HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

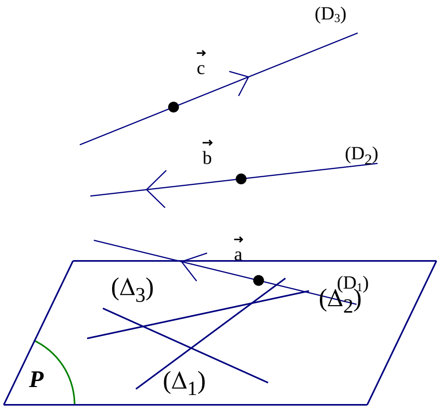
I. Véc tơ trong không gian:

1. Định nghĩa

Trong không gian, véc tơ là một đoạn thẳng có định hướng tức là đoạn thẳng có quy định thứ tự của hai đầu.

- ✓ **Chú ý:** Các định nghĩa về hai véc tơ bằng nhau, đối nhau và các phép toán trên các véc tơ trong không gian được xác định tương tự như trong mặt phẳng.

2. Véc tơ đồng phẳng



a. Định nghĩa: Ba véc tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ khác $\vec{0}$ gọi là đồng phẳng khi giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

✓ **Chú ý:**

- n véc tơ khác $\vec{0}$ gọi là đồng phẳng khi giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.
- Các giá của các véc tơ đồng phẳng có thể là các đường thẳng chéo nhau.

b. Điều kiện để ba véc tơ khác $\vec{0}$ đồng phẳng:

✓ Định lý 1: $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \exists m,n \in R : \vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$

c. Phân tích một véc tơ theo ba véc tơ không đồng phẳng:

✓ Định lý 2: Cho ba véc tơ $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}$ không đồng phẳng. Bất kỳ một véc tơ $\vec{a}$ nào trong không gian cũng có thể phân tích theo ba véc tơ đó, nghĩa là có một bộ ba số thực $\left(x_1,x_2,x_3\right)$ duy nhất sao cho:

$$\vec{a} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + x_3\overrightarrow{e_3}$$

✓ **Chú ý:** Cho ba véc tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ khác $\vec{0}$:

① $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng nếu có ba số thực m,n,p không đồng thời bằng 0 sao cho:

$$m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = 0$$

② $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng nếu từ

$$m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow m = n = p = 0$$

II. Tọa độ của véc tơ:

Trong không gian xét hệ trục Oxyz, có trục Ox vuông góc với trục Oy tại O, và trục Oz vuông góc với mặt phẳng (Oxy) tại O. Các vectơ đơn vị trên từng trục Ox, Oy, Oz lần lượt là $\vec{i} = \left(1;0;0\right)$, $\vec{j} = \left(0;0;1\right)$, $\vec{k} = \left(0;0;1\right)$.

1. Nếu $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ thì $\vec{a} = \left(a_1;a_2;a_3\right)$.

2. $M\left(x_M;y_M;z_M\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x_M\vec{i} + y_M\vec{j} + z_M\vec{k}$

3. Cho $A\left(x_A;y_A;z_A\right)$ và $B\left(x_B;y_B;z_B\right)$ ta có: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$ và $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

4. M là trung điểm AB thì M$\left(\dfrac{x_A + x_B}{2};\dfrac{y_A + y_B}{2};\dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$.

III. Tọa độ của véctơ

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz .

1. $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3) \Leftrightarrow \vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$

2. Cho $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ ta có

- $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=b_1\\a_2=b_2\\a_3=b_3\end{cases}$
- $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_1\pm b_1;a_2\pm b_2;a_3\pm b_3)$
- $k.\vec{a}=(ka_1;ka_2;ka_3)$
- $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a};\vec{b})=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$
- $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$
- $\cos\varphi=\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{a_1.b_1+a_2.b_2+a_3.b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$ (với $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$)
- $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc $\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=0\Leftrightarrow a_1.b_1+a_2.b_2+a_3.b_3=0$
- $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùngphương $\Leftrightarrow\exists k\in R:\vec{a}=k\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=kb_1\\a_2=kb_2\\a_3=kb_3\end{cases}$

III. Tích có hướng của hai vectơ và ứng dụng:

Tích có hướng của $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ là :

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(\begin{vmatrix}a_2 a_3\\b_2 b_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_3 a_1\\b_3 b_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_1 a_2\\b_1 b_2\end{vmatrix}\right)=(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1)$$

1. Tính chất :

- $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\perp\vec{a}$, $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\perp\vec{b}$
- $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b})$
- $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}$
- $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c}=0$

2. Các ứng dụng tích có hướng :

- Diện tích tam giác : $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\right|$
- Thểtích tứ diện$V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right|$
- Thể tích khối hộp: $V_{ABCDA'B'C'D'}=\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}].\overrightarrow{AA'}\right|$

