

**GIẢI BÀI TẬP
TOÁN 9 HÌNH HỌC:
HỆ THỨC LƯỢNG
TRONG TAM GIÁC
VUÔNG**

Chương 1

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

Bài 1 Hệ thức về cạnh góc vuông và đường cao

1 Tóm tắt lý thuyết

Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH .

Đặt $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, $AH = h$,

$BH = c'$, $CH = c''$. Khi đó ta có các hệ thức sau

$a^2 = b^2 + c^2$

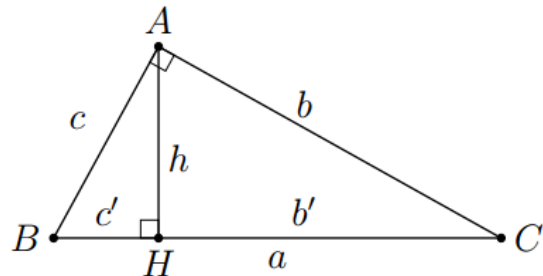
$a.c' = c^2$

$a.h = b.c$

$b'.c' = h^2$

$a.b' = b^2$

$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$



2 Các ví dụ

📖 Ví dụ 1.

Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Biết $AB = 3$ (cm), $AC = 4$ (cm). Tính BC , AH , BH , CH .

✎ Lời giải

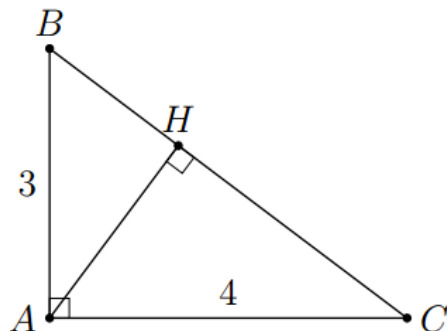
Ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Leftrightarrow BC = 5 \text{ (cm)}.$$

$$\begin{aligned} AH \cdot BC &= AB \cdot AC \\ \Rightarrow AH &= \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{3 \cdot 4}{5} = 2,4 \text{ (cm)}. \end{aligned}$$

$$BH \cdot BC = AB^2 \Rightarrow BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{3^2}{5} = 1,8 \text{ (cm)}.$$

$$CH = BC - BH = 3,2 \text{ (cm)}.$$



📖 Ví dụ 2.

Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . (H thuộc cạnh BC) biết $AB = a$, $BC = 2a$.
 Tính theo a độ dài AC và AH .

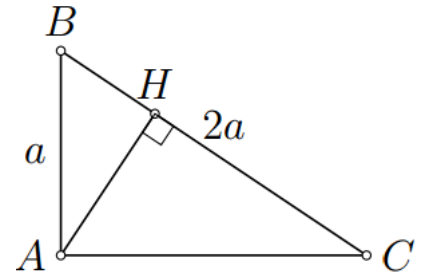
🔗 Lời giải

Theo định lí Pitago, ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2$ suy ra

$$AC^2 = BC^2 - AB^2 = (2a)^2 - a^2 = 3a^2 \Rightarrow AC^2 = a\sqrt{3}.$$

Lại có $AH \cdot BC = AB \cdot AC$

$$\Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

**📖 Ví dụ 3.**

Cho tam giác ABC vuông tại A , có $AB = 3$ (cm), $AC = 4$ (cm), đường cao AH . Gọi E, F là hình chiếu của H lên AB, AC . Tính diện tích tứ giác $AEHF$.

🔗 Lời giải

Tứ giác $AEHF$ có ba góc A, E, F là góc vuông nên $AEHF$ là hình chữ nhật.

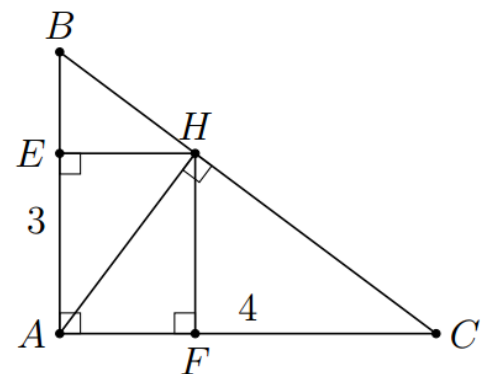
Do đó $S_{AEHF} = AE \cdot AF$.

