B.** 1. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Với điều kiện biểu thức đề bài có nghĩa, ta có

$\log_3\dfrac{x+y}{1-xy} + (x+1)(y+1) - 2 = 0 \Leftrightarrow \log_3(x+y) - \log_3(1-xy) + xy + x + y - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \log_3(x+y) + (x+y) = \log_3(1-xy) + (1-xy)(*)$

Xét hàm số $f(x) = \log_3 t + t$ trên $(0;2)$

$f'(t) = \dfrac{1}{t}\ln 3 + 1 > 0, \forall t \in (0;2)$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;2)$.

Do đó từ $(*)$ ta có $x + y = 1 - xy \Leftrightarrow y(1+x) = 1 - x \Leftrightarrow y = \dfrac{1-x}{1+x}$

$P = 2x + y = 2x + \dfrac{1-x}{1+x}$

$P'(x) = 2 - \dfrac{2}{(1+x)^2} \geq 0, \forall x \in [0;1]$

Suy ra $\min P = P(0) = 1$ đạt được khi $x = 0, y = 1$.

Câu 46.14: Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn $\log_5\left(\frac{4a+2b+5}{a+b}\right)=a+3b-4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=a^2+b^2$

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$\log_5\left(\frac{4a+2b+5}{a+b}\right)=a+3b-4 \Leftrightarrow \log_5(4a+2b+5)=\log_5(a+b)+a+3b-4$

$\Leftrightarrow \log_5(4a+2b+5)+(4a+2b+5)=\log_5\left[5(a+b)\right]+5(a+b)$ (*).

Xét hàm $f(x)=\log_5 x+x, x>0$.

Đạo hàm $f'(x)=\frac{1}{x.\ln 5}+1>0, \forall x>0$. Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Phương trình (*) viết lại:

$$f(4a+2b+5)=f(5(a+b)) \Leftrightarrow 4a+2b+5=5(a+b) \Leftrightarrow a+3b=5.$$

Mặt khác: $5^2=(a+3b)^2\le(1^2+3^2).(a^2+b^2) \Rightarrow T=a^2+b^2\ge\frac{5}{2}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{1}=\frac{b}{3} \Rightarrow a=\frac{1}{2};b=\frac{3}{2}$.

Câu 46.15: Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3\frac{1-y}{x+3xy}=3xy+x+3y-4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P=x+y$.

A. $P_{\min}=\frac{4\sqrt{3}-4}{3}$ **B.** $P_{\min}=\frac{4\sqrt{3}+4}{3}$

C. $P_{\min}=\frac{4\sqrt{3}+4}{9}$ **D.** $P_{\min}=\frac{4\sqrt{3}-4}{9}$

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $\frac{1-y}{x+3xy}>0 \Rightarrow 1-y>0 \Leftrightarrow y<1$. Vậy điều kiện xác định của bài toán là: $x>0; 0<y<1$.

Ta có: $\log_3\frac{1-y}{x+3xy}=3xy+x+3y-4 \Leftrightarrow \frac{1-y}{x+3xy}=3^{3xy+x+3y-4} \Leftrightarrow \frac{3(1-y)}{x+3xy}=3^{3xy+x+3y-3}$

$\Leftrightarrow \frac{3(1-y)}{x+3xy}=\frac{3^{3xy+x}}{3^{3-3y}} \Leftrightarrow (3-3y).3^{3-3y}=(3xy+x).3^{3xy+x}$ (*)

Xét $f(t)=t.3^t$ với $t>0$. Ta có $f'(t)=3^t+t.3^t.\ln 3>0$ với $\forall t>0$, suy ra $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$. Từ (*) ta có $f(3-3y)=f(3xy+x)$ với $3-3y>0, 3xy+x>0$ nên $3-3y=3xy+x \Leftrightarrow y=\frac{3-x}{3(x+1)}$.

Ta có $P=x+y=x+\frac{3-x}{3(x+1)}=(x+1)+\left(\frac{3-x}{3(x+1)}+\frac{1}{3}\right)-\frac{4}{3}$

$P=(x+1)+\frac{4}{3(x+1)}-\frac{4}{3}\ge 2\sqrt{(x+1).\frac{4}{3(x+1)}}-\frac{4}{3}=\frac{4\sqrt{3}-4}{3}$.

Vậy $P_{\min} = \dfrac{4\sqrt{3}-4}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = \dfrac{4}{3(x+1)} \\ y = \dfrac{3-x}{3(x+1)} \\ x>0; 0<y<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2\sqrt{3}-3}{3} \\ y = \dfrac{2\sqrt{3}-1}{3} \end{cases}$.

CÂU TƯƠNG TỰ CÂU 47 ĐỀ THAM KHẢO 2024

Câu 47.1: Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = \left|\dfrac{2z+i}{z}\right|$ với z là số phức khác 0 và thỏa mãn $|z| \geq 2$. Tỉ số $\dfrac{M}{m}$ được xác định bởi công thức nào dưới đây?

A. $\dfrac{M}{m} = 3$. **B.** $\dfrac{M}{m} = \dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{M}{m} = \dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{M}{m} = 2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $P = \left|\dfrac{2z+i}{z}\right| = \dfrac{|2z+i|}{|z|} \Rightarrow \dfrac{|2z|-|i|}{|z|} \leq P \leq \dfrac{|2z|+|i|}{|z|} \Leftrightarrow 2 - \dfrac{1}{|z|} \leq P \leq 2 + \dfrac{1}{|z|} \Leftrightarrow \dfrac{3}{2} \leq P \leq \dfrac{5}{2}$.

Vậy $\dfrac{M}{m} = \dfrac{5}{3}$.

Câu 47.2: Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-i| = |\bar{z}-2+3i|$, số phức z_0 có mô đun nhỏ nhất. Phần ảo của z_0 là

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{4}{3}$.

C. $\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Giả sử $z_0 = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có: $|z-i| = |\bar{z}-2+3i| \Leftrightarrow |x+(y-1)i| = |(x-2)+(-y+3)i|$

$\Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = (x-2)^2 + (-y+3)^2 \Leftrightarrow y = -x+3$.

$|z_0| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+(-x+3)^2} = \sqrt{2x^2-6x+9} = \sqrt{2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{9}{2}} \geq \dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Vậy $|z_0|_{\min} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$ khi và chỉ khi $x = \dfrac{3}{2} \Rightarrow y = \dfrac{3}{2} \Rightarrow z_0 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2}i$, suy ra phần ảo của z_0 bằng $\dfrac{3}{2}$.

Câu 47.3: Cho tất cả các số phức $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z+2\mathrm{i}-1| = |z+\mathrm{i}|$. Biết z được biểu diễn bởi điểm M sao cho MA ngắn nhất với $A(1;3)$. Tìm $\mathrm{P} = 2x+3y$.

A. 9 **B.** 11 **C.** -3 **D.** 5

Lời giải

Chọn A

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có: $|z+2\mathrm{i}-1| = |z+\mathrm{i}|$

$\Leftrightarrow |x+yi+2i-1| = |x+yi+i| \Leftrightarrow |(x-1)+(y+2)i| = |x+(y+1)i|$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2 = x^2+(y+1)^2 \Leftrightarrow x-y-2=0$.

Dễ thấy tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là đường thẳng: $x-y-2=0 \Rightarrow M(x;x-2)$

$\overrightarrow{MA}=(x-1;x-5) \Rightarrow |\overrightarrow{MA}| = \sqrt{(x-1)^2+(x-5)^2} = \sqrt{2x^2-12x+26} = \sqrt{\left(x\sqrt{2}-3\sqrt{2}\right)^2+8} \ge 8$

Suy ra: $MA_{\min}=8$ khi $x\sqrt{2}-3\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow x=3 \Rightarrow y=1$. Vậy $P=2x+3y=2.3+3.1=9$

Câu 47.4: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+1|+|z^2-z+1|$. Tính $M.m$.

A. $\dfrac{13\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{39}{4}$. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{13}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Giả sử $z=x+yi$, $(x,y\in R)$.

Do $|z|=1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}=1 \Leftrightarrow x^2+y^2=1$. Suy ra $x,y\in[-1;1]$.

Ta có $z.\bar{z}=|z|^2=1$. Thay vào P ta được:

$P=|z+1|+|z^2-z+z.\bar{z}|=|z+1|+|z(z-1+\bar{z})|=|z+1|+|z|.|z+\bar{z}-1|=|z+1|+|z+\bar{z}-1|$

$=\sqrt{(x+1)^2+y^2}+|2x-1|=\sqrt{2x+2}+|2x-1|$.

Xét hàm số $y=f(x)=\sqrt{2x+2}+|2x-1|$

Ta có $y=f(x)=\begin{cases}\sqrt{2x+2}-2x+1 & khi\ \ -1\le x<\dfrac{1}{2}\\ \sqrt{2x+2}+2x-1 & khi\ \ \dfrac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}$.

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2x+2}}-2 & khi\ \ -1<x<\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{\sqrt{2x+2}}+2 & khi\ \ \dfrac{1}{2}<x\le 1\end{cases}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}-1<x<\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{\sqrt{2x+2}}-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-1<x<\dfrac{1}{2}\\ \sqrt{2x+2}=\dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow x=-\dfrac{7}{8}$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $[-1;1]$

x	-1		$-\dfrac{7}{8}$		$\dfrac{1}{2}$		1
y'	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
y	3	$\nearrow$	$\dfrac{13}{4}$	$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	3

Suy ra $\begin{cases} m = \min\limits_{[-1;1]} f(x) = \sqrt{3} \\ M = \max\limits_{[-1;1]} f(x) = \dfrac{13}{4} \end{cases}$. Vậy $M.m = \dfrac{13\sqrt{3}}{4}$.

Câu 47.5: Xét các số phức w, z thỏa mãn $|w+i| = \dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ và $5w = (2+i)(z-4)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z-2i| + |z-6-2i|$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(12;13)$. **B.** $(13;14)$. **C.** $(15;16)$. **D.** $(14;15)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $5w = (2+i)(z-4) \Leftrightarrow 5w + 5i = (2+i)(z-4) + 5i$

$\Rightarrow |5w+5i| = |(2+i)(z-4)+5i|$

$\Rightarrow 5|w+i| = |(2+i)(z-4+1+2i)| = \sqrt{5}|z-3+2i|$

$\Rightarrow 5.\dfrac{3\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}|z-3+2i| \Rightarrow |z-3+2i| = 3$.

Ta có:

$|z+z_1|^2 + |z-z_1|^2 = 2\left(|z|^2 + |z_1|^2\right)$; $\forall z, z_1$. (1)

$|z|^2 + |z_1|^2 \ge \dfrac{\left(|z|+|z_1|\right)^2}{2}$; $\forall z, z_1$. (2)

Ta có: $P = |z-2i| + |z-6-2i| = |z-3-2i+3| + |z-3-2i-3|$.

Áp dụng (1) và (2), ta có:

$|z-3-2i+3|^2 + |z-3-2i-3|^2 = 2\left(|z-3-2i|^2 + 9\right)$.

$|z-3-2i+3|^2 + |z-3-2i-3|^2 \ge \dfrac{\left(|z-3-2i+3| + |z-3-2i-3|\right)^2}{2} = \dfrac{\left(|z-2i| + |z-6-2i|\right)^2}{2}$.

Vậy, ta có:

$\dfrac{\left(|z-2i|+|z-6-2i|\right)^2}{2} \le 2\left(|z-3-2i|^2+9\right) \Rightarrow \left(|z-2i|+|z-6-2i|\right)^2 \le 4\left(|z-3-2i|^2+9\right)$.

$\Rightarrow P^2 \le 4\left(|z-3-2i|^2+9\right)$.

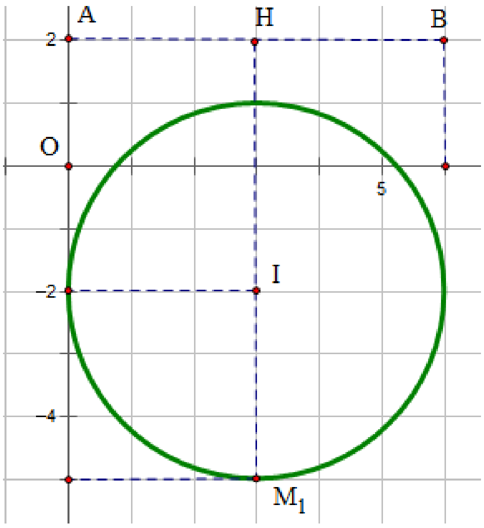
Do $4\left(|z-3-2i|^2+9\right) = 4\left(|z-3+2i-4i|^2+9\right)$ nên $P^2 \le 4\left(\left(|z-3+2i|+|-4i|\right)^2+9\right)$

$\Rightarrow P^2 \le 4\left(7^2+9\right) = 232 \Rightarrow P \le 2\sqrt{58} \approx 15,23$.

Ta có thể làm theo phương pháp hình học như sau

Biến đổi suy ra $|z-3+2i| = 3$, vậy quỹ tích các điểm M biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(3;-2), R = 3$. Đặt $A(0;2), B(6;2)$ ta có

$P = |z-2i| + |z-6-2i| = MA + MB \le \left(1^2+1^2\right)\left(MA^2+MB^2\right) = 2\left(2MH^2 + \dfrac{AB^2}{2}\right)$, trong đó H là trung điểm AB. Do đó $P_{\max} \Leftrightarrow MH_{\max} \Leftrightarrow M \equiv M_1(3;-5)$



Khi đó $P_{\min} = \sqrt{58} + \sqrt{58} = 2\sqrt{58} \approx 15,23$.

Câu 47.6: Xét các số phức z, w thỏa mãn $\left|\overline{z+w}\right| = 10; \left|\overline{z}\right| = 1$ và số phức $\overline{z}.w$ có phần thực bằng 2. Giá trị nhỏ nhất của $P = |z - w + 3 - 4i|$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(7;8)$. **B.** $(3;4)$. **C.** $(5;6)$. **D.** $(6;7)$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\overline{z}.w = 2 + bi; b \in \mathbb{R}$, suy ra $z.\overline{w} = \overline{\overline{z}.w} = \overline{2+bi} = 2 - bi$ nên $\overline{z}.w + z.\overline{w} = 4$.

Ta có:

$$\left|\overline{z+w}\right| = 10 \Rightarrow 10 = |z+w|^2 = (z+w)\left(\overline{z+w}\right) = (z+w)\left(\overline{z}+\overline{w}\right) = z.\overline{z} + w.\overline{w} + \left(z.\overline{w} + \overline{z}.w\right)$$

$$= \left|\overline{z}\right|^2 + |w|^2 + \left(z.\overline{w} + \overline{z}.w\right) = 1 + |w|^2 + 4 = |w|^2 + 5 \Rightarrow |w| = \sqrt{5}$$

$$|z-w|^2 = (z-w).\left(\overline{z-w}\right) = (z-w).\left(\overline{z}-\overline{w}\right) = \left|\overline{z}\right|^2 + |w|^2 - \left(z.\overline{w} + \overline{z}.w\right) = 1 + 5 - 4 = 2 \Rightarrow |z-w| = \sqrt{2}$$

Khi đó: $P = |z - w + 3 - 4i| = |(z-w) + (3-4i)| \geq \big||z-w| - |3-4i|\big| = \left|\sqrt{2} - 5\right| \approx 3,6$.

Câu 47.7: Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z - w| = 2\left|\overline{z}\right| = 2$ và số phức $\overline{z}.w$ có phần thực bằng 2. Giá trị lớn nhất của $P = |z + w + 2 - 3i|$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(7;8)$. **B.** $(8;9)$. **C.** $(5;6)$. **D.** $(6;7)$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\overline{z}.w = 2 + bi; b \in \mathbb{R}$, suy ra $z.\overline{w} = \overline{\overline{z}.w} = \overline{2+bi} = 2 - bi$ nên $\overline{z}.w + z.\overline{w} = 4$.

Ta có:

$$|z-w| = 2 \Rightarrow 4 = |z-w|^2 = (z-w)\left(\overline{z-w}\right) = (z-w)\left(\overline{z}-\overline{w}\right) = z.\overline{z} + w.\overline{w} - \left(z.\overline{w} + \overline{z}.w\right)$$

$$= |z|^2 + |w|^2 - \left(z.\overline{w} + \overline{z}.w\right) = 1 + |w|^2 - 4 = |w|^2 - 3 \Rightarrow |w| = \sqrt{7}$$

$$|z+w|^2 = (z+w).\left(\overline{z+w}\right) = (z+w).\left(\overline{z}+\overline{w}\right) = |z|^2 + |w|^2 + \left(z.\overline{w} + \overline{z}.w\right) = 1 + 7 + 4 = 12 \Rightarrow |z+w| = 2\sqrt{3}$$

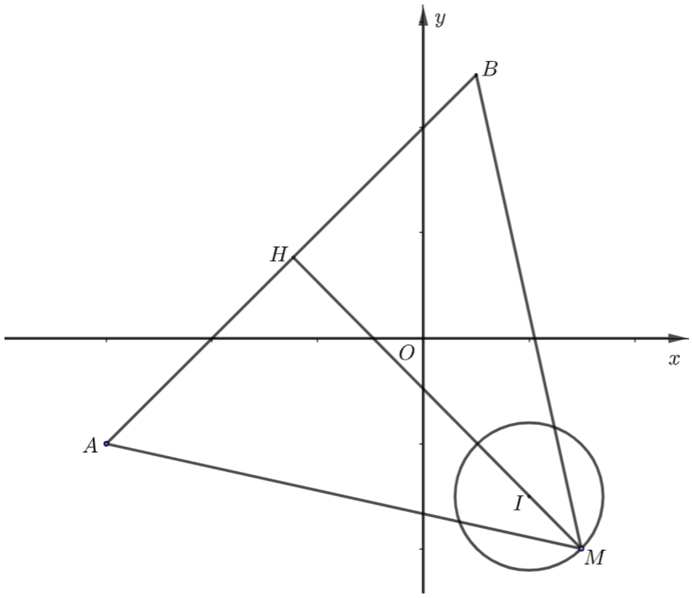
Khi đó: $P = |z + w + 2 - 3i| = |(z+w) + (2-3i)| \leq |z+w| + |2-3i| = 2\sqrt{3} + \sqrt{13} \approx 7,07$.

Câu 47.8: Cho số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $|z - 2 + 3i| = \sqrt{2}$ và biểu thức $T = |z + 7 + 2i|^2 + |z - 1 - 6i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị biểu thức $S = |z - (2023 - 2024i)|$

A. $2020\sqrt{2}$. **B.** $2021\sqrt{2}$. **C.** $2022\sqrt{2}$. **D.** $2023\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $M(x,y)$ là điểm biểu diễn cho số phức $z \Rightarrow M$ thuộc đường tròn tâm $I(2;-3)$ bán kính $R=\sqrt{2}$.

Gọi $A(-7;-2), B(1;6) \Rightarrow T = MA^2 + MB^2$.

Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow H(-3;2)$.

MH là đường trung tuyến trong tam giác MAB nên ta có

$$MH^2 = \frac{2(MA^2+MB^2)-AB^2}{4} \Rightarrow MA^2+MB^2 = 2MH^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

$AB = 8\sqrt{2}$ không đổi nên T lớn nhất $\Leftrightarrow MH$ lớn nhất $\Leftrightarrow MH = IH + R$ với $HI = 5\sqrt{2}$

Dấu "=" xảy ra

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{HI} = \frac{HI}{R}.\overrightarrow{IM} \Rightarrow \overrightarrow{HI} = 5\overrightarrow{IM} \Rightarrow \begin{cases} 5 = 5(x-2) \\ -5 = 5(y+3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -4 \end{cases} \Rightarrow M(3;-4)$$

$$\Rightarrow S = |z - (2023 - 2024i)| = |-2020 + 2020i| = 2020\sqrt{2}.$$

Câu 47.9: Cho hai số phức z và w thỏa mãn $z + 2w = 8 + 6i$ và $|z - w| = 4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $|z| + |w|$ bằng

A. $4\sqrt{6}$. **B.** $2\sqrt{26}$. **C.** $\sqrt{66}$. **D.** $3\sqrt{6}$.

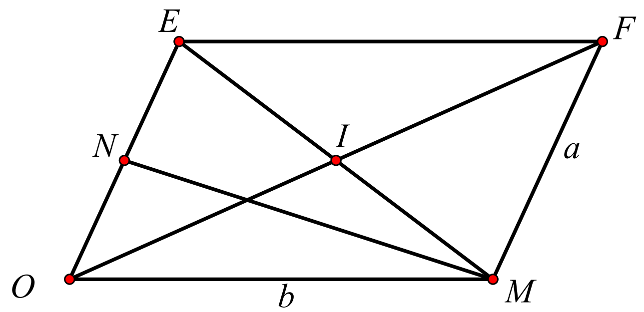
Lời giải

Chọn C

Giả sử M, N lần lượt là các điểm biểu diễn cho z và w. Gọi E là điểm biểu diễn cho số phức $2w$. Suy ra $\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OF} = 2\overrightarrow{OI}$ với $F(8;6)$ là đỉnh thứ 4 của hình bình hành $MOEF$, $I(4;3)$ là trung điểm của OF.

Ta có $|z - w| = MN = 4$ và $OF = 2OI = 10$.

Đặt $|z| = ON = \frac{a}{2}; |w| = OM = b.$



Xét tam giác ΔOMF và ΔOME

Ta có $\begin{cases} \dfrac{a^2+b^2}{2}-\dfrac{ME^2}{4}=25 \\ \dfrac{b^2+ME^2}{2}-\dfrac{a^2}{4}=16 \end{cases} \Rightarrow a^2+2b^2=88$.

$\left(|z|+|w|\right)^2=\left(\dfrac{a}{2}+b\right)^2\le\left(a^2+2b^2\right)\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\right)=66$.

Suy ra $|z|+|w|\le\sqrt{66}$, dấu "=" xảy ra khi $a=b=\dfrac{2\sqrt{66}}{3}$.

Vậy $\left(|z|+|w|\right)_{\max}=\sqrt{66}$.

Câu 47.10: Cho các số phức w, z thỏa mãn $|w-1+i|=\sqrt{5}$ và $(1+2i)(z-5)=5w$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2|z-3-2i|-|z+4-3i|$ là

A. $\sqrt{53}$. **B.** $2\sqrt{53}$ **C.** $5\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $(1+2i)(z-5)=5w \Leftrightarrow (1+2i)z-5-10i=5w$

$\Leftrightarrow (1+2i)z-10-5i=5w-5+5i \Leftrightarrow (1+2i)(z-4+3i)=5(w-1+i)$

$\Rightarrow \sqrt{5}|z-4+3i|=5|w-1+i|=5\sqrt{5}$

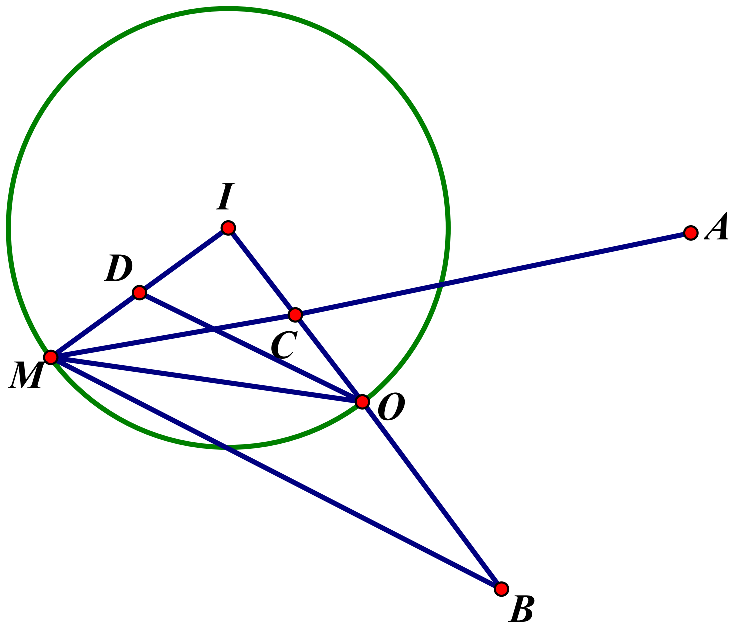
$\Rightarrow |z-4+3i|=5$

Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z

Vì $|z-4+3|=5 \Rightarrow M\in(C):(x-4)^2+(y+3)^2=25$ có tâm $I(4;-3)$, bán kính $R=5$.

Gọi $A(3;2); B(-4;3)$, khi đó:

$P=2MA-MB$



Nhận xét $O\left(0;0\right)$ là trung điểm của IB và $O\in\left(C\right)$, A,B nằm ngoài $\left(C\right)$.

Gọi C,D là trung điểm của IO,IM $\Rightarrow DO=\frac{1}{2}MB$ với $C\left(2;-\frac{3}{2}\right)$

Vì tam giác IMO cân tại I nên $MC=OD\Rightarrow MB=2MC$.

Khi đó $P=2MA-MB=2MA-2MC\le 2AC$. Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}M=AC\cap\left(C\right)\\ \overrightarrow{MA}=k.\overrightarrow{MC};k>0\end{cases}$

$\Rightarrow P_{\max}=2AC=2\sqrt{\left(3-2\right)^2+\left(2+\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{53}$.

Câu 47.11: Cho số phức z thỏa mãn $\left|z-3-4i\right|=\sqrt{5}$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left|z+2\right|^2-\left|z-i\right|^2$. Khi đó modun của số phức $\text{w}=M+mi$

A. $2\sqrt{314}$. **B.** $\sqrt{1258}$. **C.** $3\sqrt{137}$. **D.** $2\sqrt{309}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Giả sử $z=x+yi\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$ ta có $\left|z-3-4i\right|=\sqrt{5}\Leftrightarrow\left(x-3\right)^2+\left(y-4\right)^2=5$

Ta có $P=\left|z+2\right|^2-\left|z-i\right|^2\Leftrightarrow P=4x+2y+3\Leftrightarrow 4\left(x-3\right)+2\left(y-4\right)=P-23$

Ta có $\left[4\left(x-3\right)+2\left(y-4\right)\right]^2\le 20\left[\left(x-3\right)^2+\left(y-4\right)^2\right]=100$

Suy ra $-10\le P-23\le 10\Leftrightarrow 13\le P\le 33$ suy ra $M=33,m=13$ do đó ta được $w=33+13i$ vậy $\left|\text{w}\right|=\sqrt{1258}$.

Cách 2: Gọi $z=x+yi$ **với** $x,y\in\mathbb{R}$.

Ta có: $\left|z-3-4i\right|=\sqrt{5}\Leftrightarrow\left(x-3\right)^2+\left(y-4\right)^2=5$. Suy ra, tập hợp điểm $M\left(x;y\right)$ biểu diễn cho số phức z trên hệ tọa độ Oxy là đường tròn $\left(C\right)$ tâm $I\left(3;4\right)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$.

Lại có: $P=\left|z+2\right|^2-\left|z-i\right|^2\Leftrightarrow\left(x+2\right)^2+y^2-x^2-\left(y-1\right)^2-P=0\Leftrightarrow 4x+2y+3-P=0$, đây là phương trình của đường thẳng $\Delta:4x+2y+3-P=0$.

Ta thấy $M=\Delta\bigcap\left(C\right)$.

Điều kiện để Δ cắt $\left(C\right)$ là: $d\left(I,\Delta\right)\le R\Leftrightarrow\frac{\left|23-P\right|}{2\sqrt{5}}\le\sqrt{5}\Leftrightarrow -10\le 23-P\le 10\Leftrightarrow 13\le P\le 33$.

Suy ra: $m=13, M=33$ và $w=33+13i \Rightarrow |w|=\sqrt{1258}$.

Câu 47.12: Cho số phức z thỏa mãn $|z-3|+|z+3|=8$. Gọi M, m lần lượt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất $|z|$. Khi đó $M+m$ bằng

A. $4-\sqrt{7}$. **B.** $4+\sqrt{7}$. **C.** $\sqrt{7}-4$. **D.** $2\sqrt{7}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1 : Gọi $z=x+yi$ với $x;y\in\mathbb{R}$.

Ta có $8=|z-3|+|z+3|\geq|z-3+z+3|=|2z|\Leftrightarrow|z|\leq 4$.

Do đó $M=max|z|=4$.

Mà $|z-3|+|z+3|=8\Leftrightarrow|x-3+yi|+|x+3+yi|=8\Leftrightarrow\sqrt{(x-3)^2+y^2}+\sqrt{(x+3)^2+y^2}=8$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có

$$8=1.\sqrt{(x-3)^2+y^2}+1.\sqrt{(x+3)^2+y^2}\leq\sqrt{(1^2+1^2)\left[(x-3)^2+y^2+(x+3)^2+y^2\right]}$$

$$\Leftrightarrow 8\leq\sqrt{2(2x^2+2y^2+18)}\Leftrightarrow 2(2x^2+2y^2+18)\geq 64$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2\geq 7\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2}\geq\sqrt{7}\Leftrightarrow|z|\geq\sqrt{7}.$$

Do đó $M=min|z|=\sqrt{7}$.

Vậy $M+m=4+\sqrt{7}$.

Cách 2: Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là elip

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1\left(\begin{cases}F_1(-3;0),F_2(0,3)\\ a=\dfrac{8}{2}=4\\ b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}\end{cases}\right)$$

Do vậy $\begin{cases}|z|_{Max}=a=4\\ |z|_{Min}=b=\sqrt{7}\end{cases}\Rightarrow M+m=4+\sqrt{7}$.

Câu 47.13: Xét các số phức z,w thỏa mãn $|z|=2|w|=2$. Biết $P=|iz+w+3-4i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $|z-\mathrm{w}|$ bằng

A. $2\sqrt{5}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{29}}{5}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: Ta có $|iz+w+3-4i|\geq|3-4i|-|iz+w|\geq 5-(|iz|+|w|)\geq 5-(2+1)=2$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}w=k_1(3-4i)\ khi\ (k_1<0)\\ i.z=k_2(3-4i)\ khi\ (k_2<0)\end{cases}$ và $\begin{cases}|w|=1\\ |iz|=|z|=2\end{cases}$.

Giải hệ trên suy ra $k_2=-\dfrac{2}{5};\ k_1=-\dfrac{1}{5}$.

Hay $\begin{cases}w=-\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i\\ iz=\dfrac{-2}{5}(3-4i)\end{cases}$

$$\Rightarrow -z=\frac{-2i}{5}(3-4i)\Rightarrow z=-\frac{8}{5}-\frac{6}{5}i$$

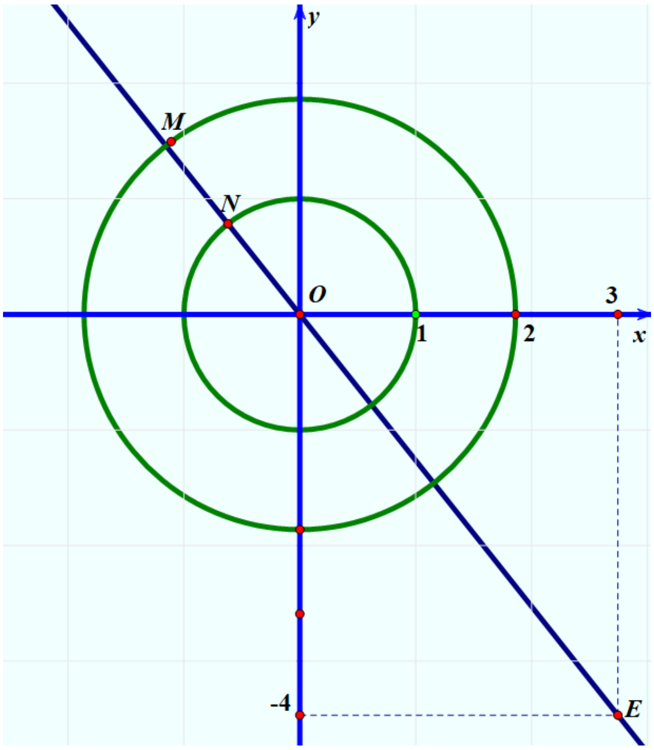
Khi đó $z-w=-1-2i \Rightarrow |z-\mathrm{w}|=\sqrt{5}$.

Cách 2: Trong mặt phẳng Oxy:

Gọi M là điểm biểu diễn của số phức $iz \Rightarrow OM=2 \Rightarrow M$ thuộc đường tròn (C_1) tâm O bán kính $R_1=2$.

Gọi N là điểm biểu diễn của số phức $w \Rightarrow ON=1 \Rightarrow N$ thuộc đường tròn (C_2) tâm O bán kính $R_2=1$.

Gọi $E(3;-4)$. Khi đó, ta có $P=|iz+w+3-4i| = \left|\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OE}\right|$.



Ta thấy P đạt giá trị nhỏ nhất khi M, N, E thẳng hàng và $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{ON}$ ngược hướng với $\overrightarrow{OE}$

Đường thẳng OE có phương trình là $y=\dfrac{-4}{3}x$.

Tọa độ giao điểm của đường thẳng OE và đường tròn (C_1) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y=\dfrac{-4}{3}x \\ x^2+y^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{-4}{3}x \\ x^2+\left(\dfrac{-4}{3}x\right)^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{-4}{3}x \\ 25x^2=36 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{6}{5} \\ y=\dfrac{-8}{5} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\dfrac{6}{5} \\ y=\dfrac{8}{5} \end{cases} \end{array}\right..$$

Vậy $M\left(-\dfrac{6}{5};\dfrac{8}{5}\right)$.

Tọa độ giao điểm của đường thẳng OE và đường tròn (C_2) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y=\dfrac{-4}{3}x \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{-4}{3}x \\ x^2+\left(\dfrac{-4}{3}x\right)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{-4}{3}x \\ 25x^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{3}{5} \\ y=\dfrac{-4}{5} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\dfrac{3}{5} \\ y=\dfrac{4}{5} \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy $N\left(-\dfrac{3}{5};\dfrac{4}{5}\right)$.

Do đó: $w=-\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i$ và $i.z=-\dfrac{6}{5}+\dfrac{8}{5}i \Leftrightarrow z=-\dfrac{8}{5}-\dfrac{6}{5}i$.

Vậy $|z-\mathrm{w}|=|-1-2i|=\sqrt{5}$.

Câu 47.14: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-z_2|=3, |z_1|=2$ và số phức $\dfrac{z_1}{z_2}$ là số thuần ảo. Giá trị lớn nhất của $P=|z_1+z_2-3+2i|$ bằng

A. $3+\sqrt{2}$. **B.** $3+\sqrt{13}$. **C.** $3+\sqrt{5}$. **D.** $5+\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1.

Gọi $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$ lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z_1 và z_2

Ta có: $\begin{cases} |z_1-z_2|=3 \\ |z_1|=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB=3 \\ OA=2 \end{cases}$

$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}$ là số thuần ảo nên $x_1x_2+y_1y_2=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0$. Suy ra ΔOAB vuông tại O

Gọi là I trung điểm của AB

Ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OI}, \left|\overrightarrow{OI}\right|=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|=\dfrac{3}{2}$

Số phức $z=-3+2i$ được biểu diễn bởi điểm $C(-3;2)$

Khi đó $P=\left|2\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OC}\right|\le 2\left|\overrightarrow{OI}\right|+\left|\overrightarrow{OC}\right| \Rightarrow P\le 2.\dfrac{3}{2}+\sqrt{(-3)^2+2^2}=3+\sqrt{13}$

Vậy $\max P=3+\sqrt{13}$ khi $\overrightarrow{OI}$ và $\overrightarrow{OC}$ cùng hướng.

Cách 2.

Ta có $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{z_1.\overline{z_2}}{|z_2|^2}$ là số thuần ảo suy ra $z_1.\overline{z_2}$ thuần ảo

Mà $z_1.\overline{z_2}$ và $\overline{z_1}z_2$ là hai số phức liên hợp của nhau, do đó $z_1.\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=2.0=0$

Xét $|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right)=|z_1|^2+|z_2|^2+\overline{z_1}z_2+z_1\overline{z_2}=|z_1|^2+|z_2|^2$

$|z_1+z_2|^2-|z_1-z_2|^2=2\left(\overline{z_1}z_2+z_1\overline{z_2}\right)=0 \Rightarrow |z_1+z_2|=|z_1-z_2|=3$

$P=|z_1+z_2-3+2i|\le|z_1+z_2|+|-3+2i|=3+\sqrt{13} \Rightarrow \max P=3+\sqrt{13}$

Câu 47.15: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-z_2|=|z_1|=3$ và số phức $\overline{z_1}z_2$ có phần thực bằng $\dfrac{9}{2}$. Giá trị lớn nhất của $P=|2z_1+z_2+1-2i|$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $3\sqrt{5}+\sqrt{7}$. **B.** $3\sqrt{7}+\sqrt{5}$. **C.** $3\sqrt{2}+\sqrt{7}$. **D.** $6\sqrt{7}+\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1.

