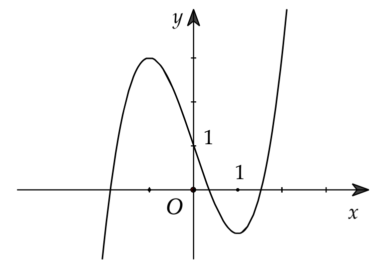
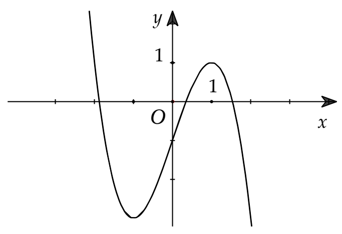
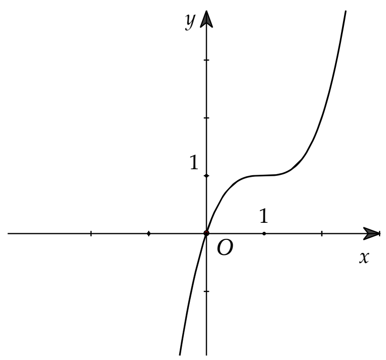
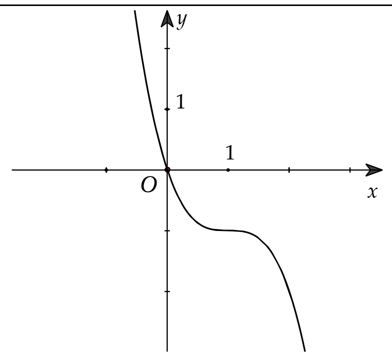
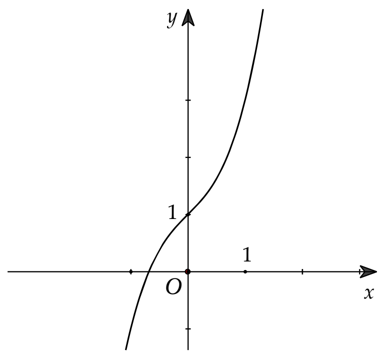
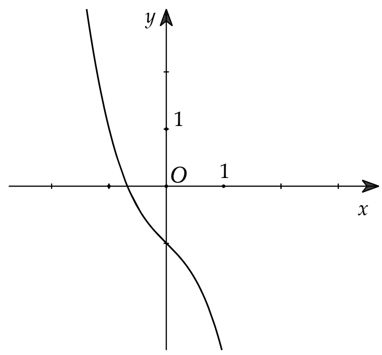
KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

1. Khảo sát một số hàm đa thức và hàm phân thức

1.1. Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$

TRƯỜNG HỢP	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt		
Phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép		
Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm		

1.2. Hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c \quad (a \neq 0)$

+) Đạo hàm: $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x\left(2ax^2 + b\right)$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2ax^2 + b = 0 \end{array}\right.$

+) Để hàm số có 3 cực trị: $ab < 0$

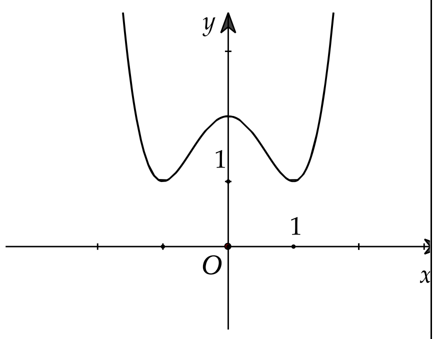
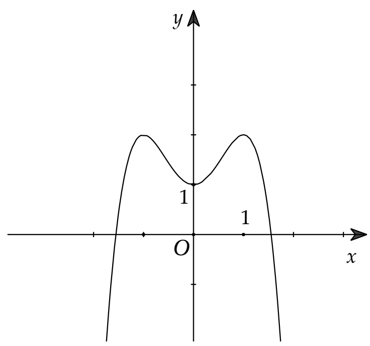
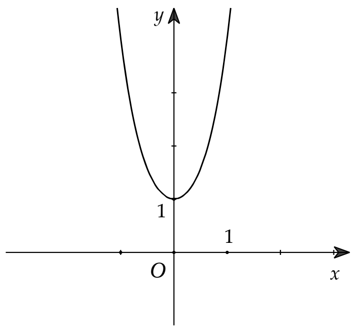
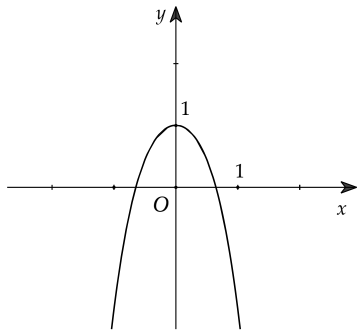
- Nếu $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$ hàm số có 1 cực đại và 2 cực tiểu