Ta có $BC = 5$ (cm), $AH = 2,4$ (cm) nên trong các tam giác vuông AHB và AHC ta có

$$AE \cdot AB = AH^2 \Rightarrow AE = \frac{AH^2}{AB} = 2,76 \text{ (cm)}.$$

$$AF \cdot AC = AH^2 \Rightarrow AF = \frac{AH^2}{AC} = 1,44 \text{ (cm)}.$$

Suy ra $S_{AEHF} = 2,76 \cdot 1,44 = 3,9744$ (cm).

**📖 Ví dụ 4.**

Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Biết $BH = 25$ (cm), $CH = 144$ (cm). Tính AB, AC, BC, CH .

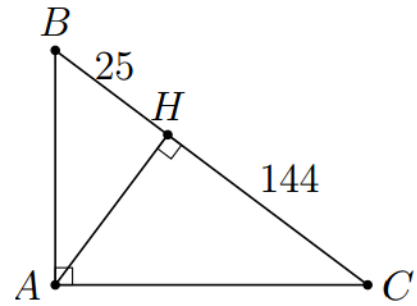
🔗 Lời giải

$$BC = BH + HC = 25 + 144 = 169.$$

$$AB^2 = BH \cdot BC = 25 \cdot 169 \Rightarrow AB = 65 \text{ (cm)}.$$

$$AC^2 = CH \cdot BC = 144 \cdot 169 \Rightarrow AC = 156 \text{ (cm)}.$$

$$AH^2 = BH \cdot CH = 25 \cdot 144 \Rightarrow AH = 60 \text{ (cm)}.$$



📖 Ví dụ 5.

Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Biết $BH = \frac{25}{12}$ (cm), $AH = \frac{60}{13}$ (cm).

Tính AB , AC , BC , CH .

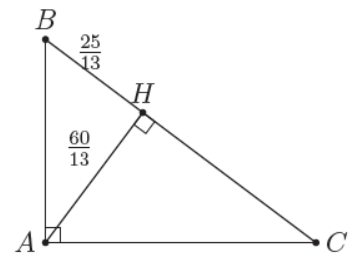
🔗 Lời giải

Ta có

$$BH \cdot CH = AH^2 \Rightarrow CH = \frac{AH^2}{BH} = \frac{144}{13} \text{ cm}$$

$$BC = BH + CH = 13 \text{ cm}$$

$$AB^2 = BH^2 + CH^2 = \frac{65^2}{13^2} \Rightarrow AB = \frac{65}{13} \text{ cm}$$



📖 Ví dụ 6. Cho tam giác ABC vuông tại B , đường cao $BH = \frac{12}{5}$ cm và $4AB = 3BC$. Tính AB, AC, BC, AH, CH .

🔗 Lời giải

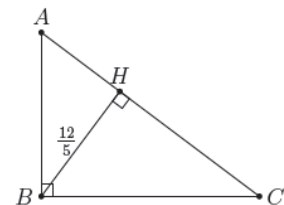
Từ giả thiết ta suy ra $AB = \frac{3}{4}BC$.

Mặt khác, ta có $\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BC^2}$. Suy ra

$$\frac{25}{144} = \frac{16}{9BC^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{25}{9BC^2} \Rightarrow BC^2 = 16 \Rightarrow BC = 4 \text{ cm}$$

Suy ra $BA = 3 \text{ cm}$. Từ đây, ta tìm được $AC = 5 \text{ cm}, AH = 1,8 \text{ cm},$

$$CH = 3,2 \text{ cm}$$



📖 Ví dụ 7. Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng $2\sqrt{5}$ cm. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, DC và I là giao điểm của AN, BM và.

1. Chứng minh rằng AN vuông góc với MB.
2. Tính AI, MI.
3. Tính diện tích tứ giác BINC.

🔗 Lời giải

1. Xét hai tam giác ADN và BAM

có $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ, AD = AB, DN = AM$.

Suy ra $\triangle ADN = \triangle BAM$ (c - g - c), do đó

$\angle DAN = \angle ABM$. Suy ra

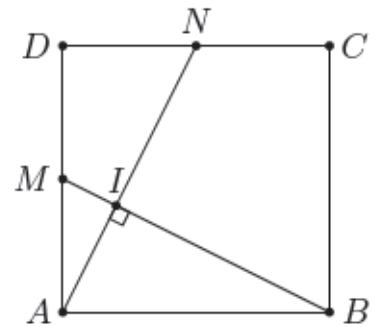
$\angle MAI + \angle AMI = \angle DAN + \angle AMB = \angle ABM + \angle AMB = 90^\circ$.

Từ đây, ta có $AN \perp BM$.