Gọi $A(x_1;y_1),B(x_2;y_2)$ lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z_1 và z_2

Ta có: $\begin{cases}|z_1-z_2|=3\\|z_1|=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}AB=3\\OA=3\end{cases}$

$\overline{z_1}z_2$ có phần thực bằng $\frac{9}{2}$ nên $x_1x_2+y_1y_2=\frac{9}{2}\Rightarrow\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\frac{9}{2}$.

Ta có $AB^2=\left|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right|^2=9\Leftrightarrow OB^2-2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA}+OA^2=9\Rightarrow OB=3$

Suy ra ΔOAB đều có cạnh bằng 3.

Gọi C là điểm biểu diễn số phức $2z_1$ suy ra $\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA}$

Khi đó ΔOBC vuông tại B có $OC=6;OB=3$.

Gọi là I trung điểm của BC. Ta có $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OI}$

$\left|\overrightarrow{OI}\right|^2=\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|^2=\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OA}\right|^2=\frac{1}{4}\left(OB^2+4\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA}+4OA^2\right)\Rightarrow OI=\frac{3\sqrt{7}}{2}$

Số phức $z=1-2i$ được biểu diễn bởi điểm $D(1;-2)$

Khi đó $P=\left|2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right|\le 2\left|\overrightarrow{OI}\right|+\left|\overrightarrow{OD}\right|\Rightarrow P\le 2.\frac{3\sqrt{7}}{2}+\sqrt{1^2+(-2)^2}=3\sqrt{7}+\sqrt{5}$ Vậy $\max P=3\sqrt{7}+\sqrt{5}$ khi $\overrightarrow{OI}$ và $\overrightarrow{OD}$ cùng hướng.

Cách 2.

Ta có $z_1.\overline{z_2}$ và $\overline{z_1}z_2$ là hai số phức liên hợp của nhau, do đó $z_1.\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=2.\frac{9}{2}=9$

Xét $|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)\left(\overline{z_1}-\overline{z_2}\right)=|z_1|^2+|z_2|^2-\left(\overline{z_1}z_2+z_1\overline{z_2}\right)=9\Rightarrow|z_2|^2=9$

$|2z_1+z_2|^2=(2z_1+z_2)\left(2\overline{z_1}+\overline{z_2}\right)=4|z_1|^2+|z_2|^2+2\left(\overline{z_1}z_2+z_1\overline{z_2}\right)=63$

$P=|2z_1+z_2+1-2i|\le|2z_1+z_2|+|1-2i|=3\sqrt{7}+\sqrt{5}\Rightarrow\max P=3\sqrt{7}+\sqrt{5}$.

Câu 47.16: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-z_2-1|=3|z_1-i|=3$ và số phức $\left(\overline{z_1}+i\right)(z_2+1-i)$ có phần thực bằng 3. Giá trị nhỏ nhất của $P=|z_1+2z_2+3-i|$ bằng

A. $\sqrt{69}+\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{69}-\sqrt{5}$. **C.** $\frac{\sqrt{69}}{2}+\sqrt{10}$. **D.** $\frac{\sqrt{69}}{2}-\sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1.

Ta có: $|z_1-z_2-1|=|(z_1-i)-(z_2+1-i)|$

Gọi $A(x_1;y_1),B(x_2;y_2)$ lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z_1-i và z_2+1-i

Ta có: $|z_1-z_2-1|=3|z_1-i|=3\Leftrightarrow\begin{cases}AB=3\\OA=1\end{cases}$

Xét $\left(\overline{z_1}+i\right)(z_2+1-i)=\left(\overline{z_1-i}\right)(z_2+1-i)$ có phần thực bằng 3

Do đó $x_1x_2+y_1y_2=3\Rightarrow\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=3$.

Ta có $AB^2=\left|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right|^2=9\Leftrightarrow OB^2-2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA}+OA^2=9\Rightarrow OB=\sqrt{14}$

$P=\left|z_1-i+2\left(z_2+1-i\right)+1+2i\right|$

Gọi C là điểm biểu diễn số phức $2\left(z_2+1-i\right)$ suy ra $\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OB}$

Khi đó ΔOAC có $OA=1; OC=2\sqrt{14}$.

Gọi là I trung điểm của AC. Ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OI}$

$\left|\overrightarrow{OI}\right|^2=\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right|^2=\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}\right|^2=\frac{1}{4}\left(OA^2+4\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}+4OB^2\right)\Rightarrow OI=\frac{\sqrt{69}}{2}$

Số phức $z=1+2i$ được biểu diễn bởi điểm $D(1;2)$

Khi đó $P=\left|\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right|\ge\left|2\left|\overrightarrow{OI}\right|-\left|\overrightarrow{OD}\right|\right|\Rightarrow P\ge 2.\frac{\sqrt{69}}{2}-\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{69}-\sqrt{5}$

Vậy $\min P=\sqrt{69}-\sqrt{5}$ khi $\overrightarrow{OI}$ và $\overrightarrow{OD}$ ngược hướng.

Cách 2.

Ta có: $\left|z_1-z_2-1\right|=\left|\left(z_1-i\right)-\left(z_2+1-i\right)\right|$

Đặt $w_1=z_1-i$ và $w_2=z_2+1-i$

Suy ra $\left(\overline{z_1}+i\right)\left(z_2+1-i\right)=\overline{w_1}w_2$

Ta có $w_1.\overline{w_2}$ và $\overline{w_1}w_2$ là hai số phức liên hợp của nhau, do đó $w_1.\overline{w_2}+\overline{w_1}w_2=2.3=6$

Xét $\left|w_1-w_2\right|^2=\left(w_1-w_2\right)\left(\overline{w_1}-\overline{w_2}\right)=\left|w_1\right|^2+\left|w_2\right|^2-\left(\overline{w_1}w_2+w_1\overline{w_2}\right)=9\Rightarrow\left|w_2\right|^2=14$

$\left|w_1+2w_2\right|^2=\left(w_1+2w_2\right)\left(\overline{w_1}+\overline{w_2}\right)=\left|w_1\right|^2+4\left|w_2\right|^2+2\left(\overline{w_1}w_2+w_1\overline{w_2}\right)=69$

$P=\left|z_1-i+2\left(z_2+1-i\right)+1+2i\right|\le\left|\left|w_1+2w_2\right|-\left|1+2i\right|\right|=\sqrt{69}-\sqrt{5}\Rightarrow\min P=\sqrt{69}-\sqrt{5}$

Câu 47.17. Xét các số phức z,w thỏa mãn $\left|z+w\right|=2\left|z\right|=4$ và số phức $\overline{z}.w$ có phần thực bằng 2. Giá trị lớn nhất của $P=\left|z-w+3-4i\right|$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(4;5)$. **B.** $(7;8)$. **C.** $(5;6)$. **D.** $(6;7)$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\overline{z}.w=2+bi$, suy ra $z.\overline{w}=\overline{\overline{z}.w}=\overline{2+bi}=2-bi$ nên $\overline{z}.w+z.\overline{w}=4$.

Ta có:

$\left|z+w\right|=4\Rightarrow 16=\left|z+w\right|^2=\left(z+w\right)\left(\overline{z+w}\right)=\left(z+w\right)\left(\overline{z}+\overline{w}\right)=z.\overline{z}+w.\overline{w}+\left(z.\overline{w}+\overline{z}.w\right)$

$=\left|z\right|^2+\left|w\right|^2+\left(z.\overline{w}+\overline{z}.w\right)=4+\left|w\right|^2+4=\left|w\right|^2+8\Rightarrow\left|w\right|=2\sqrt{2}$

$\left|z-w\right|^2=\left(z-w\right).\left(\overline{z-w}\right)=\left(z-w\right).\left(\overline{z}-\overline{w}\right)=\left|z\right|^2+\left|w\right|^2-\left(z.\overline{w}+\overline{z}.w\right)=4+8-4=8\Rightarrow\left|z-w\right|=2\sqrt{2}$

Khi đó: $P=\left|z-w+3-4i\right|=\left|\left(z-w\right)+\left(3-4i\right)\right|\le\left|z-w\right|+\left|3-4i\right|=2\sqrt{2}+5$.

Câu 47.18. Xét các số phức z,w thỏa mãn $\left|z-w\right|=2\left|z\right|=6$ và số phức $\overline{z}.w$ có phần thực bằng 3. Giá trị lớn nhất của $P=\left|2z+2w-1+3i\right|$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(16;18)$. **B.** $(14;16)$. **C.** $(12;14)$. **D.** $(10;12)$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\overline{z}.w=3+bi$, suy ra $z.\overline{w}=\overline{\overline{z}.w}=\overline{3+bi}=3-bi$ nên $\overline{z}.w+z.\overline{w}=6$.

Ta có:

$\left|z-w\right|=6\Rightarrow 36=\left|z-w\right|^2=\left(z-w\right)\left(\overline{z-w}\right)=\left(z-w\right)\left(\overline{z}-\overline{w}\right)=z.\overline{z}+w.\overline{w}-\left(z.\overline{w}+\overline{z}.w\right)$

$=\left|z\right|^2+\left|w\right|^2-\left(z.\overline{w}+\overline{z}.w\right)=9+\left|w\right|^2-6=\left|w\right|^2+3\Rightarrow\left|w\right|=\sqrt{33}$

$|z+w|^2=(z+w).(\overline{z+w})=(z+w).(\overline{z}+\overline{w})=|z|^2+|w|^2+(z.\overline{w}+\overline{z}.w)=9+33+6=48$

$\Rightarrow |z+w|=4\sqrt{3}$

Khi đó: $P=|2z+2w-1+3i|=|2(z+w)+(-1+3i)|\le|2(z+w)|+|-1+3i|=8\sqrt{3}+\sqrt{10}$.

Câu 47.19. Xét các số phức z,w thỏa mãn $|z+w|=3|z|=6$ và số phức $\overline{z}.w$ có phần thực bằng 4. Giá trị lớn nhất của $P=|3z-3w+2-i|$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(16;18)$. **B.** $(14;16)$. **C.** $(12;14)$. **D.** $(18;20)$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\overline{z}.w=4+bi$, suy ra $z.\overline{w}=\overline{\overline{z}.w}=\overline{4+bi}=4-bi$ nên $\overline{z}.w+z.\overline{w}=8$.

Ta có:

$|z+w|=6\Rightarrow 36=|z+w|^2=(z+w)(\overline{z+w})=(z+w)(\overline{z}+\overline{w})=z.\overline{z}+w.\overline{w}+(z.\overline{w}+\overline{z}.w)$

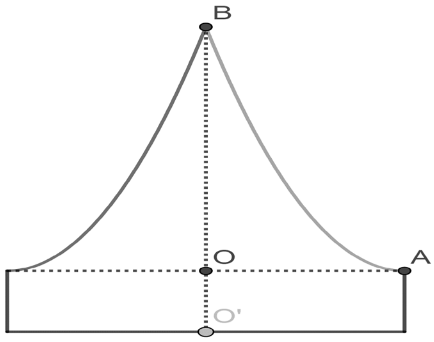
$=|z|^2+|w|^2+(z.\overline{w}+\overline{z}.w)=4+|w|^2+8=|w|^2+12\Rightarrow|w|=2\sqrt{6}$

$|z-w|^2=(z-w).(\overline{z-w})=(z-w).(\overline{z}-\overline{w})=|z|^2+|w|^2-(z.\overline{w}+\overline{z}.w)=4+24-8=20\Rightarrow|z-w|=2\sqrt{5}$

Khi đó: $P=|3z-3w+2-i|=|3(z-w)+(2-i)|\le3|z-w|+|2-i|=6\sqrt{5}+\sqrt{5}=7\sqrt{5}$.

CÂU TƯƠNG TỰ CÂU 48 ĐỀ THAM KHẢO 2024

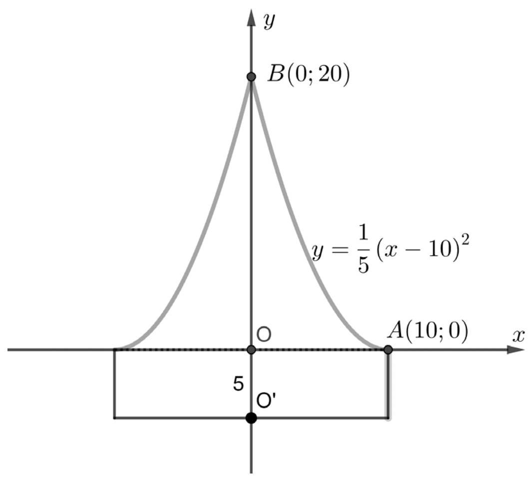
Câu 48.1: Chuẩn bị cho đêm hội diễn văn nghệ chào đón năm mới, bạn An đã làm một chiếc mũ "cách điệu" cho ông già Noel có dáng một khối tròn xoay. Mặt cắt qua trục của chiếc mũ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng $OO'=5$ cm, $OA=10$ cm, $OB=20$ cm, đường cong AB là một phần của parabol có đỉnh là điểm A. Thể tích của chiếc mũ bằng



A. $\dfrac{2750\pi}{3}\ (\text{cm}^3)$ **B.** $\dfrac{2500\pi}{3}\ (\text{cm}^3)$ **C.** $\dfrac{2050\pi}{3}\ (\text{cm}^3)$ **D.** $\dfrac{2250\pi}{3}\ (\text{cm}^3)$

Lời giải

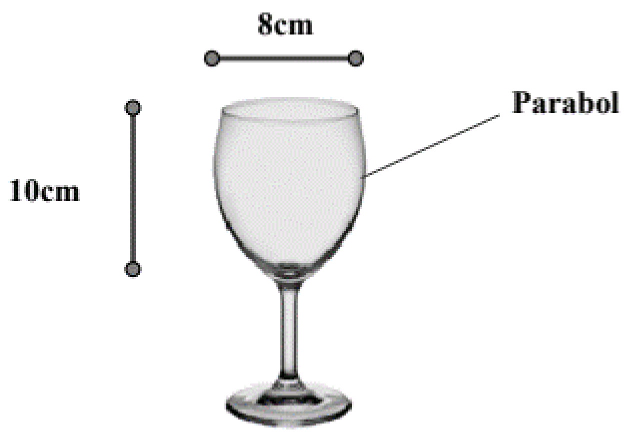
Chọn B



Ta gọi thể tích của chiếc mũ là V.

Thể tích của khối trụ có bán kính đáy bằng $OA = 10$ cm và đường cao $OO' = 5$ cm là V_1.
Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường cong AB và hai trục tọa độ quanh trục Oy là V_2.
Ta có $V = V_1 + V_2$
$V_1 = 5.10^2\pi = 500\pi \ \left(\text{cm}^3\right)$.
Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.
Do parabol có đỉnh A nên nó có phương trình dạng $(P): y = a(x-10)^2$.
Vì (P) qua điểm $B(0;20)$ nên $a = \dfrac{1}{5}$.
Do đó, $(P): y = \dfrac{1}{5}(x-10)^2$. Từ đó suy ra $x = 10 - \sqrt{5y}$ (do $x < 10$).
Suy ra $V_2 = \pi\int\limits_0^{20}\left(10-\sqrt{5y}\right)^2 \mathrm{d}y = \pi\left(3000 - \dfrac{8000}{3}\right) = \dfrac{1000}{3}\pi \ \left(\text{cm}^3\right)$.
Do đó $V = V_1 + V_2 = \dfrac{1000}{3}\pi + 500\pi = \dfrac{2500}{3}\pi \ \left(\text{cm}^3\right)$.

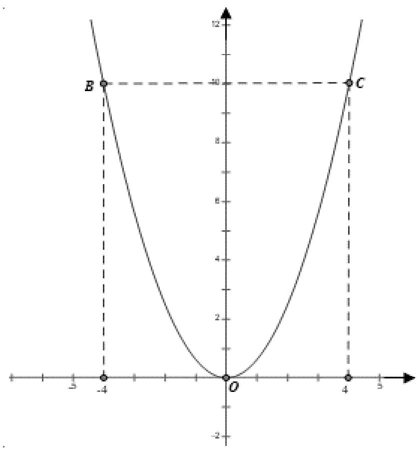
Câu 48.2: Một cốc rượu có hình dạng tròn xoay và kích thước như hình vẽ, thiết diện dọc của cốc (bổ dọc cốc thành 2 phần bằng nhau) là một đường Parabol. Tính thể tích tối đa mà cốc có thể chứa được (làm tròn 2 chữ số thập phân).



A. $V = 320\,\text{cm}^3$. **B.** $V = 1005,31\,\text{cm}^3$. **C.** $V = 251,33\,\text{cm}^3$. **D.** $V = 502,65\,\text{cm}^3$.

Lời giải

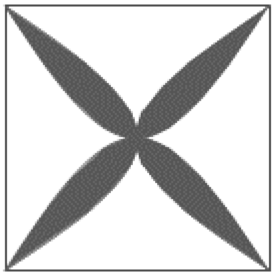
Chọn C



Parabol có phương trình $y = \dfrac{5}{8}x^2 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{8}{5}y$

Thể tích tối đa cốc $V=\pi\int\limits_0^{10}\left(\frac{8}{5}y\right).dy\approx 251,33$.

Câu 48.3: Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40cm. Người thiết kế đã sử dụng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (được tô mầu sẫm như hình vẽ bên).

