

CHUYÊN ĐỀ 3: LÔGARIT

A – KIẾN THỨC CHUNG

1. Định nghĩa:

Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Số α thỏa mãn đẳng thức $a^\alpha = b$ được gọi là lôgarit cơ số a của b và kí hiệu là $\log_a b$. Ta viết: $\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b$.

2. Các tính chất: Cho $a, b > 0, a \neq 1$, ta có:

- $\log_a a = 1, \log_a 1 = 0$
- $a^{\log_a b} = b, \log_a (a^\alpha) = \alpha$

3. Lôgarit của một tích: Cho 3 số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có

- $\log_a (b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$

4. Lôgarit của một thương: Cho 3 số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có

- $\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$
- Đặc biệt : với $a, b > 0, a \neq 1$ $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$

5. Lôgarit của lũy thừa: Cho $a, b > 0, a \neq 1$, với mọi α , ta có

- $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$
- Đặc biệt: $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$

6. Công thức đổi cơ số: Cho 3 số dương a, b, c với $a \neq 1, c \neq 1$, ta có

- $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$
- Đặc biệt : $\log_a c = \frac{1}{\log_c a}$ và $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b$ với $\alpha \neq 0$.

☞ Lôgarit thập phân và Lôgarit tự nhiên

- ♦ Lôgarit thập phân là lôgarit cơ số 10. Viết : $\log_{10} b = \log b = \lg b$
- ♦ Lôgarit tự nhiên là lôgarit cơ số e . Viết : $\log_e b = \ln b$

B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC CHỨA LÔGARIT**

Câu 1: Cho các số dương a, b, c, d . Biểu thức $S = \ln \frac{a}{b} + \ln \frac{b}{c} + \ln \frac{c}{d} + \ln \frac{d}{a}$ bằng

- A. 1. B. 0. C. $\ln \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \right)$. D. $\ln(abcd)$.

Câu 2: Nếu $\log_a b = p$ thì $\log_a a^2 b^4$ bằng

- A. $4p + 2$ B. $4p + 2a$ C. $a^2 p^4$ D. $p^4 + 2a$

Câu 3: Tính giá trị của biểu thức $T = \log_{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[3]{9}}{\sqrt{3}} \right)$.

- A. $T = \frac{11}{4}$ B. $T = \frac{11}{24}$ C. $T = \frac{11}{6}$ D. $T = \frac{11}{12}$

Câu 4: Cho $a, b, c > 0, c \neq 1$ và đặt $\log_c a = m, \log_c b = n, T = \log_{\sqrt{c}} \left(\frac{a^3}{\sqrt[4]{b^3}} \right)$. Tính T theo m, n .

- A. $T = \frac{3}{2}m - \frac{3}{8}n$. B. $T = 6n - \frac{3}{2}m$. C. $T = \frac{3}{2}m + \frac{3}{8}n$. D. $T = 6m - \frac{3}{2}n$.

Câu 5: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn: $a^{\log_3 7} = 27, b^{\log_7 11} = 49, c^{\log_{11} 25} = \sqrt{11}$. Giá trị của biểu thức

$A = a^{(\log_3 7)^2} + b^{(\log_7 11)^2} + c^{(\log_{11} 25)^2}$ là:

- A. 519. B. 729. C. 469. D. 129.

Câu 6: Cho $\log_2 x = \sqrt{2}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \log_2^2 x + \log_{\frac{1}{2}} x + \log_4 x$.

- A. $P = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. B. $P = \frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $P = 2\sqrt{2}$. D. $P = \frac{4 - \sqrt{2}}{2}$.

Câu 7: Cho $\frac{8\pi a^3}{3}$, $\log_a c = -2$ Giá trị của $\log_a \left(\frac{a^4 \sqrt[3]{b}}{c^3} \right)$ bằng

- A. -2. B. $-\frac{2}{3}$. C. $-\frac{5}{6}$. D. 11.

Câu 8: Cho $n > 1$ là một số nguyên dương. Giá trị của $\frac{1}{\log_2 n!} + \frac{1}{\log_3 n!} + \dots + \frac{1}{\log_n n!}$ bằng

- A. 0. B. n . C. $n!$. D. 1.

Câu 9: Cho a là số thực dương khác 1 và $b > 0$ thỏa $\log_a b = \sqrt{3}$. Tính $A = \log_{ab^2} \frac{a}{b^2}$ bằng

- A. $\frac{4\sqrt{3} - 13}{11}$. B. $\frac{13 - 4\sqrt{3}}{11}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{12}$. D. $\frac{1}{12}$.

Câu 10: Cho $a, b > 0, a \neq 1$ thỏa mãn $\log_a b = \frac{b}{4}$ và $\log_2 a = \frac{16}{b}$. Tổng $a + b$ bằng

- A. 12. B. 10. C. 16. D. 18.

Câu 11: Cho a là số thực dương, $a \neq 1$ và $P = \log_{\sqrt[3]{a}} \sqrt{a \sqrt{a \sqrt{a \sqrt{a \sqrt{a}}}}}$. Chọn mệnh đề đúng?

- A. $P = 3$. B. $P = 15$. C. $P = \frac{93}{32}$. D. $P = \frac{45}{16}$.

Câu 12: Tính giá trị của biểu thức $P = \log_{a^2} (a^{10}b^2) + \log_{\sqrt{a}} \left(\frac{a}{\sqrt{b}} \right) + \log_{\sqrt[3]{b}} b^{-2}$ (với $0 < a \neq 1; 0 < b \neq 1$).

- A. $P = 2$. B. $P = 1$. C. $P = \sqrt{3}$. D. $P = \sqrt{2}$.

Câu 13: Giả sử p, q là các số thực dương sao cho $\log_9 p = \log_{12} q = \log_{16} (p+q)$. Tìm giá trị của $\frac{p}{q}$.

- A. $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$. B. $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$. C. $\frac{4}{3}$. D. $\frac{8}{5}$.

Câu 14: Cho a, b là các số thực dương khác 1, thỏa $\log_{a^2} b + \log_{b^2} a = 1$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A. $a = \frac{1}{b}$. B. $a = b$. C. $a = \frac{1}{b^2}$. D. $a = b^2$.

Câu 15: Cho a, b là các số thực dương và $ab \neq 1$ thỏa mãn $\log_{ab} a^2 = 3$ thì giá trị của $\log_{ab} \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ bằng:

- A. $\frac{3}{8}$. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{8}{3}$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 16: Cho a, b là các số thực dương khác 1 và thỏa mãn $\log_a b = 3$. Tính giá trị của biểu thức

$$T = \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{a}}$$

- A. $T = 1$. B. $T = 4$. C. $T = -\frac{3}{4}$. D. $T = -4$.

Câu 17: Cho $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $\cos x = \frac{3}{\sqrt{10}}$. Tính $P = \lg \sin x + \lg \cos x + \lg \tan x$

- A. -1 . B. $\frac{3}{10}$. C. $-\frac{3}{\sqrt{10}}$. D. $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Câu 18: Cho $\log_2 x = 4$; $\log_x y = 4$; $\log_y z = \frac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $x + y + z$ là

- A. 65808. B. 65880. C. 65088. D. 65080.

Câu 19: Cho $\log_3 x = \sqrt{3}$. Giá trị của biểu thức $P = \log_3 x^2 + \log_{\frac{1}{3}} x^3 + \log_9 x$ bằng

- A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{11\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{6-5\sqrt{3}}{2}$. D. $3\sqrt{3}$.

Câu 20: Biết $\log_3 (\log_4 (\log_2 y)) = 0$, khi đó giá trị của biểu thức $A = 2y + 1$ là:

- A. 33. B. 17. C. 65. D. 133.

Câu 21: Giá trị của biểu thức $A = \log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \dots \log_{16} 15$ là:

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{3}{4}$. C. 1. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 22: Tính $B = \lg \tan 1^\circ \cdot \lg \tan 2^\circ \dots \lg \tan 89^\circ$

- A. $B = 0$ B. $B = 10$ C. $B = 9$ D. $B = 6$

Câu 23: Tính $A = \lg \tan 1^\circ + \lg \tan 2^\circ + \dots + \lg \tan 89^\circ$

- A. $A = 0$ B. $A = 1$ C. $A = 2$ D. $A = 5$

Câu 24: Cho a, b, c là các số thực dương ($a, b \neq 1$) và $\log_a b = 5, \log_b c = 7$.

Tính giá trị của biểu thức $P = \log_{\sqrt{a}} \left(\frac{b}{c} \right)$.

- A. $P = \frac{2}{7}$. B. $P = -15$. C. $P = \frac{1}{14}$. D. $P = -60$.

- Câu 25:** Tính giá trị của biểu thức: $Q = \log_a(a\sqrt{b}) - \log_{\sqrt{a}}(a\sqrt[4]{b}) + \log_{\sqrt[3]{b}}(b)$ biết rằng a, b là các số thực dương khác 1.
A. $Q = 2$ **B.** $Q = 3$ **C.** $Q = 4$ **D.** $Q = 5$
- Câu 26:** Tính giá trị của biểu thức sau: $\log_{\frac{1}{a}} a^2 + \log_{a^2} a^{\frac{1}{2}}$ ($1 \neq a > 0$).
A. $\frac{17}{4}$ **B.** $\frac{13}{4}$ **C.** $-\frac{11}{4}$ **D.** $-\frac{15}{4}$
- Câu 27:** Tính giá trị của biểu thức sau: $B = 15 \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\sqrt[3]{4}}{2\sqrt[3]{8}} + \frac{81^{\log_3 5}}{27^{\log_9 36} + 3^{\log_9 2401}}$
A. $\frac{1609}{53}$ **B.** $\frac{1906}{53}$ **C.** $\frac{1909}{53}$ **D.** $\frac{1606}{53}$
- Câu 28:** Tính giá trị của biểu thức sau: $A = \log_2 4\sqrt[3]{16} - 2 \log_{\frac{1}{3}} 27\sqrt[3]{3} + \frac{4^{2+\log_2 3}}{\frac{\log_9 2 + \log_1 5}{3}}$
A. $10 + \frac{144}{5\sqrt{2}}$ **B.** $10 - \frac{144}{5\sqrt{2}}$ **C.** $5\sqrt{2} + \frac{144}{10}$ **D.** $5\sqrt{2} - \frac{144}{\sqrt{10}}$
- Câu 29:** Tính: $B = \log_a \left(\frac{a^2 \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[4]{a}} \right)$
A. $\frac{173}{60}$ **B.** $\frac{177}{50}$ **C.** $\frac{173}{90}$ **D.** $\frac{173}{30}$
- Câu 30:** Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_{16} a = \log_{20} b = \log_{25} \frac{2a-b}{3}$. Tính tỉ số $T = \frac{a}{b}$.
A. $T = \frac{5}{4}$ **B.** $T = \frac{2}{3}$ **C.** $T = \frac{3}{2}$ **D.** $T = \frac{4}{5}$
- Câu 31:** Cho biết $\log_2 a + \log_3 b = 5$. Khi đó giá trị của biểu thức $P = a \log_{\sqrt{2}} a^2 + \log_3 b^3 \cdot \log_2 4^a$ bằng:
A. $30a$. **B.** 1. **C.** $5a$. **D.** 0.
- Câu 32:** Giả sử p, q là các số thực dương sao cho $\log_9 p = \log_{12} q = \log_{16} (p+q)$. Tìm giá trị của $\frac{p}{q}$.
A. $\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})$. **B.** $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{8}{5}$.
- Câu 33:** Cho x, y là các số thực dương thỏa $\log_9 x = \log_6 y = \log_4 \left(\frac{x+y}{6} \right)$. Tính tỉ số $\frac{x}{y}$
A. $\frac{x}{y} = 4$. **B.** $\frac{x}{y} = 3$. **C.** $\frac{x}{y} = 5$. **D.** $\frac{x}{y} = 2$.
- Câu 34:** Cho $\log_9 x = \log_{12} y = \log_{16} (x+y)$. Giá trị của tỷ số $\frac{x}{y}$ là
A. $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$. **B.** $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$. **C.** 1. **D.** 2.
- Câu 35:** Nếu $\log_8 a + \log_4 b^2 = 5$ và $\log_4 a^2 + \log_8 b = 7$ thì giá trị của ab là
A. 2^9 . **B.** 2^{18} . **C.** 8. **D.** 2.
- Câu 36:** Tính giá trị của biểu thức $P = \ln(\tan 1^\circ) + \ln(\tan 2^\circ) + \ln(\tan 3^\circ) + \dots + \ln(\tan 89^\circ)$.
A. $P = 1$. **B.** $P = \frac{1}{2}$. **C.** $P = 0$. **D.** $P = 2$.