2. Ta có $BM^2 = AM^2 + AB^2 = 5 + 20 = 25 \Rightarrow BM = 5$ cm.

Suy ra $MI = \frac{AM^2}{MB} = 1$ cm, $AI^2 = AM^2 - MI^2 = 5 - 1 = 4 \Rightarrow AI = 2$ cm.

3. Ta có $S_{BCNI} = S_{BCN} + S_{BIN} = \frac{1}{2}(BI \cdot IN + BC \cdot CN) = 11$ cm².



📖 Ví dụ 8. Cho tam giác ABC vuông tại A có $BC = 5$ cm, đường cao $AH = \frac{12}{5}$ cm. Tính BH, CH.

🔗 Lời giải

Giả sử $BH \geq CH$. Ta có $BH + HC = BC = 5$. Mặt khác $BH \cdot CH = AH^2 = \frac{144}{25}$. Từ (1) ta có

$$(BH + CH)^2 = 25,$$

$$\text{suy ra } BH^2 + 2BH \cdot CH + CH^2 = 25 \Rightarrow BH^2 + CH^2 = 25 - \frac{288}{25} = \frac{237}{25}$$

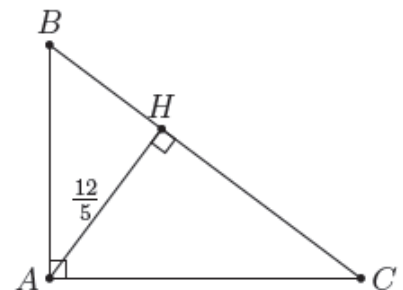
Do đó

$$(BH - CH)^2 = BH^2 - 2BH \cdot CH + CH^2 = \frac{337}{25} - \frac{288}{25} = \frac{49}{25}.$$

$$\text{Suy ra } BH - CH = \frac{7}{5}$$

Từ (1) và (2) ta có

$$BH = \frac{(BH+CH)+(BH-CH)}{2} = \frac{16}{5} \text{ cm, } CH = BC - BH = \frac{9}{5} \text{ cm.}$$



📖 Ví dụ 9. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH , kẻ HM vuông góc với AB tại M . Chứng minh rằng $BM = \frac{AB^3}{BC^2}$.

🔗 Lời giải

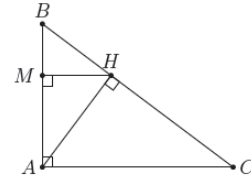
Trong tam giác vuông AHB

ta có $BM \cdot BA = BH^2$, suy ra $BM = \frac{BH^2}{AB}$

Mặt khác, trong tam giác vuông ABC , ta có $BH \cdot BC = AB^2$, hay

$$BH = \frac{AB^2}{BC}. \text{ Do đó } BM = \frac{AB^4}{AB \cdot BC^2} = \frac{AB^3}{BC^2}$$

Vậy bài toán được chứng minh.



📖 Ví dụ 10. Cho hình vuông $ABCD$, I là điểm thay đổi trên cạnh AB (I khác A và B). Đường thẳng DI cắt BC tại K . Chứng minh rằng $\frac{1}{DI^2} + \frac{1}{DK^2}$ không đổi.

🔗 Lời giải

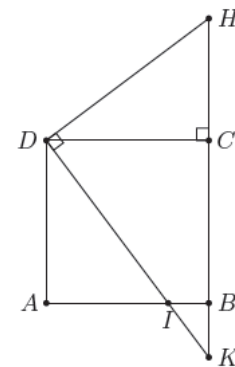
Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với DI , cắt BC tại H . Xét hai tam giác ADI và CDH

có $\angle A = \angle C = 90^\circ$, $AD = DC$, $\angle CDI = \angle CDH$ (cùng phụ với góc CDI). Suy ra $\triangle ADI = \triangle CDH$

(g - c - g), do đó $DI = DH$. Suy ra

$$\frac{1}{DI^2} + \frac{1}{DK^2} = \frac{1}{DH^2} + \frac{1}{DK^2} = \frac{1}{DC^2}$$

Từ đó, ta có đpcm.

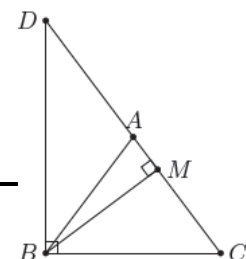


📖 Ví dụ 11. Cho tam giác ABC cân tại A , có góc A nhọn. Vẽ BM vuông góc với AC . Chứng minh rằng $\frac{AM}{MC} = 2\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 - 1$

🔗 Lời giải

Gọi D là điểm đối xứng với C qua A , khi đó $AB = AD = AC$ nên tam giác BCD vuông tại B và có đường cao BM

. Suy ra $CM \cdot CD = BC^2 \Rightarrow CM \cdot 2AC = BC^2$, suy ra



$$2\left(\frac{AC}{BC}\right)^2 = \frac{AC}{CM} = 1 + \frac{AM}{CM}. \text{ Mà } AB = AC, \text{ nên ta có}$$

$$2\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 - 1 = \frac{AM}{CM}.$$

Vậy bài toán được chứng minh.

3 Luyện tập

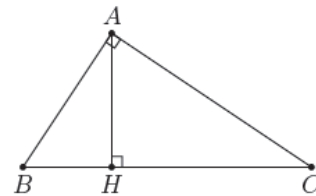
Bài 1. Cho tam giác vuông ABC , đường cao AH , cạnh góc vuông $AC = 60\text{ cm}$, cạnh huyền $BC = 100\text{ cm}$. Tính chu vi tam giác ABC , ABH , ACH .

Lời giải

Xét tam giác vuông ABC có $AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = 80\text{ cm}$.

$$AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{60 \cdot 80}{100} = 48\text{ cm}.$$

$$BH = \frac{AB^2}{BC} = 64\text{ cm}, CH = BC - BH = 36\text{ cm}$$



Chu vi tam giác ABC

là $AB + BC + CA = 240\text{ cm}$.

Chu vi tam giác ABH là $AB + AH + HB = 192\text{ cm}$.

Chu vi tam giác ACH : $AC + AH + HC = 144\text{ cm}$.

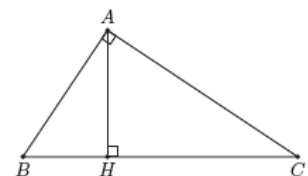
Bài 2. Cho tam giác vuông có các cạnh góc vuông bằng 5 cm và 12 cm . Tìm cạnh huyền và các hình chiếu của các cạnh góc vuông trên cạnh huyền.

Lời giải

Các hình chiếu của các cạnh lên cạnh huyền là:

$$BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{5^2}{13} = \frac{25}{13}\text{ cm}.$$

$$CH = BC - BH = 13 - \frac{25}{13} = \frac{144}{13}\text{ cm}.$$



Bài 3. Tìm các cạnh của tam giác vuông, biết đường cao và đường trung tuyến ứng với cạnh huyền theo thứ tự là 4 cm và 5 cm .

Lời giải

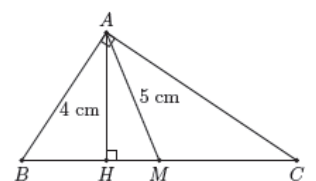
Vì AM là trung tuyến của tam giác ABC vuông tại A nên $AM = MC = MB = 5\text{ cm}$, suy ra $BC = 2MA = 10\text{ cm}$.

Xét $\triangle AHM$: $HM = \sqrt{AM^2 - AH^2} = 3\text{ cm}$. Suy ra

$$BH = MB - HM = 2\text{ cm}, HC = HM + MC = 8\text{ cm}$$

Xét tam giác vuông ABC :

$$AB^2 = BH \cdot BC = 20 \Rightarrow AB = 2\sqrt{5}\text{ cm}.$$



$$\checkmark AC^2 = CH \cdot CB = 80 \Rightarrow AC = 4\sqrt{5} \text{ cm}$$

📁 **Bài 4.** Tìm các cạnh của tam giác vuông, biết đường cao ứng với cạnh huyền là 4 cm, diện tích tam giác vuông bằng 20 cm^2 .

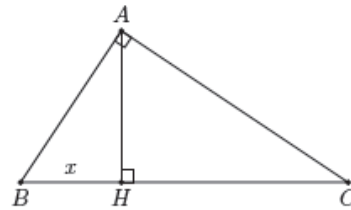
🔗 **Lời giải**

$$\text{Ta có } BC = \frac{2S_{ABC}}{AH} = \frac{2 \cdot 20}{4} = 10 \text{ cm}.$$

Đặt $BH = x (x > 0)$. Ta có

$$AH^2 = BH \cdot CH \Leftrightarrow 16 = x(10 - x)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 8 \end{cases}$$



$$\text{Khi } BH = 2 \text{ cm: } AB^2 = BH \cdot BC = 2 \cdot 10 \Rightarrow AB = 2\sqrt{5} \text{ cm; } AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 4\sqrt{5} \text{ cm}.$$

$$\text{Khi } BH = 8 \text{ cm: } AB^2 = BH \cdot BC = 8 \cdot 10 \Rightarrow AB = 4\sqrt{5} \text{ cm; } AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 2\sqrt{5} \text{ cm}.$$

Khi đó ba cạnh của tam giác là $2\sqrt{5} \text{ cm}, 4\sqrt{5} \text{ cm}$ và 10 cm .