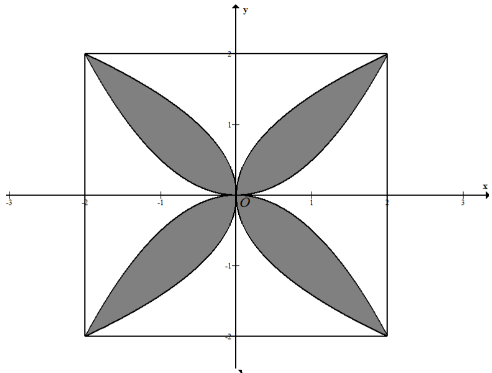


Diện tích mỗi cánh hoa của viên gạch bằng

A. $800\,\text{cm}^2$. **B.** $\frac{800}{3}\text{cm}^2$. **C.** $\frac{400}{3}\text{cm}^2$. **D.** $250\,\text{cm}^2$.

Lời giải

Chọn C



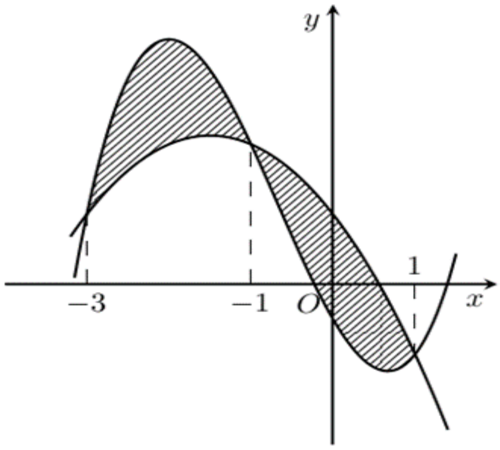
Chọn hệ tọa độ như hình vẽ (1 đơn vị trên trục bằng $10cm=1dm$), các cánh hoa tạo bởi các đường parabol có phương trình $y=\frac{x^2}{2}$, $y=-\frac{x^2}{2}$, $x=-\frac{y^2}{2}$, $x=\frac{y^2}{2}$.

Diện tích một cánh hoa (nằm trong góc phần tư thứ nhất) bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=\frac{x^2}{2}$, $y=\sqrt{2x}$ và hai đường thẳng $x=0; x=2$.

Do đó diện tích một cánh hoa bằng

$$\int\limits_0^2\left(\sqrt{2x}-\frac{x^2}{2}\right)\text{dx}=\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{(2x)^3}-\frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^2=\frac{4}{3}\left(\text{dm}^2\right)=\frac{400}{3}\left(\text{cm}^2\right)=\frac{4}{3}\left(\text{dm}^2\right)=\frac{400}{3}\left(\text{cm}^2\right).$$

Câu 48.4: Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-\frac{1}{2}$ và $g(x)=dx^2+ex+1$ $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-3;-1;1$ (tham khảo hình vẽ).



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

A. $\frac{9}{2}$. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

Diện tích hình phẳng cần tìm là: $S=\int_{-3}^{-1}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x$

$=\int_{-3}^{-1}\left[ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x-\frac{3}{2}\right]\mathrm{d}x-\int_{-1}^{1}\left[ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x-\frac{3}{2}\right]\mathrm{d}x$.

Trong đó phương trình $ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x-\frac{3}{2}=0$ $(*)$ là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$.

Phương trình $(*)$ có nghiệm -3; -1; 1 nên

$$\begin{cases}-27a+9(b-d)-3(c-e)-\frac{3}{2}=0\\-a+(b-d)-(c-e)-\frac{3}{2}=0\\a+(b-d)+(c-e)-\frac{3}{2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-27a+9(b-d)-3(c-e)=\frac{3}{2}\\-a+(b-d)-(c-e)=\frac{3}{2}\\a+(b-d)+(c-e)=\frac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\(b-d)=\frac{3}{2}\\(c-e)=-\frac{1}{2}\end{cases}.$$

Vậy $S=\int_{-3}^{-1}\left[\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right]\mathrm{d}x-\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right]\mathrm{d}x=2-(-2)=4$.

Cách 2:

Phương trình hoành độ giao điểm của $f(x)$ và $g(x)$ là: $a(x+3)(x+1)(x-1)=0$.

Dựa vào các hệ số tự do suy ra: $-3a=-\frac{1}{2}-1\Rightarrow a=\frac{1}{2}$.

Từ đó suy ra: $f(x)-g(x)=\frac{1}{2}(x+3)(x+1)(x-1)$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ là:

$S=\int_{-3}^{-1}\frac{1}{2}(x+3)(x+1)(x-1)dx-\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(x+3)(x+1)(x-1)dx=2-(-2)=4$.

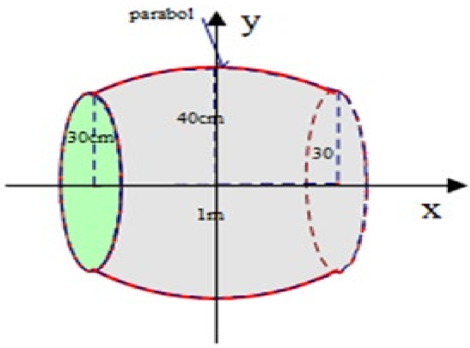
Câu 48.5: Một cái trống trường có bán kính các đáy là 30cm, thiết diện vuông góc với trục và cách đều hai đáy có diện tích là $1600\pi(cm^2)$, chiều dài của trống là 1m. Biết rằng mặt phẳng chứa trục cắt mặt xung quanh của trống là các đường Parabol. Hỏi thể tích của cái trống gần với giá trị nào trong 4 giá trị sau?

A. $425,2$ (lít). **B.** $42,52$ (lít). **C.** $4,252$ (lít). **D.** $212,5$ (lít).

Lời giải

Chọn A

Ta có chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Vì thiết diện vuông góc với trục cách đều 2 đáy là một hình tròn và cách đều 2 đáy có diện tích là $1600\pi(cm^2)$ nên ta có bán kính $r^2\pi = 1600\pi(cm^2) \Rightarrow r = 40(cm)$.

Lại có Parabol $P: y = ax^2 + bx + c$ có đỉnh $I(0;40)$ và qua các điểm $A(-50;30)$, $B(50;30)$

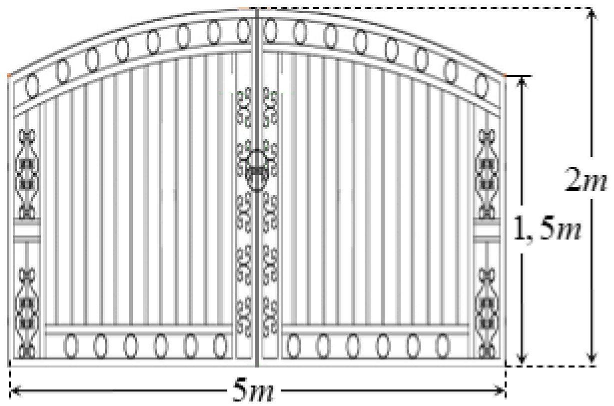
nên ta có hpt: $\begin{cases} c = 40 \\ 2500a + 50b = -10 \\ 2500a - 50b = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{250} \\ b = 0 \\ c = 40 \end{cases}$

Vậy Parabol có dạng $P: y = -\dfrac{1}{250}x^2 + 40$

Nên thể tích của cái trống là thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi parabol $P: y = -\dfrac{1}{250}x^2 + 40$ quay quanh trục ox và các đường $x = -50; x = 50$

$V = \pi \int\limits_{-50}^{50} (-\dfrac{1}{250}x^2 + 40)^2 dx = \dfrac{406000}{3}\pi\,(cm^3) \approx 425,2\,(dm^3) = 425,2(lít)$

Câu 48.6: Ông An muốn làm cửa rào sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ bên, biết đường cong phía trên là một Parabol. Giá 1 (m2) của rào sắt là 700.000 đồng. Hỏi ông An phải trả bao nhiêu tiền để làm cái cửa sắt như vậy (làm tròn đến hàng phần nghìn).

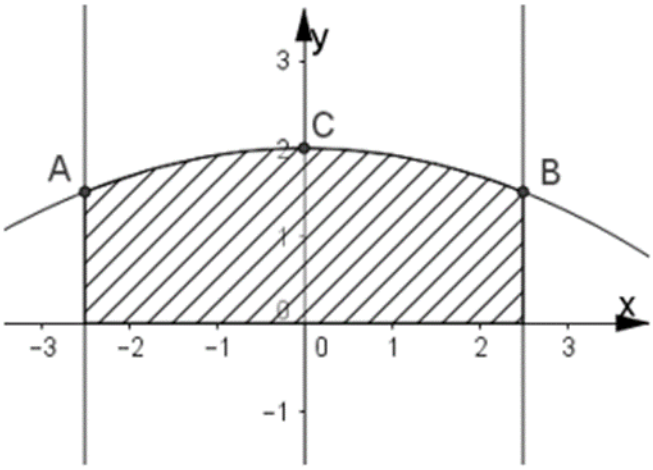


A. 6.520.000 đồng. **B.** 6.320.000 đồng. **C.** 6.417.000 đồng. **D.** 6.620.000 đồng.

Lời giải

Chọn C

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Trong đó $A(-2,5;\ 1,5)$, $B(2,5;\ 1,5)$, $C(0;\ 2)$.



Giả sử đường cong trên là một Parabol có dạng $y = ax^2 + bx + c$ với $a,\ b,\ c \in R$

Do Parabol đi qua các điểm đó $A\left(-2,5;\ 1,5\right)$, $B\left(2,5;\ 1,5\right)$, $C\left(0;\ 2\right)$. nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} (-2,5)^2 a - 2,5b + c = 1,5 \\ (2,5)^2 a + 2,5b + c = 1,5 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{2}{25} \\ b = 0 \\ c = 2 \end{cases}$$

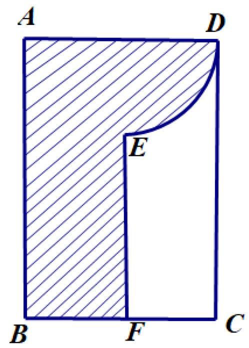
Khi đó phương trình Parabol là: $y = -\dfrac{2}{25}x^2 + 2$

Diện tích S của cửa rào sắt là diện tích phần hình phẳng giới bởi đồ thị hàm số: $y = -\dfrac{2}{25}x^2 + 2$ trục hoành và hai đường thẳng $x = -2,5;\ x = 2,5$.

Ta có : $S = \int\limits_{-2,5}^{2,5} \left(-\dfrac{2}{25}x^2 + 2\right)dx = \left(-\dfrac{2}{25}\dfrac{x^3}{3} + 2x\right)\Bigg|_{-2,5}^{2,5} = \dfrac{55}{6}$

Vậy ông An phải trả số tiền để làm cái cửa sắt là $S.700000 = \dfrac{55}{6}.700000 \approx 6.417.000$ (đồng)

Câu 48.7: Một vật trang trí có dạng khối tròn xoay tạo thành khi quay miền (R) (phần gạch chéo trong hình vẽ) quay xung quanh trục AB. Biết $ABCD$ là hình chữ nhật cạnh $AB = 3cm$, $AD = 2cm$; F là trung điểm của BC; điểm E cách AD một đoạn bằng $1cm$.



Thể tích của vật thể trang trí trên là (quy tròn đến hàng phần mười)

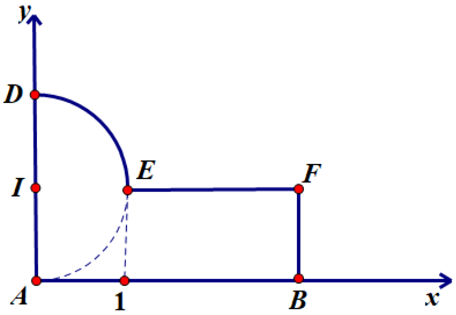
A. $16,4cm^3$. **B.** $16,5cm^3$. **C.** $5,2cm^3$. **D.** $3,8cm^3$.

Lời giải

Chọn B

Chọn hệ trục Oxy có $O \equiv A$; $B \in Ox; D \in Oy$.

Ta có: $A(0;0)$; $D(0;2)$; $B(3;0)$; $E(1;1)$



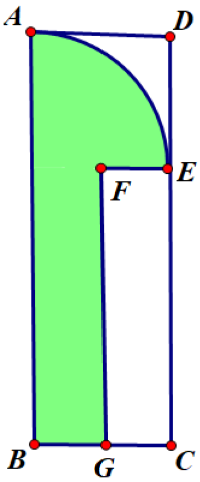
Đường tròn tâm $I(0;1)$ chứa cung ED có phương trình là: $x^2+(y-1)^2=1$.

Nên cung trên của đường tròn tâm I là: $y=1+\sqrt{1-x^2}$.

Thể tích của vật thể trang trí là:

$V=\pi\int_0^1\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^2dx+\pi\int_1^3 1^2dx\approx 16,5(cm^3)$.

Câu 48.8: Một chiếc đinh tán có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi cho phần tô đậm quay xung quanh cạnh AB. Biết $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB=20mm$, $AD=6mm$, cung AE là cung một phần tư của đường tròn có bán kính bằng $6mm$, điểm F cách AB một đoạn bằng $3mm$



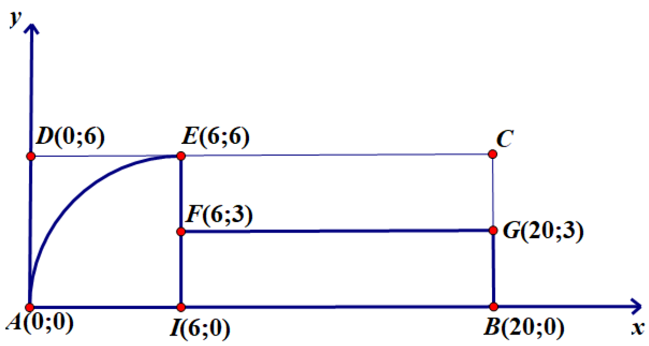
Thể tích của đinh tán là (quy tròn đến hàng phần mười)

A. $270mm^3$. **B.** $848,2mm^3$. **C.** $220,8mm^3$. **D.** $584,3mm^3$.

Lời giải

Chọn B

Chọn hệ trục Oxy có $A\equiv O$; $B(20;0);D(0;6)$.



Khi đó: F là trung điểm của EI và $I(6;0);E(6;6);F(6;3);G(20;3)$.

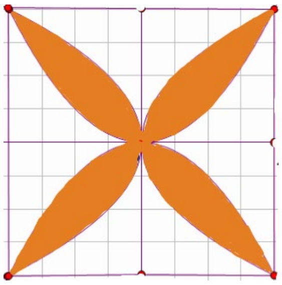
+ Đường tròn tâm $I(6;0)$ bán kính bằng 6 có phương trình là: $(x-6)^2+y^2=36$.

Nên nửa cung phía trên của trục Ox có phương trình là: $y=\sqrt{36-(x-6)^2}$.

+ Phương trình đường thẳng FG là: $y=3$.

Vậy thể tích của đinh tán là: $V=\pi\int_0^6\left[36-(x-6)^2\right]dx+\pi\int_6^{20}3^2dx\approx 848,2\ \left(mm^3\right)$

Câu 48.9: Một viên gạch hoa hình vuông có cạnh bằng $80cm$. Người ta thiết kế sử dụng 4 đường parabol cùng chung đỉnh tại tâm của viên gạch và đi qua hai đỉnh kề nhau của viên gạch để tạo thành bông hoa như hình vẽ.



Diện tích của bông hoa (phần tô đậm trong hình vẽ) là

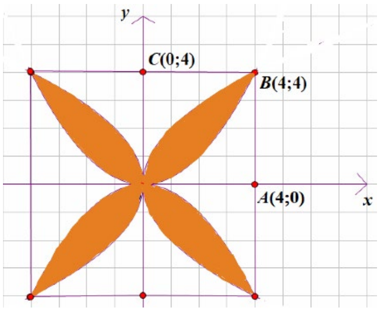
A. $\frac{64}{3}dm^2$. **B.** $\frac{16}{3}dm^2$. **C.** $16dm^3$. **D.** $64dm^3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $80cm=8dm$.

Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.



Ta có: $A(4;0);B(4;4);C(0;4)$.

Các cánh hoa được tạo thành bởi 4 đường parabol có phương trình là:

$y=\frac{x^2}{4};y=-\frac{x^2}{4};x=\frac{y^2}{4};x=-\frac{y^2}{4}$.

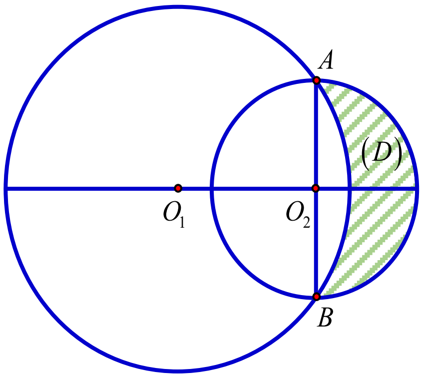
Diện tích của cánh hoa nằm trong góc phần tư thứ nhất được giới hạn bởi các đường: $y=\frac{x^2}{4}$

$y=2\sqrt{x}$; $x=0;x=4$, nên diện tích một cánh hoa bằng:

$S=\int_0^4\left(2\sqrt{x}-\frac{x^2}{4}\right)dx=\frac{16}{3}(dm^2)$.

Vậy diện tích bông hoa là: $4S=\frac{64}{3}\left(dm^2\right)$.

Câu 48.10. Cho hai đường tròn $(O_1;5)$ và $(O_2;3)$ cắt nhau tại hai điểm A, B sao cho AB là một đường kính của đường tròn (O_2). Gọi (D) là hình thẳng được giới hạn bởi hai đường tròn **(ở ngoài đường tròn lớn, phần được gạch chéo như hình vẽ)**. Quay (D) quanh trục O_1O_2 ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành.



A. $V = \dfrac{14\pi}{3}$.　　**B.** $V = \dfrac{68\pi}{3}$.

C. $V = \dfrac{40\pi}{3}$.　　**D.** $V = 36\pi$.

Lời giải

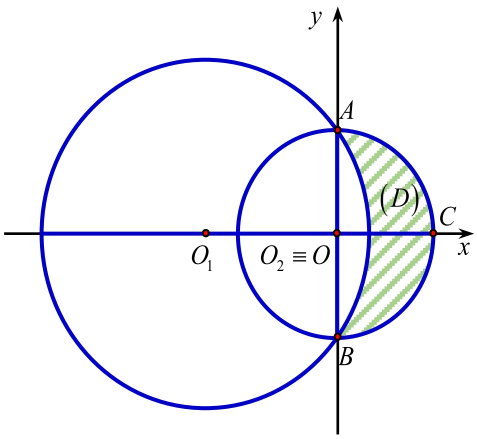
Chọn B

Chọn hệ tọa độ Oxy với $O_2 \equiv O,\ O_2C \equiv Ox,\ O_2A \equiv Oy$.

