

PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG (Chưa học PTĐT)

A – KIẾN THỨC CHUNG

I - Định nghĩa :

Trong không gian Oxyz phương trình dạng $Ax + By + Cz + D = 0$ với $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ được gọi là phương trình tổng quát của mặt phẳng

➤ Phương trình mặt phẳng (P) : $Ax + By + Cz + D = 0$ với $A^2 + B^2 + C^2 > 0$. Có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (A; B; C)$

➤ Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và nhận vectơ $\vec{n} = (A; B; C)$, $\vec{n} \neq \vec{0}$ làm vectơ pháp tuyến có dạng (P) : $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$.

➤ Nếu (P) có cặp vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ không cùng phương , có giá song song hoặc nằm trên (P) .Thì vectơ pháp tuyến của (P) được xác định $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$

II - Các trường hợp riêng của mặt phẳng :

Trong không gian Oxyz cho mp(α) : $Ax + By + Cz + D = 0$, với $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ Khi đó:

➤ $D = 0$ khi và chỉ khi (α) đi qua gốc tọa độ.

➤ $A=0, B \neq 0, C \neq 0, D \neq 0$ Khi và chỉ khi (α) song song với trục Ox

➤ $A=0, B = 0, C \neq 0, D \neq 0$ Khi và chỉ khi (α) song song mp (Oxy)

➤ $A, B, C, D \neq 0$. Đặt $a = -\frac{D}{A}$, $b = -\frac{D}{B}$, $c = -\frac{D}{C}$ Khi đó (α): $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

III - Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

Trong không gian Oxyz cho (α): $Ax + By + Cz + D = 0$ và (α'): $A'x + B'y + C'z + D' = 0$

➤ (α) cắt (α') $\Leftrightarrow \begin{cases} AB' \neq A'B \\ BC' \neq B'C \\ CB' \neq C'B \end{cases}$

➤ (α) // (α') $\Leftrightarrow \begin{cases} AB' = A'B \\ BC' = B'C \text{ và } AD' \neq A'D \\ CB' = C'B \end{cases}$

➤ (α) \equiv (α') $\Leftrightarrow \begin{cases} AB' = A'B \\ BC' = B'C \\ CB' = C'B \\ AD' = A'D \end{cases}$

Đặc biệt

$(\alpha) \perp (\alpha') \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow A.A' + B.B' + C.C' = 0$

IV - Góc giữa hai mặt phẳng:

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng ($0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$)

(P) : $Ax + By + Cz + D = 0$ và (Q) : $A'x + B'y + C'z + D' = 0$

$$\cos \varphi = \left| \cos(\vec{n}_P, \vec{n}_Q) \right| = \frac{|\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q|}{|\vec{n}_P| \cdot |\vec{n}_Q|} = \frac{|A.A' + B.B' + C.C'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

B – BÀI TẬP

DẠNG 1: TÌM VTPT, CÁC VẤN ĐỀ VỀ LÝ THUYẾT

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P) : $3x + 2y - z + 1 = 0$. Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là.

- A. $\vec{n} = (2; 3; -1)$. B. $\vec{n} = (3; 2; -1)$. C. $\vec{n} = (-1; 3; 2)$. D. $\vec{n} = (3; -1; 2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Nếu $(P): ax + by + cz + d = 0$ thì (P) có VTPT là $\vec{n} = (a; b; c)$ (hoặc là một vectơ cùng phương với \vec{n}).

Câu 2: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxyz$, vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Oyz) là:

- A. $\vec{n}(1; 0; 0)$. B. $\vec{n}(0; 1; 0)$. C. $\vec{n}(0; 0; 1)$. D. $\vec{n}(1; 0; 1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 4y + 3z - 2 = 0$. Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là ?

- A. $\vec{n}_2 = (1; 4; 3)$. B. $\vec{n}_3 = (-1; 4; -3)$. C. $\vec{n}_4 = (-4; 3; -2)$. D. $\vec{n}_1 = (0; -4; 3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

(P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; -4; 3)$ nên $\vec{n}_3 = (-1; 4; -3) = -\vec{n}$ cũng là vectơ pháp tuyến.

Câu 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - 2z + 3 = 0$. Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là

- A. $\vec{n} = (-2; 1; 1)$. B. $\vec{n} = (0; 0; -2)$. C. $\vec{n} = (1; -2; 1)$. D. $\vec{n} = (1; 1; -2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng nào sau đây nhận $\vec{n} = (1; 2; 3)$ làm vectơ pháp tuyến?

- A. $2x + 4y + 6z + 1 = 0$. B. $2z - 4z + 6 = 0$.
C. $x + 2y - 3z - 1 = 0$. D. $x - 2y + 3z + 1 = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Mặt phẳng $2x + 4y + 6z + 1 = 0$ nhận vectơ $\vec{n} = (2; 4; 6)$ hay vectơ $\vec{n}_1 = (1; 2; 3)$ làm vectơ pháp tuyến.

Câu 6: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, điểm nào sau đây không thuộc mặt phẳng $(P): x + y + z - 1 = 0$.

