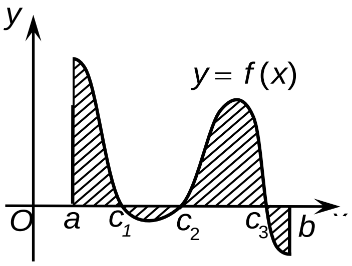
ỨNG DỤNG DIỆN TÍCH

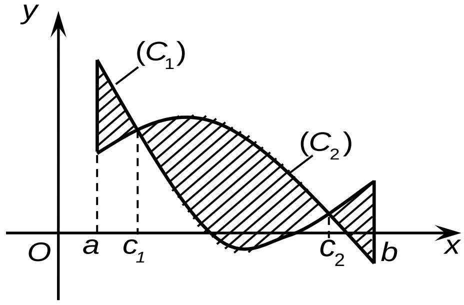
1. Diện tích hình phẳng

a)Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được xác định: $S = \int_a^b |f(x)|dx$



$$(H)\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases} \qquad \boxed{S = \int_a^b |f(x)|dx}$$

b)Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được xác định: $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$



$$(H)\begin{cases} (C_1): y = f_1(x) \\ (C_2): y = f_2(x) \\ x = a \\ x = b \end{cases}$$

$$\boxed{S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|dx}$$

Chú ý:

- Nếu trên đoạn $[a;b]$, hàm số $f(x)$ không đổi dấu thì: $\int_a^b |f(x)|dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$

- Nắm vững cách tính tích phân của hàm số có chứa giá trị tuyệt đối

- Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, $x = h(y)$ và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ được xác định: $S = \int_c^d |g(y) - h(y)|dy$

DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG ĐƯỢC GIỚI HẠN BỞI CÁC ĐỒ THỊ

PHƯƠNG PHÁP:

Trường hợp 1. Cho hai hàm số *f*(*x*) và *g*(*x*) liên tục trên đoạn [*a*; *b*]. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x),\ y = g(x),\ x = a,\ x = b$ là $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$.

Phương pháp giải toán

+) Giải phương trình $f(x) = g(x)$ (1)

+) Nếu (1) vô nghiệm thì $S = \left|\int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx\right|$.

+) Nếu (1) có nghiệm thuộc.$[a;b]$. giả sử a thì $S = \left|\int_a^a \left(f(x) - g(x)\right)dx\right| + \left|\int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx\right|$

Chú ý: Có thể lập bảng xét dấu hàm số $f(x) - g(x)$ trên đoạn $[\text{a; b}]$ rồi dựa vào bảng xét dấu để tính tích phân.

Trường hợp 2. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;\, b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x),\ y = g(x)$ là $S = \int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| dx$. Trong đó $a,\ b$ là nghiệm nhỏ nhất và lớn nhất của phương trình $f(x) = g(x)$ $\left(\alpha \le a < b \le \beta\right)$.

Phương pháp giải toán

Bước 1. Giải phương trình $f(x) = g(x)$ tìm các giá trị a, b.

Bước 2. Tính $S = \int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| dx$ như trường hợp 1.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Dạng 1:Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b\left(a < b\right)$

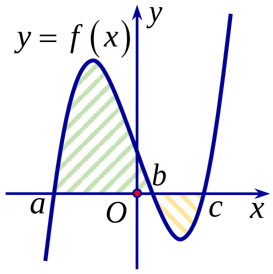
Câu 1. Viết công thức tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$, trục Ox và các đường thẳng $x = a, x = b\ \left(a < b\right)$.

A. $\int_a^b \left| f\left(x\right) \right| dx$. **B.** $\int_a^b f^2\left(x\right) dx$. **C.** $\int_a^b f\left(x\right) dx$. **D.** $\pi \int_a^b f\left(x\right) dx$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Câu 2. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Hình phẳng được đánh dấu trong hình vẽ bên có diện tích là



A. $\int_a^b f\left(x\right) \mathrm{d}x - \int_b^c f\left(x\right) \mathrm{d}x$. **B.** $\int_a^b f\left(x\right) \mathrm{d}x + \int_b^c f\left(x\right) \mathrm{d}x$.