Đoạn $O_1O_2 = \sqrt{O_1A^2 - O_2A^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \Rightarrow (O_1): (x+4)^2 + y^2 = 25$.

Kí hiệu (H_1) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $(O_1): (x+4)^2 + y^2 = 25,\ Oy: x = 0,\ x \geq 0$.

Kí hiệu (H_2) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $(O_2): x^2 + y^2 = 9,\ Oy: x = 0,\ x \geq 0$.



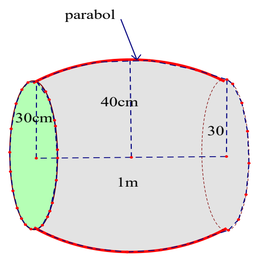
Khi đó thể tích V cần tìm chính bằng thể tích V_2 của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H_2) xung quanh trục Ox trừ đi thể tích V_1 của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H_1) xung quanh trục Ox.

Ta có $V_2 = \dfrac{1}{2}.\dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{2}{3}\pi.3^3 = 18\pi$.

Lại có $V_1 = \pi\int\limits_0^1 y^2 \mathrm{d}x = \pi\int\limits_0^1 \left[25 - (x+4)^2\right]\mathrm{d}x = \pi\left[25x - \dfrac{(x+4)^3}{3}\right]\Bigg|_0^1 = \dfrac{14\pi}{3}$.

Do đó $V = V_2 - V_1 = 18\pi - \dfrac{14\pi}{3} = \dfrac{40\pi}{3}$.

Câu 48.11. Một cái trống trường có bán kính các đáy là $30\,\text{cm}$, thiết diện vuông góc với trục và cách đều hai đáy có diện tích là $1600\pi\left(cm^2\right)$, chiều dài của trống là $1m$. Biết rằng mặt phẳng chứa trục cắt mặt xung quanh của trống là các đường Parabol. Hỏi thể tích của cái trống là bao nhiêu?



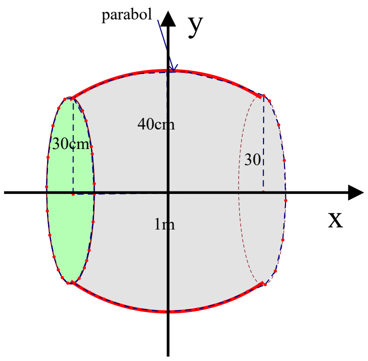
A. $425,2$ (lít).	**B.** 425162 (lít).

C. $212,6$ (lít).	**D.** 212581 (lít).

Lời giải

Chọn A

Ta có chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.



Thiết diện vuông góc với trục và cách đều hai đáy là hình tròn.

có bán kính r có diện tích là $1600\pi\left(cm^2\right)$, nên.

$r^2\pi = 1600\pi \Rightarrow r = 40cm$.

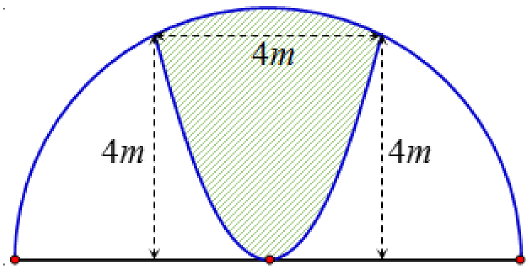
Ta có: Parabol có đỉnh $I\left(0;40\right)$ và qua $A\left(50;30\right)$.

Nên có phương trình $y = -\dfrac{1}{250}x^2 + 40$.

Thể tích của trống là.

$$V = \pi\int_{-50}^{50}\left(-\frac{1}{250}x^2 + 40\right)^2 dx = \pi.\frac{406000}{3}cm^3 \approx 425,2dm^3 = 425,2\text{ (lít)}.$$

Câu 48.12. Một khuôn viên dạng nửa hình tròn có đường kính bằng $4\sqrt{5}$ (m). Trên đó người thiết kế hai phần để trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm nửa hình tròn và hai đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa đường tròn (phần tô màu), cách nhau một khoảng bằng 4 (m), phần còn lại của khuôn viên (phần không tô màu) dành để trồng cỏ Nhật Bản.



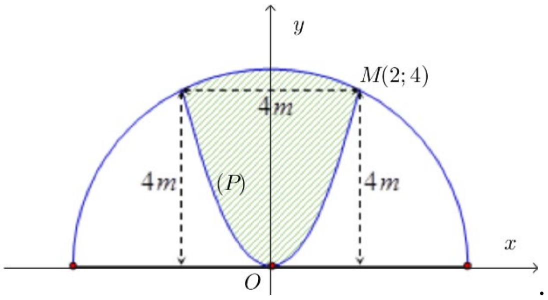
Biết các kích thước cho như hình vẽ và kinh phí để trồng cỏ Nhật Bản là 100.000 đồng/m^2. Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cỏ Nhật Bản trên phần đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).

A. $2.388.000$ (đồng).	**B.** $3.895.000$ **(đồng).**

C. $1.194.000$ (đồng).	**D.** $1.948.000$ (đồng).

Lời giải

Chọn D



Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó phương trình nửa đường tròn là.

$y=\sqrt{R^2-x^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2-x^2}=\sqrt{20-x^2}$.

Phương trình parabol (P) có đỉnh là gốc O sẽ có dạng $y=ax^2$. Mặt khác (P) qua điểm $M(2;4)$ do đó: $4=a(-2)^2\Rightarrow a=1$.

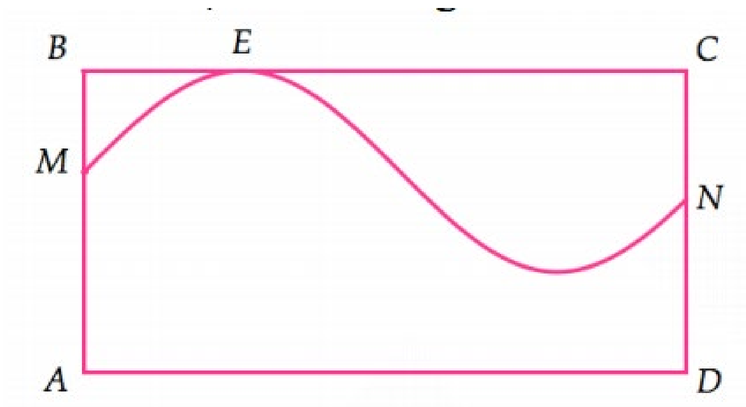
Phần diện tích của hình phẳng giới hạn bởi (P) và nửa đường tròn.(phần tô màu).

Ta có công thức $S_1=\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{20-x^2}-x^2\right)dx\cong 11,94m^2$.

Vậy phần diện tích trồng cỏ là $S_{co}=\frac{1}{2}S_{hinhtron}-S_1\approx 19,47592654$.

Vậy số tiền cần có là $S_{co}\times 100000\approx 1.948.000$ (đồng).đồng.

Câu 48.13: Từ một tấm tôn hình chữ nhật $ABCD$ với $AB=30\,cm, AD=\frac{55\pi}{3}cm$. Người ta cắt miếng tôn theo đường hình $\sin$ như hình vẽ bên để được hai miếng tôn nhỏ. Biết $AM=20\,cm, CN=15\,cm$, $BE=5\pi\,cm$ .Tính thể tích của lọ hoa được tạo thành bằng cách quay miếng tôn lớn quanh trục AD



(kết quả làm tròn đến hàng trăm).

A. $81788\,cm^3$.
B. $87388\,cm^3$
C. $83788\,cm^3$
D. $7883\,cm^3$

Lời giải

Chọn C

Chọn hệ trục Oxy sao cho $A\equiv O$, $D\in Ox, B\in Oy$.

Ta có $BE=5\pi$ suy ra hàm số tuần hoàn với chu kì $T=20\pi$.

Suy ra phương trình đồ thị hình *sin* cần tìm có dạng: $y=a\sin\left(\frac{x}{10}\right)+b$.

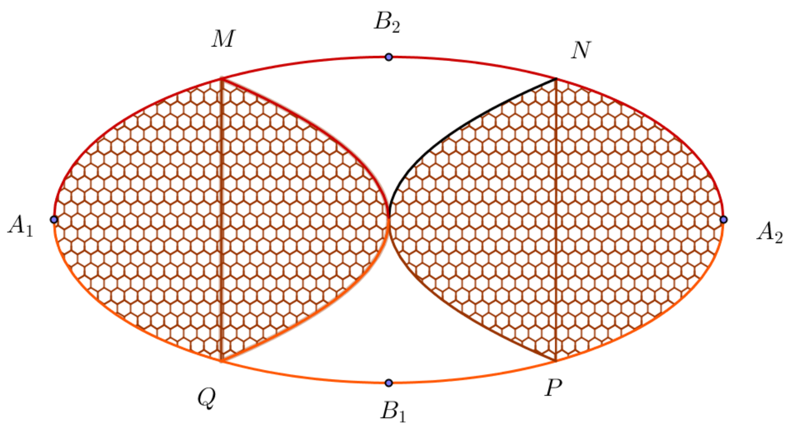
Do đồ thị hình sin đi qua $M(0;20)$, $N\left(\frac{55\pi}{3};15\right)$ nên ta có:

$$\begin{cases} a\sin\left(\frac{1}{10}.0\right)+b=20 \\ a\sin\left(\frac{1}{10}.\frac{55\pi}{3}\right)+b=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=10 \\ b=20 \end{cases}.$$

Ta có phương trình đồ thị hình sin cần tìm là $y=10\sin\left(\frac{x}{10}\right)+20$.

Thể tích cần tìm là: $\pi\int_0^{\frac{55\pi}{3}}\left(10\sin\left(\frac{x}{10}\right)+20\right)^2 dx \simeq 83788\,cm^3$.

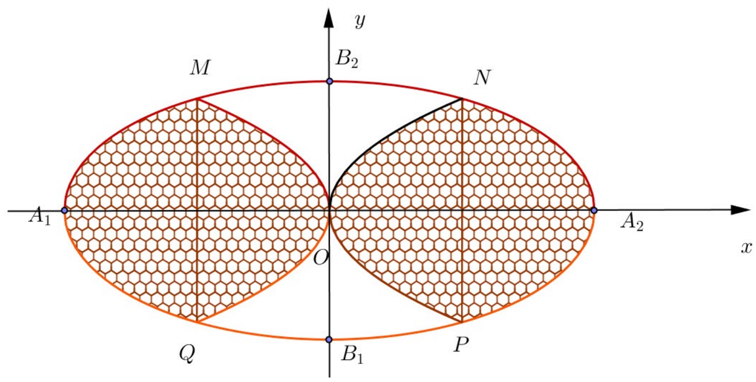
Câu 48.14: Mảnh vườn nhà ông An có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Ông dùng 2 đường Parabol có đỉnh là tâm đối xứng của elip cắt elip tại 4 điểm M,N,P,Q như hình vẽ sao cho tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MN=4$ để chia vườn. Phần tô đậm dùng để trồng hoa và phần còn lại để trồng rau. Biết chi phí trồng hoa là 600.000 đồng/ m^2 và trồng rau là 50.000 đồng/ m^2. Hỏi số tiền phải chi gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2=8$ m, $B_1B_2=4$ m?



A. $4.889.000$ đồng. **B.** $5.675.000$ đồng.
C. $3.526.000$ đồng. **D.** $7.120.000$ đồng.

Lời giải

Chọn A



Giả sử phương trình elip $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} A_1A_2=8 \\ B_1B_2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a=8 \\ 2b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ a=2 \end{cases} \Rightarrow (E):\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1 \Rightarrow y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{16-x^2}$.

Diện tích của elip (E) là $S_{(E)}=\pi ab=8\pi \ \left(m^2\right)$.

Ta có: $MN=4 \Rightarrow \begin{cases} M=(P)\cap(E) \\ N=(P)\cap(E) \end{cases} \Rightarrow N(2;y_0)$. Do $N\in(E)\Rightarrow N\left(2;\sqrt{3}\right)$.

(P) đỉnh O và đi qua $N \Rightarrow (P): x=\frac{2}{3}y^2 \Rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{x}$

Khi đó, diện tích phần không tô màu là $S=4\int\limits_0^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{16-x^2}-\frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=4\frac{2\pi-\sqrt{3}}{3}\left(m^2\right)$.

Diện tích phần tô màu là $S'=S_{(E)}-S=8\pi-4\frac{2\pi-\sqrt{3}}{3}=\frac{16\pi+4\sqrt{3}}{3}$.

Số tiền phải chi theo yêu cầu bài toán là

$T=600.000\times\frac{16\pi+4\sqrt{3}}{3}+50.000\times4\frac{2\pi-\sqrt{3}}{3}\approx4.889.000$ đồng.

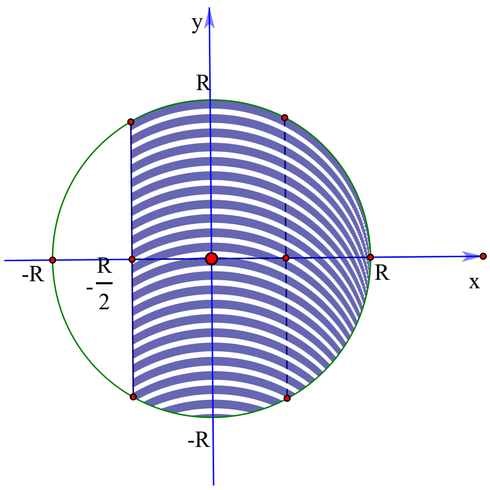
Câu 48.15. Cho khối trụ có hai đáy là hai hình tròn $(O;R)$ và $(O';R)$, $OO'=4R$. Trên đường tròn $(O;R)$ lấy hai điểm A, B sao cho $AB=R\sqrt{3}$. Mặt phẳng (P) đi qua A, B cắt đoạn OO' và tạo với đáy một góc bằng 60^0. (P) cắt khối trụ theo thiết diện là một phần của hình elip. Diện tích thiết diện đó bằng.

A. $\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2$. **B.** $\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$.

C. $\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$. **D.** $\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2$.

Lời giải

Chọn A



$\cos\widehat{AOB}=\frac{OA^2+OB^2-AB^2}{2.OA.OB}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\widehat{AOB}=120^0\Rightarrow OH=\frac{R}{2}$.

Chọn hệ trục như hình vẽ bên $\Rightarrow$ Phương trình đường tròn đáy là

$x^2+y^2=R^2\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$.

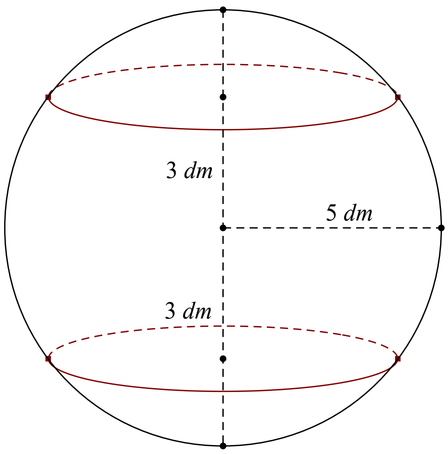
Hình chiếu của phần elip xuống đáy là miền sọc xanh như hình vẽ.

Ta có $S=2\int\limits_{-\frac{R}{2}}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$. Đặt $x=R.\sin t\Rightarrow S=\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$.

Gọi diện tích phần elip cần tính là S'.

Theo công thức hình chiếu, ta có $S'=\frac{S}{\cos60^0}=2S=\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2$.

Câu 48.16. Người ta làm một cái lu đựng nước bằng cách cắt bỏ 2 chỏm của một khối cầu có bán kính 5 dm bằng 2 mặt phẳng vuông góc với đường kính và cách tâm khối cầu 3 dm. Tính thể tích của chiếc lu.



A. $41\pi\left(\text{dm}^3\right)$.

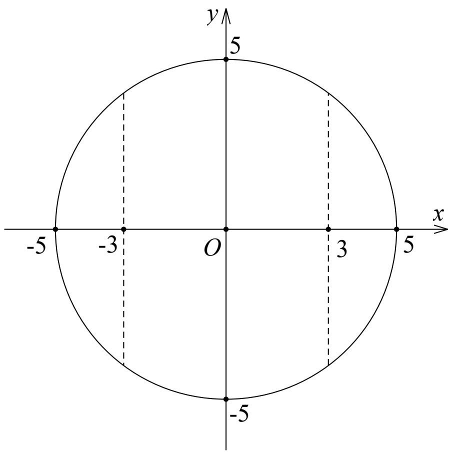
B. $132\pi\left(\text{dm}^3\right)$

C. $43\pi\left(\text{dm}^3\right)$

D. $\dfrac{100}{3}\pi\left(\text{dm}^3\right)$

Lời giải

Chọn B



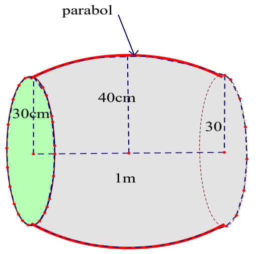
Đặt hệ trục với tâm O là tâm của mặt cầu, đường thẳng đứng là Ox, đường ngang là Oy.

Ta có phương trình của đường tròn lớn là $x^2+y^2=25$.

Thể tích cái lu là thể tích của vật tròn xoay tạo thành khi quay hình giới hạn bởi các đường cong $y=\sqrt{25-x^2}$, trục Ox, đường thẳng $x=-3, x=3$ quay quanh Ox.

$$V=\pi\int_{-3}^{3}\left(25-x^2\right)\text{d}x=\pi\left(25x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-3}^{3}=132\pi\left(\text{dm}^3\right).$$

Câu 48.17. Một cái trống trường có bán kính các đáy là 30 cm, thiết diện vuông góc với trục và cách đều hai đáy có diện tích là $1600\pi\left(cm^2\right)$, chiều dài của trống là $1m$. Biết rằng mặt phẳng chứa trục cắt mặt xung quanh của trống là các đường Parabol. Hỏi thể tích của cái trống là bao nhiêu?



