

SỰ TƯƠNG GIAO CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

1 - Tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số:

Phương pháp:

Cho 2 hàm số $y = f(x), y = g(x)$ có đồ thị lần lượt là (C) và (C').

- +) Lập phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (C'): $f(x) = g(x)$
- +) Giải phương trình tìm x từ đó suy ra y và tọa độ giao điểm.
- +) Số nghiệm của (*) là số giao điểm của (C) và (C').

2 - Tương giao của đồ thị hàm bậc 3

Phương pháp 1: Bảng biến thiên (PP đồ thị)

- +) Lập phương trình hoành độ giao điểm dạng $F(x, m) = 0$ (phương trình ẩn x tham số m)
- +) Cô lập m đưa phương trình về dạng $m = f(x)$
- +) Lập BBT cho hàm số $y = f(x)$.
- +) Dựa và giả thiết và BBT từ đó suy ra m.

***) Dấu hiệu:** Sử dụng PP bảng biến thiên khi m độc lập với x.

Phương pháp 2: Nhắm nghiệm – tam thức bậc 2.

- +) Lập phương trình hoành độ giao điểm $F(x, m) = 0$
- +) Nhắm nghiệm: (Khử tham số). Giả sử $x = x_0$ là 1 nghiệm của phương trình.
- +) Phân tích: $F(x, m) = 0 \Leftrightarrow (x - x_0) \cdot g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$ (là $g(x) = 0$ là phương trình bậc 2 ẩn x tham số m).
- +) Dựa vào yêu cầu bài toán đi xử lý phương trình bậc 2 $g(x) = 0$.

Phương pháp 3: Cực trị

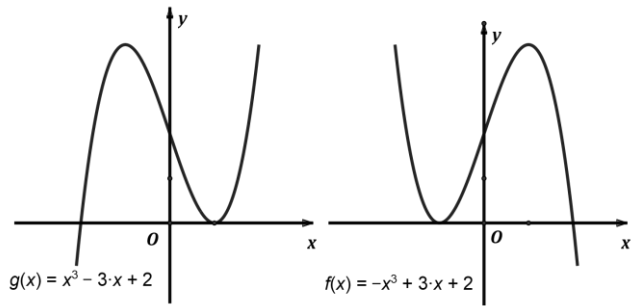
***) Nhận dạng:** Khi bài toán không cô lập được m và cũng không nhắm được nghiệm.

***) Quy tắc:**

- +) Lập phương trình hoành độ giao điểm $F(x, m) = 0$ (1). Xét hàm số $y = F(x, m)$

<p>+) Đề (1) có đúng 1 nghiệm thì đồ thị $y = F(x, m)$ cắt trục hoành tại đúng 1 điểm. (2TH) - Hoặc hàm số luôn đơn điệu trên R \Leftrightarrow hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ hoặc vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta_{y'} \leq 0$ - Hoặc hàm số có CĐ, CT và $y_{cd} \cdot y_{ct} > 0$ (hình vẽ)</p>	
<p>+) Đề (1) có đúng 3 nghiệm thì đồ thị $y = F(x, m)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt \Leftrightarrow Hàm số có cực đại, cực tiểu và $y_{cd} \cdot y_{ct} < 0$</p>	

+) Để (1) có đúng 2 nghiệm thì đồ thị $y = F(x, m)$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt \Leftrightarrow Hàm số có cực đại, cực tiểu và $y_{cd} \cdot y_{ct} = 0$



Bài toán: Tìm m để đồ thị hàm bậc 3 cắt trục hoành tại 3 điểm lập thành 1 cấp số cộng:

1. Định lí vi ét:

*) Cho bậc 2: Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thì ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

*) Cho bậc 3: Cho phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 thì ta có:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = \frac{c}{a}, x_1 x_2 x_3 = -\frac{d}{a}$$

2. Tính chất của cấp số cộng:

+) Cho 3 số a, b, c theo thứ tự đó lập thành 1 cấp số cộng thì: $a + c = 2b$

3. Phương pháp giải toán:

+) Điều kiện cần: $x_0 = -\frac{b}{3a}$ là 1 nghiệm của phương trình. Từ đó thay vào phương trình để tìm m.

+) Điều kiện đủ: Thay m tìm được vào phương trình và kiểm tra.