- A. $I(1; 0; 0)$. B. $O(0; 0; 0)$. C. $K(0; 0; 1)$. D. $J(0; 1; 0)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Với $O(0; 0; 0)$, thay vào (P) ta được: $-1 \neq 0$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, điểm $M(3; 4; -2)$ thuộc mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau?

- A. $(Q): x - 1 = 0$. B. $(P): z - 2 = 0$.
C. $(R): x + y - 7 = 0$. D. $(S): x + y + z + 5 = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Xét đáp án A ta thấy $3 + 4 - 7 = 0$ vậy M thuộc (R) .

Xét đáp án B ta thấy $3 + 4 - 2 + 5 = 10 \neq 0$ vậy M không thuộc (S) .

Xét đáp án C ta thấy $3 - 1 = 2 \neq 0$ vậy M không thuộc (Q) .

Xét đáp án D ta thấy $-2-2=-4 \neq 0$ vậy M không thuộc (P) .

Câu 8: Mặt phẳng nào sau đây đi qua điểm $A(1; -3; 5)$

A. $(P): 3x - y + z + 5 = 0.$

B. $(P): 2x - y + 3z - 10 = 0.$

C. $(P): 3x - y + z - 5 = 0.$

D. $(P): 2x - y + 3z - 20 = 0.$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Vì $2 \cdot 1 - (-3) + 3 \cdot 5 - 20 = 0.$

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng (P) có phương trình $3x - y + z - 1 = 0$. Trong các điểm sau đây điểm nào thuộc (P) .

A. $A(1; -2; -4).$

B. $C(1; 2; -4).$

C. $D(-1; -2; -4).$

D. $B(1; -2; 4).$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Thay tọa độ các điểm vào phương trình mặt phẳng ta thấy điểm A thỏa.

Câu 10: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $\alpha: x + y - z + 1 = 0$ và $(\beta): -2x + my + 2z - 2 = 0$. Tìm m để (α) song song với (β) .

A. Không tồn tại m .

B. $m = -2.$

C. $m = 2.$

D. $m = 5.$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Mặt phẳng (α) có VTPT là $\vec{n}_1 = (1; 1; -1)$ và $A(0; 0; 1) \in (\alpha)$

Mặt phẳng (β) có VTPT là $\vec{n}_2 = (-2; m; 2)$.

$$\text{Để } (\alpha) // (\beta) \text{ thì } \vec{n}_1, \vec{n}_2 \text{ cùng phương và } A \notin (\beta) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-2}{1} = \frac{m}{1} = \frac{2}{-1} \neq \frac{-2}{1} \\ -2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{không tồn tại } m.$$

Vậy không tồn tại m để $(\alpha) // (\beta)$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 3z - 7 = 0$. Mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến là

A. $\vec{n} = (-1; 2; 3).$

B. $\vec{n} = (1; -4; 3).$

C. $\vec{n} = (-1; 2; -3).$

D. $\vec{n} = (1; 2; -3).$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Mặt phẳng (P) có một vector pháp tuyến $\vec{n}_{(P)} = (1; -2; 3) = -1(-1; 2; -3)$. Nên A đúng.

Câu 12: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x - 4y + 5z - 2 = 0$. vector nào dưới đây là một vector pháp tuyến của (P) ?

A. $\vec{n} = (3; -4; 2)$

B. $\vec{n} = (-4; 5; -2)$

C. $\vec{n} = (3; -4; 5)$

D. $\vec{n} = (3; -5; -2)$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Vì $(P): 3x - 4y + 5z - 2 = 0$. nên một vector pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (3; -4; 5)$.

Câu 13: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x - z + 2 = 0$. Vector nào dưới đây là một vector pháp tuyến của (P) ?

A. $\vec{n} = (3; -1; 2)$

B. $\vec{n} = (-1; 0; -1)$

C. $\vec{n} = (3; 0; -1)$

D. $\vec{n} = (3; -1; 0)$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Chọn $\vec{n} = (3; 0; -1)$.

Câu 14: Cho mặt phẳng $(\alpha): 2x - 3y - 4z + 1 = 0$. Khi đó, một vectơ pháp tuyến của (α) ?

- A. $\vec{n} = (-2; 3; 4)$. B. $\vec{n} = (2; 3; -4)$. C. $\vec{n} = (2; -3; 4)$. D. $\vec{n} = (-2; 3; 1)$.

Hướng dẫn giải**Chọn A**

Mặt phẳng $(\alpha): 2x - 3y - 4z + 1 = 0$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2; -3; -4) = -(-2; 3; 4)$ nên chọn đáp án D.

Câu 15: Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng $(\alpha): 4x + 2y - 6z + 5 = 0$. Khi đó một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là.

- A. $\vec{n} = (4; -2; 6)$. B. $\vec{n} = (4; 2; 6)$. C. $\vec{n} = (2; 1; -3)$. D. $\vec{n} = (4; -2; -6)$.

Hướng dẫn giải**Chọn C**

Câu 16: Trong không gian Oxyz cho mặt phẳng $(P): x - y + 3 = 0$. Vectơ nào sau đây **không** phải là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) ?

