

## PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

### A – KIẾN THỨC CHUNG

#### I - Định nghĩa mặt cầu:

Tập hợp các điểm trong không gian cách điểm O cố định một khoảng cách R cho trước là mặt cầu tâm O và bán kính R. Kí hiệu  $S(O; R)$

**Trong không gian với hệ trục Oxyz:**

1. Mặt cầu (S) tâm  $I(a; b; c)$  bán kính R có phương trình là :

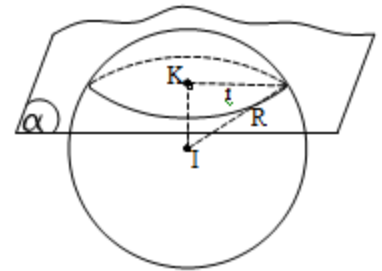
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

2. Phương trình :  $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$  với  $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$

là phương trình mặt cầu tâm  $I(a; b; c)$ , bán kính  $R = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - D}$ .

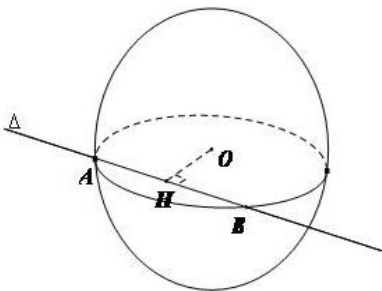
#### II - Vị trí tương đối của mặt phẳng ( $\alpha$ ) và mặt cầu (S):

- $d(I, (\alpha)) > R$  khi và chỉ khi ( $\alpha$ ) không cắt mặt cầu (S).
- $d(I, (\alpha)) = R$  khi và chỉ khi ( $\alpha$ ) tiếp xúc mặt cầu (S).
- $d(I, (\alpha)) < R$  khi và chỉ khi ( $\alpha$ ) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn nằm trên mặt phẳng (P) có tâm K và có bán kính  $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ .

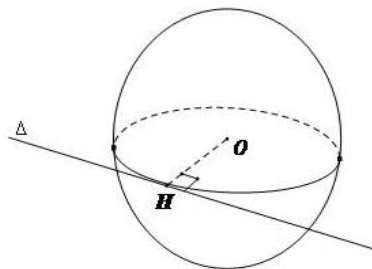


#### III - Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng.

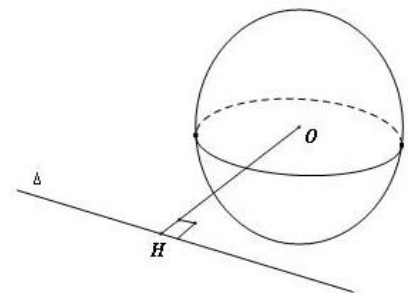
a) Cho mặt cầu  $S(O; R)$  và đường thẳng  $\Delta$ . Gọi H là hình chiếu của O lên  $\Delta$  và  $d = OH$  là khoảng cách từ O đến  $\Delta$



(H.3.1)



(H.3.2)



(H.3.3)

- Nếu  $d < R$  thì  $\Delta$  cắt mặt cầu tại 2 điểm phân biệt (H.3.1)
- Nếu  $d = R$  thì  $\Delta$  cắt mặt cầu tại 1 điểm duy nhất (H.3.2)
- Nếu  $d > R$  thì  $\Delta$  không cắt mặt cầu (H.3.3)

### C – HƯỚNG DẪN GIẢI

#### DẠNG 1: TÌM TÂM VÀ BÁN KÍNH, ĐK XÁC ĐỊNH MẶT CẦU

**Câu 1:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt cầu (S) có tâm  $I(2; 1; -1)$  và tiếp xúc với mp(P) có phương trình:

$2x - 2y - z + 3 = 0$  Bán kính của mặt cầu (S) là:

A.  $R = \frac{4}{3}$ .

B.  $R = 2$ .

C.  $R = \frac{2}{9}$ .

D.  $R = \frac{2}{3}$ .

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B**

$$R = d(I; (P)) = \frac{|2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - (-1) + 3|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = 2$$

**Câu 2:** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , mặt cầu  $(S): (x+2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$  có tâm  $I$  và bán kính  $R$  lần lượt là

- A.  $I(-2;1;0), R=4$ .      B.  $I(2;-1;0), R=4$ .      C.  $I(2;-1;0), R=2$ .      D.  $I(-2;1;0), R=2$

### Hướng dẫn giải

#### Chọn D

**Câu 3:** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): (x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 9$ . Tọa độ tâm và bán kính của mặt cầu  $(P)$  là

- A.  $I(1;-3;-2), R=9$       B.  $I(-1;3;2), R=3$   
C.  $I(1;3;2), R=3$       D.  $I(-1;3;2), R=9$

### Hướng dẫn giải

#### Chọn B

**Câu 4:** Cho điểm  $A(2;0;0), B(0;2;0), C(0;0;2), D(2;2;2)$ . Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  $ABCD$  có bán kính là:

- A.  $\frac{\sqrt{2}}{3}$ .      B. 3      C.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .      D.  $\sqrt{3}$ .