Câu 37: Cho các số dương a, b, c khác 1 thỏa mãn $\log_a(bc) = 2, \log_b(ca) = 4$. Tính giá trị của biểu thức $\log_c(ab)$.

- A. $\frac{6}{5}$. B. $\frac{8}{7}$. C. $\frac{10}{9}$. D. $\frac{7}{6}$.

Câu 38: Cho $x = 2000!$. Giá trị của biểu thức $A = \frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \dots + \frac{1}{\log_{2000} x}$ là:

- A. 1. B. -1. C. $\frac{1}{5}$. D. 2000.

Câu 39: Cho a, b là hai số thực dương khác 1 và thỏa mãn $\log_a^2 b - 8\log_b(a\sqrt[3]{b}) = -\frac{8}{3}$. Tính giá trị biểu thức $P = \log_a(a\sqrt[3]{ab}) + 2017$.

- A. $P = 2019$. B. $P = 2020$. C. $P = 2017$. D. $P = 2016$.

Câu 40: Cho biểu thức $P = (\ln a + \log_a e)^2 + \ln^2 a - \log_a^2 e$, với a là số dương khác 1. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $P = 2\ln^2 a + 1$. B. $P = 2\ln^2 a + 2$. C. $P = 2\ln^2 a$. D. $P = \ln^2 a + 2$.

Câu 41: Cho số thực x thỏa $\log_2(\log_8 x) = \log_8(\log_2 x)$. Tính giá trị $P = (\log_2 x)^2$.

- A. $P = \frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $P = 3\sqrt{3}$. C. $P = 27$. D. $P = \frac{1}{3}$.

Câu 42: Cho $\log_a(a^2 b^3) = 1$. Khi đó giá trị biểu thức $\log_{a^2 b^3} \frac{\sqrt[5]{a^3 b^2}}{ab^3}$ là

- A. $\frac{7}{15}$. B. $\frac{15}{7}$. C. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. D. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Câu 43: Cho $\log_7 12 = x, \log_{12} 24 = y$ và $\log_{54} 168 = \frac{axy+1}{bxy+cx}$, trong đó a, b, c là các số nguyên. Tính

giá trị biểu thức $S = a + 2b + 3c$.

- A. $S = 4$. B. $S = 19$. C. $S = 10$. D. $S = 15$.

Câu 44: Cho n là số nguyên dương, tìm n sao cho

$$\log_a 2019 + 2^2 \log_{\sqrt{a}} 2019 + 3^2 \log_{\sqrt[3]{a}} 2019 + \dots + n^2 \log_{\sqrt[n]{a}} 2019 = 1008^2 \times 2017^2 \log_a 2019$$

- A. 2017. B. 2019. C. 2016. D. 2018.

Câu 45: Cho các số thực dương a, b, c lần lượt là số hạng thứ m, n, p của một cấp số cộng và một cấp số nhân. Tính $P = (b-c)\log_3 a + 2(c-a)\log_9 b + 3(a-b)\log_{27} c$.

- A. $P = 3$ B. $P = 1$ C. $P = 0$ D. $P = 2$

Câu 46: Cho hai số thực a, b thay đổi thỏa mãn $a > b > 1$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = (\log_a b^2)^2 + 6 \left(\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2$$
 là $m + \sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{p}$ với m, n, p là các số nguyên. Tính

$$T = m + n + p.$$

- A. $T = -1$. B. $T = 0$. C. $T = -14$. D. $T = 6$.

Câu 47: Cho hai số a, b dương thỏa mãn điều kiện: $a - b = \frac{a \cdot 2^b - b \cdot 2^a}{2^a + 2^b}$. Tính $P = 2017^a - 2017^b$.

- A. 0. B. 2016. C. 2017. D. -1.

BIẾN ĐỔI, RÚT GỌN, BIỂU DIỄN BIỂU THỨC CHỨA LÔGARIT

Câu 48: Nếu $\log 4 = a$ thì $\log 4000$ bằng