📁 **Bài 5.** Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Biết $AH = 6 \text{ cm}$ và $HC - HB = 9 \text{ cm}$. Tính HB, HC .

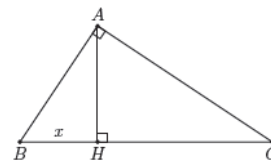
🔗 **Lời giải**

Đặt $BH = x \Rightarrow CH = 9 + x$ với $x > 0$.

Ta có

$$AH^2 = BH \cdot HC \Leftrightarrow x(9 + x) = 36 \Leftrightarrow x^2 + 9x - 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -12 \\ x = 3 \end{cases}$$



Vậy $HB = 3 \text{ cm}, HC = HB + 9 = 12 \text{ cm}$.

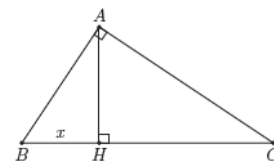
📁 **Bài 6.** Cho tam giác ABC vuông tại A , $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$, đường cao $AH = 18 \text{ cm}$. Tính chu vi tam giác ABC .

🔗 **Lời giải**

Đặt $AB = 3x \Rightarrow AC = 4x$ với $x > 0$.

$$\text{Suy ra } BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 5x.$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{\sqrt{AB^2 + AC^2}} = \frac{12x}{5} \Rightarrow x = \frac{15}{2} \text{ cm}.$$



Chu vi tam giác ABC

bằng $AB + BC + CA = 12x = 90 \text{ cm}$.

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A với $AB < AC$ và đường cao AH . Tính AB, AC biết $AH = 6\text{ cm}$ và diện tích tam giác ABC bằng $37,5\text{ cm}^2$.

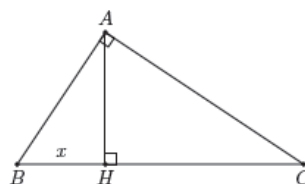
Lời giải

Giả sử tam giác đó là $\triangle ABC$ có đường cao AH

$$\text{Ta có } BC = \frac{2S_{ABC}}{AH} = \frac{2 \cdot 37,5}{6} = 12,5\text{ cm}$$

Đặt $BH = x (x > 0)$. Ta có

$$AH^2 = BH \cdot CH \Leftrightarrow 36 = x \cdot (12,5 - x) \Leftrightarrow x^2 - 12,5x + 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{2} \\ x = 8 \end{cases}$$



$$\text{Khi } BH = \frac{9}{2}\text{ cm} : AB^2 = BH \cdot BC = \frac{9}{2} \cdot 12,5 \Rightarrow AB = \frac{15}{2}\text{ cm}; AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 10\text{ cm}.$$

$$\text{Khi } BH = 8\text{ cm} : AB^2 = BH \cdot BC = 8 \cdot 12,5 \Rightarrow AB = 10\text{ cm}; AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 7,5\text{ cm}.$$

Khi đó là ba cạnh của tam giác là $AB = 7,5\text{ cm}, AC = 10\text{ cm}$ và $BC = 12,5\text{ cm}$.

Bài 8. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D . Hai đường chéo vuông góc với nhau tại O . Biết $AB = 2\sqrt{13}, OA = 6$. Tính diện tích hình thang.

Lời giải

Xét $\triangle OAB$ vuông tại O , ta có:

$$OB = \sqrt{AB^2 - OA^2} = \sqrt{(2\sqrt{13})^2 - 6^2} = 4$$

Xét $\triangle ABD$ vuông tại A , đường cao AO ta có:

$$\checkmark AB^2 = BD \cdot OB \Rightarrow BD = \frac{AB^2}{OB} = \frac{(2\sqrt{13})^2}{4} = 13$$

