

CHƯƠNG VI. PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

BÀI 21. PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phân thức đại số

- Một phân thức đại số (hay nói là phân thức) là một biểu thức có dạng $\frac{A}{B}$, trong đó A, B là hai đa thức và B khác đa thức 0.
- A được gọi là tử thức (hoặc tử) và B được gọi là mẫu thức (hoặc mẫu).

Nhận xét. Mỗi đa thức cũng được coi là một phân thức với mẫu thức bằng 1. Đặc biệt, số 0 và số 1 cũng là những phân thức đại số.

2. Hai phân thức bằng nhau

- Hai phân thức $\frac{A}{B}$ và $\frac{C}{D}$ gọi là bằng nhau nếu $AD = BC$.
- $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ nếu $AD = BC$

3. Điều kiện xác định và giá trị của phân thức tại một giá trị đã cho của biến

Giá trị của phân thức tại một giá trị đã cho của biến

- Khi thay các biến trong một phân thức đại số bằng các số, ta được một biểu thức số (nếu mẫu số nhận được là số khác 0). Giá trị của biểu thức số đó gọi là giá trị của phân thức tại các giá trị đã cho của biến.
- Điều kiện xác định của phân thức $\frac{A}{B}$ và $\frac{C}{D}$ là điều kiện của biến để giá trị của mẫu thức $B \neq 0$.

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Chứng minh hai phân thức bằng nhau

Bài toán 1. Chứng tỏ

$$\text{a) } \frac{x+1}{x+3} = \frac{x^2+4x+3}{x^2+6x+9}$$

$$\text{b) } \frac{4-9x^2}{4-6x} = \frac{3x+2}{2}$$

$$\text{c) } \frac{5-2x}{4x^2-20x+25} = \frac{-1}{2x-5}$$

$$\text{Hướng dẫn: } \frac{A}{B} = \frac{C}{D} \text{ nếu } AD = BC.$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } (x+1)(x^2+6x+9) &= x^3+6x^2+9x+x^2+6x+9 \\ &= x^3+7x^2+15x+9 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}(x+3)(x^2+4x+3) &= x^3+4x^2+3x+3x^2+12x+9 \\ &= x^3+7x^2+15x+9\end{aligned}\quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{x+1}{x+3} = \frac{x^2+4x+3}{x^2+6x+9}$$

$$\text{b) Ta có: } (4-9x^2)2 = 8-18x^2 \quad (1)$$

$$(4-6x)(3x+2) = 12x+8-18x^2-12x = 8-18x^2 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{4-9x^2}{4-6x} = \frac{3x+2}{2}$$

$$\text{c) Ta có: } (5-2x)(2x-5) = 10x-25-4x^2+10x = 20x-25-4x^2 \quad (1)$$

$$-(4x^2-20x+25) = -4x^2+20x-25 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{5-2x}{4x^2-20x+25} = \frac{-1}{2x-5}$$

Bài toán 2. Chứng minh rằng:

$$\text{a) } \frac{x^3-1}{x-1} = x^2+x+1$$

$$\text{b) } \frac{a+3b}{c} = \frac{ac+3bc}{c^2}$$

$$4x^2-4xy+y^2 \quad y-2x$$

$$\text{c) } \frac{\quad}{y^2-4x^2} = \frac{\quad}{2x+y}$$

Hướng dẫn: $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ nếu $AD = BC$.

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } (x^3-1)1 = (x-1)(x^2+x+1) \text{ (hằng đẳng thức } a^3-b^3)$$

$$\Rightarrow \frac{x^3-1}{x-1} = \frac{x^2+x+1}{1} \Rightarrow \frac{x^3-1}{x-1} = x^2+x+1$$

Bài toán tương tự:

$$1. \frac{x^3+1}{x+1} = x^2-x+1$$

$$2. \frac{x^4-1}{x-1} = x^3+x^2+x+1$$

$$3. \frac{x^5-1}{x-1} = x^4+x^3+x^2+x+1$$

$$\text{Hoặc } \frac{x^5 - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$$

$$4. \frac{x^5 + 1}{x + 1} = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1; \text{ v.v...}$$

$$\text{b) Ta có } (a + 3b)c^2 = ac^2 + 3bc^2$$

$$c(ac + 3bc) = ac^2 + 3bc^2$$

$$\Rightarrow \frac{a+3b}{c} = \frac{ac+3bc}{c^2}$$

Cách khác: Ta có $c(ac + 3bc) = c^2(a + 3b)$

$$\Rightarrow \frac{a+3b}{c} = \frac{ac+3bc}{c^2}$$

Ta cũng có $\frac{a+3b}{ac+3bc} = \frac{c}{c^2}$

Vì nếu $AD = BC \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{C}{D}; \frac{A}{C} = \frac{B}{D}$

c) Ta có: $(4x^2 - 4xy + y^2)(2x + y) = (2x - y)^2(2x + y)$ (1)

Lại có $(y^2 - 4x^2)(y - 2x) = (y + 2x)(y - 2x)(y - 2x)$

$= (2x + y)(y - 2x)^2 = (2x + y)(2x - y)^2$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{4x^2 - 4xy + y^2}{y^2 - 4x^2} = \frac{y - 2x}{2x + y}$

Cách khác: Thực hiện các phép nhân đa thức và so sánh hai kết quả:

Ta còn có: $\frac{4x^2 - 4xy + y^2}{y - 2x} = \frac{y^2 - 4x^2}{2x + y}$

$$\frac{y - 2x}{4x^2 - 4xy + y^2} = \frac{2x + y}{y^2 - 4x^2} \dots$$

Bài toán 3. Chứng tỏ rằng:

a) $\frac{5x^3 + 5x}{x^4 - 1} = \frac{5x}{x^2 - 1}$

b) $\frac{x^2 + xy + y^2}{3x} = \frac{x^3 - y^3}{3x^2 - 3xy}$

Lời giải

a) Ta có: $(5x^3 + 5x)(x^2 - 1) = 5x(x^2 + 1)(x^2 - 1) = 5x(x^4 - 1)$

$$\Rightarrow \frac{5x^3 + 5x}{x^4 - 1} = \frac{5x}{x^2 - 1}$$

Chú ý: Có thể thực hiện phép nhân đa thức.

b) Ta có: $(x^2 + xy + y^2)(3x^2 - 3xy) = 3x(x^2 + xy + y^2)(x - y) = 3x(x^3 - y^3)$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + xy + y^2}{3x} = \frac{x^3 - y^3}{3x^2 - 3xy}$$

II. Tìm đa thức, phân thức thoả mãn điều kiện cho trước