C. $-\int_a^b f\left(x\right) \mathrm{d}x + \int_b^c f\left(x\right) \mathrm{d}x$. **D.** $\int_a^b f\left(x\right) \mathrm{d}x - \int_c^b f\left(x\right) \mathrm{d}x$.

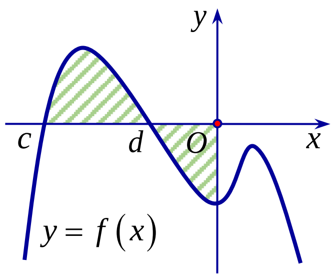
Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $f\left(x\right) \ge 0\ \forall x \in \left[a;\mathrm{b}\right]$ và $f\left(x\right) \le 0\ \forall x \in \left[b;c\right]$ nên diện tích của hình phẳng là

$\int_a^b f\left(x\right) \mathrm{d}x - \int_b^c f\left(x\right) \mathrm{d}x$

Câu 3. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $f\left(x\right)$, trục hoành và trục tung. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $S=\int_c^d f(x)\mathrm{d}x-\int_d^0 f(x)\mathrm{d}x$.

B. $S=-\int_c^d f(x)\mathrm{d}x-\int_d^0 f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=-\int_c^d f(x)\mathrm{d}x+\int_d^0 f(x)\mathrm{d}x$.

D. $S=\int_c^d f(x)\mathrm{d}x+\int_d^0 f(x)\mathrm{d}x$.

Hướng dẫn giải

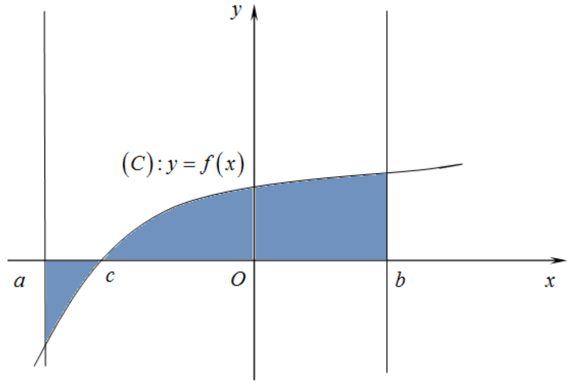
Chọn A

Ta có $S=\int_c^0 |f(x)|\mathrm{d}x=\int_c^d |f(x)|\mathrm{d}x+\int_d^0 |f(x)|\mathrm{d}x$.

Quan sát đồ thị hàm số ta thấy $f(x)\geq 0$ với $x\in[c;d]$ và $f(x)\leq 0$ với $x\in[d;0]$.

Do đó $S=\int_c^d f(x)\mathrm{d}x-\int_d^0 f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 4. Diện tích của hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ (phần tô đậm trong hình vẽ) tính theo công thức:



A. $S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

B. $S=-\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$.

D. $S=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

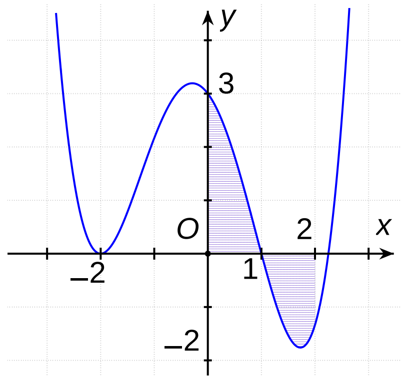
Hướng dẫn giải

Chọn B

Áp dụng công thức tính diện tích hình phẳng ta có:

$$S=\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x=\int_a^c [0-f(x)]\mathrm{d}x+\int_c^b [f(x)-0]\mathrm{d}x=-\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbf{R}$ và có đồ thị (C) là đường cong như hình bên. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C), trục hoành và hai đường thẳng $x=0$, $x=2$ (phần tô đen) là



A. $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.   **B.** $-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

C. $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.   **D.** $\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right|$.

