CHUYÊN ĐỀ TỨ GIÁC

Bài 1: HÌNH THANG, ĐƯỜNG TRUNG BÌNH CỦA HÌNH THANG

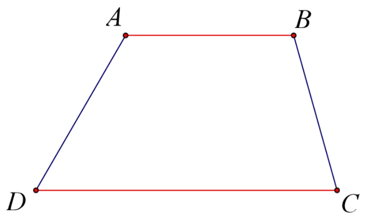
A. LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa:

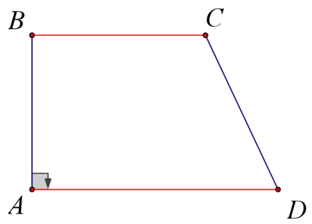
- Hình thang là tứ giác có hai cạnh đối song song. Hai cạnh song song gọi là hai đáy,

hai cạnh còn lại là hai cạnh bên. (H1)

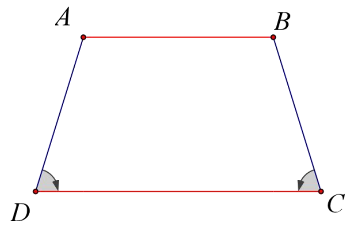
- Hình thang vuông là hình thang có một góc vuông. (H2)
- Hình thang cân là hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau. (H3)
- Đường trung bình của tam giác là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh của tam giác. (H4)
- Đường trung bình của hình thang là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh bên của hình thang. (H5)



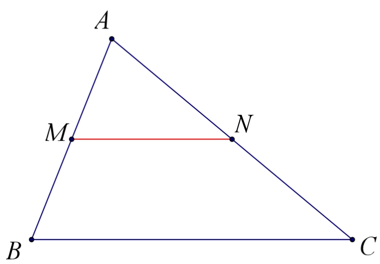
H1. HÌNH THANG



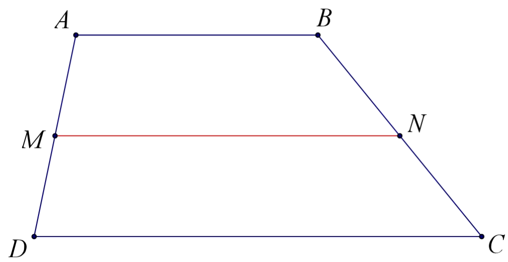
H2. THANG VUÔNG



H3. THANG CÂN



H4.ĐƯỜNG TRUNG BÌNH TAM GIÁC



H5. ĐƯỜNG TRUNG BÌNH HÌNH THANG

2. Tính chất:

- Nếu một hình thang có hai cạnh bên song song thì hai cạnh bên ấy bằng nhau.
- Nếu một hình thang có hai cạnh đáy bằng nhau thì hai cạnh bên song song và bằng nhau.
- Trong hình thang cân, hai cạnh bên bằng nhau.
- Trong hình thang cân, hai đường chéo bằng nhau.
- Đường trung bình của tam giác thì song song với cạnh thứ 3 và bằng nửa cạnh ấy.

Với H4. Ta có: $MN // BC, MN = \frac{1}{2}BC$

- Đường trung bình của hình thang thì song song với hai đáy và bằng nửa tổng hai đáy.

Với H5. Ta có: $MN // AB // CD$ và $MN = \frac{(AB + CD)}{2}$

3. Định lý:

- Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ hai thì đi qua

trung điểm của cạnh thứ ba, và đường ấy cũng chính là đường trung bình của tam giác.

- Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh bên của hình thang và song song với hai đáy thì đi qua

trung điểm của cạnh bên còn lại và đường ấy cũng là đường trung bình của hình thang.

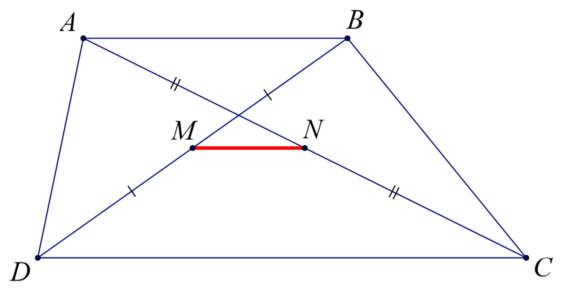
4. Dấu hiệu nhận biết :

- Hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau là hình thang cân.
- Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân.

