

CHUYÊN ĐỀ .SO SÁNH

A.TRỌNG TÂM CẦN ĐẠT

I.KIẾN THỨC CẦN NHỚ

CÁC PHƯƠNG PHÁP SO SÁNH 2 LŨY THỪA.

I. Phương pháp 1:

Để so sánh hai lũy thừa ta thường đưa về so sánh hai lũy thừa cùng cơ số hoặc cùng số mũ.

- Nếu hai lũy thừa cùng cơ số (lớn hơn 1) thì lũy thừa nào có số mũ lớn hơn sẽ lớn hơn.

$$a^m > a^n \quad a > 1 \Leftrightarrow m > n$$

- Nếu hai lũy thừa cùng số mũ (lớn hơn 0) thì lũy thừa nào có cơ số lớn hơn sẽ lớn hơn.

$$a^n > b^n \quad n > 0 \Leftrightarrow a > b$$

II. Phương pháp 2: Dùng tính chất bắc cầu, tính chất đơn điệu của phép nhân

$$a > b \text{ và } b > c \text{ thì } a > c$$

$$a.c > b.c \quad c > 0 \Leftrightarrow a > b$$

II. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: So sánh hai số lũy thừa.

Dạng 1. III. BÀI TẬP

Bài 1: So sánh các số sau đây:

a) 16^{19} và 8^{25}

c) 27^{11} và 81^8

e) $7 \cdot 2^{13}$ và 2^{16}

b) 5^{23} và $6 \cdot 5^{22}$

d) 625^5 và 125^7

f) 199^{20} và 2003^{15}

Phân tích:

Đưa cả hai lũy thừa về cùng cơ số, so sánh hai số mũ, lũy thừa nào có số mũ lớn hơn thì lớn hơn.

Lời giải

a) 16^{19} và 8^{25}

TOÁN 6

Ta có: $16^{19} = (2^4)^{19} = 2^{76}$ và $8^{25} = (2^3)^{25} = 2^{75}$ nên $16^{19} > 8^{25}$ (vì $2^{76} > 2^{75}$)

b) 5^{23} và 6.5^{22}

Ta có: $5^{23} = 5.5^{22} < 6.5^{22}$ nên $6.5^{22} > 5^{23}$

c) 27^{11} và 81^8

Ta có: $27^{11} = (3^3)^{11} = 3^{33}$ và $81 = (3^4)^8 = 3^{32}$ nên $27^{11} > 81^8$ (vì $3^{33} > 3^{32}$)

d) 625^5 và 125^7

Ta có: $625^5 = (5^4)^5 = 5^{20}$ và $125 = (5^3)^7 = 5^{21}$ nên $625^5 < 125^7$ (vì $5^{20} < 5^{21}$)

e) 7.2^{13} và 2^{16}

Ta có: $2^{16} = 2^3.2^{13} = 8.2^{13} > 7.2^{13}$ nên $7.2^{13} < 2^{16}$

f) 199^{20} và 2003^{15}

Ta có: $199^{20} < 200^{20} = (8.25)^{20} = (2^3.5^2)^{20} = 2^{60}.5^{40}$

và $2003^{15} > 2000^{15} = (16.125)^{15} = (2^4.5^3)^{15} = (2^4.5^3)^{15} = 2^{60}.5^{45}$

nên $199^{20} < 2003^{15}$ (vì $2^{60}.5^{40} < 2^{60}.5^{45}$)

Bài 2: So sánh các số sau đây:

a) 5^{100} và 3^{500}

c) $\frac{1}{2^{21}}$ và $\frac{1}{5^{35}}$

e) $2^{30} + 3^{30} + 4^{30}$ và 3.24^{10}

b) 3^{39} và 11^{21}

d) 3^{2n} và 2^{3n} $n \in \mathbb{N}^*$

f) 11^{1979} và 37^{1320}

Phân tích:

Đưa cả hai lũy thừa về cùng số mũ, so sánh hai cơ số, lũy thừa nào có cơ số lớn hơn thì lớn hơn.

Lời giải

a) 5^{100} và 3^{500}

Ta có: $5^{300} = (5^3)^{100} = 125^{100}$ và $3^{500} = (3^5)^{100} = 243^{100}$

nên $5^{300} < 3^{500}$ (vì $125 < 243 \Rightarrow 125^{100} < 243^{100}$)

b) 3^{39} và 11^{21}

Ta có: $3^{39} < 3^{40} = (3^4)^{10} = 81^{10}$ và $11^{21} > 11^{20} = (11^2)^{10} = 121^{10}$

nên $3^{39} < 11^{21}$ (vì $81^{10} < 121^{10}$)

c) $\frac{1}{2^{21}}$ và $\frac{1}{5^{35}}$

Ta có: $2^{21} = (2^3)^7 = 8^7$ và $5^{35} = (5^5)^7 = 3125^7$

nên: $2^{21} < 5^{35}$ (do $8^7 < 3125^7$)

Suy ra: $\frac{1}{2^{21}} > \frac{1}{5^{35}}$

d) 3^{2n} và 2^{3n} $n \in \mathbb{N}^*$

Ta có: $3^{2n} = 3^{2 \cdot n} = 9^n$ và $2^{3n} = 2^{3 \cdot n} = 8^n$ nên: $3^{2n} > 2^{3n}$ (vì $9^n > 8^n$)

e) $2^{30} + 3^{30} + 4^{30}$ và $3 \cdot 24^{10}$

Ta có: $4^{30} = 2^{30} \cdot 2^{30} = (2^3)^{10} \cdot (2^2)^{15} = 8^{10} \cdot 4^{15} > 8^{10} \cdot 3^{15} > 8^{10} \cdot 3^{10} \cdot 3 = (8 \cdot 3)^{10} \cdot 3 = 24^{10} \cdot 3$

nên: $2^{30} + 3^{30} + 4^{30} > 3 \cdot 24^{10}$

f) 11^{1979} và 37^{1320}

Ta có:

$11^{1979} < 11^{1980} = 11^3 \cdot 11^{660} = 1331^{660}$ và $37^{1320} = 37^2 \cdot 37^{660} = 1369^{660}$

nên $11^{1979} < 37^{1320}$ (vì $1331^{660} < 1369^{660}$)

TOÁN 6

Bài 3: So sánh các số sau:

a) $A = 72^{45} - 72^{44}$ và $B = 72^{44} - 72^{43}$

c) 10^{10} và 48.50^5

e) 2^{91} và 5^{35}

b) 99^{20} và 9999^{10}

d) 107^{50} và 73^{75}

f) $1990^{10} + 1990^9$ và

1991^{10}

Lời giải

a) $A = 72^{45} - 72^{44}$ và $B = 72^{44} - 72^{43}$

Ta có: $A = 72^{44} \cdot 72 - 1 = 72^{44} \cdot 71$

$B = 72^{43} \cdot 72 - 1 = 72^{43} \cdot 71$

nên $A > B$

b) 99^{20} và 9999^{10}

Ta có: $99^2 < 99 \cdot 101 = 9999 \Rightarrow 99^2 \cdot 10 < 9999 \cdot 10$ nên: $99^{20} < 9999^{10}$

c) 10^{10} và 48.50^5

Ta có: $10^{10} = 2^{10} \cdot 5^{10} = 2 \cdot 2^9 \cdot 5^{10}$

và $48.50^5 = 3 \cdot 2^4 \cdot 2^5 \cdot 5^{10} = 3 \cdot 2^9 \cdot 5^{10}$

suy ra: $10^{10} < 48.50^5$ (vì $2 \cdot 2^9 \cdot 5^{10} < 3 \cdot 2^9 \cdot 5^{10}$)

nên: $10^{10} < 48.50^5$

d) 107^{50} và 73^{75}

Ta có: $107^{50} < 108^{50} = 4 \cdot 27^{50} = 2^{100} \cdot 3^{150}$

và $73^{75} > 72^{75} = 8 \cdot 9^{75} = 2^{225} \cdot 3^{150}$

nên: $107^{50} < 73^{75}$ (vì $2^{100} \cdot 3^{150} < 2^{225} \cdot 3^{150}$)

e) 2^{91} và 5^{35}

Ta thấy: $2^{91} > 2^{90} = 2^5 \cdot 2^{18} = 32^{18}$

và $5^{35} < 5^{36} = 5^2 \cdot 5^{18} = 25^{18}$

nên: $2^{91} > 5^{35}$ (do $2^{91} > 32^{18} > 25^{18} > 5^{35}$)

f) $1990^{10} + 1990^9$ và 1991^{10}

Ta có: $1990^{10} + 1990^9 = 1990^9 \cdot 1990 + 1990^9 = 1991 \cdot 1990^9$

và: $1991^{10} = 1991 \cdot 1991^9$

nên $1990^{10} + 1990^9 < 1991^{10}$ (do $1990^9 < 1991^9$)