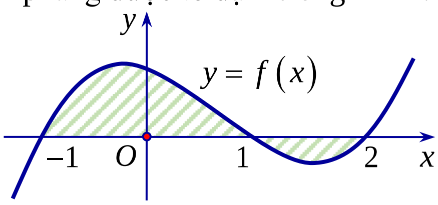
Hướng dẫn giải

Chọn C

Dựa vào hình vẽ ta nhận thấy: khi $x \in (0;1)$ thì $f(x) > 0$, khi $x \in (1;2)$ thì $f(x) < 0$.

Vậy $S = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 6. Gọi S là diện tích miền hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ bên. Công thức tính S là



A. $S = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x$.   **B.** $S = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S = \int\limits_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x$.   **D.** $S = -\int\limits_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta thấy miền hình phẳng giới hạn từ $x = -1$ đến $x = 1$ ở trên trục hoành $\to$ mang dấu dương

$\Rightarrow S_1 = +\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$

Miền hình phẳng giới hạn từ $x = 1$ đến $x = 2$ ở dưới trục hoành $\to$ mang dấu âm

$\Rightarrow S_2 = -\int\limits_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x$

Vậy $S = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 7. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 4$ là

A. $\frac{53}{4}$ **B.** $\frac{51}{4}$ **C.** $\frac{49}{4}$ **D.** $\frac{25}{2}$

Hướng dẫn giải

Ta có $x^3 - 3x^2 = 0$Û $x = 3$Î $[1;4]$

Khi đó diện tích hình phẳng là

$$S=\int_1^4\left|x^3-3x^2\right|dx=\left|\int_1^3(x^3-3x^2)dx\right|+\left|\int_3^4(x^3-3x^2)dx\right|=\left|\left(\frac{x^4}{4}-x^3\right)\Big|_1^3\right|+\left|\left(\frac{x^4}{4}-x^3\right)\Big|_3^4\right|=6+\frac{27}{4}=\frac{51}{4}$$

Câu 8. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^4-3x^2-4$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0$, $x=3$ là

A. $\frac{142}{5}$ **B.** $\frac{143}{5}$ **C.** $\frac{144}{5}$ **D.** $\frac{141}{5}$

Hướng dẫn giải

Ta có $x^4-3x^2-4=0 \Leftrightarrow x=2\in[0;3]$

Khi đó diện tích hình phẳng là

$$S=\int_0^3\left|x^4-3x^2-4\right|dx=\left|\int_0^2(x^4-3x^2-4)dx\right|+\left|\int_2^3(x^4-3x^2-4)dx\right|$$

$$=\left|\left(\frac{x^5}{5}-x^3-4x\right)\Big|_0^2\right|+\left|\left(\frac{x^5}{5}-x^3-4x\right)\Big|_2^3\right|=\frac{48}{5}+\frac{96}{5}=\frac{144}{5}$$

Câu 9. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\frac{x+1}{x+2}$, trục hoành và đường thẳng $x=2$ là

A. $3+2\ln 2$ **B.** $3-\ln 2$ **C.** $3-2\ln 2$ **D.** $3+\ln 2$

Hướng dẫn giải

Ta có $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$ nên $S=\int_{-1}^2\left|\frac{x+1}{x+2}\right|dx=\left|\int_{-1}^2\left(1-\frac{1}{x+2}\right)dx\right|=\left|\left(x-\ln|x+2|\right)\Big|_{-1}^2\right|=3-2\ln 2$

Câu 10. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\cos x$, trục tung, trục hoành và đường thẳng $x=\pi$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\cos x$ và trục hoành là nghiệm phương trình

$\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi$. Xét trên $[0;\pi]$ suy ra $x=\frac{\pi}{2}$

Diện tích hình phẳng cần tính là $S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x dx=2$.

Câu 11. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\cos 2x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0, x=\frac{\pi}{2}$ là

A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 4

Hướng dẫn giải

Ta có $\cos 2x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Nên $S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\cos 2x\right|dx=\left|\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2xdx\right|+\left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2xdx\right|=\left|\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right|+\left|\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right|=1$

Câu 12. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=e^x+e^{-x}$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x=-2$.