5. Mở rộng:

- Trong hình thang có hai cạnh bên không song song, đoạn thẳng nối trung điểm của hai đường

chéo thì song song với hai đáy và bằng một nửa hiệu hai đáy. (H6)



(H6)

- Ở H6 ta có: $MN // AB // CD$ và $MN = \frac{CD - AB}{2}$

B. LUYỆN TẬP

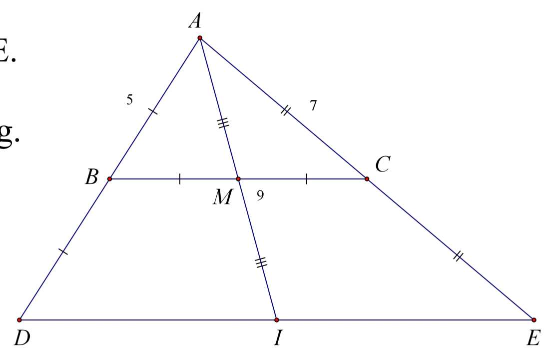
Bài 1: Cho tam giác ABC có AB = 5cm, AC = 7cm, BC = 9 cm, Trên tia AB lấy điểm D sao cho:

BD = BA. Trên tía AC lấy điểm E sao cho CE = CA. Kéo dài trung tuyến AM của tam giác ABC, lấy

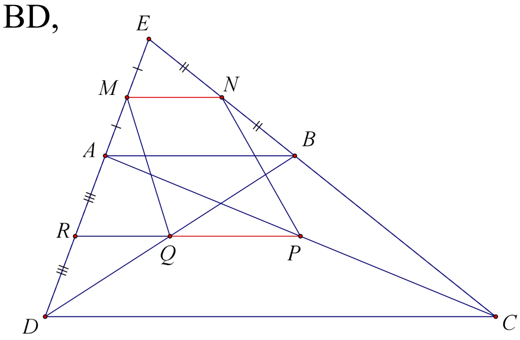
MI = MA.

a. Tính độ dài các cạnh của tam giác ADE.
b. Chứng minh DI // BC.
c. Chứng minh ba điểm D, I, E thẳng hàng.

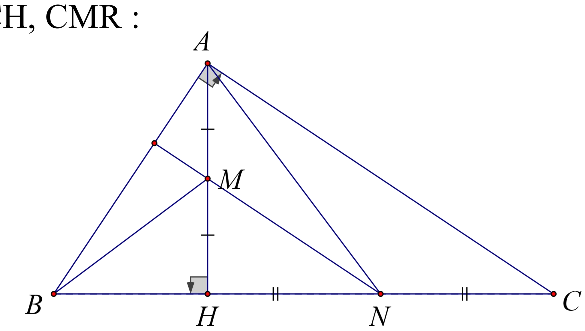
HD:



Bài 2: Cho hình thang ABCD (AB // CD), Gọi E là giao điểm của AD và BC, Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AE, BE, AC, BD,
CMR: MNPQ là hình thang
HD:
Dễ dạng chứng minh được MN // AB
Gọi R là trung điểm của AD khi đó ta có: RQ // AB
RP // DC // AB
Nên RP // AB => R, Q, P thẳng hàng => PQ / / AB
Vậy MNPQ là hình thang



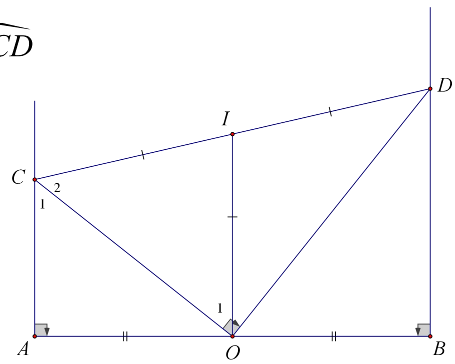
Bài 3: Cho tam giác ABC vuông tại A, Vẽ AH vuông góc với BC tại H, Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AH CH, CMR :
MN vuông góc với AB và BM vuông góc với AN
HD:
Vì MN là đường trung bình
=> MN//AC mà AC $\perp$ AB
=> MN $\perp$ AB=> M là trực tâm của Δ ABN
Δ ABN có M là trực tâm => BM $\perp$ AN



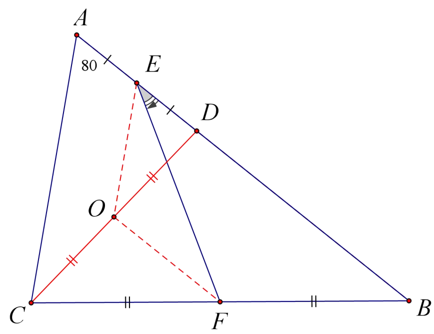
Bài 4: Cho đoạn thẳng AB và trung điểm O của nó, trên cùng 1 nửa mặt phẳng có bờ AB, vẽ hai tia Ax và By vuông góc với AB, Một góc vuông đỉnh O cắt Ax tại C, cắt By tại D

