ĐIỂM ĐẶC BIỆT CỦA HỌ ĐƯỜNG CONG

1. Bài toán tìm điểm cố định của họ đường cong

Xét họ đường cong (C_m) có phương trình $y = f(x,m)$, trong đó f là hàm đa thức theo biến x với m là tham số sao cho bậc của m không quá 2. Tìm những điểm cố định thuộc họ đường cong khi m thay đổi?

Phương pháp giải:

- *Bước 1:* Đưa phương trình $y = f(x,m)$ về dạng phương trình theo ẩn m có dạng sau: $Am + B = 0$ hoặc $Am^2 + Bm + C = 0$.
- *Bước 2:* Cho các hệ số bằng 0, ta thu được hệ phương trình và giải hệ phương trình: $\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$.
- *Bước 3:* Kết luận:

- Nếu hệ vô nghiệm thì họ đường cong (C_m) không có điểm cố định.

- Nếu hệ có nghiệm thì nghiệm đó là điểm cố định của (C_m).

2. Bài toán tìm điểm có tọa độ nguyên

Cho đường cong (C) có phương trình $y = f(x)$ (hàm phân thức). Hãy tìm những điểm có tọa độ nguyên của đường cong?

Những điểm có tọa độ nguyên là những điểm sao cho cả hoành độ và tung độ của điểm đó đều là số nguyên.

Phương pháp giải:

- *Bước 1:* Thực hiện phép chia đa thức chia tử số cho mẫu số.
- *Bước 2:* Lập luận để giải bài toán.

3. Bài toán tìm điểm có tính chất đối xứng

Cho đường cong (C) có phương trình $y = f(x)$. Tìm những điểm đối xứng nhau qua một điểm, qua đường thẳng.

Bài toán 1: *Cho đồ thị $(C): y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ trên đồ thị (C) tìm những cặp điểm đối xứng nhau qua điểm $I(x_I, y_I)$.*

Phương pháp giải:

- Gọi $M\left(a; Aa^3 + Ba^2 + Ca + D\right)$, $N\left(b; Ab^3 + Bb^2 + Cb + D\right)$ là hai điểm trên (C) đối xứng nhau qua điểm I.
- Ta có $\begin{cases} a + b = 2x_I \\ A(a^3 + b^3) + B\left(a^2 + b^2\right) + C\left(a + b\right) + 2D = 2y_I \end{cases}$.

Giải hệ phương trình tìm được a, b từ đó tìm được toạ độ M, N.

Bài toán 2: *Cho đồ thị $(C): y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$. Trên đồ thị (C) tìm những cặp điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ.*

Phương pháp giải:

- Gọi $M\left(a, Aa^3 + Ba^2 + Ca + D\right), N\left(b, Ab^3 + Bb^2 + Cb + D\right)$ là hai điểm trên (C) đối xứng nhau qua gốc tọa độ.

- Ta có $\begin{cases} a+b=0 \\ A(a^3+b^3)+B\left(a^2+b^2\right)+C\left(a+b\right)+2D=0 \end{cases}$.
- Giải hệ phương trình tìm được a,b từ đó tìm được toạ độ M,N.

Bài toán 3: *Cho đồ thị $\left(C\right): y=Ax^3+Bx^2+Cx+D$ trên đồ thị $\left(C\right)$ tìm những cặp điểm đối xứng nhau qua đường thẳng $d: y=A_1x+B_1$.*

Phương pháp giải:

- Gọi $M\left(a; Aa^3+Ba^2+Ca+D\right)$, $N\left(b; Ab^3+Bb^2+Cb+D\right)$ là hai điểm trên $\left(C\right)$ đối xứng nhau qua đường thẳng d.
- Ta có: $\begin{cases} I\in d & (1) \\ \overrightarrow{MN}.\vec{u}_d=0 & (2) \end{cases}$ (với I là trung điểm của MN và $\vec{u}_d$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng d).
- Giải hệ phương trình tìm được *M, N*.

4. Bài toán tìm điểm đặc biệt, khoảng cách

4.1. Lý thuyết:

- Cho hai điểm $A\left(x_1;y_1\right);B\left(x_2;y_2\right) \Rightarrow AB=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}$
- Cho điểm $M\left(x_0;y_0\right)$ và đường thẳng $d: Ax+By+C=0$, thì khoảng cách từ M đến d là $h\left(M;d\right)=\dfrac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.
- Cho hàm phân thức: $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ tiếp tuyến tại *M* cắt *TCĐ, TCN* ở *A* và *B* thì *M* là trung điểm của *AB*. Thì diện tích tam giác MAB không đổi: $S_{MAB}=\dfrac{2}{c^2}\left|ad-bc\right|$.