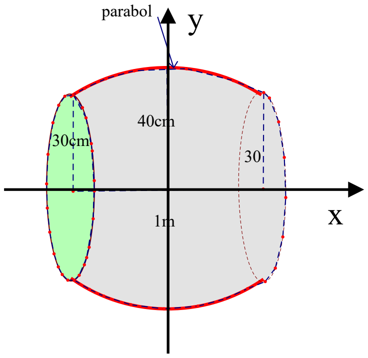
A. $425,2$ (lít). **B.** 425162 (lít).

C. $212,6$ (lít). **D.** 212581 (lít).

Lời giải

Chọn A

Ta có chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.



Thiết diện vuông góc với trục và cách đều hai đáy là hình tròn.

có bán kính r có diện tích là $1600\pi\left(cm^2\right)$, nên.

$r^2\pi = 1600\pi \Rightarrow r = 40cm$.

Ta có: Parabol có đỉnh $I(0;40)$ và qua $A(50;30)$.

Nên có phương trình $y = -\dfrac{1}{250}x^2 + 40$.

Thể tích của trống là.

$$V = \pi\int_{-50}^{50}\left(-\frac{1}{250}x^2 + 40\right)^2 dx = \pi.\frac{406000}{3}cm^3 \approx 425,2dm^3 = 425,2\text{ (lít)}.$$

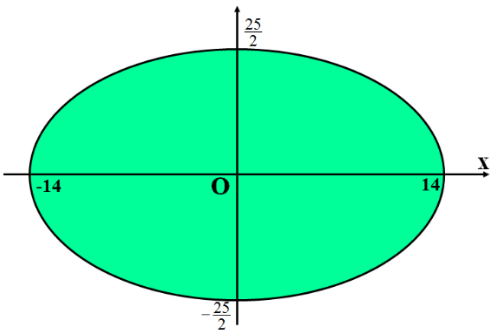
Câu 48.18. Bổ dọc một quả dưa hấu ta được thiết diện là hình elip có trục lớn $28\,\text{cm}$, trục nhỏ $25\,\text{cm}$. Biết cứ $1000\,\text{cm}^3$ dưa hấu sẽ làm được cốc sinh tố giá 20000 đồng. Hỏi từ quả dưa hấu trên có thể thu được bao nhiêu tiền từ việc bán nước sinh tố? Biết rằng bề dày vỏ dưa không đáng kể.

A. 180000 đồng. **B.** 183000 đồng.

C. 185000 đồng. **D.** 190000 đồng..

Lời giải

Chọn B



Đường elip có trục lớn 28cm, trục nhỏ 25cm có phương trình $\dfrac{x^2}{14^2}+\dfrac{y^2}{\left(\dfrac{25}{2}\right)^2}=1$

$\Leftrightarrow y^2=\left(\dfrac{25}{2}\right)^2\left(1-\dfrac{x^2}{14^2}\right)\Leftrightarrow y=\pm\dfrac{25}{2}\sqrt{1-\dfrac{x^2}{14^2}}$.

Do đó thể tích quả dưa là $V=\pi\int\limits_{-14}^{14}\left(\dfrac{25}{2}\sqrt{1-\dfrac{x^2}{14^2}}\right)^2\text{d}x=\pi\left(\dfrac{25}{2}\right)^2\int\limits_{-14}^{14}\left(1-\dfrac{x^2}{14^2}\right)\text{d}x$

$=\pi\left(\dfrac{25}{2}\right)^2\cdot\left(x-\dfrac{x^3}{3.14^2}\right)\Bigg|_{-14}^{14}=\pi\left(\dfrac{25}{2}\right)^2\cdot\dfrac{56}{3}=\dfrac{8750\pi}{3}\text{cm}^3$.

Do đó tiền bán nước thu được là $\dfrac{8750\pi.20000}{3.1000}\approx 183259$ đồng.

CÂU TƯƠNG TỰ CÂU 49 ĐỀ THAM KHẢO 2024

Câu 49.1: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2-82x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=f(x^4-18x^2+m)$ có đúng 7 cực trị.

A. 83 **B.** 81 **C.** 80. **D.** 84

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$y'=(4x^3-36x).f'(x^4-18x^2+m)$.

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x^4-18x^2+m)=0\\4x^3-36x=0\end{array}\right.$.

Với

+) $4x^3-36x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm3\end{array}\right.$ có 3 nghiệm đơn.

+) $f'(x^4-18x^2+m)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^4-18x^2+m=0\\x^4-18x^2+m=82\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^4-18x^2=-m\\x^4-18x^2=-m+82\end{array}\right.$.

Xét hàm số: $g(x)=x^4-18x^2$ có $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm3\end{array}\right.$.

Ta có BBT của hàm số $g(x)=x^4-18x^2$

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
g'(x)		$-$	0	+	0	$-$	0	+	
g(x)	$+\infty$	$\searrow$	-81	$\nearrow$	0	$\searrow$	-81	$\nearrow$	$+\infty$

Để hàm số $y=f(x^4-18x^2+m)$ có đúng 7 cực trị thì $y=f'(x^4-18x^2+m)=0$ có 4 nghiệm bội lẻ phân biệt khác $0,\ \pm3$.

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-m\le-81\\-81<-m+82<0\end{cases}\\-m+82>-m\ge0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}82<m<163\\m\le0\end{array}\right.$

Mà $m \in N^*$ nên $m \in \{83, 84, ..., 161, 162\}$. Nên có 80 giá trị m thỏa ycbt.

Câu 49.2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 3)(x^2 + 1)$ với $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(x) - mx$ có 4 điểm cực trị?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Xét đạo hàm $y' = f'(x) - m = (x^2 - 3)(x^2 + 1) - m$; $y' = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 3)(x^2 + 1) = m$

YCBT $\Leftrightarrow y' = 0$ có 4 nghiệm bội lẻ phân biệt

Đặt $g(x) = (x^2 - 3)(x^2 + 1) = x^4 - 2x^2 - 3$; $g'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$;

BBT

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $-4 < m < -3$, mà m nguyên nên không có m nào.

Câu 49.3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - x)(x^2 - 4x + 3), \forall x \in \mathbb{R}$. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(x^2 + m)$ có 3 điểm cực trị.

A. 0. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x) = x(x-1)^2(x-3); f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$ ($x = 0, x = 3$ là nghiệm đơn; $x = 1$ là nghiệm bội chẵn).

Lại có $g'(x) = 2x.f'(x^2 + m); g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'(x^2 + m) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 + m = 0 \\ x^2 + m = 1 \\ x^2 + m = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 & \\ x^2 = -m & (1) \\ x^2 = 1 - m & (2) \\ x^2 = 3 - m & (3) \end{array}\right.$

Do (2) có nghiệm luôn là nghiệm bội chẵn; các phương trình $(1), (3)$ có nghiệm không chung nhau và $-m < 3 - m$.

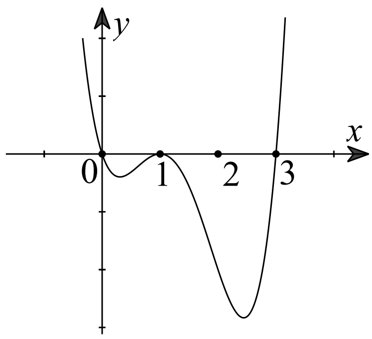
Hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow g'(x) = 0$ có ba nghiệm bội lẻ phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases} -m \le 0 \\ 3 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le m < 3$.

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0; 1; 2\}$.

Vậy tổng các giá trị nguyên của tham số m bằng 3.

Câu 49.4: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Có nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=f(x^2+m)$ có 3 điểm cực trị.

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Do hàm số $y=f(x^2+m)$ là hàm chẵn nên hàm số có 3 cực trị khi và chỉ khi hàm số này có đúng 1 điểm cực trị dương.

$y=f(x^2+m)\Rightarrow y'=2xf'\left(x^2+m\right)$.

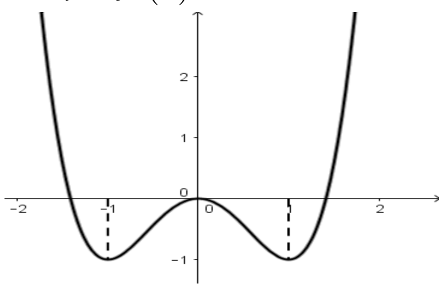
$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ f'\left(x^2+m\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2+m=0\\ x^2+m=1\\ x^2+m=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2=-m\\ x^2=1-m\\ x^2=3-m\end{array}\right..$$

Đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ tiếp xúc trục hoành tại điểm có hoành độ là $x=1$ nên các nghiệm của pt $x^2=1-m$ (nếu có) không làm $f'\left(x^2+m\right)$ đổi dấu khi x đi qua, do đó các điểm cực trị của hàm số $y=f(x^2+m)$ là các điểm nghiệm của hệ $\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2=-m\\ x^2=3-m\end{array}\right.$.

Hệ trên có duy nhất nghiệm dương khi và chỉ khi $\begin{cases}-m\le 0\\ 3-m>0\end{cases}\Leftrightarrow 0\le m<3$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của thoả mãn.

Câu 49.5: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $y=f'\left(x\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2-4x+m\right)$ có đúng hai điểm cực trị thuộc khoảng $\left(1;4\right)$?

A. 4. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 5.

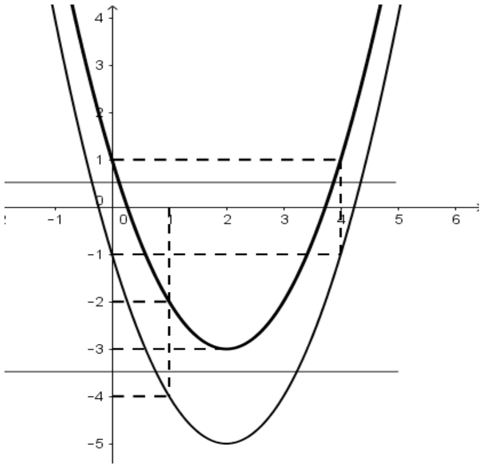
Lời giải

Chọn A

Ta có $g'\left(x\right)=2\left(x-2\right).f'\left(x^2-4x+m\right)$.

$g'(x)=0\Leftrightarrow 2(x-2).f'\left(x^2-4x+m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\in(1;4)\\x^2-4x+m=1\\x^2-4x+m=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x^2-4x-1=-m\\x^2-4x+1=-m\end{array}\right.$

Vẽ đồ thị hai hàm số $y=x^2-4x-1$ và $y=x^2-4x+1$ lên cùng một mặt phẳng tọa độ.



Yêu cầu bài toán tương đương $f'\left(x^2-4x+m\right)=0$ có đúng một nghiệm đơn khác 2 trong khoảng $(1;4)$ suy ra: $\left[\begin{array}{l}-4\le -m\le -3\\-1\le -m<1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3\le m\le 4\\-1<m\le 1\end{array}\right.$.

Vậy có tất cả 4 giá trị.

Câu 49.6: Cho hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m-1\right|$ có 7 điểm cực trị. Tổng các giá trị nguyên của m là:

A. 21 **B.** 15 **C.** 7 **D.** 14

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+m-1$,

Có $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

$f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x\left(x^2-x-2\right)$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$m-6$	$\nearrow$	$m-1$	$\searrow$	$m-33$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có hàm số $y=\left|f(x)\right|$ có 7 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt Ox tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow m-6<0<m-1\Leftrightarrow 1<m<6$ mà $m\in Z\Rightarrow m\in\{2,3,4,5\}$

Tổng các giá trị nguyên của m là 14.

Câu 49.7: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'\left(x\right)=\left(x-2\right)^2\left(x^2+3x-4\right)$. Gọi S là tập các số nguyên $m\in\left[-10;10\right]$ để hàm số $y=f\left(x^2-4x+m\right)$ có đúng 3 điểm cực trị. Số phần tử của S bằng

A. 5. **B.** 14. **C.** 4. **D.** 10.

Lời giải:

Chọn A

Ta có: $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(x-2)^2=0\\x^2+3x-4=0\end{array}\right.$.

Đặt $y=g(x)=f\left(x^2-4x+m\right)$

$g'(x)=\left(2x-4\right)f'(x^2-4x+m)$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-4=0\\f'(x^2-4x+m)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=2&\\\left(x^2-4x+m-2\right)^2=0&\\h_1\left(x\right)=x^2-4x+m-1=0&(1)\\h_2(x)=x^2-4x+m+4=0&(2)\end{array}\right..$$

Hàm số có 3 cực trị khi một trong 2 phương trình và có 2 nghiệm phân biệt khác 2 và phương trình có lại có 1 nghiệm hoặc vô nghiệm.

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}h_1(2)\neq0\\\Delta_1>0\\\Delta_2\leq0\end{cases}\\\begin{cases}h_2(2)\neq0\\\Delta_1\leq0\\\Delta_2>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0\leq m<5\\\begin{cases}m\geq3\\m<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow0\leq m<5.$$

Mà $m\in\left[-10;10\right]$ do đó $m\in\left\{0;1;2;3;4\right\}$ có 5 phần tử.

Câu 49.8: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(x-1\right)^2\left(x^2-2x\right)$, với $\forall x\in\mathbb{R}$. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^3-3x^2+m\right)$ có 8 điểm cực trị là

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'\left(x\right)=\left(3x^2-6x\right).f'\left(x^3-3x^2+m\right)$.

$$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x^2-6x=0\\x^3-3x^2+m=1\\x^3-3x^2+m=0\\x^3-3x^2+m=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\\x^3-3x^2+m=1\\x^3-3x^2+m=0\\x^3-3x^2+m=2\end{array}\right..$$

Vì khi đi qua các nghiệm của phương trình $x^3-3x^2+m=1$ (nếu có) dấu của $f'\left(x^3-3x^2+m\right)$ không đổi nên dấu của $g'\left(x\right)$ chỉ phụ thuộc các nghiệm của hai phương trình còn lại.

Vậy hàm số $y=g\left(x\right)$ có 8 điểm cực trị khi và chỉ khi mỗi phương trình $x^3-3x^2+m=0$ và $x^3-3x^2+m=2$ phải có ba nghiệm phân biệt (khác 0 và khác 2).

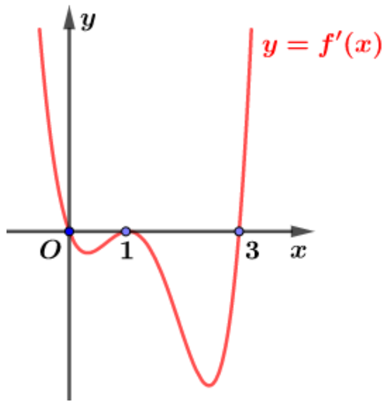
Xét hàm số $h(x)=-x^3+3x^2$, ta có $h'(x)=-3x^2+6x$; $h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $y=h(x)$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy điều kiện để mỗi phương trình $-x^3+3x^2=m$ và $-x^3+3x^2=m-2$ phải có ba nghiệm phân biệt (khác 0 và khác 2) là
$0<m-2<m<4 \Leftrightarrow 2<m<4$.
Vậy chỉ có một giá trị nguyên của m thỏa mãn là $m=3$.

Câu 49.9: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=f(x^2+m)$ có đúng 3 điểm cực trị?



A. Vô số. **B.** 4 **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

$y'=2x.f'(x^2+m)$.

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'(x^2+m)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+m=0 \\ x^2+m=1 \\ x^2+m=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=-m \\ x^2+m=1 \\ x^2=-m+3 \end{array}\right..$$

Đồ thị hàm số $f'(x)$ tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1. Do đó hoặc phương trình $x^2+m=1$ vô nghiệm hoặc nghiệm của phương trình $x^2+m=1$ là nghiệm bội chẵn của phương trình $y'=0$.

Nếu $\begin{cases} -m\neq 0 \\ -m+3\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m\neq 3 \end{cases}$ thì $x=0$ là nghiệm đơn của phương trình $y'=0$.

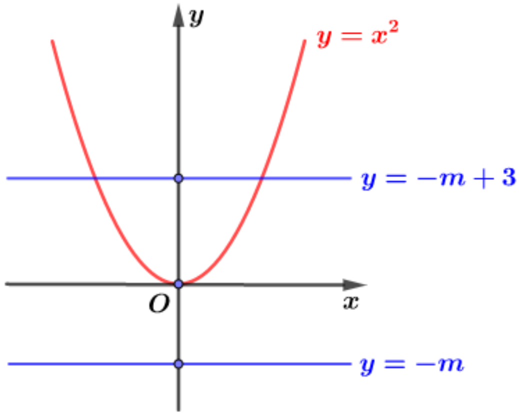
Nếu $\left[\begin{array}{l} -m=0 \\ -m+3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=3 \end{array}\right.$ thì nghiệm $x=0$ là nghiệm bội ba của phương trình $y'=0$.

Suy ra $x=0$ là một điểm cực trị của hàm số $y=f(x^2+m)$, $\forall m$.

Xét các phương trình: $x^2=-m$ (1) và $x^2=-m+3$ (2).

Nhận xét: Phương trình (1) và (2) không có nghiệm chung; $-m<-m+3, \forall m$

Minh họa đồ thị



Xét $-m > 0$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1; x_2 và phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt x_3; x_4. Khi đó y' đổi dấu 5 lần qua các nghiệm x_1; x_2; x_3; x_4 và 0 nên hàm số $y = f\left(x^2 + m\right)$ có 5 điểm cực trị.

Xét $-m + 3 \le 0$ thì phương trình (1) vô nghiệm; phương trình (2) hoặc vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $x = 0$. Khi đó hàm số $y = f\left(x^2 + m\right)$ có 1 điểm cực trị.

Xét $\begin{cases} -m \le 0 \\ -m + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 0 \\ m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le m < 3$. Khi đó phương trình (1) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $x = 0$; phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 0. Suy ra hàm số $y = f\left(x^2 + m\right)$ có 3 điểm cực trị.

Do đó, để hàm số $y = f\left(x^2 + m\right)$ có 3 điểm cực trị thì $0 \le m < 3$.