a, AC+BD=CD b, CO là tia phân giác của $\widehat{ACD}$

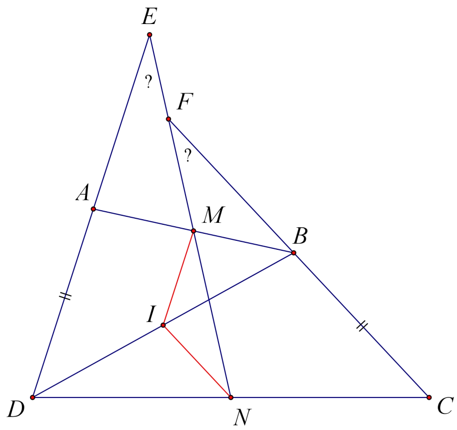
HD
a, Gọi I là trung điểm của CD
AC// BD => OI là trung bình của hình thang ABCD
=> $OI = \dfrac{AC+BD}{2}$
=> $AC + BD = 2.OI$
Lại có Δ COD vuông => OI là đường trung tuyến
=> OI= CI= ID=> 2OI = IC +ID = CD
b, Ta có Δ OCD vuông tại O có OI là đường trung tuyến nên OI = IC
=> Δ IOC cân tại I => $\widehat{C_2} = \widehat{O_1}$
Mà: $\widehat{O_1} = \widehat{C_1}$ Nên => $\widehat{C_1} = \widehat{C_2}$ Vậy OC là tia phân giác góc $\widehat{ACD}$



Bài 5: Cho Δ ABC có $\hat{A} = 80^0, (AB > AC)$. Trên cạnh AB lấy D sao cho BD = AC. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AD, BC. Tính góc $\widehat{BEF} = ?$
HD:



Bài 6: Cho tứ giác ABCD có AD = BC, đường thẳng đi qua trung điểm M và N của các cạnh AB và CD cắt AD và BC lần lượt ở E và F, CMR : $\widehat{AEM} = \widehat{MFB}$



HD :

Gọi I là trung điểm của BD

Ta có: MI, NI lần lượt là đường trung bình

=> $MI = \frac{AD}{2} = \frac{BC}{2} = IN$ => Δ IMN cân

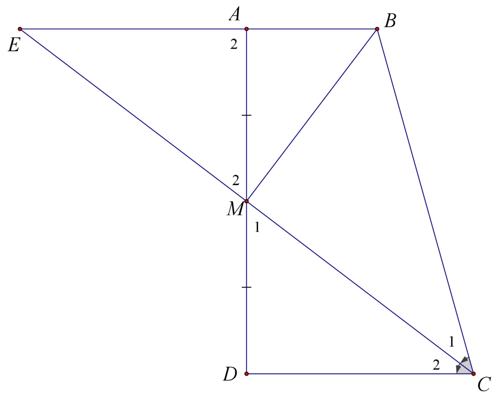
=> $\widehat{M} = \widehat{E}$ (đồng vị)

và $\widehat{N} = \widehat{F}$ (so le trong)

Vậy $\widehat{E} = \widehat{F}$

Bài 7: Cho hình thang ABCD (AB // CD) tia phân giác góc C đi qua trung điểm M của AD, CMR:

a, $\widehat{BMC} = 90^0$ b, BC = AB + CD



HD:

a, Giả sử MC cắt AB tại E

Khi đó $\Delta CMD = \Delta EMA(g.c.g)$

=> CM = EM và CD = AE

Xét Δ BEC có: $\widehat{E} = \widehat{C_2} = \widehat{C_1}$ => Δ BEC cân

Mà BM là đường trung tuyến

=> BM là đường cao

Vậy BM $\perp$ EC

b, Vi Δ BEC cân nên EB = BC => BC = EA + AB = DC + AB

Bài 8: Cho hình thang ABCD (AB // CD), có $\widehat{C} = 60^0$, DB là phân giác của góc $\widehat{D}$, Biết chu vi của hình thang là 20cm, Tính mỗi cạnh của hình thang

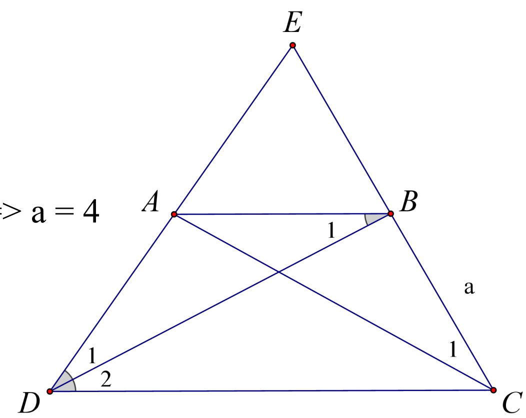
HD:

Đặt BC= a, ta có ngay:AD = AB = BC = a

Mà: $\widehat{C} = 60^0$ => $\widehat{D_2} = 30^0$ => $\widehat{DBC} = 90^0$

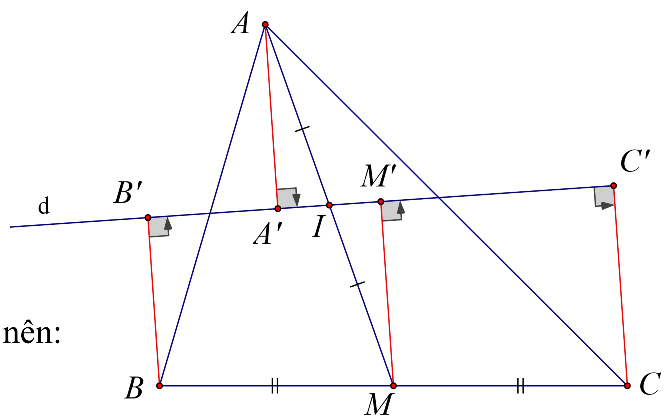
Xét Δ BDC có $\widehat{D_2} = 30^0, \widehat{C} = 60^0$ => $DC = 2a$