4.2. Các bài toán thường gặp

Bài toán 1: *Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $\left(c\neq 0,\ ad-bc\neq 0\right)$ có đồ thị $\left(C\right)$. Hãy tìm trên (C) hai điểm A và B thuộc hai nhánh đồ thị hàm số sao cho khoảng cách AB ngắn nhất.*

Phương pháp giải:

- $\left(C\right)$ có tiệm cận đứng $x=-\dfrac{d}{c}$ do tính chất của hàm phân thức, đồ thị nằm về hai phía của tiệm cận đứng. Nên gọi hai số α,β là hai số dương.
- Nếu A thuộc nhánh trái: $x_A<-\dfrac{d}{c}\Rightarrow x_A=-\dfrac{d}{c}-\alpha<-\dfrac{d}{c}$; $y_A=f(x_A)$.
- Nếu B thuộc nhánh phải: $x_B>-\dfrac{d}{c}\Rightarrow x_B=-\dfrac{d}{c}+\beta>-\dfrac{d}{c}$; $y_B=f(x_B)$.
- Sau đó tính: $AB^2=\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2=\left[\left(a+\beta\right)-\left(a-\alpha\right)\right]^2+\left(y_B-y_A\right)^2$.
- Áp dụng bất đẳng thức Cauchy sẽ tìm ra kết quả.

Bài toán 2: *Cho đồ thị hàm số $\left(C\right)$ có phương trình $y=f(x)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (C) để tổng khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ nhỏ nhất.*

Phương pháp giải:

- Gọi $M\left(x;y\right)$ và tổng khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ là d thì $d=|x|+|y|$.
- Xét các khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ khi M nằm ở các vị trí đặc biệt: Trên trục hoành, trên trục tung.
- Sau đó xét tổng quát, những điểm M có hoành độ, hoặc tung độ lớn hơn hoành độ hoặc tung độ của M khi nằm trên hai trục thì loại đi không xét đến.
- Những điểm còn lại ta đưa về tìm giá trị nhỏ nhất của đồ thi hàm số dựa vào đạo hàm rồi tìm được giá trị nhỏ nhất của d.

Bài toán 3: *Cho đồ thị (C) có phương trình $y=f(x)$. Tìm điểm M trên (C) sao cho khoảng cách từ M đến Ox bằng k lần khoảng cách từ M đến trục Oy.*

Phương pháp giải:

Theo đầu bài ta có $|y|=k|x| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=kx \\ y=-kx \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x\right)=kx \\ f\left(x\right)=-kx \end{array}\right.$.

Bài toán 4: *Cho đồ thị hàm số (C) có phương trình $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}\left(c\neq 0,\ ad-bc\neq 0\right)$. Tìm tọa độ điểm M trên (C) sao cho độ dài MI ngắn nhất (với I là giao điểm hai tiệm cận).*

Phương pháp giải:

- Tiệm cận đứng $x=\dfrac{-d}{c}$; tiệm cận ngang $y=\dfrac{a}{c}$.
- Ta tìm được tọa độ giao điểm $I\left(\dfrac{-d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ của hai tiệm cận.
- Gọi $M\left(x_M;y_M\right)$ là điểm cần tìm, thì: $IM^2=\left(x_M+\dfrac{d}{c}\right)^2+\left(y_M-\dfrac{a}{c}\right)^2=g\left(x_M\right)$
- Sử dụng phương pháp tìm GTLN - GTNN cho hàm số g để thu được kết quả.

Bài toán 5: *Cho đồ thị hàm số (C) có phương trình $y=f(x)$ và đường thẳng $d:Ax+By+C=0$. Tìm điểm I trên (C) sao cho khoảng cách từ I đến d là ngắn nhất.*

Phương pháp giải:

- Gọi I thuộc $(C)\Rightarrow I\left(x_0;y_0\right);\ y_0=f(x_0)$.
- Khoảng cách từ I đến d là $g(x_0)=h\left(I;d\right)=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$
- Khảo sát hàm số $y=g(x)$ để tìm ra điểm I thỏa mãn yêu cầu.

ĐIÊM ĐẶC BIỆT CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

DẠNG 1: TÌM ĐIỂM THUỘC ĐỒ THỊ THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN

Câu 1. Gọi $M\left(a;b\right)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+2}$ và có khoảng cách từ M đến đường thẳng $d:y=3x+6$ nhỏ nhất. Tìm giá trị của biểu thức $T=3a^2+b^2$.

A. $T=10$ **B.** $T=4$ **C.** $T=3$ **D.** $T=9$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $d(M;d)=\frac{|3a-b+6|}{\sqrt{10}}$ suy ra $d(M;d)$ nhỏ nhất khi $|3a-b+6|$ nhỏ nhất.

Vì $Oxyz$ nên $|3a-b+6|=\left|3a-\frac{2a+1}{a+2}+6\right|=\left|3a+4+\frac{3}{a+2}\right|=\left|3(a+2)+\frac{3}{a+2}-2\right|$.

Nếu $a>-2$ thì $\left|3(a+2)+\frac{3}{a+2}-2\right|\geq|6-2|=4$.

Nếu $a<-2$ thì $\left|3(a+2)+\frac{3}{a+2}-2\right|=\left|-3(a+2)+\frac{3}{-(a+2)}+2\right|\geq 6+2=8$.

Vậy $d(M;d)$ nhỏ nhất bằng 4 khi $\begin{cases}a=-1\\b=-1\end{cases}$. Vậy $T=3a^2+b^2=4$.

