

ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

1. Đường tiệm cận ngang

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng $(a; +\infty)$, $(-\infty; b)$ hoặc $(-\infty; +\infty)$). Đường thẳng $y = y_0$ là đường **tiệm cận ngang** (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$

2. Đường tiệm cận đứng

Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là đường **tiệm cận đứng** (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$$

Lưu ý: Với đồ thị hàm phân thức dạng $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0$; $ad - bc \neq 0$) luôn có tiệm cận ngang là $y = \frac{a}{c}$

và tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$.

3. Dấu hiệu:

- +) Hàm phân thức mà nghiệm của mẫu không là nghiệm của tử có tiệm cận đứng.
- +) Hàm phân thức mà bậc của tử \leq bậc của mẫu có TCN.
- +) Hàm căn thức dạng: $y = \sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}$, $y = \sqrt{f(x)} - g(x)$, $y = g(x) - \sqrt{f(x)}$ có TCN. (Dùng liên hợp)
- +) Hàm $y = a^x$, ($0 < a \neq 1$) có TCN $y = 0$
- +) Hàm số $y = \log_a x$, ($0 < a \neq 1$) có TCD $x = 0$

4. Cách tìm:

- +) TCD: Tìm nghiệm của mẫu không là nghiệm của tử.
- +) TCN: Tính 2 giới hạn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$

5. Chú ý:

- +) Nếu $x \rightarrow +\infty \Rightarrow x > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = |x| = x$
- +) Nếu $x \rightarrow -\infty \Rightarrow x < 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = |x| = -x$

TIỆM CẬN

DẠNG 1: LÝ THUYẾT VỀ ĐƯỜNG TIỆM CẬN

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong (C) và các giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của (C).
- B. Đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của (C).
- C. Đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của (C).
- D. Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận ngang của (C).

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \end{cases} \Rightarrow$ đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của (C) .

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$.

B. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = 1$ và $y = \frac{x+1}{4^x}$.

C. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.

D. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ nên đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ nên đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = -1$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$.

Câu 3: Phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{3-4x}{-2x+1}$ là:

A. $x - 2 = 0$

B. $y + \frac{3}{2} = 0$

C. $y - 2 = 0$

D. $x + 2 = 0$

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-4x}{-2x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3}{x} - 4}{-2 + \frac{1}{x}} = 2.$$

Câu 4: Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ bất kì có nhiều nhất hai đường tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số $y = \frac{x}{|x|}$ chỉ có đúng một đường tiệm cận.

C. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận ngang $y = 1$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

D. Nếu hàm số $y = f(x)$ không xác định tại x_0 thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng $x = x_0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận ngang $y = 1$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

sai vì chỉ cần 1 trong hai giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ tồn tại đã suy được đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 1$.

Nếu hàm số $y = f(x)$ không xác định tại x_0 thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng $x = x_0$ sai ví dụ hàm $y = \sqrt{x^3 - 1}$ không xác định tại -2 , nhưng $\lim_{x \rightarrow -2^+} y$, $\lim_{x \rightarrow -2^-} y$ không tồn tại nên $x = 2$ không phải là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Đồ thị hàm số $y = \frac{x}{|x|}$ có 2 đường tiệm cận ngang là $y = \pm 1$ nên sai.

- Câu 5:** Trong các phát biểu sau đây, đâu là phát biểu **đúng**?
- A. Các đường tiệm cận không bao giờ cắt đồ thị của nó.
 B. Nếu hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là \mathbb{R} thì đồ thị của nó không có tiệm cận đứng.
 C. Đồ thị của hàm số dạng phân thức luôn có tiệm cận đứng.
 D. Đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $c \neq 0, ad - cb \neq 0$ luôn có hai đường tiệm cận.

Hướng dẫn giải**Chọn D**

Vì điều kiện $ad - bc \neq 0 \Rightarrow \frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$ nên hàm không suy biến nên đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $c \neq 0, ad - cb \neq 0$ luôn có hai đường tiệm cận.

- Câu 6:** Đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị nào dưới đây?

A. $y = \frac{-2x+3}{x-2}$. B. $y = \frac{2x-2}{x+2}$. C. $y = \frac{2}{x+1}$. D. $y = \frac{1+x}{1-2x}$.

Hướng dẫn giải**Chọn B**

Trong 4 đáp án trên chỉ có đáp án $y = \frac{2x-2}{x+2}$ thỏa $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-2}{x+2} = 2$.