### Hướng dẫn giải

#### Chọn D

Gọi  $I(a;b;c)$  là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  $ABCD$ . Phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  $ABCD$  có dạng  $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0, a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ .

Vì  $A, B, C, D$  nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 4 - 4a + d = 0 \\ 4 - 4b + d = 0 \\ 4 - 4c + d = 0 \\ 12 - 4a - 4b - 4c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 4a - 4 \\ a = b = c \\ 12 - 12a + 4a - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 4a - 4 \\ a = b = c \\ 12 - 12a + 4a - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ a = b = c = 1 \end{cases}$$

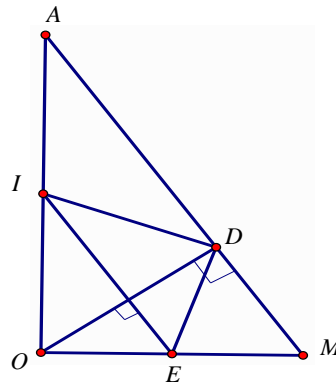
Suy ra  $I(1;1;1)$ , do đó bán kính mặt cầu là  $R = IA = \sqrt{3}$ .

**Câu 5:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho điểm  $A(0;0;4)$ , điểm  $M$  nằm trên mặt phẳng  $(Oxy)$  và  $M \neq O$ . Gọi  $D$  là hình chiếu vuông góc của  $O$  lên  $AM$  và  $E$  là trung điểm của  $OM$ . Biết đường thẳng  $DE$  luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định. Tính bán kính mặt cầu đó.

- A.  $R = \sqrt{2}$ .      B.  $R = 2$ .      C.  $R = 1$ .      D.  $R = 4$ .

### Hướng dẫn giải

#### Chọn B



Ta có tam giác  $OAM$  luôn vuông tại  $O$ .

Gọi  $I$  là trung điểm của  $OA$  (Điểm  $I$  cố định)

Ta có tam giác  $ADO$  vuông tại  $D$  có  $ID$  là

đường trung tuyến nên  $ID = \frac{1}{2}OA = 2$  (1)

Ta có  $IE$  là đường trung bình của tam giác  $OAM$

nên  $IE$  song song với  $AM$  mà  $OD \perp AM \Rightarrow OD \perp IE$

Mặt khác tam giác  $EOD$  cân tại  $E$ . Từ đó suy ra

$IE$  là đường trung trực của  $OD$

Nên  $DOE = ODE; IOD = IDO \Rightarrow IDE = IOE = 90^\circ \Rightarrow ID \perp DE$  (2)

Vậy  $DE$  luôn tiếp xúc với mặt cầu tâm  $I$  bán kính  $R = \frac{OA}{2} = 2$ .

- Câu 6:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S)$  có phương trình  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 5 = 0$ . Trong các số dưới đây, số nào là diện tích của mặt cầu  $(S)$  ?
- A.  $36\pi$ .                      B.  $36$ .                      C.  $12\pi$ .                      D.  $9\pi$ .

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A**

Bán kính  $R = 3 \Rightarrow S = 4\pi R^2 = 36\pi$ .

- Câu 7:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + z^2 + x - 2y + 1 = 0$ . Tâm  $I$  và bán kính  $R$  của  $(S)$  là

- A.  $I\left(-\frac{1}{2}; 1; 0\right)$  và  $R = \frac{1}{4}$                       B.  $I\left(\frac{-1}{2}; 1; 0\right)$  và  $R = \frac{1}{2}$
- C.  $I\left(\frac{1}{2}; -1; 0\right)$  và  $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$                       D.  $I\left(\frac{1}{2}; -1; 0\right)$  và  $R = \frac{1}{2}$

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B**

Phương trình mặt cầu  $(S)$  có dạng  $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$  với

$$\begin{cases} -2a = 1 \\ -2b = -2 \\ -2c = 0 \\ d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 1 \\ c = 0 \\ d = 1 \end{cases}$$

Do đó  $(S)$  có tâm  $I\left(\frac{-1}{2}; 1; 0\right)$  và bán kính  $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 1^2 - 1} = \frac{1}{2}$ .

**Câu 8:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 2 = 0$ . Tính bán kính  $r$  của mặt cầu.

- A.  $r = \sqrt{2}$ .                      B.  $r = 2\sqrt{2}$ .                      C.  $r = \sqrt{26}$ .                      D.  $r = 4$ .

Hướng dẫn giải

**Chọn B**

Mặt cầu  $(S)$  có tâm  $I(1; -1; 2)$  và bán kính  $r = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2 - (-2)} = 2\sqrt{2}$ .

**Câu 9:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 25$ . Tìm tọa độ tâm  $I$  và bán kính  $R$  của mặt cầu  $(S)$ .

- A.  $I(1; -2; 0), R = 5$                       B.  $I(-1; 2; 0), R = 25$   
C.  $I(1; -2; 0), R = 25$                       D.  $I(-1; 2; 0), R = 5$

Hướng dẫn giải

**Chọn A**

Mặt cầu  $(S)$  có tâm  $I(1; -2; 0)$  và bán kính  $R = 5$ .

**Câu 10:** Tìm tâm mặt cầu có phương trình  $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 25$ .

- A.  $I(-1; 0; 2)$ .                      B.  $I(1; 0; -2)$ .                      C.  $I(1; 1; -2)$ .                      D.  $I(1; -2; -2)$ .

Hướng dẫn giải

**Chọn B**

Ta có phương trình mặt cầu  $(S)$  tâm  $I(a; b; c)$  bán kính  $R$  có phương trình là  $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ .

Do đó từ phương trình  $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 25$  ta có tâm của mặt cầu đã cho là  $I(1; 0; -2)$ .

**Câu 11:** Trong không gian với hệ trục  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 4z + 5 = 0$ . Tọa độ tâm và bán kính của  $(S)$  là

- A.  $I(2; 4; 4)$  và  $R = 2$ .                      B.  $I(-1; 2; 2)$  và  $R = 2$ .  
C.  $I(1; -2; -2)$  và  $R = 2$ .                      D.  $I(1; -2; -2)$  và  $R = \sqrt{14}$ .

Hướng dẫn giải

**Chọn C**

Phương trình mặt cầu có dạng:  $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$  ( $a^2 + b^2 + c^2 > d$ )

$\Rightarrow a = 1, b = -2, c = -2, d = 5$ .

Vậy tâm mặt cầu là  $I(1; -2; -2)$  và bán kính mặt cầu  $R = \sqrt{1 + 4 + 4 - 5} = 2$ .

**Câu 12:** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): x^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 4$ . Tọa độ tâm  $I$  và bán kính  $R$  của mặt cầu  $(S)$  là

- A.  $I(0; -1; 2), R = 2$ .                      B.  $I(0; 1; -2), R = 4$ .  
C.  $I(0; 1; -2), R = 2$ .                      D.  $I(1; 1; 2), R = 4$ .

Hướng dẫn giải

**Chọn C**

**Câu 13:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , tính bán kính  $R$  của mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y = 0$ .

- A.  $\sqrt{5}$                       B. 5                      C. 2                      D.  $\sqrt{6}$

Hướng dẫn giải

**Chọn A**

$$\text{Ta có: } \begin{cases} 2a = -2 \\ 2b = -4 \\ 2c = 0 \\ d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}.$$

Vậy bán kính mặt cầu  $(S)$  là  $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$ .

**Câu 14:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$  cho mặt cầu  $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 16$ . Tọa độ tâm  $I$  và bán kính  $R$  của mặt cầu  $(S)$  là

- A.  $I(1; 2; -1); R = 16$ .
- B.  $I(-1; -2; 1); R = 4$ .
- C.  $I(1; 2; -1); R = 4$ .
- D.  $I(-1; -2; 1); R = 16$ .

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C**

Mặt cầu  $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 16$  có tọa độ tâm  $I(1; 2; -1)$  và bán kính là  $R = 4$

**Câu 15:** Trong không gian cho  $Oxyz$ , mặt cầu  $(S)$  có phương trình  $x^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 25$ . Tâm mặt cầu  $(S)$  là điểm

- A.  $I(-4; -1; 25)$ .
- B.  $I(4; 1; 25)$ .
- C.  $I(0; 4; 1)$ .
- D.  $I(0; -4; -1)$

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C**

Ta có tâm  $I(0; 4; 1)$ .

**Câu 16:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , tìm tọa độ tâm  $I$  và bán kính  $R$  của mặt cầu  $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4$ .

- A.  $I(-1; 0; 1), R = 2$ .
- B.  $I(1; 0; -1), R = 4$ .
- C.  $I(1; 0; -1), R = 2$ .
- D.

$I(-1; 0; 1), R = 4$ .

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C**

Tọa độ tâm  $I(1; 0; -1)$  và bán kính  $R = 2$ .

**Câu 17:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S)$  có phương trình:

$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 4$ . Tìm tọa độ tâm  $I$  và bán kính  $R$  của  $(S)$ .

- A.  $I(1; -2; 3)$  và  $R = 4$ .
- B.  $I(-1; 2; -3)$  và  $R = 4$ .
- C.  $I(1; -2; 3)$  và  $R = 2$ .
- D.  $I(-1; 2; -3)$  và  $R = 2$ .

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C**

**Câu 18:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y + 6z - 3 = 0$ . Tọa độ tâm  $I$  và tính bán kính  $R$  của  $(S)$ .

- A.  $I(-2; -2; 3)$  và  $R = 20$ .
- B.  $I(2; 2; -3)$  và  $R = \sqrt{20}$ .
- C.  $I(4; 4; -6)$  và  $R = 71$ .
- D.  $I(-4; -4; 6)$  và  $R = \sqrt{71}$ .

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B**

Tâm  $I$  của mặt cầu  $(S)$  là  $I = (2; 2; -3)$ , bán kính là  $R = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-3)^2 + 3} = \sqrt{20}$ .