- Nếu $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$ hàm số có 2 cực đại và 1 cực tiểu

+) Để hàm số có 1 cực trị $ab \geq 0$

- Nếu $\begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$ hàm số có 1 cực tiểu và không có cực đại

- Nếu $\begin{cases} a < 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$ hàm số có 1 cực đại và không có cực tiểu

TRƯỜNG HỢP	$a>0$	$a<0$
Phương trình $y'=0$ *có* *3 nghiệm phân biệt* (ab<0)		
Phương trình $y'=0$ *có* *1 nghiệm.*		

1.3. Hàm số nhất biến $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $\left(c\neq 0,\ ad-bc\neq 0\right)$

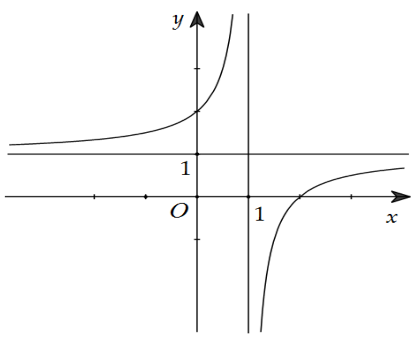
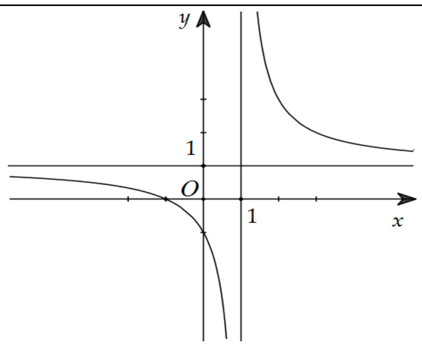
+) Tập xác định: $D=R\backslash\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$

+) Đạo hàm: $y=\dfrac{ad-bc}{\left(cx+d\right)^2}$

- Nếu $ad-bc>0$ hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định. Đồ thị nằm góc phần tư 2 và 4.
- Nếu $ad-bc<0$ hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định. Đồ thị nằm góc phần tư 1 và 3.

+) Đồ thị hàm số có: TCĐ: $x=-\dfrac{d}{c}$ và TCN: $y=\dfrac{a}{c}$

+) Đồ thị có tâm đối xứng: $I\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$

$D=ad-bc>0$	$D=ad-bc<0$
	

2. Một số phép biến đổi đồ thị

2.1. Dạng 1

Từ đồ thị $\left(C\right):y=f\left(x\right)$ suy ra đồ thị $\left(C'\right):y=f\left(\left|x\right|\right)$.

Ta có: $y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{khi } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{khi } x < 0 \end{cases}$

và $y = f(|x|)$ là *hàm chẵn* nên đồ thị (C') nhận *Oy* làm trục đối xứng.

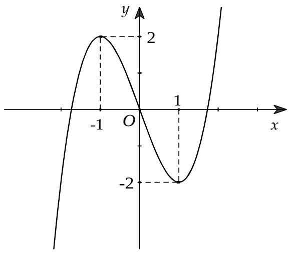
***8 Cách vẽ (C') từ (C):**

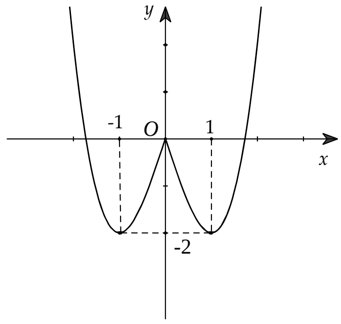
- *Giữ nguyên* phần đồ thị bên phải *Oy* của đồ thị $(C): y = f(x)$.
- *Bỏ* phần đồ thị bên trái *Oy* của (C), **lấy đối xứng phần đồ thị** *được giữ* qua *Oy*.

Ví dụ: Từ đồ thị $(C): y = f(x) = x^3 - 3x$ suy ra đồ thị $(C'): y = |x|^3 - 3|x|$.

Biến đổi (C):

- Bỏ phần đồ thị của (C) bên trái *Oy*, giữ nguyên (C) bên phải *Oy*.
- Lấy đối xứng phần đồ thị được giữ qua *Oy*.





$(C'): y = |x|^3 - 3|x|$

2.2. Dạng 2

Từ đồ thị $(C): y = f(x)$ suy ra đồ thị $(C'): y = |f(x)|$.

Ta có: $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{khi } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{khi } f(x) < 0 \end{cases}$

*** Cách vẽ (C') từ (C):**

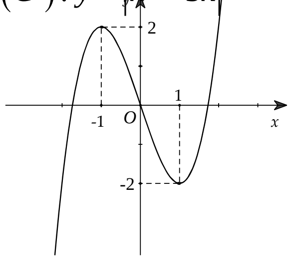
- *Giữ nguyên* phần đồ thị phía trên *Ox* của đồ thị (C): $y = f(x)$.
- *Bỏ* phần đồ thị phía dưới *Ox* của (C), **lấy đối xứng phần đồ thị *bị bỏ*** qua *Ox*.

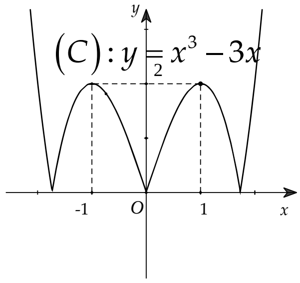
Ví dụ: Từ đồ thị $(C): y = f(x) = x^3 - 3x$ suy ra đồ thị $y = |x^3 - 3x|$.

Biến đổi (C):

- Bỏ phần đồ thị của (C) dưới *Ox*, giữ nguyên (C) phía trên *Ox*.
- Lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua *Ox*.

$(C'): y = |x^3 - 3x|$

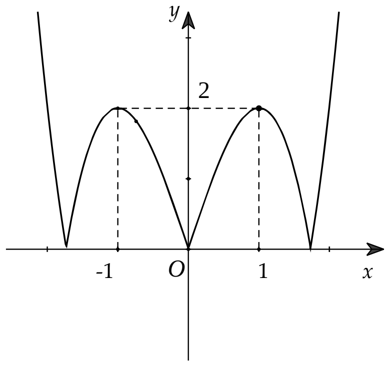




Chú ý với dạng: $y = |f(|x|)|$ ta lần lượt biến đổi 2 đồ thị $y = f(|x|)$ và $y = |f(x)|$

$(C'): y = ||x|^3 - 3|x||$

Ví dụ: Từ đồ thị $(C): y = f(x) = x^3 - 3x$ suy ra đồ thị $y = \left||x|^3 - 3|x|\right|$. Biến đổi (C) để được đồ thị $(C'): y = |x|^3 - 3|x|$. Biến đổi $(C'): y = |x|^3 - 3|x|$ ta được đồ thị $(C''): y = \left||x|^3 - 3|x|\right|$.



2.3. Dạng 3

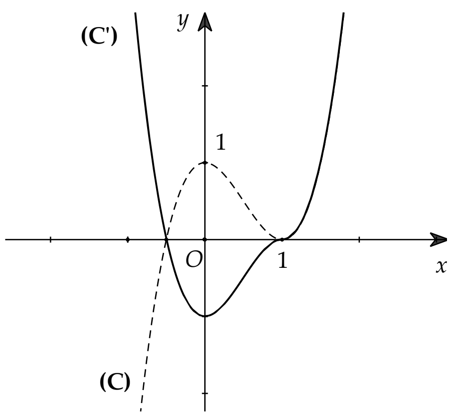
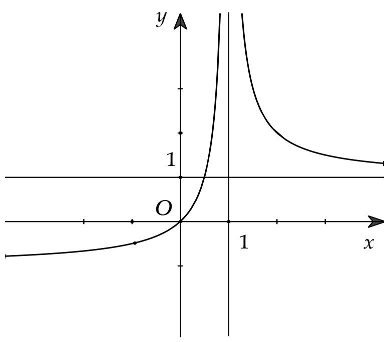
Từ đồ thị $(C): y = u(x).v(x)$ suy ra đồ thị $(C'): y = |u(x)|.v(x)$.

Ta có: $y = |u(x)|.v(x) = \begin{cases} u(x).v(x) = f(x) & \text{khi } u(x) \geq 0 \\ -u(x).v(x) = f(x) & \text{khi } u(x) < 0 \end{cases}$

*** Cách vẽ (C') từ (C):**

- *Giữ nguyên* phần <u>đồ thị trên miền</u> $u(x) \geq 0$ của đồ thị $(C): y = f(x)$.
- *Bỏ* phần đồ thị <u>trên miền</u> $u(x) < 0$ của (C), **lấy đối xứng phần đồ thị *bị bỏ*** qua *Ox*.

