CÁC DẠNG BÀI TẬP VỀ TỨ GIÁC

CHỦ ĐỀ 1: TỨ GIÁC

Dạng 1. *Tính số đo góc của tứ giác*

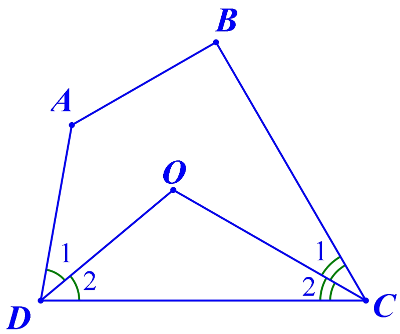
- ***Phương pháp:*** Vân dụng định lý tổng 4 góc của tứ giác, tính chất góc ngoài của tam giác, hai góc bù nhau, phụ nhau
- ***Bài tập vận dụng:***

Bài 1.1 Cho tứ giác ABCD, $\hat{A} - \hat{B} = 40°$. Các tia phân giác của góc C và góc D cắt nhau tại O. Cho biết $\widehat{COD} = 110°$. Chứng minh rằng $AB \perp BC$.

- ***Tìm cách giải***

Muốn chứng minh $AB \perp BC$ ta chứng minh $\hat{B} = 90°$.

Đã biết hiệu $\hat{A} - \hat{B}$ nên cần tính tổng $\hat{A} + \hat{B}$.



- ***Lời giải:***

Xét ΔCOD có

$$\widehat{COD} = 180° - \left(\hat{C}_2 + \hat{D}_2\right) = 180° - \frac{\hat{C} + \hat{D}}{2}$$

(vì $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$; $\hat{D}_1 = \hat{D}_2$).

Xét tứ giác ABCD có: $\hat{C} + \hat{D} = 360° - \left(\hat{A} + \hat{B}\right)$, do đó

$$\widehat{COD} = 180° - \frac{360° - \left(\hat{A} + \hat{B}\right)}{2} = 180° - 180° + \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}$$

Vậy $\widehat{COD} = \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}$. Theo đề bài $\widehat{COD} = 110°$ nên $\hat{A} + \hat{B} = 220°$.

Mặt khác, $\hat{A} - \hat{B} = 40°$ nên $\hat{B} = \left(220° - 40°\right) : 2 = 90°$. Do đó $AB \perp BC$.

Bài 1.2 Cho tứ giác ABCD có $\hat{A} + \hat{B} = 220°$. Các tia phân giác ngoài tại đỉnh C và D cắt nhau tại K. Tính số đo của góc CKD.

Lời giải:

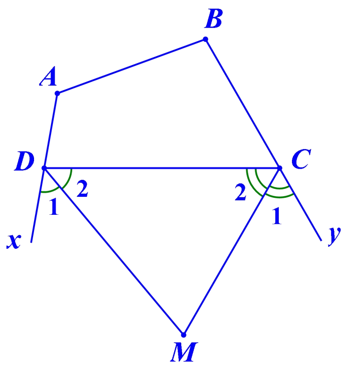
Xét tứ giác ABCD có: $\hat{A} + \hat{B} = 360^0 - \left(\hat{C} + \hat{D}\right)$

$\widehat{CDx} + \widehat{DCy} = \left(180^0 - \hat{D}\right) + \left(180^0 - \hat{C}\right) = 360^0 - \left(\hat{C} + \hat{D}\right)$

Suy ra: $\widehat{CDx} + \widehat{DCy} = \hat{A} + \hat{B} = 220°$

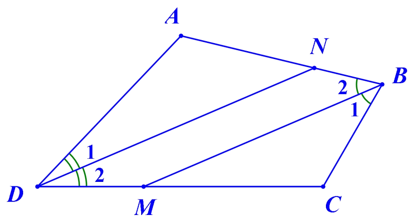
$\Rightarrow \frac{\widehat{CDx} + \widehat{CDy}}{2} = 110°$. Do đó $\widehat{D_2} + \widehat{C_2} = 110°$.

Xét ΔCKD có: $\widehat{CKD} = 180° - \left(\widehat{D_2} + \widehat{C_2}\right) = 180° - 110° = 70°$



Bài 1.3 Tứ giác ABCD có $\hat{A} = \hat{C}$. Chứng minh rằng các đường phân giác của góc B và góc D song song với nhau hoặc trùng nhau.

Lời giải:



Xét tứ giác ABCD có:

$\widehat{B}+\widehat{D}=360^\circ-\left(\widehat{A}+\widehat{C}\right)=360^\circ-2\widehat{C}$.

Vì $\widehat{B_1}=\widehat{B_2}$, $\widehat{D_1}=\widehat{D_2}$ nên

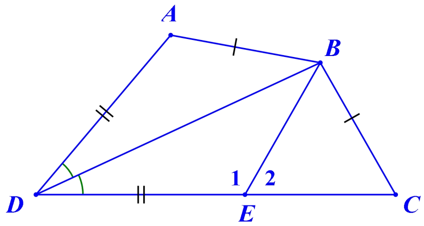
$\widehat{B_1}+\widehat{D_1}=180^\circ-\widehat{C}\Rightarrow\widehat{B_1}+\widehat{D_1}+\widehat{C}=180^\circ$. (1)

Xét ΔBCM có $\widehat{B_1}+\widehat{M_1}+\widehat{C}=180^\circ$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{D_1}=\widehat{M_1}$. Do đó $DN\,//\,BM$.

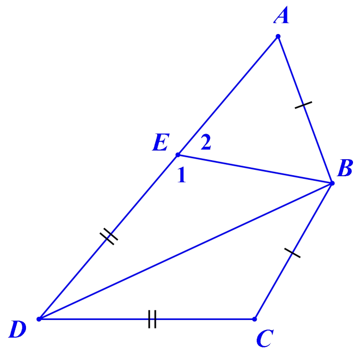
Bài 1.4 Tứ giác ABCD có AB = BC và hai cạnh AD, DC không bằng nhau. Đường chéo DB là đường phân giác của góc D. Chứng minh rằng các góc đối của tứ giác này bù nhau.

- ***Tìm cách giải***



Để chứng minh hai góc A và C bù nhau ta tạo ra một góc thứ ba làm trung gian, góc này bằng góc A chẳng hạn. Khi đó chỉ còn phải chứng minh góc này bù với góc C

- ***Lời giải:***



- ***Xét trường hợp*** AD < DC

Trên cạnh DC lấy điểm E sao cho DE = DA

Ta có: $\Delta ADB=\Delta EDB$ (c.g.c) $\Rightarrow AB=EB$ và $\widehat{A}=\widehat{E}_1$.

Mặt khác, $AB=BC$ nên $BE=BC$.

Vậy ΔBEC cân $\Rightarrow \widehat{C}=\widehat{E}_2$.

Ta có: $\widehat{E}_1+\widehat{E}_2=180 \quad \widehat{A}+\widehat{C}=180$.

Do đó: $\widehat{B}+\widehat{D}=360^\circ-180^\circ=180^\circ$.

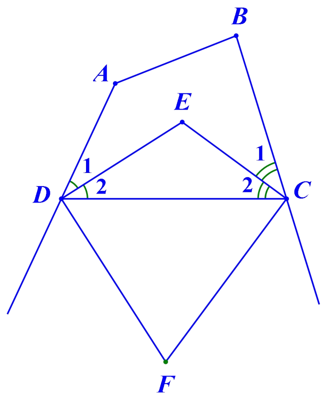
- ***Xét trường hợp*** AD > DC

CMTT như trên, ta được: $\widehat{A}+\widehat{C}=180^\circ$; $\widehat{B}+\widehat{D}=180^\circ$.

Bài 1.5 Tứ giác ABCD có $\widehat{\mathrm{A}}=110^0,\widehat{\mathrm{B}}=100^0$ Các tia phân giác của các góc C và D cắt nhau ở E. Các đường phân giác của các góc ngoài tại các đỉnh C và D cắt nhau ở F. Tính $\widehat{\mathrm{CED}},\widehat{\mathrm{CFD}}$

Lời giải:

Tứ giác ABCD có $\widehat{C}+\widehat{D}=360^0-\widehat{A}-\widehat{B}=360^0-110^0-100^0=150^0$



nên $\widehat{C}_1+\widehat{D}_1=\dfrac{\widehat{C}+\widehat{D}}{2}=\dfrac{150^0}{2}=75^0$.

ΔCED có $\widehat{CED}=180^0-\left(\widehat{C}_1+\widehat{D}_1\right)=180^0-75^0=105^0$.