3 - Tương giao của hàm số phân thức

Phương pháp

Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ (C) và đường thẳng $d: y = px + q$. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và

(d):

$$\frac{ax+b}{cx+d} = px + q \Leftrightarrow F(x, m) = 0 \text{ (phương trình bậc 2 ẩn x tham số m).}$$

*) Các câu hỏi thường gặp:

1. Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt \Leftrightarrow (1) có 2 nghiệm phân biệt khác $-\frac{d}{c}$.

2. Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt cùng thuộc nhánh phải của (C) \Leftrightarrow (1) có 2 nghiệm phân biệt

$$x_1, x_2 \text{ và thỏa mãn } : -\frac{d}{c} < x_1 < x_2.$$

3. Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt cùng thuộc nhánh trái của (C) \Leftrightarrow (1) có 2 nghiệm phân biệt

$$x_1, x_2 \text{ và thỏa mãn } x_1 < x_2 < -\frac{d}{c}.$$

4. Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt thuộc 2 nhánh của (C) \Leftrightarrow (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và

$$\text{thỏa mãn } x_1 < -\frac{d}{c} < x_2.$$

5. Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A và B thỏa mãn điều kiện hình học cho trước:

+) Đoạn thẳng $AB = k$

+) Tam giác ABC vuông.

+) Tam giác ABC có diện tích S_0

*** Quy tắc:**

- +) Tìm điều kiện tồn tại A, B \Leftrightarrow (1) có 2 nghiệm phân biệt.
- +) Xác định tọa độ của A và B (chú ý Vi ét)
- +) Dựa vào giả thiết xác lập phương trình ẩn m. Từ đó suy ra m.

*) **Chú ý:** Công thức khoảng cách:

$$\begin{aligned} &+) A(x_A; y_A), B(x_B; y_B): AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ &+) \begin{cases} M(x_0; y_0) \\ \Delta: Ax_0 + By_0 + C = 0 \end{cases} \Rightarrow d(M, \Delta) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \end{aligned}$$

4 - Tương giao của hàm số bậc 4

NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC 4 TRÙNG PHƯƠNG: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (1)

1. Nhầm nghiệm:

- Nhầm nghiệm: Giả sử $x = x_0$ là một nghiệm của phương trình.

- Khi đó ta phân tích: $f(x, m) = (x^2 - x_0^2)g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm x_0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$

- Dựa vào giả thiết xử lý phương trình bậc 2 $g(x) = 0$

2. Ẩn phụ - tam thức bậc 2:

- Đặt $t = x^2, (t \geq 0)$. Phương trình: $at^2 + bt + c = 0$ (2).

- Đề (1) có đúng 1 nghiệm thì (2) có nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $\begin{cases} t_1 < 0 = t_2 \\ t_1 = t_2 = 0 \end{cases}$

- Đề (1) có đúng 2 nghiệm thì (2) có nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $\begin{cases} t_1 < 0 < t_2 \\ 0 < t_1 = t_2 \end{cases}$

- Đề (1) có đúng 3 nghiệm thì (2) có nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $0 = t_1 < t_2$

- Đề (1) có đúng 4 nghiệm thì (2) có nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $0 < t_1 < t_2$

3. Bài toán: Tìm m để (C): $y = ax^4 + bx^2 + c$ (1) **cắt (Ox) tại 4 điểm có hoành độ lập thành cấp số cộng.**

- Đặt $t = x^2, (t \geq 0)$. Phương trình: $at^2 + bt + c = 0$ (2).

- Đề (1) cắt (Ox) tại 4 điểm phân biệt thì (2) phải có 2 nghiệm dương $t_1, t_2 (t_1 < t_2)$ thỏa mãn $t_2 = 9t_1$.

- Kết hợp $t_2 = 9t_1$ với định lý Vi – ét tìm được m.

TƯƠNG GIAO – ĐIỀU KIỆN CÓ NGHIỆM

DẠNG 1: TÌM TỌA ĐỘ (ĐẼM) GIAO ĐIỂM

Câu 1. Đồ thị hàm số $y = 15x^4 - 3x^2 - 2018$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm?

A. 2 điểm.

B. 3 điểm.

C. 1 điểm.

D. 4 điểm.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm đồ thị hàm số và trục hoành:

$$15x^4 - 3x^2 - 2018 = 0 (*)$$

$$\text{Đặt } x^2 = t, t \geq 0. \text{ Phương trình tương đương } 15t^2 - 3t - 2018 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3 + \sqrt{121089}}{30} > 0 \\ t = \frac{3 - \sqrt{121089}}{30} < 0 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow t = \frac{3 + \sqrt{121089}}{30} \text{ nên (*) có 2 nghiệm phân biệt.}$$

Vậy đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 2 điểm.

Câu 2. Đường thẳng $y = 2x - 1$ có bao nhiêu điểm chung với đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - x - 1}{x + 1}$.

A. 3.

B. 1.

C. 0.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $d: y = 2x - 1$ và đồ thị

$$(C): y = \frac{x^2 - x - 1}{x + 1}$$

$$\frac{x^2 - x - 1}{x + 1} = 2x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x^2 - x - 1 = (2x - 1)(x + 1) \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Ta có } (2) \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Suy ra d và (C) có hai điểm chung.

Câu 3. Đồ thị hàm số nào sau đây cắt trục tung tại điểm có tung độ âm?

A. $y = \frac{4x+1}{x+2}$.

B. $y = \frac{-2x+3}{x+1}$.

C. $y = \frac{2x-3}{x-1}$.

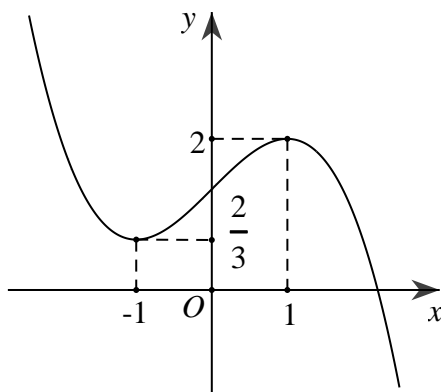
D. $y = \frac{3x+4}{x-1}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đồ thị hàm số $y = \frac{3x+4}{x-1}$ cắt trục tung tại điểm $(0; -4)$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Tìm số nghiệm của phương trình $f(x+2018) = 1$.



A. 2

B. 1

C. 3

D. 4

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đồ thị hàm số $y = f(x+2018)$ có được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x)$ sang trái 2018 đơn vị. Do đó số nghiệm của phương trình $f(x+2018) = 1$ cũng là số nghiệm của phương trình $f(x) = 1$. Theo hình vẽ ta có số nghiệm là 3.

Câu 5. Cho hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ có đồ thị (C). Giả sử a, b, c thay đổi nhưng luôn thỏa mãn điều kiện $b+1 < a+c < -(b+1)$. Khi đó (C) cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm phân biệt?

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 0

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $b+1 < a+c < -(b+1) \Leftrightarrow \begin{cases} a-b+c-1 > 0 \\ a+b+c+1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(-1) > 0 \\ f(1) < 0 \end{cases}$. Mặt khác hàm số đã cho liên

tục đồng thời $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ do đó theo nguyên lý của hàm số liên tục, tồn tại các giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ với trục hoành trong các khoảng: $(-\infty; -1)$; $(-1; 1)$; $(1; +\infty)$. Vậy có 3 giao điểm.

Câu 6. Đồ thị hàm số $y = 2x^4 - 3x^2$ và đồ thị hàm số $y = -x^2 + 2$ có bao nhiêu điểm chung?

- A. 4 B. 2 C. 1 D. 3

Hướng dẫn giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$2x^4 - 3x^2 = -x^2 + 2 \Leftrightarrow x^4 - x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x^2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

Phương trình trên có hai nghiệm phân biệt. Do đó số giao điểm của hai đồ thị hàm số là 2.

Câu 7. Đường thẳng $y = 4x - 2$ và đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 3x$ có tất cả bao nhiêu giao điểm?

- A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Số giao điểm của hai đồ thị bằng số nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm.

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - 2x^2 + 3x = 4x - 2 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Suy ra đường thẳng $y = 4x - 2$ và đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 3x$ có ba giao điểm.

Câu 8. Cho đồ thị (C): $y = 2x^4 - 3x^2 + 2x + 2$ và đường thẳng $d: y = 2x + 1$. Hỏi d và (C) có bao nhiêu giao điểm nằm bên trái trục tung.

- A. 2. B. 4. C. 0. D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có phương trình hoành độ giao điểm $2x^4 - 3x^2 + 2x + 2 = 2x + 1$

$$\Leftrightarrow 2x^4 - 3x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$