- Câu 7:** Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận đứng?

A. $y = \frac{2x}{x-1}$. B. $y = \frac{\pi}{x^2 - x + 1}$. C. $y = e^x$. D.

$y = \log_2(x^2 + 1)$.

Hướng dẫn giải**Chọn A**

Đồ thị của hàm số $y = \frac{2x}{x-1}$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$.

- Câu 8:** Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.
 B. Đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận ngang là $y = 1$ và $y = -1$.
 C. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là $x = 1$ và $x = -1$.
 D. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.

Hướng dẫn giải**Chọn B**

Hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ suy ra đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận ngang là $y = 1$ và $y = -1$.

- Câu 9:** Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận đứng.
 B. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$.
 C. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $x = 1$ và $x = -1$.
 D. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận đứng.

Hướng dẫn giải**Chọn C**

- Câu 10:** Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$?

A. $y = -1$.

B. $x = -1$.

C. $y = 2$.

D. $x = 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $\lim_{x \rightarrow -1^+} y = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x+1}{x+1} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^-} y = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x+1}{x+1} = +\infty$ suy ra đường thẳng $x = -1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$.

Câu 11: Đường thẳng $y = -2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

A. $y = \frac{2-2x}{x+2}$.

B. $y = \frac{2x+3}{2+x}$.

C. $y = \frac{-2x+2}{1-x}$.

D. $y = \frac{1+x}{1-2x}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2-2x}{x+2} = -2$ nên $y = -2$ là TCN của hàm số $y = \frac{2-2x}{x+2}$ nên ta có đáp án B.

Câu 12: Cho hàm số $y = \frac{3}{x+1}$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề sai ?

A. Hàm số không có điểm cực trị.

B. Đồ thị (C) nhận $I(-1;0)$ làm tâm đối xứng.

C. Đồ thị (C) không có tiệm cận ngang.

D. Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Hàm số đã cho có $y = -\frac{3}{(x+1)^2} < 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ nên hàm số nghịch biến trên từng khoảng

xác định và không có cực trị \Rightarrow A và D đúng.

Do $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^-} y = -\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang và đứng lần lượt là $y = 0$; $x = -1 \Rightarrow$ C đúng, B sai.

Câu 13: Đồ thị hàm số $y = \frac{mx^2 - 2x + 1}{2x + 1}$ có tiệm cận đứng và tiệm cận xiên khi và chỉ khi

A. $m = 8$.

B. $m = 0$.

C. $m \neq 4$.

D. $m \neq 8$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $g(x) = mx^2 - 2x + 1$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng và tiệm cận xiên $\Leftrightarrow g\left(-\frac{1}{2}\right) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -8$.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận.

B. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 2$.

C. Đồ thị hàm số không có tiệm cận.

D. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Vì $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \pm\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \pm\infty$. Chọn mệnh đề đúng?

A. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận đứng.

B. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận đứng.

C. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $y = 2$ và $y = -2$.

D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $x = 2$ và $x = -2$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Từ $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \pm\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \pm\infty$.

Ta có: Hàm số $f(x)$ có tiệm cận đứng tại $x = 2$ và $x = -2$.

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên nửa khoảng $(-2; 1)$ và có $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$.

. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đúng một tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$.

B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ không có tiệm cận.

C. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$ và một tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$.

D. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Vì đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$ nếu $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$

hoặc $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$.

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định

đúng?

A. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = 3$ và $x = -3$.

C. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 3$ và $y = -3$.

D. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Áp dụng định nghĩa về đường tiệm cận ngang.

DẠNG 2: NHẬN DẠNG BBT, NHẬN DẠNG HÀM SỐ

Câu 18: Đồ thị của hàm số $y = \frac{ax^2 + x - 3}{4x^2 + bx + 1}$ có một đường tiệm cận ngang là $y = c$ và chỉ có một đường

tiệm cận đứng. Tính $\frac{a}{bc}$ biết rằng a là số thực dương và $ab = 4$?

A. $\frac{a}{bc} = 4$.

B. $\frac{a}{bc} = 2$.

C. $\frac{a}{bc} = 1$.

D. $\frac{a}{bc} = \frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Do đồ thị của hàm số $y = \frac{ax^2 + x - 3}{4x^2 + bx + 1}$ có một đường tiệm cận ngang là $y = c$ nên

$c = \frac{a}{4} \Rightarrow \frac{a}{bc} = \frac{4}{b}$ và chỉ có một đường tiệm cận đứng nên: