GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

1. Định nghĩa.

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên tập D.

- Số M gọi là ***giá trị lớn nhất*** của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên D nếu: $\begin{cases} f(x)\le M, \forall x\in D \\ \exists x_0\in D, f(x_0)=M \end{cases}$. Kí hiệu: $M=\max\limits_{x\in D} f(x)$.
- Số m gọi là ***giá trị nhỏ nhất*** của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên D nếu: $\begin{cases} f(x)\ge m, \forall x\in D \\ \exists x_0\in D, f(x_0)=m \end{cases}$. Kí hiệu: $m=\min\limits_{x\in D} f(x)$.

2. Phương pháp tìm GTLN,GTNN

2.1. Tìm GTLN, GTNN của hàm số bằng cách khảo sát trực tiếp

- *Bước 1*: Tính $f'\left(x\right)$ và tìm các điểm $x_1, x_2, ..., x_n \in D$ mà tại đó $f'\left(x\right)=0$ hoặc hàm số không có đạo hàm.
- *Bước 2*: Lập bảng biến thiên và từ đó suy ra giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số.

2.2. Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên một đoạn

- *Bước 1*:
  - ∗ Hàm số đã cho $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$.
  - ∗ Tìm các điểm $x_1, x_2, ..., x_n$ trên khoảng $\left(a;b\right)$, tại đó $f'\left(x\right)=0$ hoặc $f'\left(x\right)$ không xác định.
- *Bước 2*: Tính $f\left(a\right), f\left(x_1\right), f\left(x_2\right), ..., f\left(x_n\right), f\left(b\right)$.
- *Bước 3*: Khi đó:
  - ∗ $\max\limits_{[a,b]} f\left(x\right)=\max\left\{f\left(x_1\right), f\left(x_2\right), ..., f\left(x_n\right), f\left(a\right), f\left(b\right)\right\}$.
  - ∗ $\min\limits_{[a,b]} f\left(x\right)=\min\left\{f\left(x_1\right), f\left(x_2\right), ..., f\left(x_n\right), f\left(a\right), f\left(b\right)\right\}$.

2.3. Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên một khoảng

- *Bước 1:* Tính đạo hàm $f'(x)$.
- *Bước 2:* Tìm tất cả các nghiệm $x_i\in(a;b)$ của phương trình $f'(x)=0$ và tất cả các điểm $\alpha_i\in(a;b)$ làm cho $f'(x)$ không xác định.
- *Bước 3.* Tính $A=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $B=\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$, $f(x_i)$, $f(\alpha_i)$.
- *Bước 4.* So sánh các giá trị tính được và kết luận $M=\max\limits_{(a;b)} f(x)$, $m=\min\limits_{(a;b)} f(x)$.

Nếu giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) là A hoặc B thì ta kết luận không có giá trị lớn nhất (nhỏ nhất).

Chú ý:

- Nếu $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left[a;b\right]$ thì $\begin{cases} \min\limits_{[a;b]} f\left(x\right)=f\left(a\right) \\ \max\limits_{[a;b]} f\left(x\right)=f\left(b\right) \end{cases}$.
- Nếu $y=f\left(x\right)$ nghịch biến trên $\left[a;b\right]$ thì $\begin{cases} \min\limits_{[a;b]} f(x)=f\left(b\right) \\ \max\limits_{[a;b]} f(x)=f\left(a\right) \end{cases}$.
- Hàm số liên tục trên một khoảng ***có thể*** không có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên khoảng đó.

MAX – MIN CỦA HÀM SỐ

DẠNG 1: MAX-MIN BIẾT ĐỒ THỊ, BBT

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	

Mệnh đề nào sau đây đúng

A. $\max\limits_{(0;+\infty)} f(x)=f(1)$ **B.** $\max\limits_{(-1;1]} f(x)=f(0)$

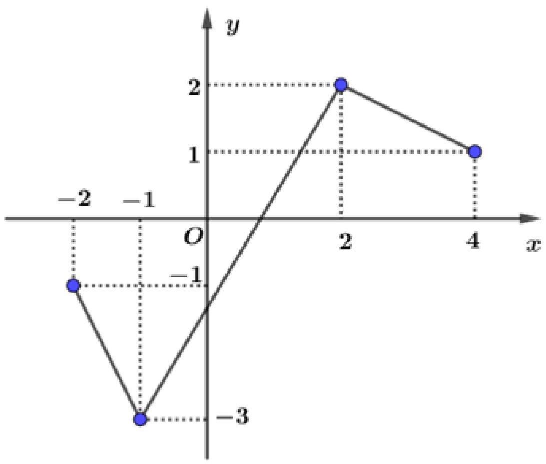
C. $\min\limits_{(-\infty;-1)} f(x)=f(-1)$ **D.** $\min\limits_{(-1;+\infty)} f(x)=f(0)$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Dựa vào bảng xét dấu của đạo hàm ta có trong khoảng $(0;+\infty)$ hàm số có duy nhất một điểm cực trị và điểm đó là điểm cực đại của đồ thị hàm số. Vậy trong khoảng $(0;+\infty)$ hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x=1$ hay $\max\limits_{(0;+\infty)} f(x)=f(1)$.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-2;\ 4]$ như hình vẽ bên. Tìm $\max\limits_{[-2;\ 4]}|f(x)|$.



A. 1. **B.** $|f(0)|$. **C.** 2. **D.** 3.

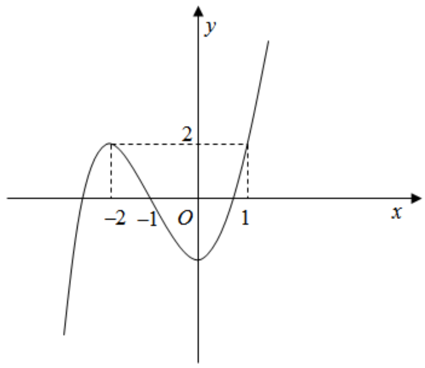
Hướng dẫn giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị ta có: $\max\limits_{[-2;\ 4]} f(x)=2$ khi $x=2$ và $\min\limits_{[-2;\ 4]} f(x)=-3$ khi $x=-1$.

Vậy $\max\limits_{[-2;\ 4]}|f(x)|=3$ khi $x=-1$.

Câu 3: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$, với a, b, c, d là các số thực và $a\neq 0$ (có đồ thị như hình vẽ). Khẳng định nào sau đây **sai** ?



A. $y'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0 \end{array}\right.$

B. Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại điểm $x=-2$

C. $y'<0, \forall x \in (-2;0)$

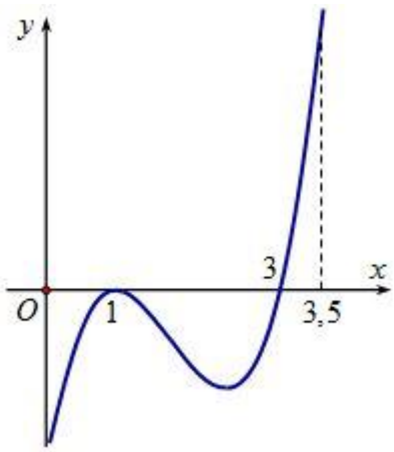
D. Đồ thị có đúng hai điểm cực trị

Hướng dẫn giải

Chọn B

Nhìn vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[0;\ \frac{7}{2}\right]$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Hỏi hàm số $y=f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0;\ \frac{7}{2}\right]$ tại điểm x_0 nào dưới đây?

A. $x_0=2$. **B.** $x_0=1$. **C.** $x_0=0$. **D.** $x_0=3$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f'(x)$, ta có bảng biến thiên:

x	0		1		3		3,5
y'		−	0	−	0	+	
y							

Suy ra $\min\limits_{\left[0;\frac{7}{2}\right]} y = f(3)$. Vậy $x_0 = 3$.

Câu 5: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ trên đoạn $[-2;2]$.

A. $m = -22$. **B.** $m = -17$. **C.** $m = -6$. **D.** $m = 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Xét hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ trên đoạn $[-2;2]$

$y' = 3x^2 - 6x - 9$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \in [-2;2] \\ x = 3 \quad \notin [-2;2] \end{array}\right.$

Tính $y(-2) = 3;\ y(2) = -17; y(-1) = 10$.

Vậy $m = \min\limits_{[-2;2]} y = -17$.

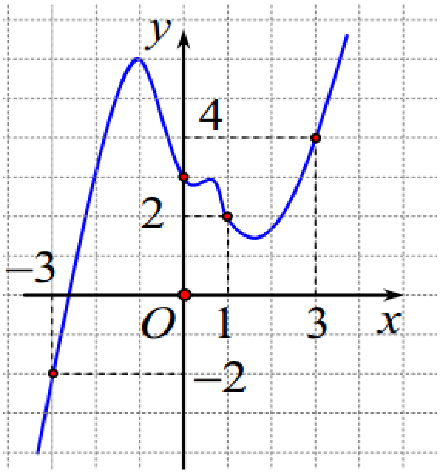
Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $y = f'(x)$ cho như hình dưới đây. Đặt $g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng.

A. Không tồn tại giá trị nhỏ nhất của $g(x)$ trên đoạn $[-3;3]$.

B. $\min\limits_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.

C. $\max\limits_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.

D. $\max\limits_{[-3;3]} g(x) = g(3)$.



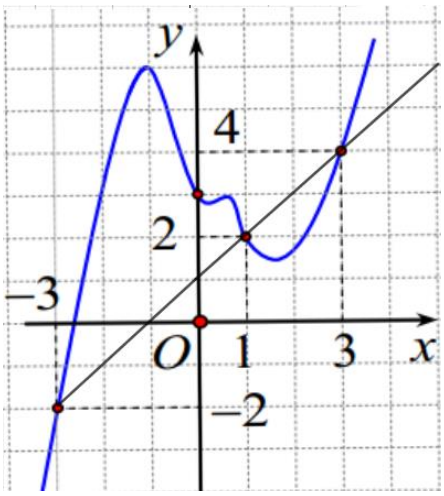
Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$

$\Rightarrow g'(x) = 2f'(x) - (2x+2) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x + 1$. Quan sát trên đồ thị ta có hoành độ giao điểm của $f'(x)$ và $y = x + 1$ trên khoảng $(-3;3)$ là $x = 1$.

Vậy ta so sánh các giá trị $g(-3)$, $g(1)$, $g(3)$



Xét $\int\limits_{-3}^{1} g'(x)\mathrm{d}x = 2\int\limits_{-3}^{1}\left[f'(x)-(x+1)\right]\mathrm{d}x > 0$

$\Leftrightarrow g(1)-g(-3) > 0 \Leftrightarrow g(1) > g(-3)$.

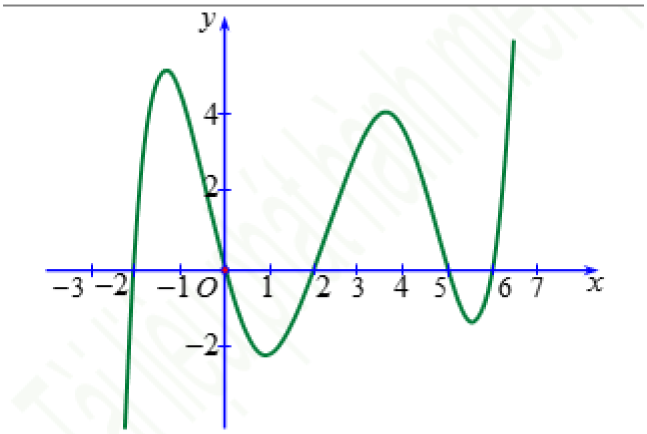
Tương tự xét $\int\limits_{1}^{3} g'(x)\mathrm{d}x = 2\int\limits_{1}^{3}\left[f'(x)-(x+1)\right]\mathrm{d}x < 0 \Leftrightarrow g(3)-g(1) < 0 \Leftrightarrow g(3) < g(1)$.

Xét $\int\limits_{-3}^{3} g'(x)\mathrm{d}x = 2\int\limits_{-3}^{1}\left[f'(x)-(x+1)\right]\mathrm{d}x + 2\int\limits_{1}^{3}\left[f'(x)-(x+1)\right]\mathrm{d}x > 0$

$\Leftrightarrow g(3)-g(-3) > 0 \Leftrightarrow g(3) > g(-3)$. Vậy ta có $g(1) > g(3) > g(-3)$.

Vậy $\max\limits_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Đặt $M = \max\limits_{[-2;6]} f(x)$, $m = \min\limits_{[-2;6]} f(x)$, $T = M + m$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $T = f(5) + f(-2)$. **B.** $T = f(5) + f(6)$.

C. $T = f(0) + f(2)$. **D.** $T = f(0) + f(-2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A