Ví dụ

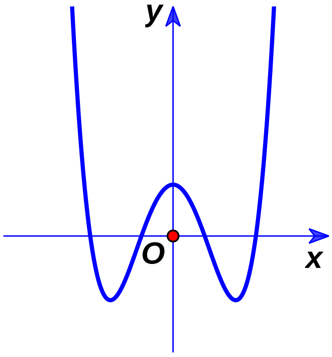
a) Từ đồ thị $(C): y = f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ suy ra đồ thị $(C'): y = \|x-1\|(2x^2 - x - 1)$	b) Từ đồ thị $(C): y = f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ suy ra đồ thị $(C'): y = \dfrac{x}{\|x-1\|}$
$y = \|x-1\|(2x^2 - x - 1) = \begin{cases} f(x) & \text{khi } x \geq 1 \\ -f(x) & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ <u>Đồ thị (C'):</u> • Giữ nguyên (C) với $x \geq 1$. • Bỏ (C) với $x < 1$. Lấy *đối xứng phần đồ thị bị bỏ* qua *Ox*.  <u>Nhận xét:</u> Trong quá trình thực hiện phép suy đồ thị nên *lấy đối xứng các điểm đặc biệt* của (C): giao điểm với *Ox*, *Oy*, CĐ, CT…	$y = \dfrac{x}{\|x-1\|} = \begin{cases} \dfrac{x}{x-1} & \text{khi } x \in (1; +\infty) \\ -\dfrac{x}{x-1} & \text{khi } x \in (-\infty; 1) \end{cases}$. <u>Đồ thị (C'):</u> • Bỏ phần đồ thị của (C) với $x < 1$, giữ nguyên (C) với $x > 1$. • Lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua *Ox*.  <u>Nhận xét</u>: Đối với hàm phân thức thì nên *lấy đối xứng các đường tiệm cận* để thực hiện phép suy đồ thị một cách tương đối chính xác.

HƯỚNG DẪN GIẢI

ĐỌC ĐỒ THỊ - BIẾN ĐỔI ĐỒ THỊ

DẠNG 1: NHẬN DẠNG 3 HÀM SỐ THƯỜNG GẶP (BIẾT ĐỒ THỊ, BBT)

Câu 1. Đường cong hình bên là đồ thị của một trong các hàm số sau, hỏi đó là hàm số nào?



A. $y=-x^4+3x^2+1$ **B.** $y=x^3-3x^2+1$ **C.** $y=x^4+3x^2+1$ **D.** $y=x^4-3x^2+1$

Lời giải

Chọn D

Dựa vào dạng đồ thị ta thấy đường cong hình bên là đồ thị hàm số bậc 4 với $a>0$.

Hàm số có 3 cực trị $\Rightarrow a.b<0\Rightarrow b<0$.

Suy ra đường cong hình bên là đồ thị hàm số $y=x^4-3x^2+1$.

Câu 2. Hàm số nào trong bốn hàm số sau có bảng biến thiên như hình vẽ sau?

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

A. $y=x^3+3x^2-1$. **B.** $y=x^3-3x+2$. **C.** $y=x^3-3x^2+2$. **D.** $y=-x^3+3x^2-1$.

Lời giải

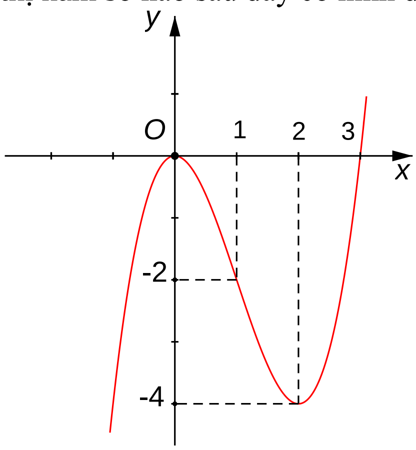
Chọn C

Xét $y=x^3-3x^2+2$.

Ta có $y'=3x^2-6x$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$. Khi $x=0\Rightarrow y=2; x=2\Rightarrow y=-2$

Hàm số này thỏa mãn các tính chất trên bảng biến thiên.

Câu 3. Đồ thị hàm số nào sau đây có hình dạng như hình vẽ bên dưới ?



A. $y=x^3+3x$. **B.** $y=x^3-3x^2$. **C.** $y=x^3-3x$. **D.** $y=x^3+3x^2$.