Mặt khác m nguyên nên $m \in \{0;1;2\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của m để hàm số có đúng 3 điểm cực trị.

Câu 49.10: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 3x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m, hàm số $g(x) = f\left(-x^4 + 2x^2 - m\right)$ có đúng ba điểm cực trị thuộc khoảng $(0;3)$?

A. 62. **B.** 60. **C.** 61. **D.** 64.

Lời giải

Chọn A

$f'(x) = x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$

*) Xét trên $(0;3)$

$$g'(x) = \left(-4x^3 + 4x\right) f'\left(-x^4 + 2x^2 - m\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \notin (0;3) \\ x = 1 \in (0;3) \\ x = -1 \notin (0;3) \\ f'\left(-x^4 + 2x^2 - m\right) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in (0;3) \\ f'\left(-x^4 + 2x^2 - m\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ -x^4 + 2x^2 - m = 1 \\ -x^4 + 2x^2 - m = 2 \end{array}\right.$$

Xét hàm số $h(x) = -x^4 + 2x^2 - m$ trên $(0;3)$

$h'(x) = -4x^3 + 4x$, $h'(x) = -4x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$ trên $(0;3)$ chỉ lấy nghiệm $x = 1$

x	0		1		3
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	$-m$	$\nearrow$	$1-m$	$\searrow$	$-63-m$

$y = 2$

$y = 1$

Để hàm số $g(x)$ có 3 cực trị điều kiện $g'(x) = 0$ có 3 nghiệm bậc lẻ khi đó

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1 - m \le 2 \\ -m < 1 < 1 - m \end{cases} \\ \begin{cases} -63 - m < 1 \\ 2 \le -m \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -1 \le m \\ -1 < m < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -64 < m \\ m \le -2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < m < 0 \\ -64 < m \le -2 \end{array}\right.$$

Do m nguyên nên $m \in \{-63; -62; ...; -2\}$ có 62 giá trị thoả mãn bài toán.

Câu 49.11: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^3 - x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Biết tham số $m \in (a;b)$ thì hàm số hàm số $g(x) = f\left(\left|-x^3 + 3x^2 + m\right|\right)$ đạt nhiều cực trị nhất là c cực trị. Tính tổng $a + b + c$?

A. 9. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 11.

Lời giải

Chọn B

$f'(x) = x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$ trong đó $x = 0$ là nghiệm bậc hai không cho được cực trị

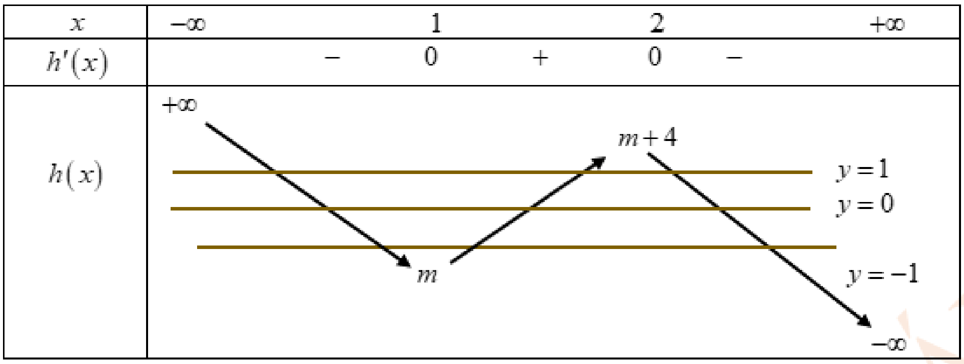
$$g'(x) = \left(\left|-x^3 + 3x^2 + m\right|\right)' f'\left(\left|-x^3 + 3x^2 + m\right|\right) = \frac{\left(-x^3 + 3x^2 + m\right).\left(-x^3 + 3x^2 + m\right)'}{\left|-x^3 + 3x^2 + m\right|} f'\left(\left|-x^3 + 3x^2 + m\right|\right)$$

$$= \frac{\left(-x^3 + 3x^2 + m\right).\left(-3x^2 + 6x\right)}{\left|-x^3 + 3x^2 + m\right|} f'\left(\left|-x^3 + 3x^2 + m\right|\right)$$

Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\left(-x^3 + 3x^2 + m\right).\left(-3x^2 + 6x\right)}{\left|-x^3 + 3x^2 + m\right|} f'\left(\left|-x^3 + 3x^2 + m\right|\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x^3 + 3x^2 + m \ne 0 \\ -3x^2 + 6x = 0 \\ \left|-x^3 + 3x^2 + m\right| = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x^3 + 3x^2 + m \ne 0 \\ x = 0; x = 2 \\ -x^3 + 3x^2 + m = \pm 1 \end{array}\right.$$

Xét hàm số $h(x) = -x^3 + 3x^2 + m$; $h'(x) = -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$ lập được bảng biến thiên



Để có nhiều cực trị nhất thì $g'(x)$ phải có nhiều nghiệm và điểm làm $g'(x)$ không xác định nhất. Dựa bảng biến thiên ta có $m < -1 < 1 < m+4 \Leftrightarrow -3 < m < -1 \Rightarrow m \in (-3;-1)$

Khi đó $a = -3;\ b = -1;\ c = 11$ có $a+b+c = 7$.

Câu 49.12: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^3 + x, \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m, hàm số $g(x) = f\left(x^4 + 2x^3 - mx^2\right)$ có đúng hai điểm cực trị thuộc khoảng $(-1;2)$?

A. 6. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

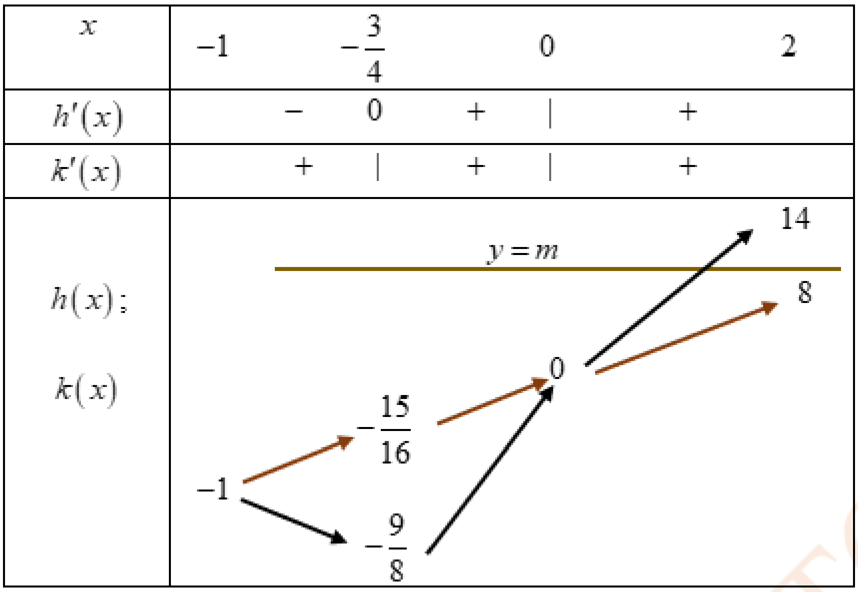
$f'(x) = x\left(x^2+1\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

*) Xét trên $(-1;2)$

$$g'(x) = \left(4x^3 + 6x^2 - 2mx\right)f'\left(x^4 + 2x^3 - mx^2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \notin (-1;2) \\ 4x^2 + 6x - 2m = 0 \\ x^4 + 2x^3 - mx^2 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 \notin (-1;2) & \\ 2x^2 + 3x = m & (1) \\ x^2 + 2x = m & (2) \end{array}\right.$$

Xét hàm số $h(x) = 2x^2 + 3x$; $k(x) = x^2 + 2x$ trên $(-1;2)$ có $h'(x) = 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{4}$; $k'(x) = 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ lập bảng biến thiên của cả hai hàm $h(x); k(x)$ trên cùng một hình ta được kết quả như sau:



Để hàm số $g(x)$ có 2 cực trị điều kiện $g'(x)=0$ có 2 nghiệm bậc lẻ mà $g'(x)$ đã có nghiệm $x=0$ nên tổng hai phương trình $(1);(2)$ có thêm một nghiệm khác 0, dựa vào bảng biến thiên trên ta có

$\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ 8\le m<14 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ 8\le m<14 \end{array}\right.$ mà m là số nguyên nên $m\in\{-1;8;9;10;11;12;13\}$ có 7 giá trị

Câu 49.13: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)(x^2+2mx-2m-1)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m không vượt quá 2024 để hàm số $y=f(x^2+1)$ có đúng 1 điểm cực trị?

A. 2. **B.** 2026. **C.** 2024. **D.** 2025.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=\left(f(x^2+1)\right)'=2x.f'(x^2+1)=2x.(x^2+1)^2(x^2+2)^2\left[(x^2+1)^2+2m(x^2+1)-2m-1\right]$

Khi đó: $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ (x^2+1)^2+2m(x^2+1)-2m-1=0 \xrightarrow{t=x^2+1\ (t\ge1)} t^2+2mt-2m-1=0\ \ (1) \end{array}\right.$.

Ta thấy nghiệm của (1) nếu có sẽ khác 0. Nên $x=0$ là 1 cực trị của hàm số.

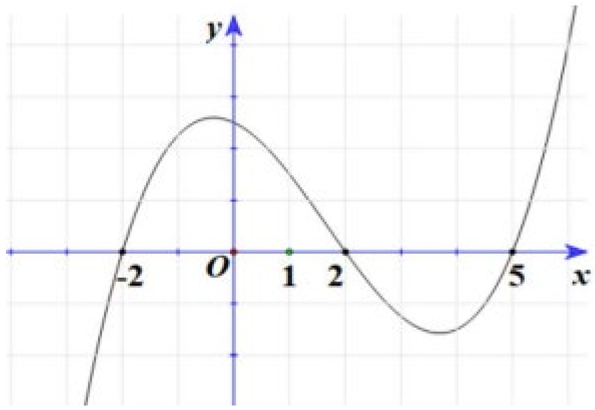
Do đó để hàm số có 1 điểm cực trị thì (1) hoặc vô nghiệm hoặc có nghiệm kép, hoặc có 2 nghiệm $t_1;t_2\le1\Leftrightarrow\begin{cases} t_1-1\le0 \\ t_2-1\le0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \Delta'=m^2+2m+1\le0 \\ \begin{cases} \Delta'=m^2+2m+1>0 \\ (t_1-1)+(t_2-1)\le0 \\ (t_1-1)(t_2-1)\ge0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ \begin{cases} m\ne-1 \\ t_1+t_2\le2 \\ t_1t_2-(t_1+t_2)+1\ge0 \end{cases} \end{array}\right..$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ \begin{cases} m\ne-1 \\ -2m\le2 \\ -2m-1-(-2m)+1\ge0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ \begin{cases} m\ne-1 \\ m\ge-1 \\ 0\ge0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m>-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow m\ge-1$$

Vậy tập hợp các giá trị m thỏa đề là $S=\{-1;0;1;...;2024\}$ nên có 2026 giá trị m.

Câu 49.14: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ



Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2024;2024]$ của tham số m để hàm số $y=f\left(\left|x^2+x-2\right|-m\right)$ có đúng 3 điểm cực trị. Số phần tử của tập hợp S bằng

A. 2026. **B.** 2022. **C.** 2024. **D.** 2020 .

Lời giải

Chọn D

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=2 \\ x=5 \end{array}\right.$$

$$y'=\frac{(2x+1)\left(x^2+x-2\right)}{\left|x^2+x-2\right|}f'\left(\left|x^2+x-2\right|-m\right)$$

Điểm đặc biệt: $y'=0$ hoặc y' không xác định $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{1}{2} \\ x=1 \\ x=-2 \\ f'\left(\left|x^2+x-2\right|-m\right)=0 \quad (1) \end{array}\right.$

Ta thấy $x=-\frac{1}{2}; x=1; x=-2$ là các nghiệm đơn của y'.

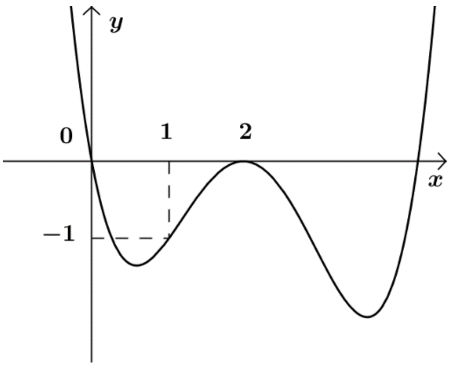
$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|x^2+x-2\right|-m=-2 \\ \left|x^2+x-2\right|-m=2 \\ \left|x^2+x-2\right|-m=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|x^2+x-2\right|=m-2 \\ \left|x^2+x-2\right|=m+2 \\ \left|x^2+x-2\right|=m+5 \end{array}\right.$$

Ta có BBT của hàm số $t=\left|x^2+x-2\right|$ như sau:

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$\left(\left\|x^2+x-2\right\|\right)'$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	
$\left\|x^2+x-2\right\|$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Để hàm số có đúng 3 điểm cực trị thì phương trình (1) không có nghiệm đơn.
Dựa vào BBT trên, phương trình (1) không có nghiệm đơn $\Leftrightarrow m+5\le 0 \Leftrightarrow m\le -5$
Vì $m\in\mathbb{Z}$, $m\in[-2024;2024] \Rightarrow m\in\{-2024;-2023;......-5\}$. Vậy tập S có 2020 phần tử.

Câu 49.15: Cho hàm số bậc năm $y=f\left(x\right)$ có đồ thị $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ dưới đây



Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in\left[-2024;2024\right]$ để số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2-3x+m\right)$ là 5.

A. 2025. **B.** 2. **C.** 2027. **D.** 2024.

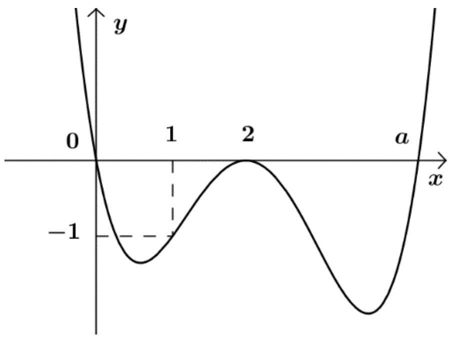
Lời giải

Chọn C

Ta có: $g'\left(x\right)=\left(2x-3\right).f'\left(x^2-3x+m\right)$.

$$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}2x-3=0 & (1)\\ f'\left(x^2-3x+m\right)=0 & (2)\end{array}\right..$$

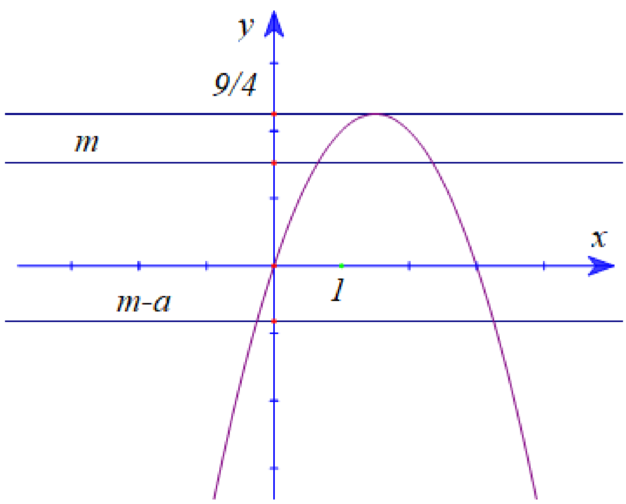
Ta có: $\left(1\right)\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$.



Và $\left(2\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-3x+m=0\\ x^2-3x+m=2\\ x^2-3x+m=a,\ a>2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-x^2+3x\\ m-2=-x^2+3x\\ m-a=-x^2+3x\end{array}\right..$

Với $x^2-3x+m=2$ thì $g'\left(x\right)=0$ có nghiệm kép.

Xét hàm số $y=-x^2+3x$ ta có đồ thị



Do $a>2$, suy ra $m<\frac{9}{4}$ .phương trình $g'(x)=0$ có 5 nghiệm đơn phân biệt nên $g(x)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi $m<\frac{9}{4}$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$, $m\in[-2024;2024]\Rightarrow m\in\{-2024;-2023;......;2\}$. Vậy tập S có 2027 phần tử.

CÂU TƯƠNG TỰ CÂU 50 ĐỀ THAM KHẢO 2024

Câu 50.1: Trong không gian $Oxyz$, cho hình nón (N) có đỉnh $A(1;4;0)$, độ dài đường sinh bằng 6 và đường tròn đáy nằm trên mặt phẳng $(P):2x+y+2z-3=0$. Gọi (C) là giao tuyến của mặt xung quanh của (N) với mặt phẳng $(Q):x-4y+z+3=0$ và M là một điểm di động trên (C). Hỏi giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng AM thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\frac{3}{2};2\right)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **D.** $(2;3)$.

Lời giải

Chọn D

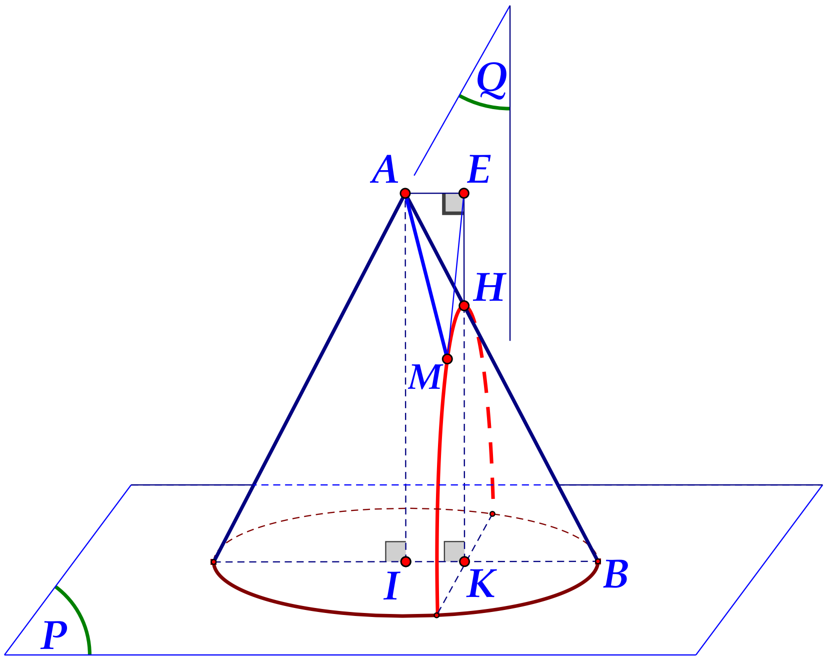
Gọi l,h,r lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính của hình nón.