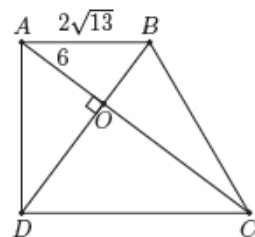
$$\checkmark AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = \sqrt{13^2 - (2\sqrt{13})^2} = 3\sqrt{13}.$$

$$\checkmark \text{Ta có } OD = BD - OB = 13 - 4 = 9.$$

$$\text{Xét } \triangle ADC \triangle ABC \text{ vuông tại } D \text{ ta có: } AD^2 = OA \cdot AC \Rightarrow AC = \frac{AD^2}{OA} = \frac{AD^2}{OA} = \frac{(3\sqrt{13})^2}{6} = 19,5.$$

$$\text{Mà } AD \cdot DC = OD \cdot AC \Rightarrow DC = \frac{OD \cdot AC}{AD} = \frac{9 \cdot 19,5}{3\sqrt{13}} = \frac{9\sqrt{13}}{2}.$$

$$\text{Vậy } S_{ABCD} = \frac{1}{2} AD \cdot (AB + DC) = 126,75 \text{ (đvdt)}$$

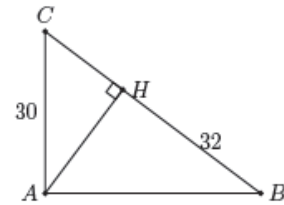


Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại A . Đường cao AH , cạnh bên $AC = 30, HB = 32$. Tính độ dài AH, HC, AB

Lời giải

Đặt $HC = x(x > 0)$. Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH ta có

$$\begin{aligned} AH^2 &= HC \cdot HB \Leftrightarrow 30^2 = x(x+32) \\ \Leftrightarrow (x-18)(x+50) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=18 \\ x=-50 \end{cases} \end{aligned}$$



Xét $\triangle AHC$ vuông tại H ta có $AH = \sqrt{AC^2 - HC^2} = 24$.

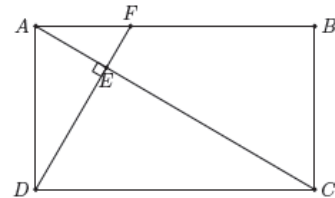
Xét $\triangle ABC$ vuông tại A ta có $AB^2 = HB \cdot BC = 32 \cdot (32+18) = 40$.

Bài 10. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có các cạnh $AB = 60\text{ cm}$, $AD = 32\text{ cm}$. Từ D kẻ đường thẳng vuông góc với đường chéo AC . Đường này cắt AC tại E và AB tại F . Tính độ dài các đoạn EA, EC, ED, FB, FD .

Lời giải

Xét tam giác vuông ADC ta có

$$\begin{aligned} EA &= \frac{AD^2}{AC} = \frac{AD^2}{\sqrt{AD^2 + CD^2}} = \frac{32^2}{\sqrt{32^2 + 60^2}} = \frac{256}{17} \text{ cm} \\ EC &= \frac{CD^2}{AC} = \frac{60^2}{\sqrt{32^2 + 60^2}} = \frac{900}{17} \text{ cm} \end{aligned}$$



Xét tam giác vuông ADE có

$$\text{tam giác vuông } ADE \text{ có } ED = \sqrt{EA \cdot EC} = \sqrt{\frac{32^2 \cdot 60^2}{32^2 + 60^2}} = \frac{480}{17} (\text{cm}).$$

$$FD = \frac{AD^2}{ED} = \frac{32^2}{\frac{32 \cdot 60}{17}} = \frac{544}{15} \text{ cm.}$$

$$AF = \sqrt{FD^2 - AD^2} = \sqrt{\frac{32^2 \cdot 68^2}{60^2} - 32^2} = \frac{256}{15} \text{ cm.}$$

$$FB = AB - AF = 60 - \frac{256}{15} = \frac{644}{15} \text{ cm.}$$

Bài 11. Tính diện tích hình thang $ABCD$, có đường cao bằng 12 cm , hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau, $DB = 15\text{ cm}$.

Lời giải

Qua B vẽ đường thẳng song song với AC , cắt DC ở E . Gọi BH là đường cao của hình thang. Ta có $BE \parallel AC$ nên $BE \perp BD$.

Áp dụng định lí Pytago vào tam giác vuông BDH , ta có

$$\begin{aligned} BH^2 + HD^2 &= BD^2 \Rightarrow 12^2 + HD^2 = 15^2 \\ \Rightarrow HD^2 &= 225 - 144 = 81 \Rightarrow HD = 9\text{ cm} \end{aligned}$$

Xét tam giác BDE vuông tại B , ta có

$$BD^2 = DE \cdot DH \Rightarrow 15^2 = DE \cdot 9 \Rightarrow DE = \frac{225}{9} = 25\text{ cm}$$