Bài 4: So sánh các số sau

a) $1102^{2009} - 1102^{2008}$ và $1102^{2008} - 1102^{2007}$

b) $A = 2007^{2007} + 2007^{2008}$ và $B = 2008^{2009}$

Lời giải

a) $1102^{2009} - 1102^{2008}$ và $1102^{2008} - 1102^{2007}$

Ta có: $1102^{2009} - 1102^{2008} = 1102^{2008} \cdot 1102 - 1102^{2008} = 1102^{2008} \cdot 1101$

và $1102^{2008} - 1102^{2007} = 1102^{2007} \cdot 1102 - 1102^{2007} = 1102^{2007} \cdot 1101$

suy ra: $1102^{2008} \cdot 1101 > 1102^{2007} \cdot 1101$

TOÁN 6

nên: $1102^{2009} - 1102^{2008} > 1102^{2008} - 1102^{2007}$

b) $A = 2007^{2007} + 2007^{2008}$ và $B = 2008^{2009}$

Ta có: $A = 2007^{2007} + 2007^{2008} = 2007^{2007} (1 + 2007) = 2008 \cdot 2007^{2007}$

và $B = 2008^{2009} = 2008 \cdot 2008^{2008}$

suy ra: $2008 \cdot 2007^{2007} < 2008 \cdot 2008^{2008}$ $2007^{2007} < 2008^{2008}$

nên $A < B$

Bài 5: Chứng tỏ rằng : $5^{27} < 2^{63} < 5^{28}$

Lời giải

Ta có: $2^{63} = 2^{7 \cdot 9} = 128^9$ và $5^{27} = 5^{3 \cdot 9} = 125^9$ nên $2^{63} > 5^{27}$ (vì $128^9 > 125^9$)

mà $2^{63} = 2^{7 \cdot 9} = 512^7$ và $5^{28} = 5^{4 \cdot 7} = 625^7$ nên $2^{63} < 5^{28}$ (vì $512^7 < 625^7$)

Nên: $5^{27} < 2^{63} < 5^{28}$

Bài 6: Chứng minh rằng:

a) $2^{1993} < 7^{714}$

b) $2^{1995} < 5^{863}$

Lời giải

a) $2^{1993} < 7^{714}$

Ta có: $2^{14} = 16384 < 7^5 = 16807$

và: $\frac{1993}{14} = \frac{9965}{90} < \frac{714}{5} = \frac{996}{90}$ nên $2^{1993} = 2^{14 \cdot \frac{1993}{14}} < 7^{5 \cdot \frac{714}{5}} = 7^{114}$

Vậy: $2^{1993} < 7^{714}$

$$b) 2^{1995} < 5^{863}$$

$$\text{Ta có: } 2^{15} = 32468 < 5^7 = 78125$$

$$\text{và: } \frac{1993}{15} = \frac{13951}{105} < \frac{863}{7} = \frac{12945}{105} \text{ nên } 2^{1995} = 2^{15 \cdot \frac{1995}{15}} < 5^7 \cdot \frac{863}{7} = 5^{863}$$

$$\text{Vậy: } 2^{1995} < 5^{863}$$

Bài tập 7: Viết theo từ nhỏ đến lớn: 2^{100} ; 3^{75} và 5^{50}

Lời giải

Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} 2^{100} = (2^4)^{25} = 16^{25} \\ 3^{75} = 3^{3 \cdot 25} = 27^{25} \\ 5^{50} = (5^2)^{25} = 25^{25} \end{array} \right\} \Rightarrow 2^{100} < 5^{50} < 3^{75}$$

Dạng 2: So sánh biểu thức lũy thừa với 1 số (so sánh hai biểu thức lũy thừa)

Bài 1: So sánh biểu thức $A = \frac{13^{15} + 1}{13^{16} + 1}$ và $B = \frac{13^{16} + 1}{13^{17} + 1}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } 13A = \frac{13 \cdot (13^{15} + 1)}{13^{16} + 1} = \frac{13^{16} + 13}{13^{16} + 1} = \frac{13^{16} + 1 + 12}{13^{16} + 1} = 1 + \frac{12}{13^{16} + 1}$$

$$\text{và } 13B = \frac{13^{16} + 1}{13^{17} + 1} = \frac{13 \cdot (13^{16} + 1)}{13^{17} + 1} = \frac{13^{17} + 13}{13^{17} + 1} = \frac{13^{17} + 1 + 12}{13^{17} + 1} = 1 + \frac{12}{13^{17} + 1}$$

$$\text{Vì } \frac{12}{13^{17} + 1} < \frac{12}{13^{16} + 1} \Rightarrow 1 + \frac{12}{13^{17} + 1} < 1 + \frac{12}{13^{16} + 1} \text{ nên } 13A < 13B$$

$$\text{Vậy } A < B$$

Bài 2: So sánh biểu thức $A = \frac{10^{100} + 1}{10^{99} + 1}$ và $B = \frac{10^{98} + 1}{10^{97} + 1}$

Lời giải

TOÁN 6

$$\text{Ta có: } \frac{1}{10}A = \frac{10^{100} + 1}{10 \cdot (10^{99} + 1)} = \frac{10^{100} + 10 - 9}{10^{100} + 10} = 1 - \frac{9}{10^{100} + 10}$$

$$\frac{1}{10}B = \frac{10^{98} + 1}{10 \cdot (10^{97} + 1)} = \frac{10^{98} + 1}{10^{98} + 10} = \frac{10^{98} + 10 - 9}{10^{98} + 10} = 1 - \frac{9}{10^{98} + 10}$$

$$\text{Vì } \frac{9}{10^{100} + 10} < \frac{9}{10^{98} + 10} \text{ nên } 1 - \frac{9}{10^{100} + 10} > 1 - \frac{9}{10^{98} + 10}$$

Vậy $A > B$

$$\text{Bài 3: So sánh biểu thức } A = \frac{19^{20} + 5}{10^{20} - 8} \text{ và } B = \frac{19^{21} + 6}{10^{21} - 7}$$

Lời giải

Ta có:

$$A = \frac{19^{20} + 5}{19^{20} - 8} = \frac{19^{20} - 8 + 13}{19^{20} - 8} = 1 + \frac{13}{19^{20} - 8}$$

$$B = \frac{19^{21} + 6}{19^{21} - 7} = \frac{19^{21} - 7 + 13}{19^{21} - 7} = 1 + \frac{13}{19^{21} - 7}$$

$$\text{Vì } \frac{13}{19^{20} - 8} < \frac{13}{19^{21} - 7} \text{ nên } 1 + \frac{13}{19^{20} - 8} < 1 + \frac{13}{19^{21} - 7}$$

Vậy $A < B$

$$\text{Bài 4: So sánh biểu thức } A = \frac{33 \cdot 10^3}{2^3 \cdot 5 \cdot 10^3 + 7000} \text{ và } B = \frac{3774}{5217}$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{33 \cdot 10^3}{2^3 \cdot 5 \cdot 10^3 + 7000} = \frac{33 \cdot 10^3}{8 \cdot 5 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^3} = \frac{10^3 \cdot 33}{10^3 \cdot (40 + 7)} = \frac{33}{47}$$

$$\text{và: } B = \frac{3774}{5217} = \frac{33}{47}$$

Vậy $A = B$

Bài 5: So sánh biểu thức $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$ và $B = 1$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{1}{2^2} < \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{4^2} < \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

.....

$$\frac{1}{100^2} < \frac{1}{99 \cdot 100} = \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$$

Lấy vế cộng vế ta có

$$A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100} < 1$$

Vậy: $A < B$

Dạng 3: Từ việc so sánh lũy thừa tìm cơ số (số mũ) chưa biết

Bài 1. Tìm $x \in \mathbb{N}$ biết $25 < 5^x < 125$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } 25 < 5^x < 3125 \Leftrightarrow 5^2 < 5^x < 5^5 \Leftrightarrow 2 < x < 5.$$

Do $x \in \mathbb{N}$ nên $x \in \{3; 4\}$.

Bài 2. Tìm $x \in \mathbb{N}$ biết $27 < 9^x < 81$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } 27 < 9^x < 243 \Leftrightarrow 3^3 < 3^{2x} < 3^5 \Rightarrow 3 < 2x < 5.$$

TOÁN 6

Do $x \in \mathbb{N} \Rightarrow 2x \in \mathbb{N}$ nên $2x = 4 \Rightarrow x = 2$.

Vậy $x = 2$.

Bài 3. Tìm $x \in \mathbb{N}$ biết $16^x < 128^4$.

Lời giải

Ta có: $16^x = 2^{4x} = 2^{4x}$; $128^4 = 2^{7 \cdot 4} = 2^{28}$.

Do $16^x < 128^4$ nên $2^{4x} < 2^{28} \Rightarrow 4x < 28 \Rightarrow x < 7$.

mà $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Bài 4. Tìm $x \in \mathbb{N}$ biết $3^{64} < x^{48} < 5^{72}$.

Lời giải

Ta giải $3^{64} < x^{48}$ và $x^{48} < 5^{72}$.

Ta có $x^{48} > 3^{64} \Rightarrow x^3 > 3^{16} \Rightarrow x^3 > 81 \Rightarrow x > 4$ (1)

$x^{48} < 5^{72} \Rightarrow x^2 < 5^{24} \Rightarrow x^2 < 125 \Rightarrow -11 < x < 11$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $4 < x < 11$.

Vì $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Bài 5. Tìm $x \in \mathbb{N}$ biết $5^x \cdot 5^{x+1} \cdot 5^{x+2} \leq \underbrace{100\dots\dots 0}_{18 \text{ số } 0} : 2^{18}$

Lời giải

Ta có:

$$5^x \cdot 5^{x+1} \cdot 5^{x+2} \leq \underbrace{100\dots\dots 0}_{18 \text{ số } 0} : 2^{18}$$

$$\Leftrightarrow 5^{3x+3} \leq 10^{18} : 2^{18}$$