Câu 2. Tọa độ điểm M thuộc đồ thị hàm số $y=\frac{3x+1}{x-1}$ cách đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số một khoảng bằng 1 là

A. $(-1;0);(2;7)$. **B.** $(0;1);(2;-7)$. **C.** $(0;-1);(2;7)$. **D.** $(0;-1);(-2;7)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y=\frac{3x+1}{x-1}$; (C) có tiệm cận đứng $x=1$.

$M\in(C)\Rightarrow M\left(m;\frac{3m+1}{m-1}\right)$, $m\neq 1$.

Khoảng cách từ M tới đường tiệm cận đứng bằng $d=|m-1|\Leftrightarrow|m-1|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\m=0\end{array}\right.$.

Vậy $M(0;-1)$ hoặc $M(2;7)$.

Câu 3. Tìm trên mỗi nhánh của đồ thị (C): $y=\frac{4x-9}{x-3}$ các điểm M_1; M_2 để độ dài M_1M_2 đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị nhỏ nhất đó bằng:

A. $2\sqrt{6}$. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Lấy $M_1\left(x_1+3;4+\frac{3}{x_1}\right)$, $x_1>0$; $M_2\left(x_2+3;4+\frac{3}{x_2}\right)$, $x_2<0$

Khi đó $M_1M_2{}^2=(x_1-x_2)^2\left(1+\frac{9}{x_1^2x_2^2}\right)$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô Si ta có $(x_1-x_2)^2\geq 4|x_1x_2|$ và $1+\frac{9}{x_1^2x_2^2}\geq\frac{6}{|x_1x_2|}$.

Suy ra $M_1M_2{}^2\geq 24\Rightarrow M_1M_2\geq 2\sqrt{6}$.

Độ dài M_1M_2 đạt giá trị nhỏ nhất bằng $2\sqrt{6}$ khi $\begin{cases}x_1=-x_2\\x_1^4=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=\sqrt{3}\\x_2=-\sqrt{3}\end{cases}$.

Câu 4. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{1-x}$ có đồ thị (C), gọi d là tiếp tuyến của (C) tại tiếp điểm $M(0;1)$. Tìm trên (C) những điểm N có hoành độ lớn hơn 1 mà khoảng cách từ N đến d ngắn nhất.

A. $N(0;1)$. **B.** $N\left(\dfrac{3}{2};-8\right)$. **C.** $N(2;-5)$. **D.** $N\left(3;\dfrac{7}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $y'=\dfrac{3}{(1-x)^2}\Rightarrow y'(0)=3$ nên phương trình tiếp tuyến $\Delta: y=3x+1\Leftrightarrow 3x-y+1=0$.

Gọi $N\left(n,\dfrac{2n+1}{1-n}\right)$ với $n>1$.

Ta có: $d(N,\Delta)=\dfrac{\left|3n-\dfrac{2n+1}{1-n}+1\right|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\dfrac{3n^2}{(n-1)\sqrt{10}}$ vì $n>1$.

Xét hàm số $f(n)=\dfrac{3n^2}{\sqrt{10}(n-1)}$ với $n>1$.

Ta có: $f'(n)=\dfrac{3n^2-6n}{\sqrt{10}(n-1)}$, cho $f'(n)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}n=0\\n=2\end{array}\right.$.

Lập BBT suy ra $\min\limits_{(1;+\infty)} f(n)=\dfrac{6\sqrt{10}}{5}$ khi $n=2$.

Vậy $N(2;-5)$.

Câu 5. Cho hàm số $y=\dfrac{4x-3}{x-3}$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) có hai điểm phân biệt M, N và tổng khoảng cách từ M hoặc N tới hai tiệm cận là nhỏ nhất. Khi đó MN có giá trị bằng:

A. $MN=4\sqrt{2}$. **B.** $MN=6$. **C.** $MN=4\sqrt{3}$. **D.** $MN=6\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

- Giả sử $M=\left(m;\dfrac{4m-3}{m-3}\right)\in(C)$, với $m\neq 3$.

- Tiệm cận đứng là: $x=3$, riệm cận ngang là: $y=4$.

Do đó tổng khoảng cách từ M đến hai tiệm cận là:

$$d=|m-3|+\left|\frac{4m-3}{m-3}-4\right|=|m-3|+\frac{9}{|m-3|}\geq 2.\sqrt{|m-3|.\frac{9}{|m-3|}}=6$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $|m-3|=\dfrac{9}{|m-3|}\Leftrightarrow(m-3)^2=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m-3=3\\m-3=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=6\\m=0\end{array}\right.$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}M=(6;7)\\M=(0;1)\end{array}\right.$. Một cách tương tự ta có các điểm $\left[\begin{array}{l}N=(6;7)\\N=(0;1)\end{array}\right.$.

Do M, N phân biệt nên $MN=6\sqrt{2}$.

Câu 6. Có bao nhiêu điểm M thỏa mãn: điểm M thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{1}{1+x}$ sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận của hàm số là nhỏ nhất.

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.