Theo đề bài ta có $l=6$ và $h=d(A,(P))=1$.

Suy ra $r=\sqrt{l^2-h^2}=\sqrt{35}$.

Mặt khác $\begin{cases}\overrightarrow{n_P}=(2;1;2)\\ \overrightarrow{n_Q}=(1;-4;1)\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}=0\Rightarrow(P)\perp(Q)$.

Khi đó giao tuyến (C) là một parabol có đỉnh H (như hình vẽ).



Gọi E là hình chiếu vuông góc của A lên (Q).

Và $d(A,(Q))=AE=2\sqrt{2}\,(=IK)$ do $IA\,//\,(Q)$.

Ta có: $AM=\sqrt{AE^2+EM^2}=\sqrt{8+EM^2}$

Đồng thời $EM\geq EH$.

Do đó $AM_{\min}\Leftrightarrow AM=AH$ hay $M\equiv H$.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của H lên IB.

Vì $IA // HK \Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{IK}{IB}(Thales) \Rightarrow AH = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{35}}.6 = \frac{12\sqrt{70}}{35} \approx 2,87 \in (2;3)$.

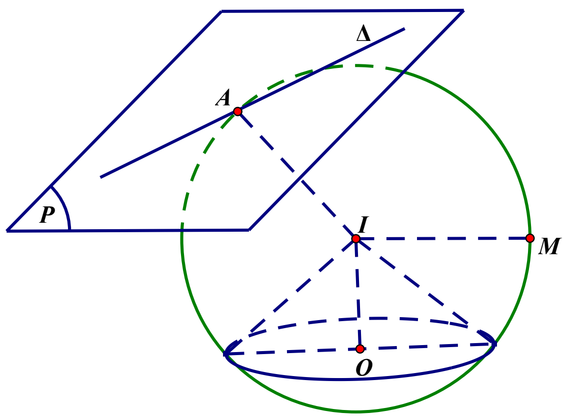
Vậy giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng AM thuộc khoảng $(2;3)$.

Câu 50.2: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua $E(1+3a;-2;2+3a)$ và có một vecto chỉ phương $\vec{u} = (a;1;a+1)$. Biết khi a thay đổi luôn tồn tại một mặt cầu (S) cố định có tâm $I(m;n;p)$ bán kính R đi qua điểm $M(1;1;1)$ và tiếp xúc với đường thẳng Δ. Một khối nón (N) có đỉnh I và đường tròn đáy của khối nón nằm trên mặt cầu (S). Thể tích lớn nhất của khối nón (N) là $\max V_{(N)} = \frac{q\pi}{3}$. Khi đó tổng $m+n+p+q$ bằng

A. 250. **B.** 256. **C.** 252. **D.** 225.

Lời giải

Chọn A



Từ giả thiết ta có phương trình đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1+3a+at \\ y = -2+t \\ z = 2+3a+(a+1)t \end{cases}$.

Ta có đường thẳng Δ luôn đi qua điểm cố định $A(1;-5;-1), \forall a \in \mathbb{R}$. $(t=-3)$.

Nhận thấy đường thẳng Δ luôn nằm trên mặt phẳng $(P): x+y-z+3=0$.

Nếu (P) cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn thì Δ chính là tiếp tuyến của đường tròn, mà từ một điểm chỉ có thể kẻ tối đa hai tiếp tuyến với đường tròn, nên khi đó chỉ có thể tồn tại tối đa hai tiếp tuyến Δ với (S). Do từ A kẻ được vô số tiếp tuyến Δ với (S) nên (P) phải tiếp xúc với (S) tại A.

Ta có $AI \perp (P)$ nên $\overrightarrow{AI}$ cùng phương với $\overrightarrow{n_P} = (1;1;-1)$, do đó $\frac{m-1}{1} = \frac{n+5}{1} = \frac{p+1}{-1}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m+p=0 \\ n+p=-6 \end{cases} (1)$.

Ta lại có $MI = IA \Leftrightarrow MI^2 = IA^2 \Leftrightarrow (m-1)^2 + (n-1)^2 + (p-1)^2 = (m-1)^2 + (n+5)^2 + (p+1)^2$

$\Leftrightarrow 3n + p = -6 (2)$.

Từ $(1),(2)$ ta có hệ phương trình: $\begin{cases} m+p=0 \\ n+p=-6 \\ 3n+p=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=6 \\ n=0 \\ p=-6 \end{cases}$.

Bán kính mặt cầu (S): $R = IM = \sqrt{5^2 + (-1)^2 + (-7)^2} = 5\sqrt{3}$.

Gọi O là tâm của hình tròn đáy của hình nón, đặt $x = IO, x > 0$, khi đó hình nón có bán kính đáy là $r = \sqrt{R^2 - IO^2} = \sqrt{75 - x^2}$.

Thể tích khối nón: $V_{(N)} = \frac{1}{3}\pi.r^2.x = \frac{\pi}{3}.\left(75x - x^3\right)$.

Xét hàm số: $f\left(x\right) = 75x - x^3, x \in \left(0;+\infty\right)$, $f'\left(x\right) = 75 - 3x^2$ với $x \in \left(0;5\sqrt{3}\right)$.

Cho $f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow 75 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5\left(n\right) \\ x = -5\left(l\right) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	0		5		$5\sqrt{3}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	250	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra $\max\limits_{\left(0;5\sqrt{3}\right)} f\left(x\right) = 250$ tại $x = 5$.

Do đó $\max V_{(N)} = \frac{250\pi}{3} \Rightarrow q = 250$.

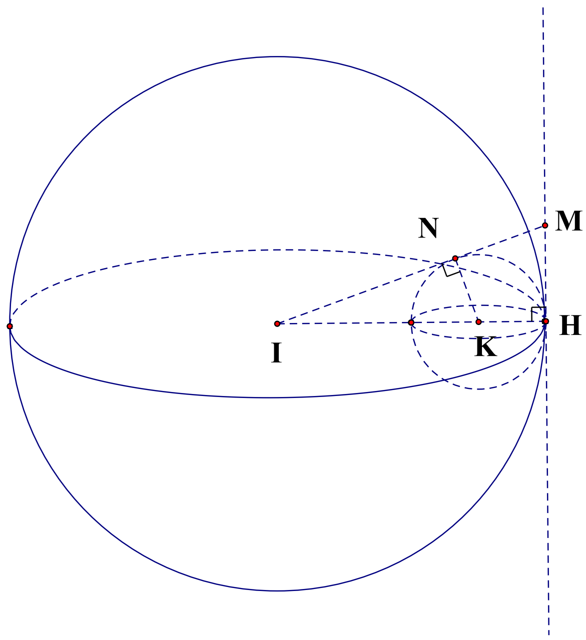
Vậy $m + n + p + q = 6 + 0 + \left(-6\right) + 250 = 250$.

Câu 50.3: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $\left(S_1\right): x^2 + \left(y-1\right)^2 + \left(z-2\right)^2 = 16$, $\left(S_2\right): \left(x-1\right)^2 + \left(y+1\right)^2 + z^2 = 1$ và điểm $A\left(\frac{4}{3};\frac{7}{3};-\frac{14}{3}\right)$. Gọi I là tâm của mặt cầu $\left(S_1\right)$ và $\left(P\right)$ là mặt phẳng tiếp xúc với cả hai mặt cầu $\left(S_1\right)$ và $\left(S_2\right)$. Xét các điểm M thay đổi và thuộc mặt phẳng $\left(P\right)$ sao cho đường thẳng IM tiếp xúc với mặt cầu $\left(S_2\right)$. Khi đoạn thẳng AM ngắn nhất thì $M\left(a;b;c\right)$. Tính giá trị của $T = a + b + c$.

A. $T = 1$. **B.** $T = -1$. **C.** $T = \frac{7}{3}$. **D.** $T = -\frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có mặt cầu (S_1) có tâm $I(0;1;2)$ bán kính $R_1 = 4$ và mặt cầu (S_2) có tâm $K(1;-1;0)$ bán kính $R_2 = 1$.

Có $IK = 3$, suy ra $IK = R_1 - R_2$ nên hai mặt cầu (S_1) và (S_2) tiếp xúc trong tại H.

Suy ra $\overrightarrow{IH} = \frac{4}{3}\overrightarrow{IK} \Rightarrow H\left(\frac{4}{3};-\frac{5}{3};-\frac{2}{3}\right)$ và $\overrightarrow{IK} = (1;-2;-2)$.

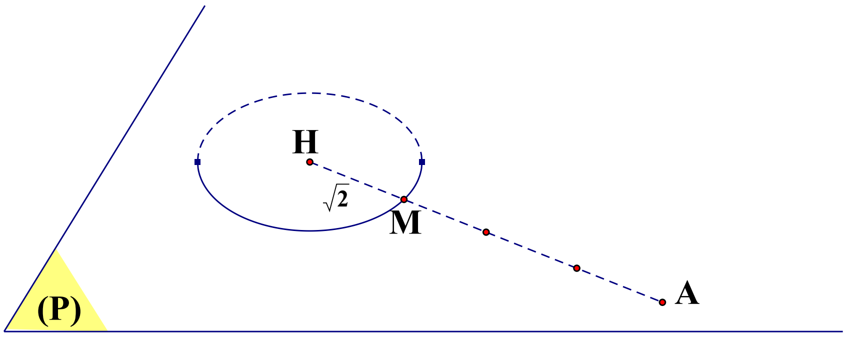
Vì (P) là mặt phẳng tiếp xúc với cả hai mặt cầu (S_1) và (S_2) nên (P) qua H và nhận vectơ $\overrightarrow{IK} = (1;-2;-2)$ là một vectơ pháp tuyến. Suy ra ra phương trình mặt phẳng (P) là $x - 2y - 2z - 6 = 0$.

Giả sử điểm M thay đổi trên (P) thỏa mãn đường thẳng IM tiếp xúc với mặt cầu (S_2), tiếp điểm tương ứng là N.

Ta có ΔIKN và ΔIMH đồng dạng suy ra $\frac{IN}{IH} = \frac{NK}{HM}$ $(*)$.

Với $NK = R_2 = 1; IH = 4; IK = 3; IN = \sqrt{IK^2 - NK^2} = 2\sqrt{2}$ nên $(*) \Leftrightarrow$

$\frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{HM} \Leftrightarrow HM = \sqrt{2}$.



Mặt khác ta lại có $A \in (P)$ và M thay đổi thuộc đường tròn (C) tâm H bán kính $R = \sqrt{2}$ nên AM ngắn nhất bằng $HA - R = 4\sqrt{2} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ khi điểm M thoả mãn $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AH}$

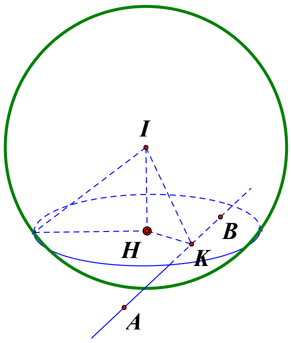
$\Rightarrow M\left(\frac{4}{3};-\frac{2}{3};-\frac{5}{3}\right)$

Suy ra $a = \frac{4}{3}; b = -\frac{2}{3}; c = -\frac{5}{3} \Rightarrow T = a + b + c = -1$.

Câu 50.4: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(3;-2;6)$, $B(0;1;0)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$. Mặt phẳng $(P): ax + by + cz - 2 = 0$ đi qua A, B và cắt theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T = a + b + c$.

A. $T = 3$ **B.** $T = 5$ **C.** $T = 2$ **D.** $T = 4$

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R = 5$.

Mặt phẳng (P) có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}_P = (a;b;c)$

Theo giả thiết $B(0;1;0) \in (P): b - 2 = 0 \Leftrightarrow b = 2$.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-3;3;-6)$ cùng phương với $\vec{u} = (1;-1;2)$.

Phương trình đường thẳng $AB: \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$

Gọi r là bán kính đường tròn giao tuyến. K là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng AB, H là hình chiếu vuông góc của I lên (P)

Ta có: $K \in AB \Rightarrow K(t;1-t;2t) \Rightarrow \overrightarrow{IK} = (t-1;-t-1;2t-3)$

$IK \perp AB \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IK} = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \overrightarrow{IK} = (0;-2;-1)$.

$r = \sqrt{R^2 - d^2(I,(P))} = \sqrt{25 - d^2(I,(P))} = \sqrt{25 - IH^2}$.

Ta có: $r_{\min} \Leftrightarrow IH_{\max}$.

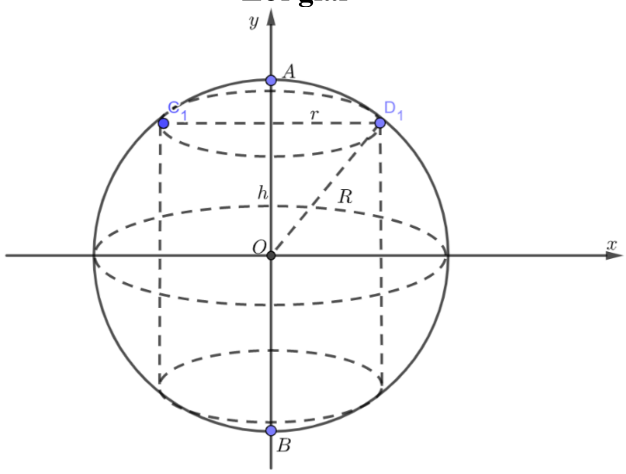
Mà $IH \le IK \Rightarrow IH_{\max} = IK \Leftrightarrow H \equiv K \Rightarrow (P) \perp IK \Rightarrow \vec{n}_P$ và $\overrightarrow{IK}$ cùng phương.

$$\Rightarrow \vec{n}_P = k.\overrightarrow{IK} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -2k \\ c = -k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ k = -1 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow t = a + b + c = 0 + 2 + 1 = 3.$$

Câu 50.5: Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;3;0)$, $B(0;-3;0)$. Mặt cầu (S) nhận AB là đường kính. Hình trụ (H) là hình trụ có trục thuộc trục tung, nội tiếp với mặt cầu và có thể tích lớn nhất. Khi đó mặt phẳng chứa đáy của hình trụ đi qua điểm nào sau đây?

A. $(\sqrt{3};0;0)$. **B.** $(\sqrt{3};\sqrt{3};0)$. **C.** $(\sqrt{3};2;1)$. **D.** $(\sqrt{3};\sqrt{2};\sqrt{3})$.

Lời giải



Chọn B

Bán kính của mặt cầu là $R = \dfrac{AB}{2} = 3$.

Gọi chiều cao của hình trụ là $2h$, $h > 0$. Do đó bán kính của hình trụ là $r = \sqrt{R^2 - h^2} = \sqrt{9 - h^2}$.

Thể tích khối trụ là $V = \pi.r^2.2h = \pi.(9 - h^2).2h = \pi\sqrt{2}\sqrt{(9-h^2)(9-h^2).2h^2}$.

$$V \le \pi\sqrt{2}.\sqrt{\left(\frac{9 - h^2 + 9 - h^2 + 2h^2}{3}\right)^3} = \pi\sqrt{2}.6\sqrt{6} = 12\pi\sqrt{3}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow 9 - h^2 = 2h^2 \Leftrightarrow h = \sqrt{3}$.

Khi đó hình trụ có thể tích lớn nhất là $12\pi\sqrt{3}$.

Vậy hai mặt đáy của trụ có phương trình tương ứng là $y=\sqrt{3}; y=-\sqrt{3}$.

Câu 50.6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có đường kính AB, $I(3;2;-2)$ là trung điểm AB. Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với đoạn AB tại H sao cho khối nón đỉnh A và đáy là đường tròn (C) ((C) là giao của (S) và (P)) có thể tích lớn nhất. Biết (C) có bán kính $r=\dfrac{2\sqrt{10}}{3}$, viết phương trình mặt cầu (S).

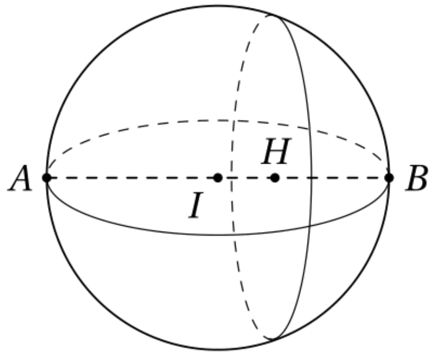
A. $(x-3)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=40$.

B. $(x-3)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=5$.

C. $(x+3)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=5$.

D. $(x-3)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=\sqrt{5}$.

Lời giải



Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm I, bán kính R, (C) có tâm H, bán kính r. Đặt $AH=x$ $(0<x<2R)$, ta có

$$V_{(N)}=\frac{1}{3}AH\cdot S_{(C)}=\frac{1}{3}AH\cdot\pi r^2.$$

Do AB là đường kính nên ta có $r^2=AH\cdot HB=x(2R-x)$. Khi đó

$$V_{(N)}=\frac{\pi}{3}x^2(2R-x)=\frac{\pi}{3}(-x^3+2Rx^2)=\frac{\pi}{3}f(x).$$

Xét hàm số $f(x)=-x^3+2Rx^2$ trên $(0;2R)$, $f'(x)=-3x^2+4Rx$, $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\dfrac{4}{3}R.\end{array}\right.$

Bảng biến thiên $f(x)$:

x	0		$\frac{4}{3}R$		$2R$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $V_{(N)}$ lớn nhất khi $x=\dfrac{4}{3}R$ hay $AH=\dfrac{2}{3}AB$. Mà $AH\cdot HB=r^2=\dfrac{40}{9}$. Suy ra

$$\frac{2}{3}AB\cdot\frac{1}{3}AB=\frac{40}{9}\Rightarrow AB=2\sqrt{5}\Rightarrow R=\sqrt{5}.$$

Suy ra $(S):(x-3)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=5$.