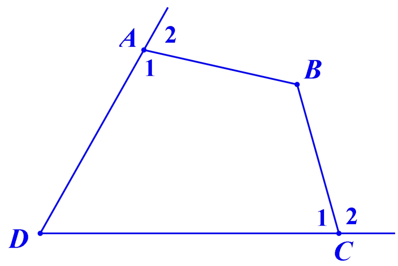
Vì DE và DF là các tia phân giác của hai góc kề bù nên $DE\perp DF$. Tương tự, $CE\perp CF$

Xét tứ giác CEDF:

Có: $\widehat{F}=360^0-\widehat{E}-\widehat{ECF}-\widehat{EDF}=360^0-105^0-90^0-90^0=75^0$

Bài 1.6 Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng tổng hai góc ngoài tại hai đỉnh A và C bằng tổng hai góc trong tại hai đỉnh B và D.

Lời giải:



Gọi các góc trong của đỉnh A và C là $\widehat{A}_1$ và $\widehat{C}_1$ còn các góc ngoài của đỉnh A và C là $\widehat{A}_2$ và $\widehat{C}_2$.

Ta có: $\widehat{A}_1+\widehat{A}_2=180^0$ (hai góc kề bù)

$\widehat{C}_1+\widehat{C}_2=180^0$ (hai góc kề bù)

Suy ra: $\widehat{A}_2=180^0-\widehat{A}_1$ và $\widehat{C}_2=180^0-\widehat{C}_1$

$\Rightarrow\ \widehat{A}_2+\widehat{C}_2=360-\widehat{A}_1-\widehat{C}_1$ (1)

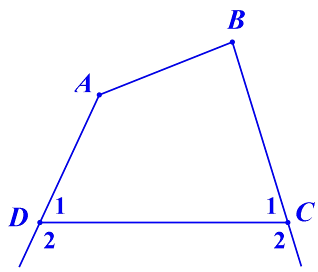
Ta lại có: $\widehat{A}_1+\widehat{B}+\widehat{C}_1+\widehat{D}=360^0$ (tổng 4 góc tứ giác)

$\Rightarrow\ \widehat{B}+\widehat{D}=360^0-\widehat{A}_1-\widehat{C}_1$ (2) . Từ (1) và (2) $\Rightarrow\ \widehat{B}+\widehat{D}=\widehat{A}_2+\widehat{C}_2$

Bài 1.7 Chứng minh rằng trong một tứ giác, tổng hai góc ngoài tại hai đỉnh bằng tổng hai góc trong tại hai đỉnh còn lại.

Lời giải:

- ***Trường hợp hai góc ngoài tại hai đỉnh kề nhau***



Gọi $\widehat{C_1}$, $\widehat{D_1}$ là số đo hai góc trong; $\widehat{D_2}$, $\widehat{D_2}$ là số đo hai góc ngoài tại hai đỉnh kề nhau là C và D. Ta có:

$\widehat{C_2}+\widehat{D_2}=\left(180^\circ-\widehat{C_1}\right)+\left(180^\circ-\widehat{D_1}\right)=360^\circ-\left(\widehat{C_1}+\widehat{D_1}\right)$. (1)

Xét tứ giác ABCD có: $\widehat{A}+\widehat{B}=360^\circ-\left(\widehat{C_1}+\widehat{D_1}\right)$. (2)

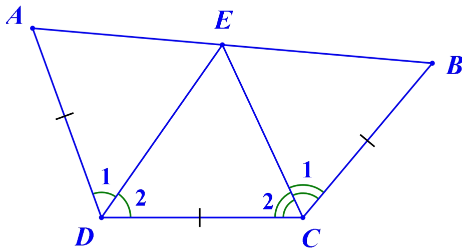
Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{C_2}+\widehat{D_2}=\widehat{A}+\widehat{B}$.

Trường hợp hai góc ngoài tại hai đỉnh đối nhau (xem VD4)

Bài 1.8 Cho tứ giác ABCD có $AD = DC = CB$; $\widehat{C} = 130^\circ$; $\widehat{D} = 110^\circ$. Tính số đo góc A, góc B.

(Olympic Toán Châu Á - Thái Bình Dương 2010)

Lời giải



Vẽ đường phân giác của các góc $\widehat{C}$ và $\widehat{D}$ chúng cắt nhau tại E.

Xét ΔECD có $\widehat{CED} = 180^\circ - \dfrac{110^\circ + 130^\circ}{2} = 60^\circ$.

$\Delta ADE = \Delta CDE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{CED} = 60^\circ$.

$\Delta BCE = \Delta DCE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BEC} = \widehat{DEC} = 60^\circ$.

Suy ra $\widehat{AEB} = 180^\circ$ do đó ba điểm A, E, B thẳng hàng

Vậy. Do đó $\widehat{ABC} = 360^\circ - (65^\circ + 110^\circ + 130^\circ) = 55^\circ$.

Bài 1.9 Cho tứ giác $ABCD$, E là giao điểm của các đường thẳng AB và CD, F là giao điểm của các đường thẳng BC và AD. Các tia phân giác của các góc E và F cắt nhau ở I. Chứng minh rằng :

a) Nếu $\widehat{BAD} = 130^0, \widehat{BCD} = 50^0$ thì IE vuông góc với IF.

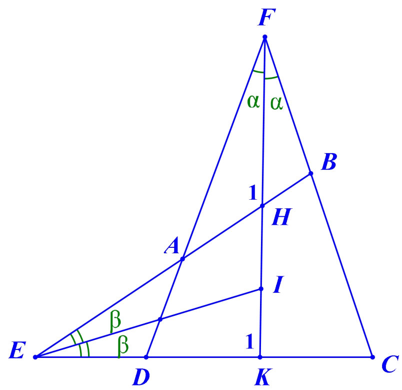
b) Góc EIF bằng nửa tổng của một trong hai cặp góc đối của tứ giác $ABCD$.

Lời giải

a) Xem cách giải tổng quát ở câu b

b) Giả sử E và F có vị trí như trên hình bên, các tia phân giác của các góc E và F cắt nhau tại I. Trước hết ta chứng minh rằng $\widehat{BAD} + \widehat{C} = 2\widehat{EIF}$.

Thây vậy, gọi H và K là giao điểm của FI với AB và CD



Theo tính chất góc ngoài của tam giác ta có: $\widehat{BAD} = \widehat{H}_1 + \alpha, \widehat{C} = \widehat{K}_1 - \alpha$

nên $\widehat{BAD} + \widehat{C} = \widehat{H}_1 + \widehat{K}_1 = (\widehat{EIF} + \beta) + (\overline{EIF} - \beta) = 2\widehat{EIF}$

Do đó $\widehat{EIF} = (\widehat{BAD} + \widehat{C}) : 2$

Bài tập tự giải

Bài 1. Cho tứ giác ABCD có $\widehat{B} = 100^0, \widehat{D} = 80^0$ và $CB = CD$.

a) Nếu $\widehat{A} - \widehat{C} = 40^0$, hãy tính các góc chưa biết của tứ giác.

b)Chứng minh $\widehat{BAC} = \widehat{DAC}$.

Bài 2. Nêu cách vẽ tứ giác $ABCD$ biết $\widehat{A} = 130^0, \widehat{B} = 80^0, \widehat{C} = 70^0, AB = 4\,cm$ và $CD = 5\,cm$

Bài 3. Tứ giác ABCD có $\widehat{A} - \widehat{B} = 50^0$. Các tia phân giác của các góc C và D cắt nhau tại I và $\widehat{CID} = 115^0$. Tính các góc A và B.

Bài 4. Cho tứ giác ABCD có $\widehat{B} = 120^0$, $\widehat{D} = 60^0$ và $\dfrac{\widehat{A}}{\widehat{C}} = \dfrac{4}{5}$. Tính các góc còn lại.

Bài 5. Tính các góc trong và ngoài của tứ giác PQRS, biết: số đo góc ngoài tại đỉnh R và số đo góc P cùng bằng 80^0, $\widehat{Q} - \widehat{S} = 60^0$

Dạng 2. So sánh các độ dài đoạn thẳng

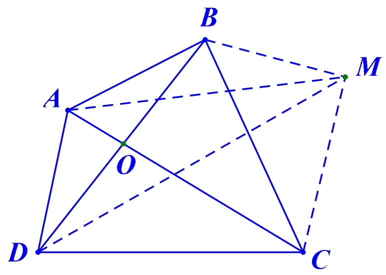
- ***Lý thuyết:***

Định lý về tứ giác lồi: *Nếu tứ giác ABCD là tứ giác lồi khi và chỉ khi hai đường chéo AC và BD cắt nhau*

- ***Bài tập***

Bài 2.1 Tứ giác ABCD có tổng hai đường chéo bằng a. Gọi M là một điểm bất kì. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $MA+MB+MC+MD$.