Mà Chu vi hình thang là 20 cm nên a + a + a + 2a = 20 => a = 4



Bài 9: Cho tam giác ABC, AM là đường trung tuyến, vẽ đường thẳng (d) đi qua trung điểm I của AM cắt các cạnh AB, AC, Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu của A, B, C trên đường thẳng (d)

CMR: $AA' = \frac{BB' + CC'}{2}$



HD:

Gọi H, K lần lượt là giao của (d) với AB và AC

Lấy N là hình chiếu của M trên đường thẳng (d)

=> ΔAA'I = ΔMNI (cạnh huyền- góc nhọn)

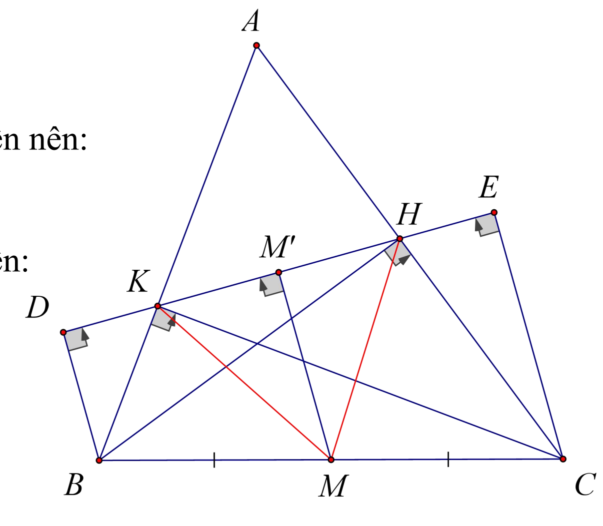
=> AA' = MN

Hình thang BB'C'C có MN là đường trung bình nên:

$MN = AA' = \frac{BB' + CC'}{2}$

Bài 10: Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao BH, CK. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của B và C trên đường thẳng HK,

CMR: DK = EH.



HD:

Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của BC và DE,

Xét ΔBHC vuông tại H có HM là đường trung tuyến nên:

$HM = \frac{1}{2}BC$ (1)

ΔBKC vuông tại K có KM là đường trung tuyến nên:

$KM = \frac{1}{2}BC$ (2)

Từ (1) và (2) => MH = MK => KM' = HM'

Vậy DM' = EM'

Bài 11: Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn, các đường cao BD và CE, gọi I và K theo thứ tự là hình chiếu của B và C trên đường thẳng ED, CMR: IE=DK

HD:

Gọi M là trung điểm của BC, kẻ MN $\perp$ ED

Tứ giác BIKC là hình thang => NI= NK (1)

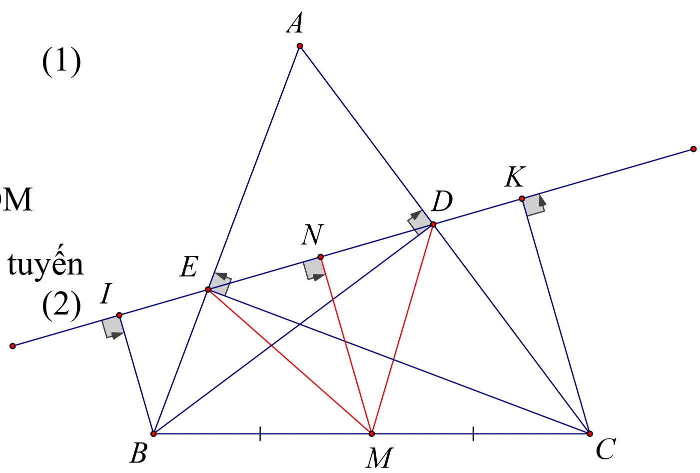
ΔBEC vuông có EM $= \frac{1}{2}$. BC

Δ BDC vuông có DM $= \frac{1}{2}$. BC => EM =DM

=> ΔEDM cân có MN đường cao và là trung tuyến

=> NE = ND (2)

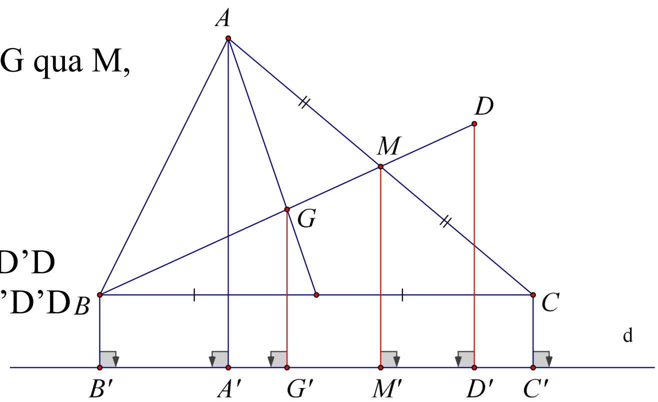
Từ (1) và (2) => IE=



Bài 12: Cho tam giác ABC có G là trọng tâm, đường thẳng (d) không cắt các cạnh của tam giác ABC, Gọi A’, B’, C’, G’ lần lượt là hình chiếu của A, B, C, G trên đường thẳng (d),

CMR: $GG' = \dfrac{AA' + BB' + CC'}{3}$

HD:



Gọi M là trung điểm của AC, và D đối xứng với G qua M, M’ là hình chiếu của M trên (d), Khi đó ta có :

$GM = DM = \dfrac{BG}{2}$

=> G là trung điểm của BD

=> GG’ là đường trung bình của hình thang BB’D’D

=> MM’ là đường trung bình của hình thang GG’D’D

Nên: $GG' = \dfrac{BB' + DD'}{2}$ (1)

$MM' = \dfrac{AA' + CC'}{2}; MM' = \dfrac{DD' + GG'}{2}$

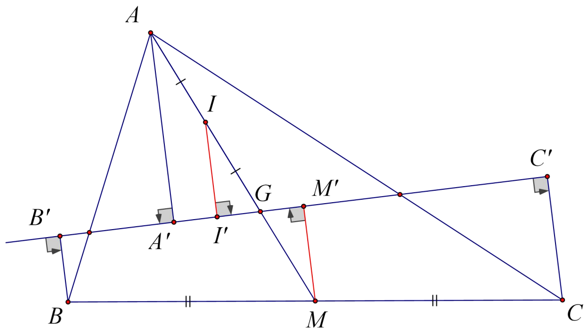
=> DD’ + GG’ = AA’ + CC’ => DD’ = AA’ + CC’ - GG’

Thay (1) vào ta được: 2GG’ = BB’ + AA’ + CC’ - GG’

=> 3GG’ = AA’ + BB’ + CC’ => ĐPCM

Bài 13: Cho tam giác ABC có trọng tâm G (G nằm bên trong tam giác), Vẽ đường thẳng (d) đi qua G, cắt AB, AC, Gọi A’, B’, C’ là hình chiếu của A, B, C trên (d), Khi đó AA’, BB’, CC’ có mỗi quan hệ gì?

HD:



Gọi I trên AG sao cho AI = IG

Kẻ MM’ $\perp$ (d)

Khi đó ta có:

Δ GII’ = Δ GMM’ (cạnh huyền = góc nhọn)

=> II’ = MM’ mà II’ = $\dfrac{1}{2}$ AA’ => AA’ = 2. MM’

Hình thang BB’C’C có MM’ là đường trung bình

Nên ta có: 2. MM’ = BB’ + CC’

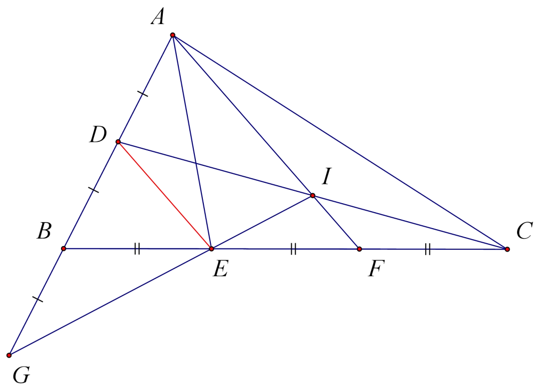
Nên ta có : AA’ = BB’ + CC’

Bài 14: Cho tam giác ABC, Gọi D là trung điểm cạnh AB, trên BC lấy các điểm E, F sao cho

BE = EF = FC, trên tia đối của tia BA lấy điểm G sao cho BG = BD

CMR: AF, CD, GE đồng quy

HD:



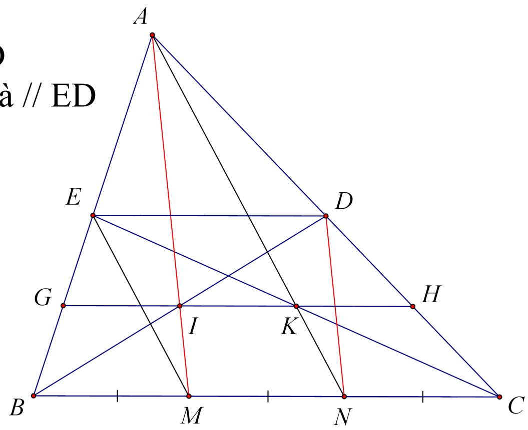
Gọi I là giao điểm của CD và GE

=> E là trọng tâm của Δ DGC => DI = IC

Δ DEC có IF là đường trung bình nên IF // DE

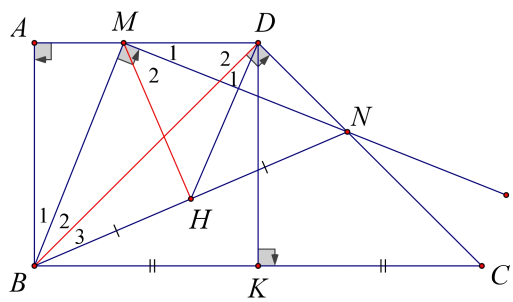
Lại có: DE là đường trung bình Δ ABF => DE // AF
Khi đó A, I, F thẳng hàng hay AF có đi qua I

Bài 15: Cho tam giác ABC có BC = a, các đường trung tuyến BD, CE, lấy các điểm M, N trên các cạnh BC sao cho BM=MN=NC, GỌi I là giao điểm của AM và BD, K là giao điểm của AN và CE, Tính IK
HD:
Vì DN là đường trung bình của Δ ACM => DN // AM
Δ BDN có: $\begin{cases} BM = MN \\ AM // DN \end{cases}$ => I là trung điểm của BD
Chứng minh tương tự => K là trung điểm của EC
Kéo dài IK cắt AB và AC lần lượt tại G và H
Khi đó Δ BED có GI đi qua trung điểm I của BD và // ED
Nên GE=GB Δ CED có KH đi qua trung điểm K của EC và // ED
Nên HD=HC



Khi đó ta có: $GI = \frac{1}{2}ED = \frac{1}{4}a, KH = \frac{1}{2}ED = \frac{1}{4}a$
Còn $2GH = a + \frac{1}{2}a = \frac{3a}{2} => GH = \frac{3a}{4}$
Nên IK= GH - GI- HK=$\frac{3a}{4} - \frac{1}{4}a - \frac{1}{4}a = \frac{a}{4}$
Vậy $IK = \frac{a}{4}$

Bài 16: Cho hình thang ABCD có $\hat{A} = \hat{B} = 1v, BC = 2AB = 2AD$, Gọi M là 1 điểm nằm trên đáy nhỏ AD, kẻ Mx vuông góc với BM và Mx cắt CD tại N
CMR: MB = MN
HD:
Kẻ DK //AB, chứng minh Δ BDC vuông tại D
=> $\widehat{ADC} = 90^0 + 45^0 = 135^0$,
Gọi H là trung điểm của BN,
Chứng minh MH $\perp$ BN vì Δ BMN vuông
$MH = \frac{1}{2}BN, DH = \frac{1}{2}BN => MH = DH$

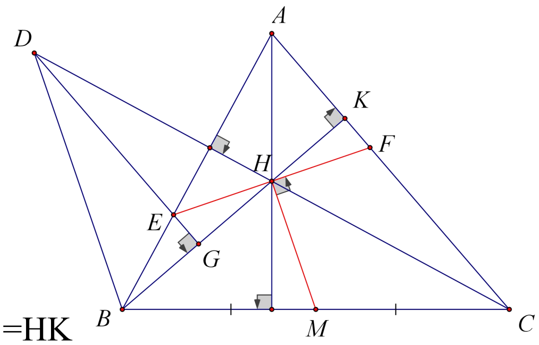


$\widehat{HMD} = \widehat{HDM}$ mà $\widehat{HDM} = \widehat{ABH} = \widehat{DMN} + \widehat{MBH}$ (1)
Và $\widehat{HMD} = \widehat{HMN} + \widehat{DMN}$ (2)
Từ (1) và (2) => $\widehat{MBH} = \widehat{HMN}$
Mà: $\widehat{MBH} + \widehat{MNH} = 90^0 => \widehat{HMN} + \widehat{MNH} = 90^0$

Bài 17: Cho tam giác ABC nhọn, trực tâm H, M là trung điểm của BC, qua H kẻ đường thẳng vuông góc với HM, cắt AB, AC theo thứ tự tại E và F

a. Trên Tia đối tia HC, lấy điểm D sao cho HD=HC, CMR E là trực tâm của tam giác DBH

b. CMR: HE=HF



HD:

a, Ta có MH là đường trung bình ΔBCD

=> MH// BD,

Mà EF // MH => EF $\perp$ BD

Ta lại có: BA $\perp$ DH => ΔBDH có E là trực tâm

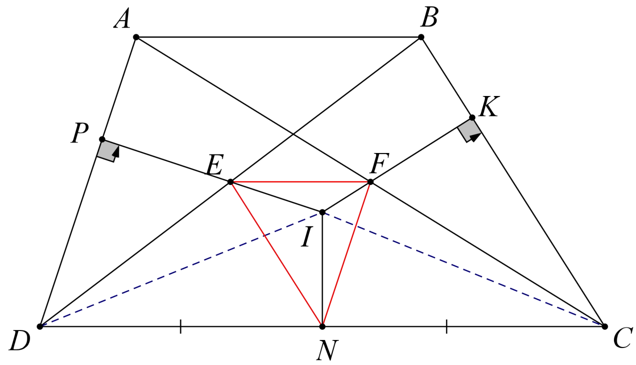
b, Gọi G là giao điểm của DE và BH

=> K là giao điểm BH và AC

=> ΔDHG = ΔCHK (cạnh huyền - góc nhọn) => HG =HK

=> ΔHGE = Δ HKF (c. g. c) => HE= HF

Bài 18: Cho hình thang ABCD (AB//CD), Gọi E và F theo thứ tự là trung điểm của BD và AC, Vẽ đường thẳng đi qua E và vuông góc với AD và đường thẳng qua F vuông góc với BC, cắt nhau tại I, CMR: IC=ID



HD:

Gọi N là trung điểm của DC

=> FN là đường trung bình của ΔADC

=> $\begin{cases} FN // AD \\ PE \perp AD \end{cases}$ $=> PE \perp FN => EI \perp FN$

Chứng minh tương tự:

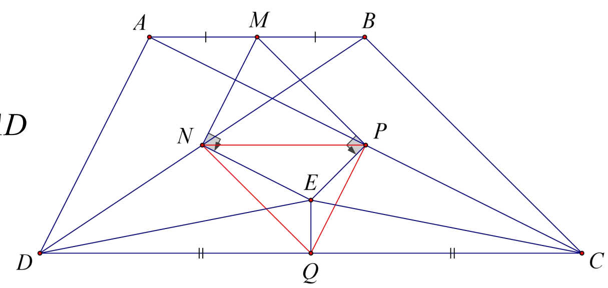
$FQ \perp EN => FI \perp EN$ => I là trực tâm

=> IN $\perp$ EF, mà EF // DC => IN $\perp$ DC

ΔIDC có IN vừa trung tuyến vừa đường cao

=> ΔIDC cân => ID=IC

Bài 19: Cho hình thang ABCD, (AB<CD), Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BD, AC, đường thẳng vuông góc với MN tại N và đường thẳng vuông góc với MP tại P cắt nhau tại E, CMR: EC = ED



HD:

Gọi Q là trung điểm của CD

MN là đường trung bình => $MN = \frac{1}{2}AD, MN // AD$

PQ là đường trung bình => $PQ = \frac{1}{2}AD, PQ // AD$

Bài 20: Cho 3 điểm A, B, C theo thứ tự nằm trên đường thẳng d, (AB > BC), Trên cùng 1 nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng d, vẽ các $\Delta ADB, \Delta BEC$ đều, Gọi M, N, P, Q, I theo thứ tự là Trung điểm của các đoạn thẳng BD, AE, BE, CD, DE

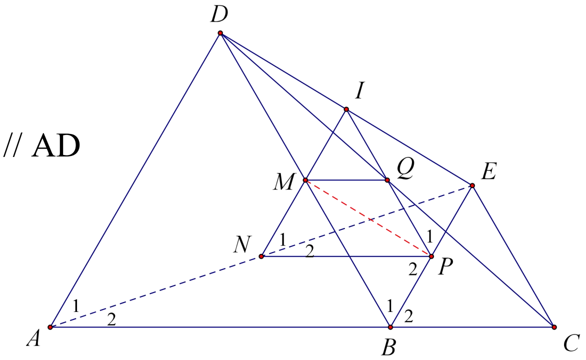
a, CMR: 3 điểm I, M, N thẳng hàng

b, CMR: 3 điểm I, Q, P thẳng hàng

c, CMR: MNPQ là thình thang cân

d, $NQ = \frac{1}{2}DE$

HD:



a, Dễ thấy AD // BE

IN là đường trung bình Δ ADE => IN // AD

IM là đường trung bình Δ DBE => IM // BE // AD

=> 3 điểm I, M, N thẳng hàng

b, Chứng minh tương tự

c, Trong Δ AEB có NP là đường trung bình => NP // (d)

Tương tự MQ // (d) => MQ // NP

=> $\begin{cases} \widehat{N_1} = \widehat{A_1} \\ \widehat{N_2} = \widehat{A_2} \end{cases}$ => $\widehat{N} = \widehat{A} = 60^0$,

Chứng minh tương tự ta có: $\begin{cases} \widehat{D_1} = \widehat{B_1} \\ \widehat{P_2} = \widehat{B_2} \end{cases}$ => $\widehat{QPN} = 180^0 - 60^0 - 60^0 = 60^0$

d, Vì MNPQ thang cân => NQ = MP, Mà MP là đường trung bình Δ BED nên:

$MP = \frac{1}{2}DE => NQ = MP = \frac{1}{2}DE$

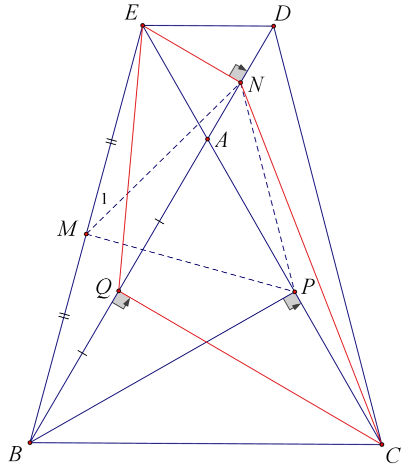
Bài 21: Cho ΔABC đều, Trên tia đối của tian AB, lấy D, trên tia đối của tia AC lấy điểm E sao cho AD=AE, Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là các trung điểm của BE, AD, AC, AB, CMR:

a, Tứ giác BCDE là hình thang cân

b, Tứ giác CNEQ là hình thang

c, ΔMNP là tam giác đều

HD:



a, Δ AED đều => $\widehat{D} = 60^0 = \widehat{B} => ED//BC$

Lại có 2 đường chéo bằng nhau => là hình thang cân

b, Δ ABC đều => CQ $\perp$ AD

Δ AED đều => EN $\perp$ AD => CQ // En => là hình thang

c, Ta có: NP là đường trung bình => $NP = \frac{1}{2}DC$

Xét Δ BEP có $\widehat{P} = 90^0$, MP là đường trung tuyến

=> $MP = \frac{1}{2}BE = \frac{1}{2}DC$

Xét Δ ENB có $\widehat{N} = 90^0$ và MN là đường trung tuyên

=> $MN = \frac{1}{2}BE = \frac{1}{2}DC$

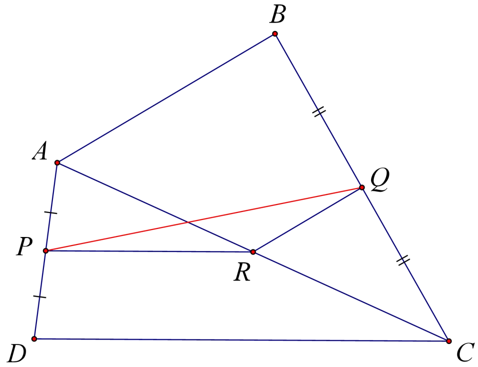
Vậy Δ NMP có 3 cạnh bằng nhau nên là tam giác đều

Bài 22: Cho tứ giác ABCD, Gọi P, Q theo thứu tự là trung điểm của AD và BC

a, CMR: $PQ \le \frac{AB+CD}{2}$

b, Tứ giác ABCD là hình thang khi và chỉ khi $PQ = \frac{AB+CD}{2}$

HD:



b, Ta chứng minh ABCD là hình thang => $PQ = \frac{AB+CD}{2}$

Thật vậy : Δ ADC có pR là đường trung bình

=> $PR = \frac{1}{2}DC$ (1)

RQ là đường trung bình Δ ABC

=> $RQ = \frac{1}{2}AB$ (2)

Cộng theo vế (1) và (2) ta được : $PQ + RQ = \frac{AB+CD}{2}$

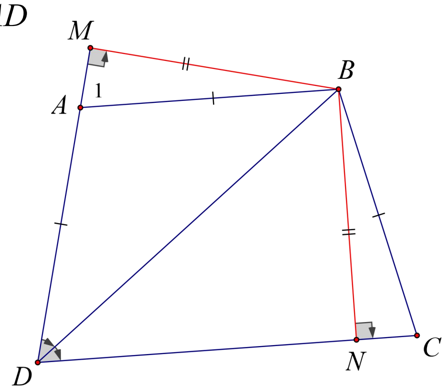
Ngược lại : $PQ = \frac{AB+CD}{2}$ => $PQ = PR + RQ$ => 3 điểm P, Q, R thẳng hàng,

Mà : PQ // DC và RQ // AB => AB // CD => ABCD là hình thang

Bài 23: Cho tứ giác ABCD, có : $\widehat{A} + \widehat{C} = 180^0, AB = BC = AD$

CMR : ABCD là hình thang cân

HD:



Vẽ $BM \perp AB, BN \perp CD$

=> Δ ABM =Δ CBN (cạnh huyền- góc nhọn)

=> BM =BN

=> BD là tia phân giác góc $\widehat{D}$

Mà Δ ABD cân => AB// DC=> $\begin{cases} \widehat{A_1} = \widehat{D} \\ \widehat{A_1} = \widehat{C} \end{cases}$ => $\widehat{D} = \widehat{C}$

Vậy ABCD là hình thang cân

Bài 2: ĐỐI XỨNG TRỤC, DỐI XỨNG TÂM

A. LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa:

- Hai điểm A và A’ được gọi là đối xứng với nhau qua đường thẳng d, nếu d là đường trung trực của đoạn thẳng AA’. (H1)