IV. Một số kiến thức khác:

1. Nếu M chia đoạn AB theo tỉ số k ($\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB}$) thì ta có :

$$x_M=\frac{x_A-kx_B}{1-k};y_M=\frac{y_A-ky_B}{1-k};z_M=\frac{z_A-kz_B}{1-k}\quad \text{Với } k\neq 1$$

2. G là trọng tâm của tam giác ABC $\Leftrightarrow x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3};y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3};z_G=\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}$

3. G là trọng tâm của tứ diện ABCD $\Leftrightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

DẠNG 1: TÌM TỌA ĐỘ ĐIỂM, TỌA ĐỘ VEC TƠ THỎA ĐK CHO TRƯỚC

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a}=(3;-2;1)$, $\vec{b}=(-1;1;-2)$, $\vec{c}=(2;1;-3)$, $\vec{u}=(11;-6;5)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\vec{u}=2\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c}$. **B.** $\vec{u}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$.

C. $\vec{u}=3\vec{a}-2\vec{b}-2\vec{c}$. **D.** $\vec{u}=3\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

□ $3\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}=3(3;-2;1)-2(-1;1;-2)+(2;1;-3)=(13;-7;4)\neq\vec{u}$. Nên A sai.

□ $2\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c}=2(3;-2;1)+3(-1;1;-2)+(2;1;-3)=(5;0;-7)\neq\vec{u}$. Nên B sai.

□ $2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}=2(3;-2;1)-3(-1;1;-2)+(2;1;-3)=(11;-6;5)=\vec{u}$. Nên C đúng.

□ $3\vec{a}-2\vec{b}-2\vec{c}=3(3;-2;1)-2(-1;1;-2)-2(2;1;-3)=(7;-10;13)\neq\vec{u}$. Nên D sai.

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;0)$ và $B(-3;0;4)$. Tọa độ của véctơ $\overrightarrow{AB}$ là

A. $(4;-2;-4)$. **B.** $(-4;2;4)$. **C.** $(-1;-1;2)$. **D.** $(-2;-2;4)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B

$\overrightarrow{AB}=(-4;2;4)$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{OM}=2\vec{j}+\vec{k}$. Tọa độ của điểm M là:

A. $M(0;2;1)$. **B.** $M(1;2;0)$. **C.** $M(2;1;0)$. **D.** $M(2;0;1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Vì $\overrightarrow{OM}=2\vec{j}+\vec{k}$ nên tọa độ điểm M là $M(0;2;1)$.

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OM}=(1;5;2)$, $\overrightarrow{ON}=(3;7;-4)$. Gọi P là điểm đối xứng với M qua N. Tìm tọa độ điểm P.

A. $P(5;9;-3)$. **B.** $P(2;6;-1)$. **C.** $P(5;9;-10)$. **D.** $P(7;9;-10)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $\overrightarrow{OM}=(1;5;2)\Rightarrow M(1;5;2)$, $\overrightarrow{ON}=(3;7;-4)\Rightarrow N(3;7;-4)$.

Vì P là điểm đối xứng với M qua N nên N là trung điểm của MP nên ta suy ra được

$$\begin{cases} x_P=2x_N-x_M=5 \\ y_P=2y_N-y_M=9 \\ z_P=2z_N-z_M=-10 \end{cases} \Rightarrow P(5;9;-10)$$

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;3;5)$, $B(2;0;1)$, $C(0;9;0)$. Tìm trọng tâm G của tam giác ABC.

A. $G(1;5;2)$. **B.** $G(1;0;5)$. **C.** $G(1;4;2)$. **D.** $G(3;12;6)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Theo công thức tọa độ trọng tâm ta có $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = \dfrac{1+2+0}{3} = 1 \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = \dfrac{3+0+9}{3} = 4 \\ z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3} = \dfrac{5+1+0}{3} = 2 \end{cases} \Rightarrow G(1;4;2)$.

Câu 6: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC biết $A(1;-2;4)$, $B(2;3;-5), C(3;-4;1)$. Tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC?
$G(2;-1;0)$.

A. $G(-2;1;0)$. **B.** Ta có $G(2;-1;0)$. **C.** $G(18;-9;0)$. **D.** $G(6;-3;0)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Câu 7: Cho các vectơ $\vec{a} = (1;2;3)$; $\vec{b} = (-2;4;1)$; $\vec{c} = (-1;3;4)$. Vectơ $\vec{v} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c}$ có tọa độ là

A. $\vec{v} = (23;7;3)$. **B.** $\vec{v} = (7;23;3)$. **C.** $\vec{v} = (3;7;23)$. **D.** $\vec{v} = (7;3;23)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $2\vec{a} = (2;4;6)$, $-3\vec{b} = (6;-12;-3)$, $5\vec{c} = (-5;15;20)$.

$\Rightarrow \vec{v} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c} = (3;7;23)$.

Câu 8: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-3;5;1)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

A. $D(-2;8;-3)$. **B.** $D(-2;2;5)$. **C.** $D(-4;8;-5)$. **D.** $D(-4;8;-3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow (x_D - 1; y_D - 2; z_D + 1) = (-5;6;-2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_D - 1 = -5 \\ y_D - 2 = 6 \\ z_D + 1 = -2 \end{cases} \Rightarrow D(-4;8;-3)$.

Câu 9: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;-2;5)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng tọa độ (Oxz) là

A. $M(3;0;5)$. **B.** $M(3;-2;0)$. **C.** $M(0;-2;5)$. **D.** $M(0;2;5)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Để tìm tọa độ hình chiếu của điểm $A(3;-2;5)$ lên mặt phẳng (Oxz) ta chỉ cần giữ nguyên hoành độ và cao độ, cho tung độ bằng 0.

Câu 10: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;2;-2)$, $B(-3;5;1)$, $C(1;-1;-2)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC?

A. $G(2;5;-2)$. **B.** $G(0;2;-1)$. **C.** $G(0;2;3)$. **D.** $G(0;-2;-1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là $G\left(\dfrac{2+(-3)+1}{3};\dfrac{2+5+(-1)}{3};\dfrac{-2+1+(-2)}{3}\right)$ hay $G(0;2;-1)$.

Câu 11: Trong không gian cho ba điểm $A(5;\ -2;\ 0), B(-2;\ 3;\ 0)$ và $C(0;\ 2;\ 3)$. Trọng tâm G của tam giác ABC có tọa độ là

A. $(2;0;-1)$. **B.** $(1;1;-2)$. **C.** $(1;2;1)$. **D.** $(1;1;1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $\begin{cases} A=(5;-2;0) \\ B=(-2;3;0) \Rightarrow G=(1;1;1). \\ C=(0;2;3) \end{cases}$

Câu 12: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(-1;2;3), B(2;4;2)$ và tọa độ trọng tâm $G(0;2;1)$. Khi đó, tọa độ điểm C là:

A. $C(-1;0;-2)$. **B.** $C(1;0;2)$. **C.** $C(-1;-4;4)$. **D.** $C(1;4;4)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

G là trọng tâm $\Delta ABC \Leftrightarrow \begin{cases} x_A+x_B+x_C=3x_G \\ y_A+y_B+y_C=3y_G \\ z_A+z_B+z_C=3z_G \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1+2+x_C=0 \\ 2+4+y_C=6 \\ 3+2+z_C=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C=-1 \\ y_C=0 \\ z_C=-2 \end{cases}.$

Vậy $C(-1;0;-2)$.

Câu 13: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho điểm $I(-5;0;5)$ là trung điểm của đoạn MN, biết $M(1;-4;7)$. Tìm tọa độ của điểm N.

A. $N(-11;4;3)$. **B.** $N(-11;-4;3)$. **C.** $N(-2;-2;6)$. **D.** $N(-10;4;3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$I(-5;0;5)$ là trung điểm của đoạn MN nên ta có.

$\begin{cases} x_I=\dfrac{x_M+x_N}{2} \\ y_I=\dfrac{y_M+y_N}{2} \\ z_I=\dfrac{z_M+z_N}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_N=2x_I-x_M \\ y_N=2y_I-y_M \\ z_N=2z_I-z_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N=2(-5)-1 \\ y_N=2.0-(-4) \\ z_N=2.5-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N=-11 \\ y_N=4 \\ z_N=3 \end{cases}$. Suy ra $N(-11;4;3)$.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$ với hệ tọa độ $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ cho $\overrightarrow{OA}=-2\vec{i}+5\vec{k}$. Tìm tọa độ điểm A.

A. $(5;-2;0)$. **B.** $(-2;0;5)$. **C.** $(-2;5;0)$. **D.** $(-2;5)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Dựa vào định nghĩa $\overrightarrow{OA}=-2\vec{i}+0\vec{j}+5\vec{k} \Rightarrow A(-2;0;5)$.

Câu 15: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3;1;0)$ và $\overrightarrow{MN}=(-1;-1;0)$. Tìm tọa độ của điểm N.

A. $N(-2;0;0)$. **B.** $N(2;0;0)$. **C.** $N(4;2;0)$. **D.** $N(-4;-2;0)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Gọi $N(x;y;z)$ là điểm cần tìm. Ta có: $\overrightarrow{MN}(x-3;y-1;z)$.