- ***Tìm cách giải***



Để tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $MA+MB+MC+MD$ ta phải chứng minh $MA+MB+MC+MD \geq k$ (k là hằng số).

Ghép tổng trên thành hai nhóm $(MA+MC)+(MB+MD)$.

Ta thấy ngay có thể dùng bất đẳng thức tam giác mở rộng.

- ***Trình bày lời giải***

Xét ba điểm M, A, C có $MA+MC \geq AC$ (dấu "=" xảy ra khi $M \in AC$).

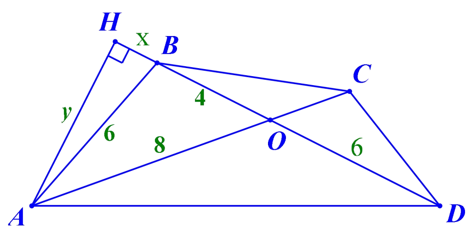
Xét ba điểm M, B, D có $MB+MD \geq BD$ (dấu '=' xảy ra khi $M \in BD$).

Do đó: $MA+MB+MC+MD \geq AC+BD = a$.

Vậy $\min(MA+MB+MC+MD) = a$ khi M trùng với giao điểm O của đường chéo AC và BD.

Bài 2.2 Tứ giác ABCD có O là giao điểm của hai đường chéo, $AB=6, OA=8$, $OB=4, OD=6$. Tính độ dài AD.

- ***Lời giải:***



Kẻ AH ⊥ BD. Đặt BH = x, AH = y. Áp dụng định lý Pytago vào các tam giác vuông ABH và AOH, ta có:

$$\begin{cases} x^2+y^2=36 \\ (x+4)^2+y^2=64 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta tìm được: $x=\dfrac{3}{2}; y^2=\dfrac{135}{2}$

Áp dụng định lý Pytago vào các tam giác vuông ADH, ta có:

$$AD^2=HD^2+AH^2=11,5^2+\frac{135}{2}=166 \Rightarrow AD=\sqrt{166}$$

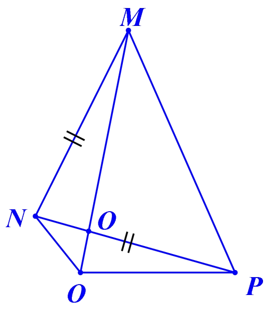
Bài 2.3 Cho tứ giác MNPQ. Chứng minh rằng nếu $MN = NQ$ thì $PQ < MP$.

- ***Lời giải:***

Gọi O là giao điểm hai đường chéo MP và NQ

Ta có : $MN < MO + ON$ và $PQ < PO + OQ$ (Bđt tam giác) suy ra $MN + PQ < MP + NQ$;

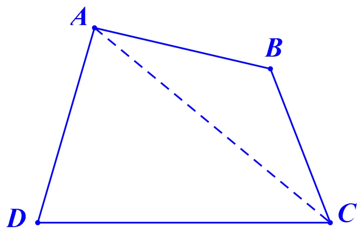
mà $MN = MP$ (gt) nên $PQ < NQ$



Bài 2.4 Có hay không một tứ giác mà độ dài các cạnh tỉ lệ với 1, 3, 5, 10 ?

- ***Lời giải:***

Giả sử tứ giác ABCD có CD là cạnh dài nhất.
Ta sẽ chứng minh CD nhỏ hơn tổng của ba cạnh còn lại (1).
Thật vậy, xét ΔABC ta có: $AC < AB + BC$.
Xét ΔADC có: $CD < AD + AC$. Do đó $CD < AD + AB + BC$.
Ta thấy nếu các cạnh tỉ lệ với 1, 3, 5, 10 thì không thỏa mãn

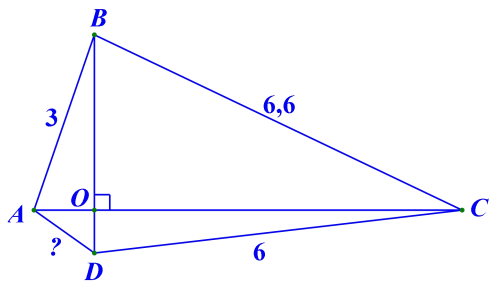


điều kiện (1) nên không có tứ giác nào mà các cạnh tỉ lệ với 1, 3, 5, 10.

Bài 2.5 Tứ giác ABCD có hai đường chéo vuông góc. Biết $AB = 3$; $BC = 6,6$; $CD = 6$. Tính độ dài AD.

- ***Lời giải:***

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo.
Xét ΔAOB, ΔCOD vuông tại O, ta có:
$AB^2 + CD^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2$.
Chứng minh tương tự, ta được:
$BC^2 + AD^2 = OB^2 + OC^2 + OD^2 + OA^2$
Do đó: $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$.

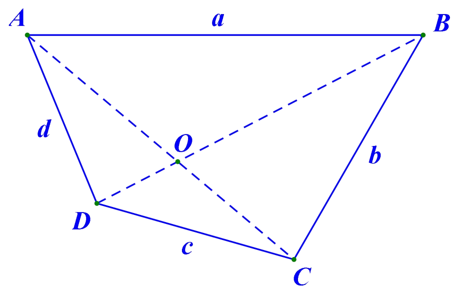


Suy ra: $\Rightarrow 3^2 + 6^2 = 6,6^2 + AD^2 \Rightarrow AD^2 = 9 + 36 - 43,56 = 1,44 \Rightarrow AD = 1,2$

Bài 2.6 Chứng minh rằng trong một tứ giác tổng hai đường chéo lớn hơn nửa chu vi nhưng nhỏ hơn chu vi của tứ giác.

- ***Lời giải:***

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD của tứ giác ABCD.
Gọi độ dài các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt là a, b, c, d. Vận dụng bất đẳng thức tam giác ta được:
$OA + OB > a$; $OC + OD > c$
Do đó $(OA + OC) + (OB + OD) > a + c$



hay $AC + BD > a + c$. (1)
Chứng minh tương tự, ta được: $AC + BD > d + b$. (2)

Cộng từng vế của (1) và (2), ta được: $2(AC+BD)>a+b+c+d \Rightarrow AC+BD>\dfrac{a+b+c+d}{2}$

Xét các ΔABC và ΔADC ta có: $AC<a+b;\ AC<c+d \Rightarrow 2AC<a+b+c+d$. (3)

Tương tự có: $2BD<a+b+c+d$. (4)

Cộng từng vế của (3) và (4) được: $2(AC+BD)<2(a+b+c+d) \Rightarrow AC+BD<a+b+c+d$.

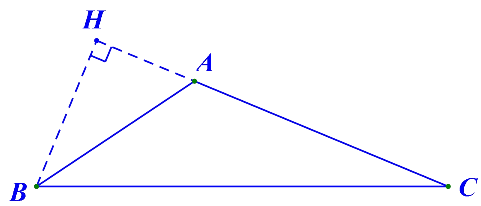
Từ các kết quả trên ta được điều phải chứng minh.

Bài 2.7 Cho bốn điểm A, B, C, D trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng, bất kì hai điểm nào cũng có khoảng cách lớn hơn 10. Chứng minh rằng tồn tại hai điểm đã cho có khoảng cách lớn hơn 14.

- Trước hết ta chứng minh một bài toán phụ:

Cho ΔABC, $\widehat{A} \ge 90^0$. Chứng minh:

$BC^2 \ge AB^2 + AC^2$



Giải

Vẽ $BH \perp AC$. Vì $\widehat{A} \ge 90^0$ nên H nằm trên tia đối của tia AC.

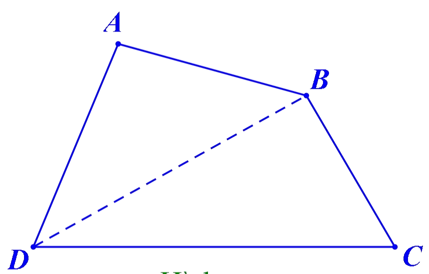
Xét ΔHBC và ΔHBA vuông tại H, ta có:

$BC^2 = HB^2 + HC^2 = \left(AB^2 - HA^2\right) + \left(HA + AC\right)^2$

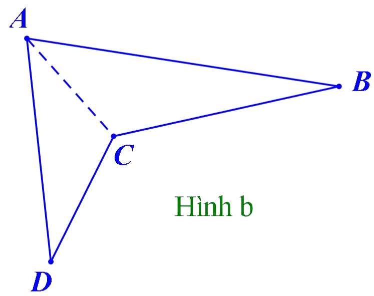
$$= AB^2 - HA^2 + HA^2 + AC^2 + 2HA.AC = AB^2 + AC^2 + 2HA.AC.$$

Vì $HA.AC \ge 0$ nên $BC^2 \ge AB^2 + AC^2$ (dấu "=" xảy ra khi $H \equiv A$ tức là khi ΔABC vuông).

- Vận dụng kết quả trên để giải bài toán đã cho



Hình a



Hình b

Trường hợp tứ giác ABCD là tứ giác lồi (h.a)

Ta có: $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D}=360°$.

Suy ra trong bốn góc này phải có một góc lớn hơn hoặc bằng $90°$, giả sử $\widehat{A} \ge 90^0$.

Xét ΔABD ta có $BD^2 \ge AB^2 + AD^2 > 10^2 + 10^2 = 200$ suy ra $BD > \sqrt{200}$, do đó $BD > 14$.

Trường hợp tứ giác ABCD là tứ giác lõm (h.b)

Nối CA, Ta có: $\widehat{ACD}+\widehat{ACB}+\widehat{BCD}=360°$.

Suy ra trong ba góc này phải có một góc lớn hơn hoặc bằng $120°$.

Giả sử $\widehat{ACB} \ge 120°$, do đó $\widehat{ACB}$ là góc tù

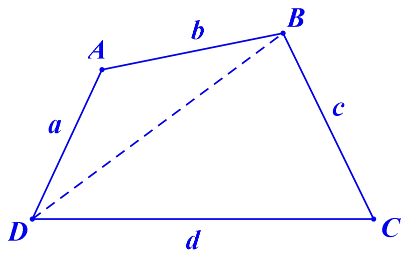
Xét ΔACB có $AB^2 \ge AC^2 + BC^2 > 10^2 + 10^2 = 200$.

Suy ra $AB > \sqrt{200} \Rightarrow AC > 14$.

Vậy luôn tồn tại hai điểm đã cho có khoảng cách lớn hơn 14.

Bài 2.8 Cho tứ giác ABCD có độ dài các cạnh là a, b, c, d đều là các số tự nhiên. Biết tổng $S = a + b + c + d$ chia hết cho a, cho b, cho c, cho d. Chứng minh rằng tồn tại hai cạnh của tứ giác bằng nhau.

- ***Lời giải***



Ta chứng minh bằng phương pháp phản chứng.

Giả sử không có hai cạnh nào của tứ giác bằng nhau.

Ta có thể giả sử $a < b < c < d$.

Ta có: $a + b + c > BD + c > d$.

Do đó $a + b + c + d > 2d$.

Ta đặt $a + b + c + d = S$ thì $S > 2d$. (*)

Ta có: $S \vdots a \Rightarrow S = ma\ (m \in N)$ (1)

$S \vdots b \Rightarrow S = nb\ (n \in N)$ (2)

$S \vdots c \Rightarrow S = pc\ (p \in N)$ (3)

$S \vdots d \Rightarrow S = qd\ (q \in N)$ (4)

Từ (4) và (*) $\Rightarrow qd > 2d$ do đó $q > 2$.

Vì $a < b < c < d$ nên từ (1), (2), (3), (4) suy ra $m > n > p > q > 2$.

Do đó $q \geq 3; p \geq 4; n \geq 5; m \geq 6$.

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra $\frac{1}{m} = \frac{a}{S}; \frac{1}{n} = \frac{b}{S}; \frac{1}{p} = \frac{c}{S}; \frac{1}{q} = \frac{d}{S}$.

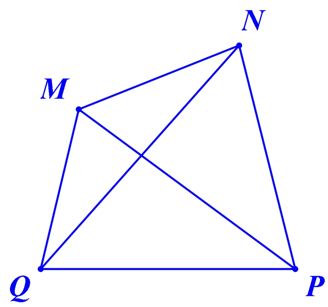
Ta có: $\frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \geq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{a+b+c+d}{S} = 1$.

Từ đó: $\frac{19}{20} \geq 1$, vô lí.

Vậy điều giả sử là sai, suy ra tồn tại hai cạnh của tứ giác bằng nhau.

Bài 2.9 Cho tứ giác MNPQ. Biết chu vi tam giác MNP không lớn hơn chu vi tam giác NPQ, chứng minh $MN < NQ$.

- ***Lời giải:***



Ta có: Chu vi $\Delta MNP : MN + NP + MP$

Chu vi $NPQ : NP + PQ + NQ$

Theo giai thiết, ta có $MN + NP + MP \leq NP + PQ + NQ$

Suy ra $MN + MP \leq PQ + NQ$ (1)

Theo bài 8, ta có: $MN + PQ < MP + NQ$ (2)

Cộng các bất đẳng thức (1) và (2) theo từng vế, ta có

$2MN + PQ + MP < 2NQ + MP + PQ$. Suy ra $MN < NQ$

Bài 2.10 So sánh độ dài cạnh AB và đường chéo AC của tứ giác $ABCD$ biết rằng chu vi tam giác ABD nhỏ hơn hoặc bằng chu vi tam giác ACD.

- ***Lời giải:***

Ta có: Chu vi $ABD = AB + BD + AD$

Chu vi $ACD = AC + CD + AD$

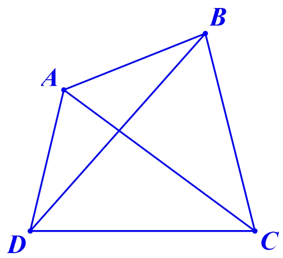
Theo giả thiết: $AB + BD + AD \le AC + CD + AD$

$\Rightarrow \; AB + BD \le AC + CD \quad (1)$

Mặt khác ta có: $AB + CD < AC + BD \quad (2)$ (kết quả bài 8)

Cộng (1) và (2) vế theo vế ta được:

$2AB < 2AC \Rightarrow AB < AC$



Bài 2.11 Lấy trong tứ giác MNPQ một điểm O. Gọi CV là chu vi của tứ giác. Chứng minh $\dfrac{CV}{2} < OM + ON + OP + OQ < \dfrac{3.CV}{2}$

- ***Lời giải:***

Ta có $MN < OM + ON < MQ + PQ + NP$

$NP < ON + OP < MN + MQ + PQ$

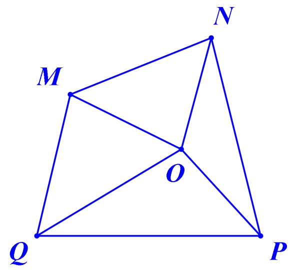
$PQ < OP + OQ < MQ + MN + NP$

$MQ < OM + OQ < MN + NP + PQ$

Cộng các bất đẳng thức trên theo từng vế, ta có

$CV < 2(0M + ON + OP + 0Q) < 3.CV$

Vậy: $\dfrac{CV}{2} < OM + ON + OP + OQ < \dfrac{3CV}{2}$



Bài 2.12 Chứng minh tứ giác $ABCD$ là tứ giác lồi khi và chi khi hai đường chéo AC và BD cắt nhau.

- ***Lời giải:***

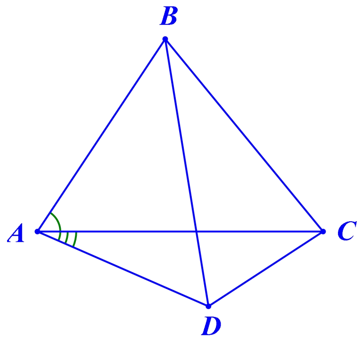
a) Cho tứ giác ABCD lồi. Cần chứng minh hai đường chéo AC và BD cắt nhau.

Do tứ giác ABCD lồi nên B và C cùng nằm trên nữa mặt phẳng bờ chứa AD.

Giả sử $\widehat{DAB} < \widehat{DAC}$, khi đó tia AB nằm giữa hai tia AD và AC nên AB cắt cạnh DC (Vô lý).

Vậy $\widehat{DAB} > \widehat{DAC}$. Do đó tia AC nằm giữa hai tia AB và AD tức là AC cắt đoạn thẳng BD

Chưng minh tương tự, ta có tia BD cắt đoạn thẳng AC. Vậy hai đường chéo AC và BD cắt nhau.



b) Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo AC và BD cắt nhau. Cần chứng minh tứ giác ABCD là tứ giác lồi.

Khi AC và BD cắt nhau thì AC là tia nằm trong góc DAB. Do đó AB và AC trên nửa mặt phẳng bờ chứa AD; AD và AC nằm trên nửa mặt phẳng bờ chứa AB.

Chứng minh tương tự, ta có CA và CD cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ chứa BC, CA và CB nằm trên nửa mặt phẳng bờ chứa CD.

Vậy A, B, C, D nằm trên nửa mặt phẳng bờ chứa bất kỳ đường thẳng nào của tứ giác nên tứ giác ABCD là tứ giác lồi.

· ***Bài toán giải bằng phương trình tô màu***