- A. $\vec{a} = (1; -1; 0)$. B. $\vec{a} = (-1; 1; 0)$. C. $\vec{a} = (3; -3; 0)$. D. $\vec{a} = (1; -1; 3)$.

Lời giải**Chọn D**

Ta có mặt phẳng $(P): x - y + 3 = 0$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; -1; 0)$.

Trong các đáp án A, C, D lần lượt có $\vec{a} = 3\vec{n}; \vec{a} = -\vec{n}; \vec{a} = \vec{n}$ nên các vectơ đó đều là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

Đáp án: B ($\vec{a} = (1; -1; 0)$ không phải là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P)).

Câu 17: Trong không gian Oxyz, cho hai mặt phẳng $(P): 2x - 3y + z - 4 = 0$; $(Q): 5x - 3y - 2z - 7 = 0$.

Vị trí tương đối của (P) và (Q) là.

- A. Cắt nhưng không vuông góc. B. Vuông góc.
C. Song song. D. Trùng nhau.

Hướng dẫn giải**Chọn A**

$$\vec{n}_{(P)} = (2; -3; 1); \vec{n}_{(Q)} = (5; -3; -2) \Rightarrow \vec{n}_{(P)} \cdot \vec{n}_{(Q)} = 2 \cdot 5 + (-3) \cdot (-3) + 1 \cdot (-2) = 10 + 9 - 2 = 17 \neq 0$$

Vậy vị trí tương đối của (P) & (Q) là cắt nhưng không vuông góc.

Câu 18: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P): 2x - 3z + 4 = 0$. Vectơ nào dưới đây có giá vuông góc với mặt phẳng (P) ?

- A. $\vec{n}_3 = (2; -3; 4)$. B. $\vec{n}_1 = (2; 0; -3)$. C. $\vec{n}_2 = (3; 0; 2)$. D. $\vec{n}_4 = (2; -3; 0)$.

Hướng dẫn giải**Chọn B**

Vectơ có giá vuông góc với mặt phẳng (P) cùng phương với vectơ pháp tuyến của (P) .

Câu 19: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $2x + y - 3z + 1 = 0$. Tìm một véc tơ pháp tuyến \vec{n} của (P) .

- A. $\vec{n} = (-6; -3; 9)$. B. $\vec{n} = (6; -3; -9)$. C. $\vec{n} = (-4; 2; 6)$. D. $\vec{n} = (2; 1; 3)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A

Ta có: $\vec{n} = (-6; -3; 9)$ là một véc tơ pháp tuyến của (P) .

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 3y - z + 5 = 0$. Một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là:

- A. $\vec{n}_2 = (2; -3; 1)$. B. $\vec{n}_3 = (2; 3; -1)$. C. $\vec{n}_4 = (2; -3; -1)$. D. $\vec{n}_1 = (2; 3; 1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Để dàng suy ra được một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_4 = (2; -3; -1)$.

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; -1; 3)$, $B(4; 0; 1)$ và $C(-10; 5; 3)$. Vectơ nào dưới đây là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) ?

- A. $\vec{n} = (1; 2; 2)$. B. $\vec{n} = (1; -2; 2)$. C. $\vec{n} = (1; 8; 2)$. D. $\vec{n} = (1; 2; 0)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $\overline{AB} = (2; 1; -2)$, $\overline{AC} = (-12; 6; 0)$, $[\overline{AB}, \overline{AC}] = (12; 24; 24)$

$\Rightarrow (ABC)$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 2; 2)$.

Câu 22: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 3z - 1 = 0$. Vectơ nào sau đây là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) .

- A. $\vec{n} = (-2; 1; 3)$ B. $\vec{n} = (2; 1; 3)$ C. $\vec{n} = (-4; 2; -6)$ D. $\vec{n} = (2; 1; -3)$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta thấy mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 3z - 1 = 0$ có một VTPT là $\vec{n}_1 = (2; -1; 3)$

Khi đó vectơ $\vec{n} = -2\vec{n}_1 = (-4; 2; -6)$ cũng là một VTPT của (α) .

Câu 23: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + z - 1 = 0$. Vectơ nào dưới đây là vectơ pháp tuyến của (P) ?

- A. $\vec{n} = (2; 1; -1)$. B. $\vec{n} = (-1; 1; -1)$. C. $\vec{n} = (2; -1; -1)$. D. $\vec{n} = (-2; 1; -1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$(P): 2x - y + z - 1 = 0$. Vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (2; -1; 1)$.

Câu 24: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm một vectơ pháp tuyến \vec{n} của mặt phẳng $(\alpha): 4y - 6z + 7 = 0$.

- A. $\vec{n} = (4; -6; 7)$. B. $\vec{n} = (4; 0; -6)$. C. $\vec{n} = (0; 2; -3)$. D. $\vec{n} = (0; 6; 4)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Vectơ pháp tuyến \vec{n} của mặt phẳng (α) là $\vec{n} = (0; 2; -3)$.

Câu 25: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào sau đây **không** là phương trình mặt phẳng: