TOÁN TỪ TÂM

Phương trình

MẶT PHẲNG ĐƯỜNG THẲNG MẶT CẦU

TÁC GIẢ

TOÁN TỪ TÂM

MỤC LỤC

Chương 05

Bài 1. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

A Lý thuyết

1. Vectơ pháp tuyến và cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng:

Cho mặt phẳng (α).

Vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ và có giá vuông góc với mặt phẳng (α) gọi là *vectơ pháp tuyến* của mặt phẳng (α).

✓ ***Nhận xét:***

» Nếu $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của (α) thì $k \cdot \vec{n}\ (k \neq 0)$ cũng là một vectơ pháp tuyến của (α).

» Một mặt phẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm và một vectơ pháp tuyến của nó.

Cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng:

Cho mặt phẳng (α).

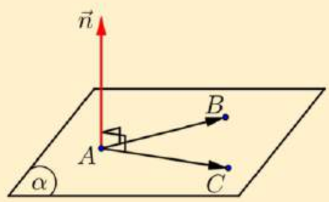
Nếu hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ *không cùng phương* và *giá* của chúng *song song* hoặc *nằm trên* mặt phẳng(α) thì $\vec{a}, \vec{b}$ là cặp véctơ chỉ phương của mặt phẳng (α).

✓ ***Nhận xét:***

» Một mặt phẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm và cặp vectơ chỉ phương của nó.

✓ ***Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng khi biết một cặp vectơ chỉ phương :***

» Trong không gian $Oxyz$, nếu mặt phẳng (α) nhận hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. làm cặp vectơ chỉ phương thì (α) nhận $\vec{n} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ làm vectơ pháp tuyến.



Chú ý

» Vectơ $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1\right)$ được gọi là ***tích có hướng*** của hai vectơ $\vec{a}=\left(a_1;a_2;a_3\right)$ và $\vec{b}=\left(b_1;b_2;b_3\right)$.

» $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)=\left(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1\right)$

» $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b}\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}$.

» Nếu $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ thì vectơ $\vec{n}$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

2. Phương trình tổng quát của mặt phẳng

Phương trình tổng quát của mặt phẳng:

Trong không gian $Oxyz$, mỗi mặt phẳng đều có dạng phương trình:

$Ax+By+Cz+D=0$ với $A^2+B^2+C^2\neq 0$, được gọi là phương trình tổng quát của mặt phẳng.

✓ ***Nhận xét:***

» Nếu mặt phẳng (α) có phương trình $Ax+By+Cz+D=0$ (với $A^2+B^2+C^2\neq 0$) thì vectơ $\vec{n}=\left(A;B;C\right)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α)

» Cho mặt phẳng (α) có phương trình $Ax+By+Cz+D=0$.

Khi đó: $N_0(x_0;y_0;z_0)\in(\alpha)\Leftrightarrow Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$

Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng khi biết một số điều kiện:

✓ *Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua điểm và biết vectơ pháp tuyến:*

» Trong không gian $Oxyz$, phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua điểm $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left(A;B;C\right)$ là:

$$A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)+C\left(z-z_0\right)=0$$

hay $Ax+By+Cz+D=0$ với $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$

✓ *Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua điểm và biết cặp vectơ chỉ phương:*

» Để lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ và có cặp vectơ chỉ phương $\vec{a};\vec{b}$, ta thực hiện như sau:

Bước 1: Tìm một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\vec{a};\vec{b}\right]$.

Bước 2: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$.

Phương trình mặt phẳng qua 3 điểm không thẳng hàng:

✓ *Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng:*

» Để lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng, ta thực hiện như sau:

Bước 1: Tìm cặp vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

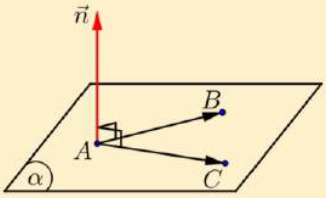
Bước 2: Tìm một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]$.

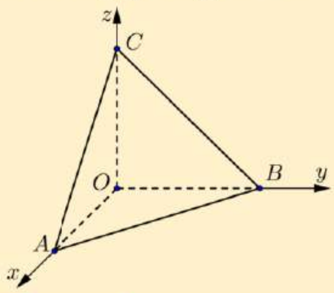
Bước 3: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm A (hoặc điểm B hoặc điểm C) và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$.

✓ ***Nhận xét:***

» Mặt phẳng (α) không đi qua gốc tọa độ O và lần lượt cắt trục Ox tại $A(a;0;0)$, cắt trục Oy tại $B(0;b;0)$, cắt trục Oz tại $C(0;0;c)$ có phương trình là $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. với $a.b.c \neq 0$.

» Phương trình trên được gọi là phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn.





3. Điều kiện để hai mặt phẳng song song, vuông góc

Điều kiện để hai mặt phẳng song song:

Trong không gian $Oxyz$,

cho 2 mặt phẳng $(\alpha_1): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(\alpha_1): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$.

» Khi đó: $(\alpha_1) // (\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \\ D_1 \neq k.D_2 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$

Chú ý

» $(\alpha_1) \equiv (\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \\ D_1 = kD_2 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$

» $(\alpha_1) \cap (\alpha_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ không cùng phương..

Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc:

Trong không gian $Oxyz$,

cho 2 mặt phẳng $(\alpha_1): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(\alpha_1): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$.

» Khi đó: $(\alpha_1) \perp (\alpha_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1.\vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

4. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Định nghĩa

Trong không gian $Oxyz$,

$Oxyz$, cho điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$. Khi đó khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (α) được tính:

$$d(M_0,(\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

5. Các mặt phẳng đặc biệt

Các mặt phẳng đặc biệt:

TÍNH CHẤT MẶT PHẲNG	PHƯƠNG TRÌNH	HỆ SỐ ĐẶC BIỆT
(α) đi qua/chứa gốc O.	$(\alpha): Ax + By + Cz = 0$	$D = 0$
(α) song song/chứa Ox.	$(\alpha): By + Cz + D = 0$	$A = 0$
(α) song song/chứa Oy.	$(\alpha): Ax + Cz + D = 0$	$B = 0$
(α) song song/chứa Oz.	$(\alpha): Ax + By + D = 0$	$C = 0$
(α) song song/trùng (Oxy).	$(\alpha): Cz + D = 0$	$A = B = 0$
(α) song song/trùng (Oxz).	$(\alpha): By + D = 0$	$A = C = 0$
(α) song song/trùng (Oyz).	$(\alpha): Ax + D = 0$	$B = C = 0$

✓ ***Nhận xét:***

» Mặt phẳng không chứa ẩn nào thì mặt phẳng sẽ song song/chứa trục đó hoặc mặt phẳng không chứa ẩn nào thì mặt phẳng sẽ song song/chứa mặt phẳng đó.

B Các dạng bài tập

Dạng 1. Xác định vecto pháp tuyến của mặt phẳng

Phương pháp

Một mặt phẳng có vô số véctơ pháp tuyến và chúng cùng phương với nhau.

» Chẳng hạn $\vec{n}$ là véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) thì $k\cdot\vec{n}$ $(k\neq 0)$ cũng là véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).

» Nếu mặt phẳng (P) có cặp véctơ chỉ phương là $\vec{u}_1;\vec{u}_2$ thì (P) có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=[\vec{u}_1;\vec{u}_2]$

Ví dụ 1.1.

Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (α) song song với giá của hai vecto $\vec{a}=(1;-2;3)$, $\vec{b}=(3;0;5)$. Tìm vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).

Lời giải

....
....
....

Ví dụ 1.2.

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2y+x+3z-1=0$. Xác định một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P)?

Lời giải

....
....
....

Ví dụ 1.3.

Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2;1;-3); B(0;-2;5)$ và $C(1;1;3)$. Tìm tọa độ vectơ $\vec{n}$ có phương vuông góc với hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

....
....
....
....

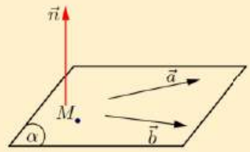
Dạng 2. PTMP khi biết điểm đi qua và cặp vecto chỉ phương

Phương pháp

» Phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(A;B;C)$ có dạng:

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \Rightarrow Ax+By+Cz+D=0$ (với $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$).

» Nếu mặt phẳng (P) có cặp véctơ chỉ phương là $\vec{u}_1;\vec{u}_2$ thì (P) có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=[\vec{u}_1;\vec{u}_2]$



Ví dụ 2.1.

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;1;-3)$ có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(3;-2;6)$.

Lời giải

....
....
....
....

Ví dụ 2.2.

Trong không gian $Oxyz$. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;-1;0)$ và có cặp véctơ chỉ phương là $\vec{a}=(2;1;3),\vec{b}=(1;1;2)$

Lời giải

....
....
....
....

Dạng 3. PTMP qua ba điểm không thẳng hàng

Phương pháp

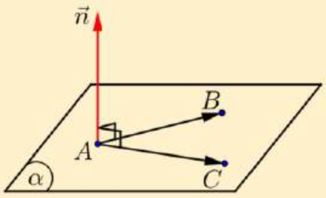
» Phương trình mặt phẳng (P) di qua $A;B;C$ không thẳng hàng.

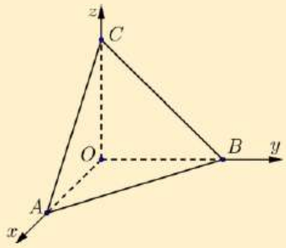
Bước 1: Tìm cặp vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$.

Bước 2: Tìm một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$.

Bước 3: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm A (hoặc điểm B hoặc điểm C) và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$.

» Phương trình mặt phẳng (P) là phương trình mặt chắn, tức mặt phẳng (P) đi qua $A(a;0;0);B(0;b;0);C(0;0;c)$ có dạng: $(P):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$





Ví dụ 3.1.

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (ABC)

(1) Với ba điểm $A(-1;0;3)$, $B(2;-1;1)$, $C(1;-1;0)$.

(2) Với ba điểm $A(1;0;2)$, $B(-2;3;1)$, $C(3;2;1)$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 3.2.

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (ABC)

(1) Với ba điểm $M(2;0;0), N(0;-1;0), P(0;0;2)$.

(2) Với ba điểm $M(0;-2;0), N(3;0;0), P(0;0;-3)$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 3.3.

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) chứa điểm $M(1;3;-2)$, cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho $\frac{OA}{1}=\frac{OB}{2}=\frac{OC}{4}$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 4. PTMP trung trực của đoạn thẳng

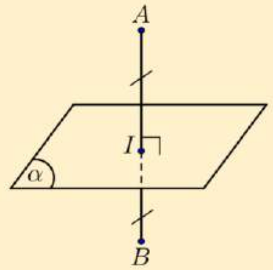
Phương pháp

» Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α) ***trung trực*** đoạn thẳng AB

Bước 1: Vécto pháp tuyến của mặt (α) là: $\vec{n}=\overrightarrow{AB}$.

Bước 2: Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn AB.

Bước 3: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm I và có vecto pháp tuyến $\vec{n}=\overrightarrow{AB}$.



Ví dụ 4.1.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;0;1)$ và $B(-2;2;3)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB

Lời giải

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 4.2.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3;2;1)$ và $B(5;-4;1)$. Gọi M là hình chiếu vuông góc của A trên (Oxy), và N là điểm đối xứng với B qua (Oyz). Viết phương trình mặt phẳng trung trực (P) của đoạn thẳng MN.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 4.2.

Trong không gian $Oxyz$, cho hình vuông $ABCD$ biết $A(1;2;1), B(3;0;0)$, $C(1;-1;-2), D(-1;1;-1)$. Giả sử $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ và G là trọng tâm ΔABC. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của GI.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 4.4.

Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết rằng $A(-3;0;0)$, $B(0;2;0)$, $D(0;0;1)$, $A'(1;2;3)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của $C'D$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

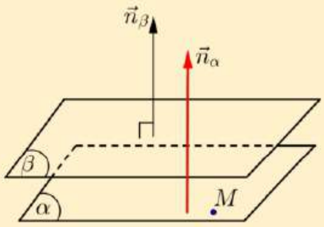
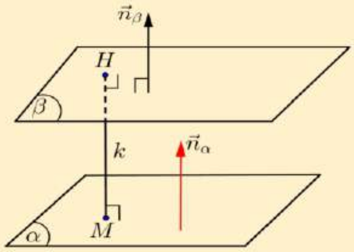
....

....

Dạng 5. PTMP 1 điểm kèm điều kiện song song với mặt phẳng khác

Phương pháp

» Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α)

Loại	Phương pháp
(1) Qua $M(x_0;y_0;z_0)$ và song song $(\beta): Ax+By+Cz+D=0$. 	⌘ *Cách 1:* ≫ Véctơ pháp tuyến (α) là: $\vec{n}_{(\alpha)}=\vec{n}_{(\beta)}=(A;B;C)$. ≫ Mặt phẳng (α) qua điểm M. ⌘ *Cách 2:* ≫ Do $(\alpha)//(\beta)\Rightarrow(\alpha): Ax+By+Cz+D'=0$ $(D\neq D')$ ≫ Thay điểm M vào $(\alpha)\Rightarrow D'=?\Rightarrow(\alpha)$.
(2) Song song $(P): Ax+By+Cz+D=0$ và cách (P) một khoảng bằng k. 	≫ Vì $(\alpha)//(P)\Rightarrow(\alpha): Ax+By+Cz+D'=0$ $(D\neq D')$. ≫ Vì (α) cách (P) một khoảng bằng k $\Rightarrow d((\alpha);(P))=k\xleftrightarrow{M\in(\alpha)}d(M;(P))=k$ $\Leftrightarrow\dfrac{\lvert D-D'\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=k\Rightarrow D'=?$ ≫ Có $D'\Rightarrow$ phương trình mặt (P) hoàn chỉnh.

Ví dụ 5.1.

Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng qua điểm $A(-1;1;2)$ và song song với mặt phẳng $(\alpha): 2x-2y+z-1=0$ có phương trình là?

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 5.2.

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(Q): x+2y+2z-3=0$ và mặt phẳng (P) không qua O, song song mặt phẳng (Q) và $d((P);(Q))=1$. Phương trình mặt phẳng (P) là?

Lời giải

....
....
....
....
....
....

Ví dụ 5.3.

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha_1): 3x-y+z-2=0$, $(\alpha_2): x+4y-5=0$ đồng thời song song với mặt phẳng $(\alpha_3): 2x+21y-z+7=0$. Viết phương trình của mặt phẳng (P).

Lời giải

....
....
....
....
....
....

Ví dụ 5.4.

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-2y+z-5=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P), cách (P) một khoảng bằng 3 và cắt trục Ox tại điểm có hoành độ dương.

Lời giải

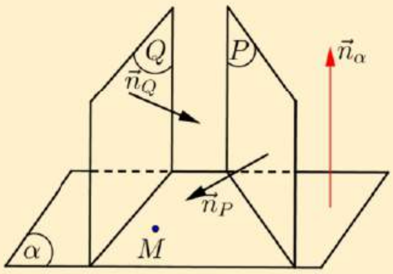
....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 6. PTMP 1 điểm kèm điều kiện vuông góc với mặt phẳng khác

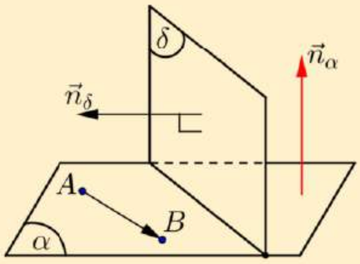
Phương pháp

▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α)

<table>
<tr><th>Loại</th><th>Phương pháp</th></tr>
<tr><td>
Qua $M(x_0;y_0;z_0)$ và $\perp$ 2 mặt
$(P): Ax+By+Cz+D=0$,
$(Q): A'x+B'y+C'z+D'=0$.



</td><td>
» Tìm cặp véctơ $\vec{n}_{(P)}$ và $\vec{n}_{(Q)}$.
» Véctơ pháp tuyến (α) là: $\vec{n}=\left[\vec{n}_{(Q)};\vec{n}_{(P)}\right]$.
» Mặt phẳng (α) qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$.
Hoặc bài toán sẽ gặp:
"Qua $M(x_0;y_0;z_0)$ và vuông góc với giao tuyến của $(P): Ax+By+Cz+D=0$; $(Q): A'x+B'y+C'z+D'=0$"
</td></tr>
<tr><th>Loại</th><th>Phương pháp</th></tr>
<tr><td>
Qua điểm $A;B$ và vuông góc
$(\delta): Ax+By+Cz+D=0$.



</td><td>
» Tìm cặp véctơ $\overrightarrow{AB}$ và $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB};\vec{n}_{(\delta)}\right]$.
» Véctơ pháp tuyến (α) là: $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB};\vec{n}_{(\delta)}\right]$.
» Mặt phẳng (α) qua điểm A.
</td></tr>
</table>

Ví dụ 6.1.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): 3x-2y+2z+7=0$, $(\beta): 5x-4y+3z+1=0$. Phương trình mặt phẳng đi qua gốc tọa độ O đồng thời vuông góc với cả (α) và (β) là?

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 6.2.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;4;1), B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P): x-3y+2z-5=0$. Lập phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P).

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 6.3.

Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(0;1;0)$, $B(2;3;1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): x+2y-z=0$ có phương trình là?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Dạng 7. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Phương pháp

» Tính khoảng cách từ điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ đến mặt phẳng $(P): Ax+By+Cz+D=0$ như sau

Bước 1: Tìm $M_0(x_0;y_0;z_0)$; viết phương trình mặt phẳng $(P): Ax+By+Cz+D=0$.

Bước 2: Tính khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng $(P): Ax+By+Cz+D=0$ theo công thức $d\left(M_0,(P)\right)=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

Lưu ý: $d\left(M_0,(Oxy)\right)=\sqrt{(z_0)^2}$ $\qquad$ $d\left(M_0,Ox\right)=\sqrt{(y_0)^2+(z_0)^2}$

Ví dụ 7.1.

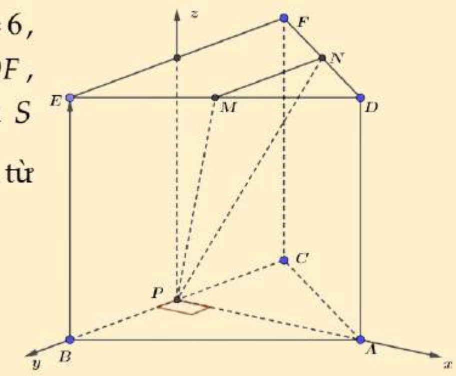
Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ cạnh 1. Điểm M được cho thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{CD}$. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (EBD).

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 7.2.

Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.DEF$, $AB=6$, $AD=2$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm DE, DF, BC. Lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình bên. Gọi điểm S thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{SA}+2\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}=\vec{0}$. Tính khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (MNP).



Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 8. Vị trí tương đối hai mặt phẳng

Phương pháp

Xét điểm mặt phẳng $(P): Ax+By+Cz+D=0$ có vecto pháp tuyến $\vec{n}_P$, với:

» Mặt phẳng $(Q): A'x+B'y+C'z+D'=0$ có vecto pháp tuyến $\vec{n}_{Q'}$

Ta có các vị trí tương đối sau:

	Mặt phẳng (P)	
Mặt phẳng (Q)	$\frac{A}{A'}\neq\frac{B}{B'}\neq\frac{C}{C'}$	Mặt (P) *cắt* mặt (Q)
	$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}\neq\frac{D}{D'}$	Mặt (P) *song song* mặt (Q)
	$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}=\frac{D}{D'}$	Mặt (P) *trùng* mặt (Q)
	$A.A'+B.B'+C.C'=0$	Mặt (P) *vuông góc* mặt (Q)

Ví dụ 8.1.

Cho ba mặt phẳng $(P_1): 2x-y-2z+1=0$, $(P_2): 4x-2y-4z+4=0$, $(P_3): x+4y-z+1=0$. Chứng minh $(P_1)//(P_2)$ và $(P_1)\perp(P_3)$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 8.2.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): m^2x-y+(m^2-2)z+2=0$ và $(\beta): 2x+m^2y-2z+1=0$. Hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau khi nào?

Lời giải

....
....
....
....
....
....

Ví dụ 8.3.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x - 3y + 5z - 1 = 0$ và $(Q): 4x + (m-3)y + (m^2+1)z - 7 = 0$ (m là tham số). Tìm m để hai mặt phẳng song song.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 8.3.

Trong không gian $Oxyz$ cho $A(2;0;0), B(0;4;0), C(0;0;6), D(2;4;6)$. Gọi (P) là mặt phẳng song song với $mp(ABC)$, .(P). cách đều D và mặt phẳng (ABC). Phương trình của (P) là?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Dạng 9. Ứng dụng tích có hướng

Phương pháp

(1) Bốn điểm A,B,C,D tạo thành tứ diện: .... $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\neq 0$.

$\Leftrightarrow A,B,C,D$ không đồng phẳng

(2) Diện tích ΔABC: .... $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$.

$\Rightarrow$Đường cao ΔABC: $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AH.BC\Rightarrow AH=\dfrac{2S_{\Delta ABC}}{BC}=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}$

(3) Diện tích hình bình hành $ABCD$: .... $S_{ABCD}=2S_{\Delta ABC}=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$.

(4) Thể tích tứ diện $ABCD$: .... $V=\dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$.

$\Rightarrow$Đường cao chóp $ABCD$:

$$V_{ABCD}=\frac{1}{3}d\left(A,\left(BCD\right)\right).S_{\Delta BCD}\Rightarrow d\left(A,\left(BCD\right)\right)=\frac{3V_{ABCD}}{S_{\Delta BCD}}=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]\right|}$$

▶ **Bài toán tính diện tích tam giác:**

Trong không gian $Oxyz$, cho $A(...),B(...),C(...)$. Tính diện tích tam giác ABC

Hướng giải quyết

Bước 1: Tìm tọa độ các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$.

Bước 2: Sử dụng $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$ để tính diện tích ΔABC

Nếu bài toán yêu cầu tính đường cao trong tam giác:

Bước 3: Sử dụng $S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}AH.OB\Rightarrow AH=\dfrac{2S_{\Delta OAB}}{OB}$ để tính độ dài đường cao AH.

▶ **Bài toán tính thể tích tứ diện:**

Trong không gian $Oxyz$, cho $A(...),B(...),C(...),D(...)$. Tính thể tích tứ diện $ABCD$

Hướng giải quyết

Bước 1: Tìm tọa độ các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}$.

Bước 2: Sử dụng $V=\dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$ để tính thể tích tứ diện $ABCD$.

Nếu bài toán yêu cầu tính khoảng cách hạ từ đỉnh:

Bước 3: Sử dụng $V_{ABCD}=\dfrac{1}{3}d\left(A,\left(BCD\right)\right).S_{\Delta BCD}\Rightarrow d\left(A,\left(BCD\right)\right)=\dfrac{3V_{ABCD}}{S_{\Delta BCD}}$ để tính độ dài khoảng cách

Ví dụ 9.1.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1)$, $B(0;-2;3)$.

(1) Tính diện tích tam giác OAB với O là gốc tạo độ.

(2) Tính độ dài đường cao AH hạ từ đỉnh A của tam giác OAB.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 9.2.

Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;-2;0)$, $B(2;0;3)$, $C(-2;1;3)$ và $D(0;1;1)$.

(1) Tính thể tích khối tứ diện $ABCD$.

(2) Tính độ dài đường cao DH của tứ diện $ABCD$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 9.3.

Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ biết $A(3;-2;m), B(2;0;0)$, $C(0;4;0)$, $D(0;0;3)$. Tìm giá trị dương của tham số m để thể tích tứ diện bằng 8.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

C Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Vectơ nào là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(ABCD)$?

A. $\overrightarrow{AC}$. **B.** $\overrightarrow{AC'}$. **C.** $\overrightarrow{AA'}$. **D.** $\overrightarrow{AD'}$.

» Câu 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Vectơ nào là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(ADD'A')$?

A. $\overrightarrow{CC'}$. **B.** $\overrightarrow{AD}$. **C.** $\overrightarrow{BC'}$. **D.** $\overrightarrow{AB}$.

» Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;0;0), B(0;4;0), C(0;0;5)$. Tọa độ nào sau đây là tọa độ vectơ chỉ phương của mặt phẳng (ABC)?

A. $(3;4;5)$. **B.** $(0;4;5)$. **C.** $(-3;4;0)$. **D.** $(-3;0;-5)$.

» Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;2;1), B(-1;4;1), C(3;-2;5)$. Tọa độ nào sau đây là tọa độ vectơ pháp tuyến của của mặt phẳng (ABC)?

A. $(1;2;2)$. **B.** $(8;-16;16)$. **C.** $(-1;2;-2)$. **D.** $(1;4;4)$.

» Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $-2x+2y-z-3=0$. Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là

A. $(4;-4;2)$. **B.** $(-2;2;-3)$. **C.** $(-4;4;2)$. **D.** $(0;0;-3)$.

» Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $\frac{x}{4}+\frac{y}{6}+\frac{z}{2}-1=0$. Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là?

A. $(4;6;2)$. **B.** $(2;3;1)$. **C.** $(3;2;6)$. **D.** $(3;2;1)$.

» Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x-3z+1=0$. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là:

A. $\vec{n}_2=(2;0;-3)$. **B.** $\vec{n}_1=(2;-3;1)$. **C.** $\vec{n}_3=(-2;0;-3)$. **D.** $\vec{n}_4=(-2;3;-1)$.

» Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$ đi qua điểm nào dưới đây:

A. $M(-1;-1;-1)$. **B.** $N(1;1;1)$. **C.** $P(-3;0;0)$. **D.** $Q(0;0;-3)$.

» Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): \frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$ **không** đi qua điểm nào dưới đây:

A. $P(0;2;0)$. **B.** $Q(0;0;3)$. **C.** $M(1;2;3)$. **D.** $N(1;0;0)$.

» Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng nào sau đây đi qua gốc tọa độ?

A. $x+20=0$. **B.** $x-2024=0$. **C.** $y+2025=0$. **D.** $2x+5y-8z=0$.

» Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (Oxy) đi qua điểm nào sau đây:

A. $M(1;2;0)$. **B.** $N(3;2;-1)$. **C.** $P(1;0;-3)$. **D.** $Q(0;2;-5)$.

» Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $A(2;-1;3)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;3;-1)$ là:

A. $(\alpha): 2x+3y-z-2=0$.
B. $(\alpha): 2x+3y-z+2=0$.
C. $(\alpha): 2x-y+3z-2=0$.
D. $(\alpha): 2x-y+3z+2=0$.

» Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+y-2z+4=0$. Mặt phẳng nào sau đây vuông góc với (P)?

A. $2x+y-2z+5=0$.
B. $x+2y+2z-5=0$.
C. $x+3y-z+1=0$.
D. $x+y+z-6=0$.

» Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ $M(1;2;-3)$ đến $(P): x+2y+2z-10=0$ là

A. 3.
B. $\frac{2}{3}$.
C. $\frac{4}{3}$.
D. $\frac{11}{3}$.

» Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, vectơ nào sau đây không phải là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P): x+3y-5z+2=0$.

A. $\vec{n}=(-1;-3;5)$.
B. $\vec{n}=(2;\ 6;\ -10)$.
C. $\vec{n}=(-2;-6;-10)$.
D. $\vec{n}=(-3;-9;15)$.

» Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, véctơ nào sau đây là một véctơ pháp tuyến của (P), biết $\vec{a}=(-1;-2;-2)$, $\vec{b}=(-1;0;-1)$ là cặp véctơ chỉ phương của (P)?

A. $\vec{n}=(2;1;2)$.
B. $\vec{n}=(2;-1;-2)$.
C. $\vec{n}=(2;1;-2)$.
D. $\vec{n}=(-2;1;-2)$.

» Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua $A(1;-1;2)$ và có véctơ pháp tuyến $\vec{n}=(4;2;-6)$ là

A. $4x+2y-6z+5=0$.
B. $2x+y-3z+5=0$.
C. $2x+y-3z+2=0$.
D. $2x+y-3z-5=0$.

» Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0;1;1);B(1;2;3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB.

A. $(P): x+y+2z-3=0$.
B. $(P): x+y+2z-6=0$.
C. $(P): x+3y+4z-7=0$.
D. $(P): x+3y+4z-26=0$.

» Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;4;1), B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P): x-3y+2z-5=0$. Lập phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P).

A. $2y+3z-11=0$.
B. $2x-3y-11=0$.
C. $x-3y+2z-5=0$.
D. $3y+2z-11=0$.

» Câu 20. Cho hai mặt phẳng $(\alpha): 3x-2y+2z+7=0, (\beta): 5x-4y+3z+1=0$. Phương trình mặt phẳng đi qua gốc tọa độ O đồng thời vuông góc với cả (α) và (β) là:

A. $2x-y-2z=0$.
B. $2x+y-2z=0$.
C. $2x-y+2z=0$.
D. $2x+y-2z+1=0$.

» Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;-2;-2), B(3;2;0), C(0;2;1)$. Phương trình mặt phẳng (ABC) là

A. $2x-3y+6z+12=0$. B. $2x+3y-6z-12=0$.
C. $2x-3y+6z=0$. D. $2x+3y+6z+12=0$.

» **Câu 22.** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;2)$, $B(2;-2;1)$, $C(-2;1;0)$. Khi đó, phương trình mặt phẳng (ABC) là $ax+y-z+d=0$. Hãy xác định a và d.

A. $a=6,d=-6$. B. $a=1,d=1$. C. $a=-1,d=-6$. D. $a=-6,d=6$.

» **Câu 23.** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $A(1;3;-2)$ và song song với mặt phẳng $(P):2x-y+3z+4=0$ là

A. $2x+y+3z+7=0$. B. $2x+y-3z+7=0$.
C. $2x-y+3z+7=0$. D. $2x-y+3z-7=0$.

» **Câu 24.** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-1;-3)$ và mặt phẳng $(P):3x-2y+4z-5=0$. Mặt phẳng (Q) đi qua A và song song với mặt phẳng (P) có phương trình :

A. $(Q):3x-2y+4z-4=0.$ B. $(Q):3x-2y+4z+4=0.$
C. $(Q):3x-2y+4z+5=0.$ D. $(Q):3x+2y+4z+8=0.$.

» **Câu 25.** Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;2;3)$, $B(3;4;4)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $2x+y+mz-1=0$ bằng độ dài đoạn thẳng AB

A. $m=2$. B. $m=-2$. C. $m=-3$. D. $m=\pm 2$.

B. *Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai*

» **Câu 26.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x+3y+z-2024=0$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;3;1)$.		
(b)	Mặt phẳng (Oxz) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(6;9;3)$.		
(c)	Mặt phẳng (Oyz) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(-4;-6;-2)$.		
(d)	Điểm $M(0;0;2024)$ không thuộc mặt phẳng (P).		

» **Câu 27.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;0)$; $B(4;1;2)$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\overrightarrow{AB}=(3;1;2)$		
(b)	Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với AB có phương trình là $3x+y+2z-3=0$.		
(c)	Nếu I là trung điểm đoạn thẳng AB thì $I\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2};1\right)$.		
(d)	Mặt phẳng trung trực đoạn thẳng AB có phương trình là $3x+y+2z-12=0$.		

» **Câu 28.** Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;1;4)$; $B(2;7;9)$; $C(0;9;13)$; $D(1;8;10)$. Mệnh đề nào sau đây đúng và mệnh đề nào sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\overrightarrow{AB}=\vec{i}+6\vec{j}+5\vec{k}$		

(b)	$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$		
(c)	Phương trình mặt phẳng đi qua điểm B và vuông góc với AC là $x-8y-9z+14=0$.		
(d)	Phương trình mặt phẳng chứa AB song song với CD là $8x-7y-13z+50=0$		

» Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;4)$, $B(2;7;9)$, $C(0;9;13)$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\overrightarrow{AB}=(1;6;5)$		
(b)	Mặt phẳng (ABC) có 1 vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;-1;1)$		
(c)	$(ABC): x-y+z-4=0$		
(d)	$O \in (ABC)$		

» Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba mặt phẳng $(P): x+2y-z-1=0$ $(Q): 3x-y+z-5=0$ và $(R): 2x+4y-mz-2=0$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$(P)//(Q)$		
(b)	(α) qua O và song song (P) có phương trình là $(\alpha): x+2y-z=0$		
(c)	$(P)//(R)$ khi $m=2$		
(d)	$(P)\perp(R)$ khi $m=-10$		

» Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho $M(-2;-4;3)$ và $(P): 2x-y+2z-3=0$, $(Q): 2x-y+2z-6=0$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$d(M,(P))=2$		
(b)	M cách đều hai mặt phẳng (P) và (Q)		
(c)	$d((P),(Q))=1$		
(d)	(α) song song và cách (Q) một khoảng bằng 2 có phương trình là $(\alpha): 2x-y+2z-9=0$		

» Câu 32. Cho hai mặt phẳng $(P): 2x-y+2z-5=0$; $(Q): 4x-2y+4z+1-m=0$ và điểm $M(2;1;5)$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng $\frac{8}{3}$.		
(b)	Với $m=0$ thì khoảng cách M đến mặt phẳng (Q) bằng $\frac{9}{2}$.		
(c)	Với $m=3$ thì khoảng cách giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng 3.		
(d)	Có hai giá trị của m để khoảng cách từ M đến mặt phẳng (Q) bằng 1. Khi đó tổng tất cả giá trị của m bằng 5.		

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» Câu 33. Cho điểm $A(1;2;-1)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x-2y+z-7=0$, Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (α) có dạng $\frac{a}{b}$ tối giản; $a;b\in\mathbb{Z}$. Tính $T=2a-b$?

Điền đáp số:

» Câu 34. Cho điểm $A(1;2;-1)$ và mặt phẳng $(\alpha): x-2y+2z+2=0$. Mặt phẳng (β) song song với mặt phẳng (α) và cách A một khoảng 1 có dạng $(\alpha): x-by+cz+d=0$. Khi đó $S=3b-c+d$?

Điền đáp số:

» Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(a;b;1)$ thuộc mặt phẳng $(P): 2x-y+z-3=0$. Tính giá trị biểu thức $S=2\text{a}-b$.

Điền đáp số:

» Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho phương trình mặt phẳng (P) qua $A(2;1;-3)$ và song song với mặt phẳng $(Q): x-y+2z-1=0$ có dạng $x-y+az+b=0$ Tính giá trị biểu thức $S=\text{a}-b$.

Điền đáp số:

» Câu 37. Trong gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-1;1)$, $B(1;0;4)$, $C(0;-2;-1)$. Mặt phẳng qua A và vuông góc với đường thẳng BC có phương trình dạng $x+ay+bz+c=0$. Tính giá trị biểu thức $S=a+b+c$.

Điền đáp số:

» Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): ax+by+cz-27=0$ qua hai điểm $A(3;2;1)$ và $B(-3;5;2)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): 3x+y+z+4=0$. Tính tổng $S=a+b+c$.

Điền đáp số:

» Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua $A(1;0;0)$; $B(0;0;2)$ và cắt tia Oy tại điểm C sao cho thể tích khối chóp $OABC$ bằng 2. Biết điểm $S(-1;6;m)$ thuộc (P), thì m bằng bao nhiêu?

Điền đáp số:

» Câu 40. Trong không gian $Oxyz$, cho $(\alpha): x+2y-z-1=0$ và $(\beta): 2x+4y-mz+2=0$. Tìm m để (α) và (β) song song với nhau.

Điền đáp số:

» Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;0)$, $B(3;4;-2)$ và $(P): x-y+z-4=0$. Phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P), có dạng $(Q): ax+by+cz+2=0$. Tính $T=a+b+c$.

Điền đáp số:

» Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(0;1;2), B(2;-2;1), C(-2;1;0), M(3;0;1)$. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (ABC), (*kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*).

Điền đáp số:

» Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, biết mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng -7 và cách điểm $A(2,-3,4)$ một khoảng bằng 3. Tính tích hai hệ số tự do của phương trình tổng quát mặt phẳng (P) (biết hoành độ của vectơ pháp tuyến của (P) bằng 1).

Điền đáp số:

» Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $M(m;0;0), N(0;n;0), P(0;0;p)$ không trùng với gốc tọa độ và thỏa mãn $m^2+n^2+p^2=3, m, n, p$ là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của khoảng cách từ O đến mặt phẳng (MNP). *(Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).*

Điền đáp số:

» Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;2)$ và mặt phẳng $(P):(m-1)x+y+mz-1=0$, với m là tham số. Tìm m để khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) lớn nhất.

Điền đáp số:

-------------------- Hết --------------------

Chương 05

Bài 2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

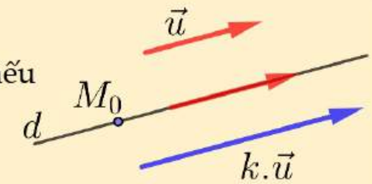
A Lý thuyết

1. Phương trình đường thẳng

Vectơ chỉ phương của đường thẳng:

Cho đường thẳng Δ và vectơ $\vec{u}$ khác $\vec{0}$.

Vectơ $\vec{u}$ được gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ nếu giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng với Δ.



✓ *Nhận xét:*

» Một đường thẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm mà nó đi qua và một vectơ chỉ phương của nó.

» Nếu $\vec{u}$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng thì $k.\vec{u}$ $(k \neq 0)$ cũng là một vectơ chỉ phương của đường thẳng đó.

Phương trình tham số của đường thẳng:

Trong không gian $Oxyz$,

phương trình tham số của đường thẳng Δ qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và nhận $\vec{u}=(a;b;c)$ làm vectơ chỉ phương có dạng:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \text{ với } t \in \mathbb{R} \ (t \text{ được gọi là tham số và } a^2+b^2+c^2 \neq 0) \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

Phương trình chính tắc của đường thẳng:

Trong không gian $Oxyz$,

phương trình chính tắc của đường thẳng Δ qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và nhận $\vec{u}=(a;b;c)$ làm vectơ chỉ phương có dạng:

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c} \ (a.b.c \neq 0)$$

Phương trình đường thẳng qua hai điểm cho trước:

Trong không gian $Oxyz$,

cho đường thẳng Δ đi qua hai điểm $A(x_A;y_A;z_A), B(x_B;y_B;z_B)$ và nhận

$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$ làm vectơ chỉ phương có:

✓ Phương trình tham số : $\begin{cases} x=x_A+(x_B-x_A)t \\ y=y_A+(y_B-y_A)t \\ z=z_A+(z_B-z_A)t \end{cases}$ với $t\in\mathbb{R}$

✓ Phương trình chính tắc: $\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A}=\dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}=\dfrac{z-z_A}{z_B-z_A}$ (với $x_B\neq x_A, y_B\neq y_A, z_B\neq z_A$)

2. Vị trí tương đối hai đường thẳng. Điều kiện để hai đường thẳng vuông góc

Sự cùng phương – Sự đồng phẳng:

Trong không gian $Oxyz$,

- Hai vectơ được gọi là ***cùng phương*** khi giá của chúng cùng song song với một đường thẳng.
- Ba vectơ được gọi là ***đồng phẳng*** khi giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3), \vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ và $\vec{c}=(c_1;c_2;c_3)$

✓ Hai $\vec{a},\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow \left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}$.

✓ Hai $\vec{a},\vec{b}$ không cùng phương $\Leftrightarrow \left[\vec{a},\vec{b}\right]\neq\vec{0}$.

✓ Ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c}=0$.

✓ Ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng $\Leftrightarrow \left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c}\neq 0$.

Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng:

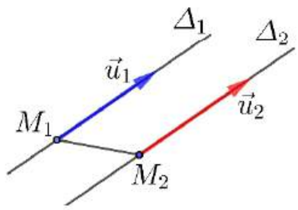
Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng Δ_1,Δ_2 lần lượt đi qua các điểm M_1, M_2 và tương ứng có $\vec{u}_1=(a_1;b_1;c_1);\vec{u}_2=(a_2;b_2;c_2)$ là hai vectơ chỉ phương. Khi đó, ta có:

- $\Delta_1\equiv\Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_1,\vec{u}_2 & \text{cùng phương} \\ \vec{u}_1,\overrightarrow{M_1M_2} & \text{cùng phương} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1,\vec{u}_2]=\vec{0} \\ \left[\vec{u}_1,\overrightarrow{M_1M_2}\right]=\vec{0} \end{cases}$

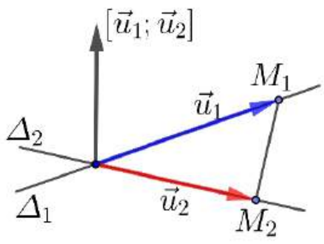
- $\Delta_1 \,//\, \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_1,\vec{u}_2 & \text{cùng phương} \\ \vec{u}_1,\overrightarrow{M_1M_2} & \text{không cùng phương} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1,\vec{u}_2]=\vec{0} \\ \left[\vec{u}_1,\overrightarrow{M_1M_2}\right]\neq\vec{0} \end{cases}$

- Δ_1 cắt $\Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_1,\vec{u}_2 & \text{không cùng phương} \\ \vec{u}_1,\vec{u}_2,\overrightarrow{M_1M_2} & \text{đồng phẳng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1,\vec{u}_2]\neq\vec{0} \\ [\vec{u}_1,\vec{u}_2].\overrightarrow{M_1M_2}=0 \end{cases}$

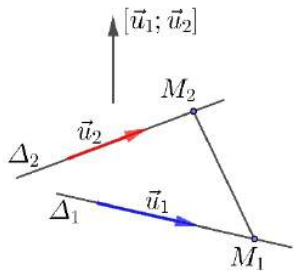
- Δ_1 và Δ_2 chéo nhau $\Leftrightarrow [\vec{u}_1,\vec{u}_2].\overrightarrow{M_1M_2}\neq 0$



Δ_1 song song Δ_2



Δ_1 cắt Δ_2



Δ_1 chéo Δ_2

Chú ý

Để xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng.

Trong không gian $Oxyz$, hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 tương ứng có $\vec{u}_1 = (a_1; b_1; c_1)$ và $\vec{u}_2 = (a_2; b_2; c_2)$ là hai vectơ chỉ phương và có phương trình tham số:

$$\Delta_1 : \begin{cases} x = x_1 + a_1 t_1 \\ y = y_1 + b_1 t_1 \\ z = z_1 + c_1 t_1 \end{cases} (t_1 \in \mathbb{R}), \quad \Delta_2 : \begin{cases} x = x_2 + a_2 t_2 \\ y = y_2 + b_2 t_2 \\ z = z_2 + c_2 t_2 \end{cases} (t_2 \in \mathbb{R})$$

Xét hệ phương trình hai ẩn t_1, t_2: $\begin{cases} x_1 + a_1 t_1 = x_2 + a_2 t_2 \\ y_1 + b_1 t_1 = y_2 + b_2 t_2 \\ z_1 + c_1 t_1 = z_2 + c_2 t_2 \end{cases} \quad (*)$

Khi đó :

» $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow$ $\vec{u}_1$ cùng phương với $\vec{u}_2$ và hệ $(*)$ vô nghiệm.

» $\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow$ Hệ $(*)$ có vô số nghiệm.

» Δ_1 cắt $\Delta_2 \Leftrightarrow$ Hệ $(*)$ có nghiệm duy nhất.

» Δ_1 và Δ_2 chéo nhau $\Leftrightarrow \vec{u}_1$ không cùng phương với $\vec{u}_2$ và hệ $(*)$ vô nghiệm.

Điều kiện để hai đường thẳng vuông góc:

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 tương ứng có $\vec{u}_1 = (a_1; b_1; c_1)$ và $\vec{u}_2 = (a_2; b_2; c_2)$ là hai vectơ chỉ phương. Khi đó, ta có:

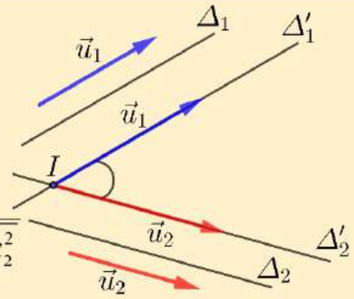
$$\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1 \perp \vec{u}_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1 . \vec{u}_2 = 0 \Leftrightarrow a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$$

3. Góc

Góc giữa hai đường thẳng:

Trong không gian $Oxyz$,
cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 tương ứng có $\vec{u}_1 = (a_1; b_1; c_1)$ và $\vec{u}_2 = (a_2; b_2; c_2)$ là hai vectơ chỉ phương. Khi đó, ta có:

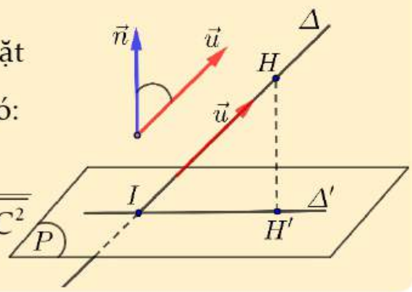
$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \left|\cos(\vec{u}_1.\vec{u}_2)\right| = \frac{|\vec{u}_1.\vec{u}_2|}{|\vec{u}_1|.|\vec{u}_2|} = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}.\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$



Góc giữa đường thẳng với mặt phẳng:

Trong không gian $Oxyz$,
cho đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$ và mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$. Khi đó, ta có:

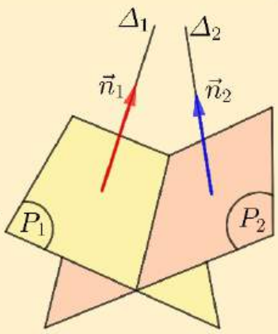
$$\sin(\Delta, (P)) = \left|\cos(\vec{u}.\vec{n})\right| = \frac{|\vec{u}.\vec{n}|}{|\vec{u}|.|\vec{n}|} = \frac{|aA + bB + cC|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$



Góc giữa hai mặt phẳng:

Trong không gian $Oxyz$,
cho hai mặt phẳng $(P_1), (P_2)$ có hai vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ và $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$. Khi đó, ta có:

$$\cos((P_1), (P_2)) = \left|\cos(\vec{n}_1.\vec{n}_2)\right| = \frac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|.|\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}.\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$



B Các dạng bài tập

Dạng 1. Xác định vecto chỉ phương của đường thẳng

Phương pháp

» Trong không gian $Oxyz$, vectơ $\vec{u}=(a;b;c)\neq\vec{0}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ thì vectơ $\vec{m}=k.\vec{u}$ cũng là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ.

» Phương trình tham số $\Delta:\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\\z=z_0+ct\end{cases}(t\in\mathbb{R})$ có VTCP $\vec{u}=(a;b;c)$ (hệ số trước t).

» Phương trình chính tắc $\Delta:\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ có VTCP $\vec{u}=(a;b;c)$ (hệ số ở mẫu).

» ***Nhận xét:***

- Với phương trình tham số lấy đúng thứ tự hệ số trước *tham số t*.
- Với phương trình chính tắc lấy hệ số dưới mẫu.
- Nếu giả thiết chưa đúng cấu trúc, ta phải sắp xếp lại rồi mới lấy hệ số.

Ví dụ 1.1.

Trong không gian $Oxyz$, xác định một vectơ chỉ phương của đường thẳng dưới đây:

(1) $d:\begin{cases}x=2-t\\y=1+2t\\z=3+t\end{cases}$ (2) $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{2}$ (3) $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{2-z}{1}$

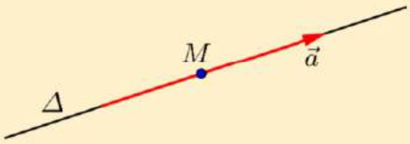
Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 2. Đường thẳng qua điểm & có sẵn VTCP

Phương pháp

▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ

Loại	Phương pháp
Qua M, có véctơ chỉ phương $\vec{a}=(a;b;c)$  	≫ Phương trình $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$ hoặc $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ nếu $\{a;b;c\}\neq 0$. ▶ **Lưu ý:** Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra

Ví dụ 2.1.

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua điểm

(1) $M(2;0;-1)$ và có véctơ chỉ phương $\vec{a}=(2;-3;1)$

(2) $N(1;0;-2)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;3;1)$

Lời giải

Ví dụ 2.2.

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình tham số của đường thẳng d qua điểm bất kỳ thuộc d và có vectơ chỉ phương tương ứng. Biết đường thẳng d

(1) Đi qua điểm $A(1;1;2)$ và có véctơ chỉ phương $\vec{b}=(1;2;-3)$

(2) Đi qua điểm $C(3;2;1)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;2;3)$

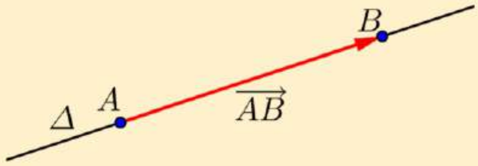
Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 3. Đường thẳng qua hai điểm

Phương pháp

▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ

Loại	Phương pháp
Qua hai điểm A và B. 	≫ Chọn A hoặc B là điểm mà Δ đi qua. ≫ Nhận $\overrightarrow{AB}$ làm VTCP $\to \vec{u} = \overrightarrow{AB}$. ▶ **Lưu ý:** Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra.

Ví dụ 3.1.

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình chính tắc của đường thẳng

(1) Đi qua gốc tọa độ và $H(1;4;-2)$.

(2) Đi qua hai điểm $M(2;0;-1)$ và $N(2;-3;1)$

Lời giải

Ví dụ 3.2.

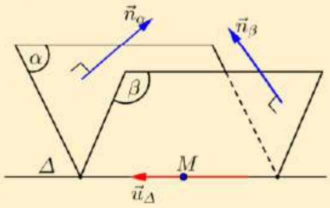
Trong không gian $Oxyz$, cho ΔABC có $A(-1;3;2)$, $B(2;0;5)$, $C(0;-2;1)$. Viết phương trình đường trung tuyến AM của ΔABC

Lời giải

Dạng 4. Đường thẳng là giao tuyến của hai mặt phẳng

Phương pháp

▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ

Loại	**Phương pháp**
Giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ và $(\beta): A'x+B'y+C'z+D'=0$  	≫ Cho 1 trong 3 ẩn $x;y;z=0$ để tìm 2 ẩn còn lại $x=0 \longrightarrow \begin{cases} By+Cz+D=0 \\ B'y+C'z+D'=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=? \\ z=? \end{cases} \Rightarrow M(0;?;?)$ ≫ Vecto chỉ phương $\vec{u}=\left[\vec{n}_\alpha;\vec{n}_\beta\right]$. ▶ **Lưu ý:** Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra

Ví dụ 4.1.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x+y-z-1=0$, $(Q): x-2y+z-5=0$. Giao tuyến hai mặt phẳng (P) và (Q) có một vecto chỉ phương là?

Lời giải

Ví dụ 4.2.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): 2x+y-z+3=0$ và $(\beta): x+y+z-1=0$. Phương trình chính tắc đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) là?

Lời giải

Ví dụ 4.3.

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y-5z+4=0$ và đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+5}{6}$. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với (P). Xác định phương trình giao tuyến d' của (Q) và (P)?

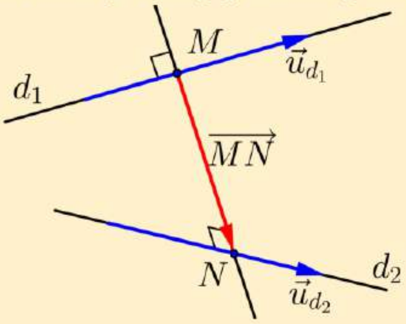
Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 5. Đường thẳng là đường vuông góc chung của hai đường thẳng

Phương pháp

▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ

Loại	Phương pháp
Là đường vuông góc chung của d_1 và d_2 	≫ Gọi $\begin{cases} M \in d_1 \\ N \in d_2 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MN}(?)$ (tọa độ theo $t;k$). ≫ MN là đường vuông góc chung $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_1.\overrightarrow{MN} = 0 \\ \vec{u}_2.\overrightarrow{MN} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = ? \\ k = ? \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(?) \\ N(?) \end{cases}$. ≫ Khi đó đường thẳng $\Delta : \begin{cases} qua \left[\begin{array}{l} M \\ N \end{array} \right. \\ \vec{u}_\Delta = \overrightarrow{MN} \end{cases}$. ▶ **Lưu ý:** Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra

Ví dụ 5.1.

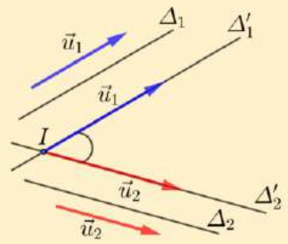
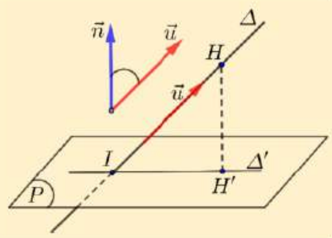
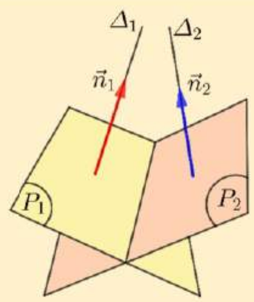
Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = -2 + 5t \end{cases}$ và $d_2 : \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 2 + s \\ z = 1 + 3s \end{cases}$. Viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng $d_1; d_2$.

Lời giải

Dạng 6. Góc

Phương pháp

▶ Trong không gian $Oxyz$,

Loại	Hình vẽ
Hai đường thẳng Δ_1,Δ_2 tương ứng có $\vec{u}_1=(a_1;b_1;c_1)$ và $\vec{u}_2=(a_2;b_2;c_2)$ là hai vectơ chỉ phương. Khi đó, ta có: $\cos(\Delta_1,\Delta_2)=\left\lvert\cos(\vec{u}_1.\vec{u}_2)\right\rvert=\dfrac{\lvert\vec{u}_1.\vec{u}_2\rvert}{\lvert\vec{u}_1\rvert.\lvert\vec{u}_2\rvert}=\dfrac{\lvert a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2\rvert}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}.\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$	
Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(a;b;c)$ và mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(A;B;C)$. Khi đó, ta có: $\sin(\Delta,(P))=\left\lvert\cos(\vec{u}.\vec{n})\right\rvert=\dfrac{\lvert\vec{u}.\vec{n}\rvert}{\lvert\vec{u}\rvert.\lvert\vec{n}\rvert}=\dfrac{\lvert aA+bB+cC\rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$	
Hai mặt phẳng $(P_1),(P_2)$ có hai vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1=(A_1;B_1;C_1)$ và $\vec{n}_2=(A_2;B_2;C_2)$. Khi đó, ta có: $\cos((P_1),(P_2))=\left\lvert\cos(\vec{n}_1.\vec{n}_2)\right\rvert=\dfrac{\lvert\vec{n}_1.\vec{n}_2\rvert}{\lvert\vec{n}_1\rvert.\lvert\vec{n}_2\rvert}=\dfrac{\lvert A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2\rvert}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}.\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$	

Ví dụ 6.1.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=t\\y=5-2t\\z=14-3t\end{cases}$ và $d_2:\begin{cases}x=1-4t'\\y=2+t'\\z=-1+5t'\end{cases}$. Tính góc giữa hai đường thẳng đã cho.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 6.2.

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+3}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 2x + y + z - 1 = 0$. Tính góc giữa Δ và (P)

Lời giải

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 6.3.

Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa hai mặt phẳng $(P): x + 2y + z + 10 = 0$ và $(Q): -x + y + 2z + 13 = 0$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

Dạng 7. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Phương pháp

▶ Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng:

$d:\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \left(t \in \mathbb{R}\right) \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$ có vectơ chỉ phương $\vec{a} = \left(a_1; a_2; a_3\right)$ và $M_0\left(x_0; y_0; z_0\right) \in d$;

$d':\begin{cases} x = x'_0 + a'_1 t' \\ y = y'_0 + a'_2 t' \left(t' \in \mathbb{R}\right) \\ z = z'_0 + a'_3 t' \end{cases}$ có vectơ chỉ phương $\vec{a}' = \left(a'_1; a'_2; a'_3\right)$.

Khi đó:

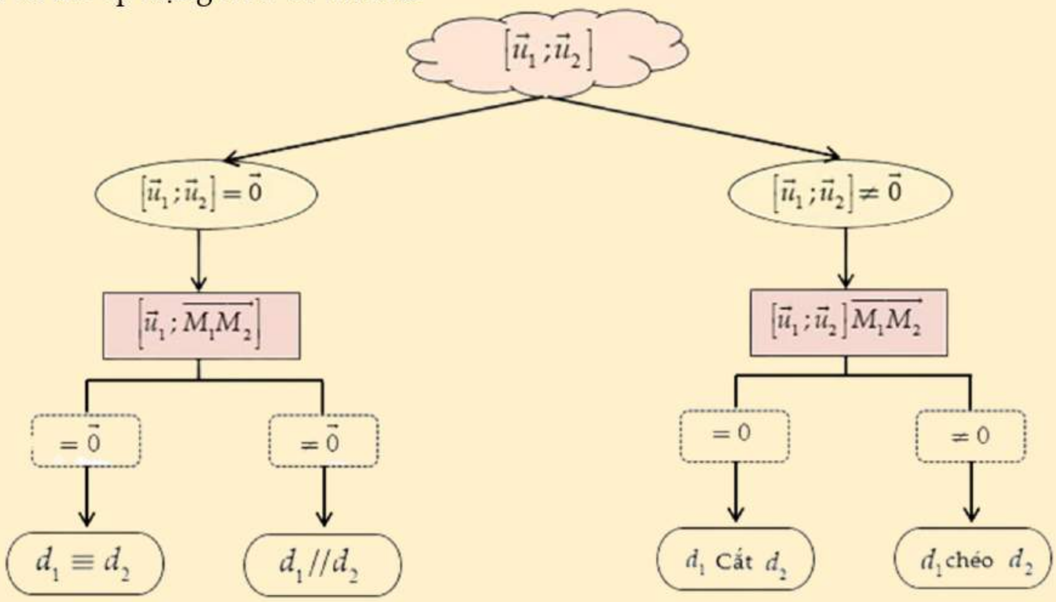
» $d // d' \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{a}'$ cùng phương và $M_0 \notin d'$.

» d trùng $d' \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{a}'$ cùng phương $M_0 \in d'$

» $d \cap d' \Leftrightarrow$ hệ phương trình ẩn t, t' sau: $\begin{cases} x_0 + a_1 t = x'_0 + a'_1 t' \\ y_0 + a_2 t = y'_0 + a'_2 t' \\ z_0 + a_3 t = z'_0 + a'_3 t' \end{cases}$ có đúng một nghiệm.

» d và d' chéo nhau $\Leftrightarrow \vec{a}$ và $\vec{a}'$ không cùng phương và $\begin{cases} x_0 + a_1 t = x'_0 + a'_1 t' \\ y_0 + a_2 t = y'_0 + a'_2 t' \\ z_0 + a_3 t = z'_0 + a'_3 t' \end{cases}$ vô nghiệm.

Hoặc ta có thể áp dụng theo sơ đồ sau:



Ví dụ 7.1.

Trong không gian $Oxyz$, xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau:

(1) $d:\begin{cases}x=1+t\\y=2t\\z=3-t\end{cases}\left(t\in\mathbb{R}\right)$ và $d':\begin{cases}x=2+2t'\\y=3+4t'\\z=5-2t'\end{cases}\left(t'\in\mathbb{R}\right)$

(2) $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+3t\\z=5+t\end{cases}\left(t\in\mathbb{R}\right)$ và $d':\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+1}{2}$

(3) $d:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{2}$ và $d':\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+2}{-2}$

Lời giải

Ví dụ 7.1.

Trong không gian $Oxyz$, cho $d_1: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{-3}$ và $d_2: \begin{cases} x=2t \\ y=-3-t \\ z=0 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(1) d_1 và d_2 đồng phẳng.

(2) d_1 cắt và vuông góc với d_2.

(3) d_1 vuông góc d_2 và không cắt nhau.

(4) d_1 song song với d_2.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 8. Bài toán thực tế

Ví dụ 8.1.

Trong một khu du lịch, người ta cho du khách trải nghiệm thiên nhiên bằng cách đu theo đường trượt zipline từ vị trí A cao 15 m của tháp 1 này sang vị trí B cao 10 m của tháp 2 trong khung cảnh tuyệt đẹp xung quanh. Với hệ trục toạ độ ***Oxyz*** cho trước (đơn vị: mét), toạ độ của A và B lần lượt là $(3;2,5;15)$ và $(21;27,5;10)$

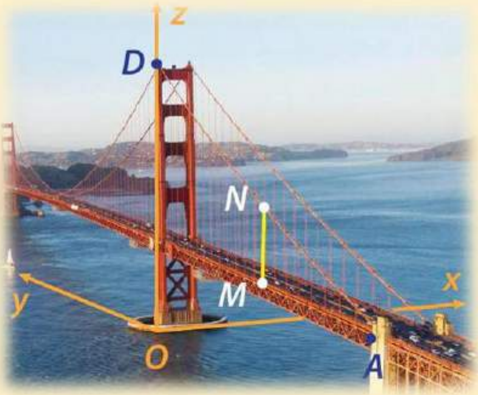
(1) Viết phương trình đường thẳng chứa đường trượt zipline này.

(2) Xác định toạ độ của du khách khi ở độ cao 12 mét.

Lời giải

Ví dụ 8.2.

Cầu Cổng Vàng *(The Golden Gate Bridge)* ở Mỹ. Xét hệ trục toạ độ $Oxyz$ với O là bệ của chân cột trụ tại mặt nước, trục Oz trùng với cột trụ, mặt phẳng (Oxy) là mặt nước và xem như trục Oy cùng phương với cầu như hình vẽ. Dây cáp AD (xem như là một đoạn thẳng) đi qua đỉnh D thuộc trục Oz và điểm A thuộc mặt phẳng Oyz, trong đó điểm D là đỉnh cột trụ cách mặt nước $227m$, điểm A cách mặt nước $75m$ và cách trục Oz $343m$.



Giả sử ta dùng một đoạn dây nối điểm N trên dây cáp AD và điểm M trên thành cầu, biết M cách mặt nước $75\,m$ và MN song song với cột trụ.

(1) Tính độ dài MN, biết điểm M cách trục Oz một khoảng bằng $230\,m$.

(2) Người ta có thể dùng đoạn dây dài $100\,m$ để nối dây cáp AD với thành cầu tại vị trí điểm M cách trục Oz một khoảng bằng 148 m không? Vì sao?

(nguồn ảnh: https://www.goldengate.org/assets/1/6/ggb-exhibit-chapter-statistics.pdf).

Lời giải

....

C Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Cho đường thẳng Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;-4;-6)$. Vectơ nào sau đây không phải là vectơ chỉ phương của Δ?

A. $\vec{u}_1=(1;-2;-3)$. **B.** $\vec{u}_2=(-1;2;3)$. **C.** $\vec{u}_3=(-2;-4;6)$. **D.** $\vec{u}_4=(-3;6;9)$.

» Câu 2. Cho đường thẳng Δ có phương trình $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-1}{4}$. Vectơ nào sau đây là vectơ chỉ phương của Δ?

A. $\vec{u}_1=(-1;2;-1)$. **B.** $\vec{u}_2=(1;-2;1)$. **C.** $\vec{u}_3=(-3;2;-4)$. **D.** $\vec{u}_4=(3;2;4)$.

» Câu 3. Cho đường thẳng Δ có phương trình $\begin{cases}x=3-t\\y=-1\\z=3t\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$. Vectơ nào sau đây là vectơ chỉ phương của Δ?

A. $\vec{u}_1=(3;-1;3)$. **B.** $\vec{u}_2=(3;-1;0)$. **C.** $\vec{u}_3=(-1;-1;3)$. **D.** $\vec{u}_4=(-1;0;3)$.

» Câu 4. Cho đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (Oxy). Vectơ nào sau đây là vectơ chỉ phương của Δ?

A. $\vec{i}=(1;0;0)$. **B.** $\vec{j}=(0;1;0)$. **C.** $\vec{k}=(0;0;1)$. **D.** $\vec{u}=(1;1;0)$.

» Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, phương trình chính tắc của đường thẳng AB với $A(1;1;2)$ và $B(-4;3;-2)$ là:

A. $\dfrac{x+4}{1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z+2}{-2}$. **B.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-2}{-2}$.

C. $\dfrac{x+1}{-5}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+2}{-4}$. **D.** $\dfrac{x+4}{-5}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+2}{-4}$.

» Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $A(2;0;-1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): 2x-y+z+3=0$ là:

A. $\begin{cases}x=2+2t\\y=-t\\z=-1+t\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$. **B.** $\begin{cases}x=2+2t\\y=-1\\z=1-t\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$.

C. $\begin{cases}x=2+2t\\y=-1\\z=-1+t\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$. **D.** $\begin{cases}x=2+2t\\y=-t\\z=1-t\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$.

» Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua hai điểm $A(1;-3;5)$, $B(2;-1;7)$ có phương trình chính tắc là

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-7}{2}$. **B.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-5}{-2}$.

C. $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z-5}{-2}$. **D.** $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+5}{-2}$.

» Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có phương trình $\frac{x-1}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-7}{5}$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng Δ?

A. $M(1;-3;5)$. **B.** $N(2;-1;7)$. **C.** $P(1;-3;7)$ **D.** $Q(3;-5;7)$.

» Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có phương trình $\begin{cases}x=3-t\\y=1+3t\\z=2t\end{cases}$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng Δ?

A. $M(3;1;2)$. **B.** $N(3;1;0)$. **C.** $P(-1;3;2)$ **D.** $Q(-1;-3;0)$.

» Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng nào dưới đây đi qua điểm $A(3;-3;2)$

A. $\frac{x-3}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+2}{2}$. **B.** $\frac{x+3}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+2}{-2}$.

C. $\frac{x-3}{-1}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z-2}{2}$. **D.** $\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z+5}{2}$.

» Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây **không** thuộc đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=5-3t\\y=1-t\\z=2+2t\end{cases}$.

A. $M(3;1;-2)$. **B.** $N(5;1;2)$. **C.** $P(-1;-1;6)$ **D.** $Q(2;0;4)$.

» Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1:\begin{cases}x=5-2t\\y=5+3t\\z=2t\end{cases}$, $\Delta_2:\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-6}{4}$.

Góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 bằng

A. 30^o. **B.** 90^o. **C.** 60^o **D.** 45^o.

» Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{-2}$, $d_2:\frac{x+2}{-2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2}$.

Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng đã cho.

A. Chéo nhau. **B.** Trùng nhau. **C.** Song song. **D.** Cắt nhau.

» Câu 14. Trên một phần mềm đã thiết kế sân khấu 3D trong không gian $Oxyz$. Tính cos giữa hai tia sáng có phương trình lần lượt là $d_1:\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}$, $d_2:\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{9}$.

A. $-\frac{1}{2}$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{2}$.

» Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Gọi M_1, M_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên các trục Ox, Oy. Vectơ nào dưới đây là một véctơ chỉ phương của đường thẳng M_1M_2?

A. $\overrightarrow{u_4}=(-1;2;0)$ **B.** $\overrightarrow{u_1}=(0;2;0)$ **C.** $\overrightarrow{u_2}=(1;2;0)$ **D.** $\overrightarrow{u_3}=(1;0;0)$

» Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, tọa độ nào sau đây là tọa độ của một véctơ chỉ phương của đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=2+4t\\y=1-6t\\z=9t\end{cases},(t\in\mathbb{R})$?

A. $\left(\frac{1}{3};\frac{-1}{2};\frac{3}{4}\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$. **C.** $(2;1;0)$. **D.** $(4;-6;0)$.

» Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa hai đường thẳng $d_1:\frac{x}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{2}$ và $d_2:\frac{x+1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{1}$

A. 45°. **B.** 30°. **C.** 60°. **D.** 90°.

» Câu 18. Tính cosin góc giữa đường thẳng d với trục Ox biết $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{1}$.

A. $\frac{\sqrt{2}}{6}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

» Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=6+5t\\y=2+t\\z=1\end{cases}$ và mặt phẳng $(P):3x-2y+1=0$. Góc hợp bởi giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) bằng

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 90°.

» Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{2}$ và mặt phẳng $(\alpha):x+y-z-2=0$. Cosin của góc tạo bởi đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) bằng

A. $-\frac{\sqrt{78}}{9}$. **B.** $-\frac{\sqrt{3}}{9}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{9}$. **D.** $\frac{\sqrt{78}}{9}$.

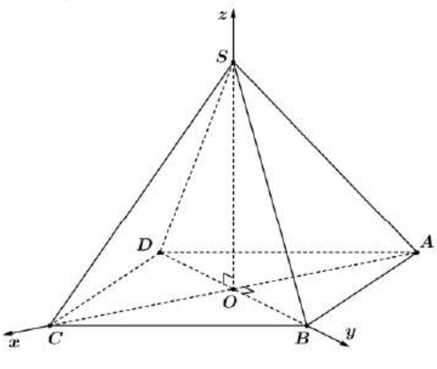
» Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P):2x-y-z-3=0$ và $(Q):x-z-2=0$. Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 90°.

» Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(1;0;0)$, $N(0;1;0)$ và $P(0;0;1)$. Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (MNP) và mặt phẳng (Oxy) bằng

A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

» Câu 23. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$, chiều cao bằng $2a$ và O là tâm của đáy. Bằng cách thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ bên dưới, khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB) bằng



A. $\frac{2a}{3}$. **B.** $\frac{2a}{\sqrt{17}}$. **C.** $\frac{4a}{\sqrt{17}}$. **D.** $\frac{4a}{3}$.

» Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. Cho biết $AB = 2a, AD = 3a$ và $SA = 2a$. Cosin góc giữa hai đường thẳng SC và BD bằng

A. $-\frac{5}{\sqrt{221}}$. **B.** $\frac{5}{\sqrt{221}}$. **C.** $\frac{3}{\sqrt{221}}$. **D.** $-\frac{3}{\sqrt{221}}$.

» Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, với mặt phẳng (Oxy) là mặt đất, một máy bay cất cánh từ vị trí $A(0;10;0)$ với vận tốc $\vec{v} = (150;150;40)$. Tính góc nâng của máy bay (góc giữa hướng chuyển động bay lên của máy bay với đường băng và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

A. $10°$. **B.** $12°$. **C.** $11°$. **D.** $9°$.

B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai

» Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho các đường thẳng $\Delta_1 : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - 3t \ (t \in \mathbb{R}) \\ z = 3 + 4t \end{cases}$,

$\Delta_2 : \frac{x-1}{3} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{2}$ và mặt phẳng $(P): x + 3y - 2z + 1 = 0$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ_1 là $\vec{a} = (1;-3;4)$		
(b)	Đường thẳng d_1 vuông góc với (P) có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1;3;-2)$		
(c)	Đường thẳng d_2 vuông góc với Δ_2 và song song với mặt phẳng (Oxy) có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_2 = (3;-3;2)$		
(d)	Đường thẳng d_3 qua $A(1;-1;2)$, cắt và vuông góc với trục Oz có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_3 = (-1;-1;0)$		

» Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1 : \frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+3}{2}$; $d_2 : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 + t \\ z = 2 - mt \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y + z - 3 = 0$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Khi $m = 0$, số đo góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 bằng $135°$		

(b)	$\cos\left(d_1, Ox\right) = \dfrac{-1}{3}$		
(c)	Đường thẳng Δ đi qua gốc toạ độ O và vuông góc với (P) tạo với đường thẳng d_1 một góc α có $\cos\alpha = \dfrac{4}{9}$		
(d)	Khi $m = \dfrac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}$, $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản, số đo góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 bằng 90°. Giá trị biểu thức $a^2 + b^2 = 13$		

» Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-2}{3}$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - z + 2025 = 0$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Số đo góc giữa hai đường thẳng Δ và (P) bằng 90°		
(b)	Biết hình chiếu của O lên (P) là $H(3;-1;2)$. α là số đo góc giữa (P) và đường thẳng Δ, $\cos\alpha = \dfrac{1}{14}$		
(c)	Đường thẳng d_1 là giao tuyến của (P) và (Oxy). Gọi β là góc giữa d_1 và mặt phẳng (Oxz). Khi đó $\beta > 30^\circ$		
(d)	Đường thẳng d_2 vuông góc với (P) tạo với $(Q): x + my - 3 = 0$ một góc 30°. Khi đó tổng tất cả các giá trị của tham số m bằng $\dfrac{-16}{5}$.		

» Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABC$ có ba điểm $S(0;0;3)$, $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(0;2;0)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng ? Khẳng định nào sai ?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Côsin góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (ABC) bằng 0		
(b)	Côsin góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC) bằng $\dfrac{2}{7}$		
(c)	Côsin góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (P) bằng $\dfrac{10\sqrt{3}}{21}$		
(d)	Góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (ABC) bằng 90°		

» Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = -1 + 4t \end{cases}$ và $d': \dfrac{x+4}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-4}{-1}$; $(\Delta): \dfrac{x-2}{-3} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$ Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng ? Khẳng định nào sai ?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hai đường thẳng d và d' vuông góc với nhau		
(b)	Hai đường thẳng d và d' cắt nhau tại điểm có tọa độ $(-1;0;3)$		

(c)	Hai đường thẳng d' và (Δ) song song hoặc trùng nhau		
(d)	Hai đường thẳng d' và (Δ) trùng nhau		

» Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, Hai máy bay cùng xuất phát từ hai phi trường, trên màn hình rađa của trạm điều khiển (với đơn vị trên ba trục chính theo đơn vị km), sau khi xuất phát t giờ $(t \geq 0)$, vị trí của máy bay số một được xác định bởi công thức $\begin{cases} x = 20 + 2t \\ y = 20 + t \\ z = -10 - t \end{cases}$, vị trí máy bay số hai có tọa độ là $(30 + t'; 20 + t'; -10 - t')$ Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng ? Khẳng định nào sai ?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Côsin góc giữa hai máy bay số một và máy bay số hai là $\frac{5\sqrt{2}}{6}$		
(b)	Sau 10 giờ kể từ thời điểm bay hai máy bay gần nhau nhất		
(c)	Nếu máy bay số một vẫn ở phi trường (đứng ở vị trí ban đầu) thì vị trí tọa độ của máy bay là $(20; 20; -10)$		
(d)	Sau 5 giờ thì vị trí tọa dộ máy bay số 2 trong không gian là $(35; 25; -10)$		

» Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, một cabin cáp treo xuất phát từ điểm $A(10; 3; 0)$ và chuyển động đều theo đường cáp có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; -2; 1)$ với tốc độ là $4{,}5\,\text{m/s}$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét).

Các khẳng định sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Phương trình tham số của đường cáp là: $\begin{cases} x = 10 + 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.		
(b)	Giả sử sau thời gian $t(\text{s})$ kể từ lúc xuất phát $(t \geq 0)$, cabin đến điểm M. Khi đó tọa độ điểm M là $M\left(3t + 10; -3t + 3; \frac{3t}{2}\right)$		
(c)	Cabin dừng ở điểm B có hoành độ $x_B = 550$, khi đó quảng đường AB dài 800m.		
(d)	Đường cáp AB tạo với mặt phẳng (Oxy) một góc 30°.		

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;2;-4)$ và hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$. Gọi H là hình chiếu của A trên đường thẳng d_1. Đường thẳng AH có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(a;b;c)$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Khi đó $2a-b+c$ bằng

Điền đáp số: ☐

» Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-3;5)$ có hình chiếu vuông góc trên các trục Ox, Oy, Oz là B, C, D. Gọi H là trực tâm tam giác BCD. Phương trình chính tắc của đường thẳng OH có dạng $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{-b}=\dfrac{z}{-c}$. Khi đó $a+b+c$ bằng

Điền đáp số: ☐

» Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$ và mặt phẳng $(\alpha):x-2y-2z+5=0$. Điểm $A(a;b;c)$ có hoành độ dương thuộc đường thẳng d sao cho khoảng cách từ A đến (α) bằng 3. Tính tổng $a+b-c$?

Điền đáp số: ☐

» Câu 36. Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{2}$, $d_2:\begin{cases}x=2t\\y=1\\z=1-t\end{cases}$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng d_1,d_2. Giá trị $\cos\varphi$ có dạng $\dfrac{a\sqrt{c}}{b}$. Tính giá trị biểu thức $P=b-3a+c$?

Điền đáp số: ☐

» Câu 37. Trong không gian $Oxyz$ cho tam giác ABC có $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Tọa độ chân đường phân giác góc ABC của tam giác ABC là $I(a;b;c)$. Tính tổng $a+b+c$?

Điền đáp số: ☐

» Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=1+2t\\y=2+t\\z=-2-t\end{cases}$ và $(P):-x+2y+2z+5=0$. Gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(-1;0;-1)$ cắt đường thẳng Δ_1 và tạo với đường thẳng Δ_2 một góc nhỏ nhất. Vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}=(a;b;c)$. Tính tổng $a+2b-3c$?

Điền đáp số: ☐

» Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):ax+by+cz-1=0$ với $c<0$ đi qua 2 điểm $A(0;1;0);B(1;0;0)$ và tạo với (Oyz) một góc $60°$. Tính tổng $a+b+c$? *(Làm tròn đến hàng phần trăm)*

Điền đáp số: ☐

» **Câu 40.** Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=4+t\\y=-4-t\\z=6+2t\end{cases};d_2:\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-11}{4}=\dfrac{z-5}{2}$.

Đường thẳng d đi qua $A(5;-3;5)$ cắt d_1,d_2 lần lượt ở B,C. Tính tỉ số $\dfrac{AB}{AC}$

Điền đáp số: ☐

» **Câu 41.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, thỏa mãn điều kiện, $AB=BC=a$, $AD=2a$, SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$, $SA=a$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SB,CD. Tính cosin của góc giữa MN và (SAC). *(Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)*

Điền đáp số: ☐

» **Câu 42.** Một phần mềm mô phỏng vận động viên đang tập bắn súng trong không gian $Oxyz$. Cho biết trục d của nòng súng có phương trình : $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-3}{-5}$ và hồng tâm $A(8;-19;6m+4)$. Hỏi m bằng bao nhiêu vận động viên có bắn trúng hồng tâm.

Điền đáp số: ☐

» **Câu 43.** Trong không gian $Oxyz$, một cabin cáp treo ở Bà Nà Hill xuất phát từ điểm $A(-2;1;5)$ và chuyển động đều theo đường cáp có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(0;-2;6)$ với tốc độ là 4 m/s (đơn vị trên mỗi trục toạ độ là mét). Giả sử sau 5 (s) kể từ lúc xuất phát , cabin đến điểm M. Gọi tọa độ $M(a;b;c)$. Tính $a+3b+c$.

Điền đáp số: ☐

» **Câu 44.** Trong không gian $Oxyz$, nhà công vụ của một trạm hải đăng nằm trên mặt phẳng $(P):x+2y+z-4=0$ và phương trình trạm hải đăng là đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{3}$. Người ta muốn làm một con đường Δ nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt và vuông góc với trạm hải đăng . Giả sử phương trình đường thẳng Δ có dạng $\dfrac{x-1}{a}=\dfrac{y-b}{-1}=\dfrac{z-d}{c}$. Hỏi có bao nhiêu số trong các số a,b,c,d chia hết cho 3

✍ **Điền đáp số:**

» Câu 45. Tại một nút giao thông có 2 con đường khác mức. Trên thiết kế, trong không gian $Oxyz$ hai con đường đó thuộc hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$; $d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-3}$.

Người ta muốn tạo một con đường Δ cắt d_1, d_2 lần lượt tại A và B sao cho AB nhỏ nhất. Tính độ dài AB, *kết quả làm tròn đến hàng phần trăm.*

✍ **Điền đáp số:**

-------------------- Hết --------------------

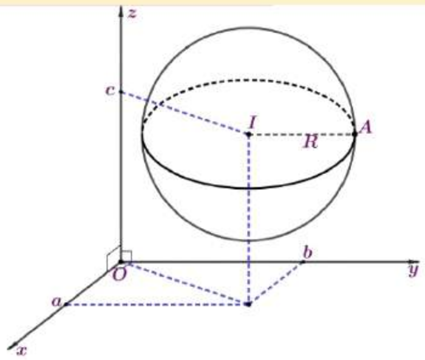
Chương 05 Bài 3. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU TRONG KHÔNG GIAN

A Lý thuyết

1. Phương trình mặt cầu

Phương trình mặt cầu:

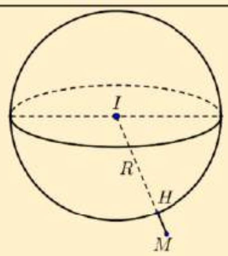
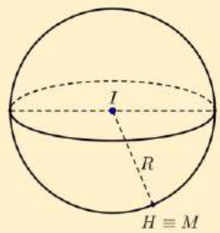
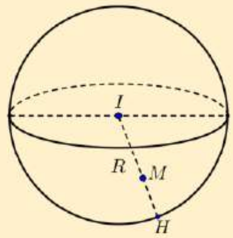
		LOẠI 1	LOẠI 2
Phương Trình		$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$	$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$
Xác Định	*Tâm*	Lấy hệ số tự do trong ngoặc $\div -1$.	Lấy hệ số trước $x;y;z$ $\div -2$.
	Bán Kính	Lấy căn bậc 2 vế phải.	$R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$. Điều kiện tồn tại: $a^2+b^2+c^2-d>0$.



2. Vị trí tương đối

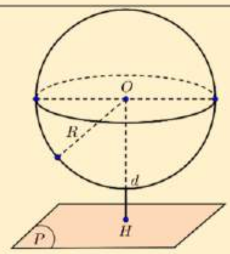
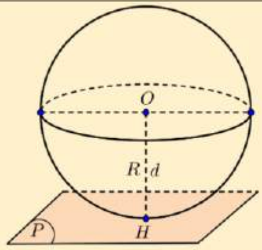
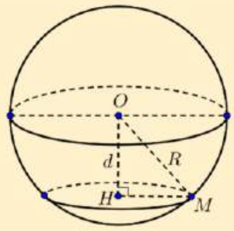
Giữa mặt cầu và điểm:

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M và $S(I;R)$. Khi đó:

	Điểm		
	Nằm ngoài $\Leftrightarrow IM\cap(S)=H$	*Nằm trên* $\Leftrightarrow IM\cap(S)=M\equiv H$	*Nằm trong* $\Leftrightarrow IM\cap(S)=\varnothing$
	$IM>R$	$IM=R$	$IM<R$
Mặt cầu			

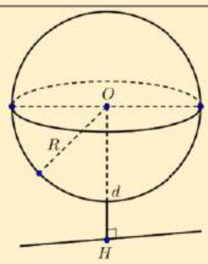
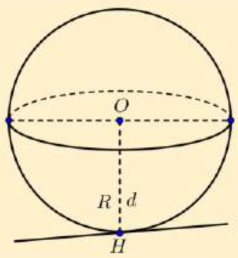
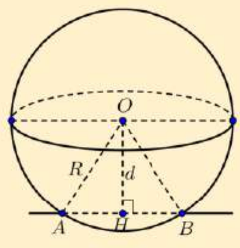
Giữa mặt cầu và mặt phẳng:

Trong không gian $Oxyz$, cho $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ và $S(I;R)$. Khi đó:

	Mặt phẳng		
Mặt cầu	***Không cắt*** $\Leftrightarrow (\alpha)\cap(S)=\varnothing$	***Tiếp xúc*** $\Leftrightarrow (\alpha)\cap(S)=\{M\}$	***Cắt theo giao tuyến là đường tròn*** $\Leftrightarrow (\alpha)\cap(S)=C(I';r)$
	$d(I;(\alpha))>R$	$d(I;(\alpha))=R$ $\Leftrightarrow$ Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu tại điểm M.	$d(I;(\alpha))<R$ $\Leftrightarrow$ (α) cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn có tâm I' và bán kính r. $R=\sqrt{r^2+d^2(I;(\alpha))}$.
			

Giữa mặt cầu và mặt phẳng:

Trong không gian $Oxyz$, cho $\Delta: \dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ và $S(I;R)$. Khi đó:

	Đường thẳng		
Mặt cầu	***Không cắt*** $\Leftrightarrow \Delta\cap(S)=\varnothing$	***Tiếp xúc*** $\Leftrightarrow \Delta\cap(S)=\{H\}$	***Cắt tại hai điểm A;B*** $\Leftrightarrow \Delta\cap(S)=\{A;B\}$
	$d(I;\Delta)>R$	$d(I;\Delta)=R$ $\Leftrightarrow$ Đường thẳng tiếp xúc mặt cầu tại điểm H	$d(I;\Delta)<R$ $\Leftrightarrow R=\sqrt{\dfrac{AB^2}{4}+d^2(I;\Delta)}$
			

B Các dạng bài tập

Dạng 1. Xác định tâm - bán kính - nhận biết phương trình mặt cầu

Phương pháp

		LOẠI 1	LOẠI 2
Phương Trình		$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$	$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$
Nhận xét		(1) Hệ số trước x,y,z bằng nhau và bằng 1. (2) Hệ số trước các ngoặc bằng nhau và bằng 1. (3) Vế phải là hằng số dương.	(1) Hệ số trước x^2,y^2,z^2 bằng nhau và bằng 1. (2) Phương trình đầy đủ x^2,y^2,z^2 (3) Thỏa mãn điều kiện tồn tại $a^2+b^2+c^2-d>0$
Xác Định	*Tâm*	Lấy hệ số tự do trong ngoặc $\div -1$.	Lấy hệ số trước $x;y;z$ $\div -2$.
	Bán Kính	Lấy căn bậc 2 vế phải.	$R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$. Điều kiện tồn tại: $a^2+b^2+c^2-d>0$.

- Định nghĩa $S(I;R)=\{M \mid IM=R>0\}$.
- Cho hai điểm A,B cố định.

  Nếu $MA\perp MB$ thì tập hợp điểm M là mặt cầu (S) có tâm I là trung điểm AB và bán kính $R=\dfrac{AB}{2}$

Ví dụ 1.1.

Trong không gian $Oxyz$, xác định tọa độ tâm và bán kính các mặt cầu sau:

(1) $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-2=0.$ (2) $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=9$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 1.2.

Trong không gian $Oxyz$, cho các phương trình sau:

(1) $2x^2+2y^2=(x+y)^2-z^2+2x-1-2xy$ (2) $x^2+y^2+z^2-2x+2y=0$

(3) $x^2+y^2+z^2+2x-2y+1=0$ (4) $(x+y)^2=2xy-z^2+1-4x$

Có bao nhiêu phương trình mặt cầu và mặt cầu đấy nhận $I(-1;1;0)$ làm tâm?

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 1.3.

Trong không gian $Oxyz$, cho các phương trình sau:

(1) $x^2+y^2+z^2-2x=0$ (2) $x^2+y^2-z^2+2x-y+1=0$

(3) $2x^2+2y^2=(x+y)^2-z^2+2x-1$ (4) $(x+y)^2=2xy-z^2-1$

Có bao nhiêu phương trình mặt cầu?

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 1.4.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;0;-1)$ và $B(0;6;0)$. Chứng minh rằng nếu điểm $M(x;y;z)$ thỏa mãn $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ thì M thuộc một mặt cầu (S). Tìm tâm và bán kính của mặt cầu (S).

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 1.5.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;2;-2)$; $B(3;-3;3)$. Điểm M trong không gian thỏa mãn $\frac{MA}{MB}=\frac{2}{3}$. Tính độ dài OM lớn nhất.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 2. Mặt cầu có tâm và đi qua một điểm

Phương pháp

▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S)

Loại	Phương pháp
Tâm $I(a;b;c)$ và bán kính R.	Từ giả thiết ta đã có sẵn tâm I và bán kính R. Phương trình $(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.
Tâm $I(a;b;c)$ và qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$.	≫ Bán kính mặt cầu $R=IM=\left\|\overrightarrow{IM}\right\|=\sqrt{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2+(z_0-c)^2}$. ≫ Mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R=IM$.

Ví dụ 2.1.

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình các mặt cầu sau:

(1) Tâm $I(-1;2;-3)$, bán kính $R=3$ (2) Tâm $I(0;-4;1)$ đường kính bằng 4.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2.2.

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình các mặt cầu sau:

(1) Tâm $I(-1;2;1)$ đi qua gốc tọa độ. (2) Tâm $I(1;2;3)$ đi qua điểm $A(1;1;2)$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 3. Mặt cầu có đường kính

Phương pháp

▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S)

Loại	Phương pháp
Nhận $M(x_M;y_M;z_M)$ và $N(x_N;y_N;z_N)$ làm đường kính	≫ Gọi I là tâm mặt cầu (S) $\Rightarrow I$ là trung điểm của MN $\Rightarrow I\left(\frac{x_M+x_N}{2};\frac{y_M+y_N}{2};\frac{z_M+z_N}{2}\right)$. ≫ Bán kính mặt cầu $R=\frac{MN}{2}=IM$.

Ví dụ 3.1.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;-3)$ và $B(3;2;1)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 3.2.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vecto $\overrightarrow{AO}=(-1;-2;3)$ và $\overrightarrow{BO}=(-7;-4;-5)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

Dạng 4. Mặt cầu qua 4 điểm không đồng phẳng

Phương pháp

▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S)

Loại	Phương pháp
Đi qua 4 điểm $A;B;C;D$ không đồng phẳng	≫ Gọi $I(a;b;c)$ là tọa độ tâm mặt cầu cần tìm. ≫ Mặt cầu (S) đi qua 4 điểm $\Leftrightarrow IA=IB=IC=ID \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2=IB^2 \\ IA^2=IC^2 \\ IA^2=ID^2 \end{cases} \Rightarrow$ tọa độ I. ≫ Mặt cầu có tâm và bán kính .

Ví dụ 4.1.

Trong không gian $Oxyz$, nếu mặt cầu $.(S).$ đi qua bốn điểm $M(2;2;2), N(4;0;2), P(4;2;0)$ và $Q(4;2;2)$ thì tâm I của (S) có tọa độ là?

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 4.2.

Trong không gian $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2;0;0)$, $B(0;2;0), C(0;0;2)$, $D(2;2;2)$. Viết phương trình mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 5. Mặt cầu có tâm thuộc đường thẳng/mặt phẳng

Phương pháp

▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S)

Loại	Phương pháp
Tâm $I\in(P)$ và đi qua $A;B;C$. *Với* $(P):\alpha.x+\beta.y+\gamma.z+\delta=0$ *hoặc* (P) *là các mặt phẳng* $(Oxy),(Oxz),(Oyz)$. ⌘ **Nhận xét:** *Trong trường hợp* $I\in$ *một trong các mặt phẳng* $(Oxy),(Oxz),(Oyz)$ *bài toán sẽ đơn giản hơn.*	≫ Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu ≫ Ta có $I\in(P)\Rightarrow\alpha.a+\beta.b+\gamma.c+\delta=0\ (1)$. ≫ Mặt cầu (S) đi qua ba điểm $A;B;C$ $\Leftrightarrow IA=IB=IC\Leftrightarrow\begin{cases}IA^2=IB^2\ (2)\\IA^2=IC^2\ (3)\end{cases}$. ≫ Từ $(1);(2)$ và $(3)\Rightarrow I$ là thỏa hệ: $\begin{cases}\alpha.a+\beta.b+\gamma.c+\delta=0\\IA^2=IB^2\\IA^2=IC^2\end{cases}\Rightarrow$ tọa độ I. ≫ Mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R=IA$.
Tâm $I\in d$ và đi qua $A;B$. *Với* $d:\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ *hoặc* d *là các trục* $Ox;Oy;Oz$. ⌘ **Nhận xét:** *Trong trường hợp* $I\in$ *một trong các trục* $Ox;Oy;Oz$ *bài toán sẽ đơn giản hơn.*	≫ Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu ≫ Ta có $I\in d\Rightarrow I(x_0+at;y_0+bt;z_0+ct)$. ≫ Viết $\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IB}$ theo t và tính độ dài $\left\|\overrightarrow{IA}\right\|;\left\|\overrightarrow{IB}\right\|$ ≫ Mặt cầu (S) đi qua hai điểm $A;B$ $\Leftrightarrow IA=IB\Leftrightarrow\left\|\overrightarrow{IA}\right\|=\left\|\overrightarrow{IB}\right\|\Rightarrow t=?$. ≫ Từ $t=?\Rightarrow$ tọa độ I. ≫ Mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R=IA$

Ví dụ 5.1.

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) đi qua 2 điểm $A(1;2;3),B(2;0;-2)$, và có tâm nằm trên trục Ox. Viết phương trình mặt cầu (S)?

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 5.2.

Trong không gian $Oxyz$, tìm bán kính mặt cầu qua 2 điểm $A(3;-1;2)$, $B(1;1;-2)$ và có tâm I thuộc $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1}$?

Lời giải

Ví dụ 5.3.

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu đi qua 3 điểm $A(-2;3;3), B(-1;1;2), C(4;2;2)$ và có tâm nằm thuộc mặt phẳng (Oyz).

Lời giải

Dạng 6. Mặt cầu tiếp xúc đường thẳng/mặt phẳng

Phương pháp

▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S)

Loại	Phương pháp
Tâm $I(a;b;c)$ và tiếp xúc với (P). *Với* $(P): Ax+By+Cz+D=0$ *hoặc* (P) *là các mặt phẳng* $(Oxy),(Oxz),(Oyz)$. ⌘ **Nhận xét:** *Trong trường hợp* I *tiếp xúc một trong các mặt phẳng* $(Oxy),(Oxz),(Oyz)$ *bài toán sẽ đơn giản hơn.*	≫ Bán kính mặt cầu $R=\left[\begin{array}{ll} d(I;(\alpha))=\dfrac{\lvert Aa+Bb+Cc+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} & \text{Tiep xuc } (\alpha) \\ d(I;(Oxy))=\sqrt{z_I^2} & \text{Tiep xuc } (Oxy) \\ d(I;(Oxz))=\sqrt{y_I^2} & \text{Tiep xuc } (Oxz) \\ d(I;(Oyz))=\sqrt{x_I^2} & \text{Tiep xuc } (Oyz) \end{array}\right.$. ≫ Mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R=d(I;(\alpha))$.
Tâm $I(a;b;c)$ và tiếp xúc với Δ. *Với* $\Delta: \dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ *hoặc* Δ *là các trục* $Ox;Oy;Oz$. ⌘ **Nhận xét:** *Trong trường hợp* I *tiếp xúc một trong các trục* $Ox;Oy;Oz$ *bài toán sẽ đơn giản hơn.*	≫ Bán kính mặt cầu $R=\left[\begin{array}{ll} d(I;\Delta)=\dfrac{\left\lvert\left[\vec{u};\overrightarrow{MI}\right]\right\rvert}{\lvert\vec{u}\rvert} & \text{Tiep xuc } \Delta \\ d(I;Ox)=\sqrt{y_I^2+z_I^2} & \text{Tiep xuc } Ox \\ d(I;Oy)=\sqrt{x_I^2+z_I^2} & \text{Tiep xuc } Oy \\ d(I;Oz)=\sqrt{x_I^2+y_I^2} & \text{Tiep xuc } Oz \end{array}\right.$. ≫ Mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R=d(I;\Delta)$.

Ví dụ 6.1.

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu tâm $I(1;-2;1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy).

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 6.2.

Trong không gian $Oxyz$, tìm bán kính mặt cầu đi qua điểm $B(1;3;0)$ và tiếp xúc với (Oyz) tại $M(0;3;-2)$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 6.3.

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-2;-4), B(2;3;4), C(3;5;7)$. Tìm phương trình mặt cầu có tâm là A và tiếp xúc với BC.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 6.4.

Trong không gian $Oxyz$, cho $B(1;1;9)$, $C(1;4;0)$. Mặt cầu (S) đi qua B và tiếp xúc với (Oxy) tại C có phương trình là?

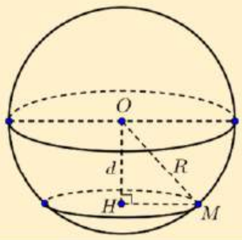
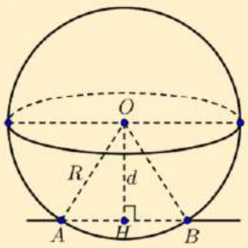
Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 7. Mặt cầu cắt đường thẳng/mặt phẳng

Phương pháp

▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S)

Loại	Phương pháp
Tâm $I(a;b;c)$ và cắt (P) theo giao tuyến là đường tròn tâm I' bán kính r. *Với* $(P): Ax+By+Cz+D=0$ *hoặc* (P) *là các mặt phẳng* $(Oxy),(Oxz),(Oyz)$. ⌘ **Nhận xét:** *Trong trường hợp* I *tiếp xúc một trong các mặt phẳng* $(Oxy),(Oxz),(Oyz)$ *bài toán sẽ đơn giản hơn.*	≫ Tính $d(I;(\alpha))=\dfrac{\lvert Aa+Bb+Cc+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ ≫ Bán kính: $R^2=d^2(I;(\alpha))+r^2=OH^2+HM^2$ ≫ Mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính R. 
Tâm $I(a;b;c)$ và cắt Δ tại $A(x_A;y_A;z_A)$, $B(x_B;y_B;z_B)$ và H là trung điểm AB. *Với* $\Delta:\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ *hoặc* Δ *là các trục* $Ox;Oy;Oz$. ⌘ **Nhận xét:** *Trong trường hợp* I *tiếp xúc một trong các trục* $Ox;Oy;Oz$ *bài toán sẽ đơn giản hơn.*	≫ Tính $d(I;\Delta)=\dfrac{\left\lvert\left[\vec{u};\overrightarrow{MI}\right]\right\rvert}{\lvert\vec{u}\rvert}$ ≫ Bán kính: $R^2=d^2(I;(\alpha))+AH^2=OH^2+\dfrac{AB^2}{4}$ ≫ Mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R=d(I;\Delta)$. 

Ví dụ 7.1.

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+3)^2+(z-4)^2=25$. Mặt phẳng (Oxy) cắt mặt cầu (S) có giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 7.2.

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(2;4;1)$ và $(P): x+y+z-4=0$. Tìm phương trình mặt cầu (S) tâm I sao cho (S) cắt (P) theo đường tròn có đường kính bằng 2

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 7.3.

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-2;-4;5)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu tâm là A và cắt trục Oz tại hai điểm B, C sao cho ΔABC vuông.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 7.4.

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;2)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$. Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A và B với $AB = 10$. Viết phương trình của mặt cầu (S).

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 8. Vị trí tương đối liên quan mặt cầu

Phương pháp

		Mặt cầu
Mặt phẳng	Tính $d\left(I;(P)\right)=\dfrac{\left\|ax_I+by_I+cz_I+d\right\|}{\left\|\vec{n}_{(P)}\right\|}$ và so sánh với bán kính R	
	$d\left(I;(P)\right)>R$	Mặt phẳng ***không cắt*** mặt cầu
	$d\left(I;(P)\right)=R$	Mặt phẳng ***tiếp xúc*** mặt cầu tại M
	$d\left(I;(P)\right)<R$	Mặt phẳng ***cắt*** mặt cầu
Đường thẳng	Tính $d\left(I;d\right)=\dfrac{\left\|\left[\vec{u};\overrightarrow{MI}\right]\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$ và so sánh với bán kính R	
	$d\left(I;d\right)>R$	Đường thẳng ***không cắt*** mặt cầu
	$d\left(I;d\right)=R$	Đường thẳng ***tiếp xúc*** mặt cầu
	$d\left(I;d\right)<R$	Đường thẳng ***cắt*** mặt cầu
Điểm	Tính IM và so sánh với bán kính R	
	$IM>R$	Điểm M ***nằm ngoài*** mặt cầu
	$IM=R$	Điểm M ***nằm trên*** mặt cầu
	$IM<R$	Điểm M ***nằm trong*** mặt cầu

Ví dụ 8.1.

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z-3=0$ và một điểm $M(4;2;-2)$. Xét vị trí của điểm M so với mặt cầu (S)

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 8.2.

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x-2y+2z-1=0$ và mặt phẳng $(P):2x+y-2z+1=0$. Xét vị trí của mặt phẳng (P) so với mặt cầu (S)

Lời giải

Ví dụ 8.3.

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $(\Delta): \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z}{-2}$ và và mặt cầu (S) : $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z+2=0$. Số điểm chung của (Δ) và (S) là?

Lời giải

Ví dụ 8.4.

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) lần lượt có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z-6=0$, $2x+2y+z+2m=0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để (P) tiếp xúc với (S)?

Lời giải

Ví dụ 8.5.

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=1$ và đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{m} = \dfrac{z}{-1}$. Giá trị của m để Δ không cắt mặt cầu (S) là ?

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 9. Bài toán thực tế

Ví dụ 9.1.

Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là kilomet), một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu phát được đặt tại điểm $I(6;-2;4)$.

(1) Cho biết bán kính phủ sóng của trạm là 3 km. Viết phương trình mặt cầu (S) biểu diễn ranh giới của vùng phủ sóng.

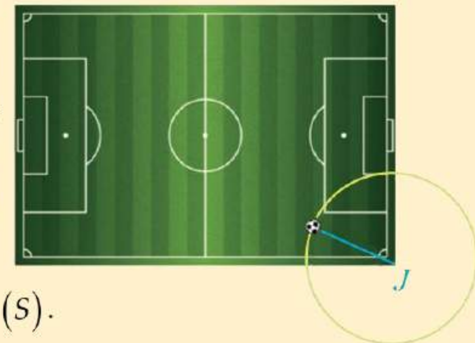
(2) Một người sử dụng điện thoại tại điểm $M(5;2;-2)$. Hãy cho biết điểm M nằm trong hay nằm ngoài mặt cầu (S) và người đó có thể sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên hay không.

(3) Câu hỏi tương tự đối với người sử dụng điện thoại ở điểm $N(6;0;3)$.

Lời giải

Ví dụ 9.2.

Công nghệ hỗ trợ trọng tài VAR (Video Assistant Referee) thiết lập một hệ tọa độ $Oxyz$ để theo dõi vị trí của quả bóng M. Cho biết M đang nằm trên mặt sân có phương trình $z=0$, đồng thời thuộc mặt cầu $(S):(x-32)^2+(y-50)^2+(z-8)^2=100$ (đơn vị độ dài tính theo mét).



(1) Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S).

(2) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc J của tâm I trên mặt sân.

(3) Tính khoảng cách từ vị trí M của quả bóng đến điểm J.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

C Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+(y-4)^2+(z-1)^2=25$. Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) là

A. $I(0;-4;-1), R=25$. **B.** $I(0;-4;-1), R=5$.

C. $I(0;4;1), R=25$. **D.** $I(0;4;1), R=5$.

» Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-6x+4y-8z+4=0$. Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) là

A. $I(-3;2;-4), R=25$. **B.** $I(3;-2;4), R=5$.

C. $I(3;-2;4), R=25$. **D.** $I(-3;2;-4), R=5$.

» Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-4x+8y-2z-4=0$. Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) là

A. $I(2;-4;1), R=5$. **B.** $I(-2;4;-1), R=25$.

C. $I(2;-4;1), R=\sqrt{21}$. **D.** $I(-2;4;-1), R=21$.

» Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$. Điểm có tọa độ nào sau đây nằm trên mặt cầu?

A. $(-1;2;-3)$. **B.** $(1;-2;-1)$. **C.** $(1;-2;1)$. **D.** $(1;-2;3)$.

» Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+(y-1)^2+z^2=2$. Trong các điểm cho dưới đây, điểm nào nằm ngoài mặt cầu (S)?

A. $M(1;1;1)$ **B.** $N(0;1;0)$ **C.** $P(1;0;1)$ **D.** $Q(1;1;0)$

» Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z-3=0$ và một điểm $M(4;2;-2)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Điểm M là tâm của mặt cầu (S). **B.** Điểm M nằm trên mặt cầu (S).

C. Điểm M nằm trong mặt cầu (S). **D.** Điểm M nằm ngoài mặt cầu (S).

» Câu 7. Phương trình nào sau đây là phương trình của mặt cầu?

A. $(x-1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=3$. **B.** $(x-1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=-3$.

C. $(x-1)+(y-3)+(z+2)=9$. **D.** $(x-1)+(y-3)+(z+2)=-9$.

» Câu 8. Điều kiện để phương trình $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ là phương trình mặt cầu?

A. $a+b+c-d>0$. **B.** $a^2+b^2+c^2+d>0$.

C. $a^2+b^2+c^2-d>0$. **D.** $a^2+b^2+c^2-d\geq 0$.

» Câu 9. Trong các phương trình sau, phương trình nào không phải là phương trình của mặt cầu?

A. $x^2+y^2+z^2=1$. **B.** $x^2+y^2+z^2+2x+2y-4z+11=0$.

C. $x^2+y^2+z^2+2x+4y-4z-21=0$. **D.** $2x^2+2y^2+2z^2+4x+4y-8z-10=0$.

» Câu 10. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình của mặt cầu tâm $I(1;-2;3)$ bán kính $R=3$

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=3$. **B.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$.

C. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=3$. **D.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9$.

» Câu 11. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình của mặt cầu tâm $I(-1;2;-3)$ và đi qua điểm $M(0;3;2)$

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=13$. **B.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=\sqrt{13}$.

C. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=27$. **D.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=\sqrt{27}$

» Câu 12. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình của mặt cầu tâm $I(0;3;1)$ bán kính $R=2$

A. $x^2+y^2+z^2+6y+2z+6=0$. **B.** $x^2+y^2+z^2+6y+2z-6=0$.

C. $x^2+y^2+z^2-6y-2z-6=0$. **D.** $x^2+y^2+z^2-6y-2z+6=0$.

» Câu 13. Xác định tâm và bán kính của mặt cầu $x^2+y^2+z^2+8x-6y+2z-10=0$.

A. Tâm $I(-4;3;-1)$ và bán kính $R=6$. **B.** Tâm $I(-4;3;-1)$ và bán kính $R=36$.

C. Tâm $I(4;-3;1)$ và bán kính $R=6$. **D.** Tâm $I(4;-3;1)$ và bán kính $R=36$.

» Câu 14. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là kilomet), một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu phát được đặt tại điểm $I(-6;-1;4)$. Cho biết bán kính phủ sóng của trạm là $2\,km$. Người sử dụng điện thoại đứng ở điểm nào sau đây thì sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên?

A. $A(-4;0;2)$ **B.** $B(-5;-2;5)$. **C.** $C(-6;2;2)$ **D.** $D(0;-1;4)$

» Câu 15. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là kilomet), một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu phát được đặt tại điểm $I(-6;-1;4)$. Cho biết bán kính phủ sóng của trạm là $2\,km$. Người sử dụng điện thoại đứng ở điểm nào sau đây thì **không** sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên?

A. $A(-5;0;3)$ **B.** $B(-5;-2;5)$. **C.** $C(-6;2;2)$ **D.** $D(-7;-2;3)$

» Câu 16. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình của mặt cầu?

A. $x^2+y^2+z^2+2x+2y-2z+4=0$ **B.** $x^2+y^2+z^2+4x-2y+2z+6=0$

C. $x^2+y^2+z^2+2x-6y+4z+14=0$ **D.** $x^2+y^2+z^2+8x-6y+2z-10=0$

» Câu 17. Trong các phương trình sau, có bao nhiêu phương trình là phương trình của mặt cầu?

(i). $x^2+y^2+z^2+4z-32=0$ *(ii).* $x^2+y^2+z^2+2x+2y-2z+4=0$

(iii). $x^2+y^2+z^2+2x-6y+4z-10=0$ *(iv).* $x^2+y^2+z^2+8x-6y+2z-4=0$

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

» Câu 18. Viết phương trình mặt cầu có tâm $M(3;1;-4)$ và đi qua điểm $N(1;0;1)$.

A. $(x+3)^2+(y+1)^2+(z-4)^2=30$ **B.** $(x-3)^2+(y-1)^2+(z+4)^2=30$

C. $(x-3)^2+(y-1)^2+(z+4)^2=\sqrt{30}$ **D.** $(x-3)^2-(y-1)^2-(z+4)^2=30$

» **Câu 19.** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(3;4;2)$. Phương trình mặt cầu tâm I và tiếp xúc với trục Oz là

A. $(x-3)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=16$. **B.** $(x-3)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=4$.

C. $(x-3)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=5$. **D.** $(x-3)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=25$.

» **Câu 20.** Trong không gian $Oxyz$, cho $(S): x^2+y^2+z^2-4x-2y+10z-14=0$. Mặt phẳng $(P): -x+4z+5=0$ cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn (C). Toạ độ tâm H của (C) là

A. $H(-3;1;-2)$. **B.** $H(-7;1;-3)$. **C.** $H(9;1;1)$. **D.** $H(1;1;-1)$.

» **Câu 21.** Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$. Gọi (S) là mặt cầu có bán kính $R=5$, có tâm I thuộc đường thẳng d và tiếp xúc với trục Oy. Biết rằng I có tung độ dương. Điểm nào sau đây thuộc mặt cầu (S)?

A. $M(-1;-2;1)$. **B.** $N(3;2;-1)$. **C.** $P(-5;2;-7)$. **D.** $Q(5;-2;7)$.

» **Câu 22.** Trong không gian $Oxyz$, một thiết bị phát sóng đặt tại vị trí $A(3;0;0)$. Vùng phủ sóng của thiết bị có bán kính bằng 5. Hỏi vị trí của điểm nào sau đây không thuộc vùng phủ sóng của thiết bị nói trên?

A. $M(5;0;0)$. **B.** $N(3;2;-1)$. **C.** $P(-1;3;1)$. **D.** $Q(0;-2;0)$.

» **Câu 23.** Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $OABC$ có tọa độ đỉnh $A(m;\ m;\ 0)$, $B(0;\ m;\ m)$, $C(m;\ 0;\ m)$. Biết tứ diện $OABC$ có bán kính mặt cầu (S) nội tiếp bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Khi đó phương trình mặt cầu (S) là

A. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=\dfrac{1}{3}$. **B.** $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=\dfrac{1}{3}$.

C. $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=\dfrac{1}{3}$. **D.** $(x+2)^2+(y+2)^2+(z+2)^2=\dfrac{1}{3}$.

» **Câu 24.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-4x+12y+6z+24=0$. Hai điểm M,N thuộc (S) sao cho $MN=8$ và $OM^2-ON^2=-112$. Khoảng cách từ O đến đường thẳng MN bằng

A. 4. **B.** 3. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{3}$.

B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai

» **Câu 25.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(C): (x-1)^2+(y+2)^2+z^2=16$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Điểm $A(1;2;-1)$ nằm bên ngoài mặt cầu (C).		
(b)	Điểm $B(0;0;1)$ nằm bên trong mặt cầu (C).		
(c)	Điểm $C(0;2;1)$ nằm trên mặt cầu (C).		
(d)	Với điểm $D(2;1;-1)$, ta có $ID<4$.		

» **Câu 26.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$ có tâm I và bán kính R.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;2)$, bán kính $R=3$.		
(b)	Điểm $A(0;2;-3)$ nằm trong mặt cầu.		
(c)	Điểm $J(1;2;3)$ nằm ngoài mặt cầu và khoảng cách từ tâm I đến điểm J bằng $\sqrt{10}$.		
(d)	Khoảng cách từ tâm I đến tâm mặt cầu $(S'): x^2+y^2+(z-1)^2=3$ bằng $\sqrt{2}$.		

» Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y+1=0$ có tâm I và bán kính R.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;0)$ và bán kính $R=2$.		
(b)	Bán kính của mặt cầu (S) là đoạn IM với điểm $M(1;1;2)$.		
(c)	Mặt cầu (S) có đường kính AB với $A(0;1;-2)$ và $B(2;-1;-4)$.		
(d)	Mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x+y-z-2=0$.		

» Câu 28. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$ và $C(0;0;3)$. Khi đó

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Mặt cầu tâm B, bán kính $R=3$ có phương trình là $x^2+(y-2)^2+z^2=3$.		
(b)	Mặt cầu tâm A, đi qua B có phương trình là $(x-1)^2+y^2+z^2=5$.		
(c)	Mặt cầu nhận BC làm đường kính có phương trình là $x^2+(y-1)^2+(z-3)^2=\frac{13}{4}$.		
(d)	Mặt cầu tâm O và có bán kính $R=OG$ với G là trọng tâm ΔABC, có phương trình là $x^2+y^2+z^2=\frac{14}{9}$.		

» Câu 29. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một ngọn hải đăng (xem hình vẽ) được đặt ở vị trí $I(25;30;50)$. Mặt cầu (S) mô tả ranh giới của vùng phủ sáng trên biển của hải đăng, biết rằng ngọn hải đăng đó được thiết kế với bán kính phủ sáng $R=5$km.

(Nguồn: https://shutterstock.com

	Mệnh đề	Đúng	Sai

(a)	Mặt cầu (S) có phương trình là $(x-25)^2+(y-30)^2+(z-50)^2=25$.		
(b)	Điểm $A(1025;30;50)$ nằm bên trong mặt cầu (S).		
(c)	Một người đi biển ở vị trí $M(45;60;50)$ thì có thể được chiếu sáng bởi ánh sáng của ngọn hải đăng.		
(d)	Một người đi biển ở vị trí $N(5125;30;0)$ thì **không** thể được chiếu sáng bởi ánh sáng của ngọn hải đăng.		

» Câu 30. Trong không gian $Oxyz$ cho hình hộp chữ nhật $OABC.O'A'B'C'$ với O là gốc tọa độ, $A(2;0;0)$, $C(0;3;0)$, $O'(0;0;4)$. Ta có

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Mặt cầu tâm O, bán kính OA có phương trình là $x^2+y^2+z^2=2$.		
(b)	Mặt cầu tâm A, đi qua C có phương trình là $(x-2)^2+y^2+z^2=13$.		
(c)	Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên (ACO'), mặt cầu tâm O đi qua H có phương trình là $x^2+y^2+z^2=\dfrac{12}{61}$.		
(d)	Mặt cầu đi qua các đỉnh của hình hộp có phương trình là $(x-1)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2+(z-2)^2=\dfrac{29}{4}$.		

» Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: x=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 3x+y-z-5=0$. Mặt cầu (S) có tâm I thuộc đường thẳng d và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn lớn nhất có bán kính $r=5$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Mặt phẳng $(P): 3x+y-z-5=0$ có VTPT $\vec{n}=(3;1;-1)$.		
(b)	Tọa độ tổng quát của tâm I là $(t;-1+2t;-2-t)$.		
(c)	$d(I,(P))=3$.		
(d)	Mặt cầu (S) có phương trình là $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=25$.		

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» Câu 32. Trong không gian Oxy, tổng tất cả bao nhiêu số tự nhiên của tham số m để phương trình $x^2+y^2+z^2+2(m-2)y-2(m+3)z+3m^2+7=0$ là phương trình của một mặt cầu.

Điền đáp số: ☐

» Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;m;1)$ và mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2y+4z-9=0$. Tập các giá trị của m để điểm A nằm trong khối cầu có dạng $(a;b)$ với $a;b$ là các số nguyên. Giá trị của a^b bằng.

Điền đáp số: ☐

» Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, có bao nhiêu giá trị nguyên dương m để phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z+m=0$ là phương trình của một mặt cầu?

Điền đáp số: ☐

» Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;-3;2)$ và đi qua $A(5;-1;4)$ có dạng $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$. Tính giá trị biểu thức $T=a+b+c+R^2$.

Điền đáp số: ☐

» Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-4)$, $B(1;-3;1)$, $C(2;2;3)$. Tính đường kính l của mặt cầu (S) đi qua ba điểm trên và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy) *(làm tròn kết quả đến hàng phần chục).*

Điền đáp số: ☐

» Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(-2;2;-2)$, $B(3;-3;3)$ và điểm M không cố định trong không gian thỏa mãn $\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{2}{3}$. Khi đó độ dài OM lớn nhất bằng bao nhiêu? *Làm tròn kết quả đến hàng phần chục.*

Điền đáp số: ☐

» Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, khi phương trình $x^2+y^2+z^2-2(m+2)x+4my-2mz+7m^2-1=0$ là phương trình mặt cầu. Xác định m để mặt cầu có bán kính lớn nhất.

Điền đáp số: ☐

» Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I và cắt trục Ox tại hai điểm A và B sao cho $AB=2\sqrt{3}$. Khi đó, phương trình mặt cầu (S) có dạng là $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$, tính giá trị của $P=\dfrac{abc}{R}$?

Điền đáp số: ☐

» Câu 40. Cho các điểm $A(-2;4;1)$, $B(2;0;3)$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+t\\y=1+2t\\z=-2+t\end{cases}$. Gọi (S) là mặt cầu đi qua A,B và có tâm thuộc đường thẳng d. Bán kính của mặt cầu (S) là $R=a\sqrt{b}$, tính giá trị của $P=a+b$?

Điền đáp số: ☐

» Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P):2x-y+z-3=0$. Gọi mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$ thuộc Δ và tiếp xúc với (P) tại $H(1;-1;0)$. Khi đó giá trị $a^2+b^2+c^2$ bằng bao nhiêu?

Điền đáp số: ☐

» Câu 42. Trong hệ trục $Oxyz$ cho trước (đơn vị trên trục là mét), cho một trạm thu phát sóng 5G có bán kính vùng phủ sóng của trạm ở ngưỡng 600m được đặt ở vị trí $I(200;450;60)$.

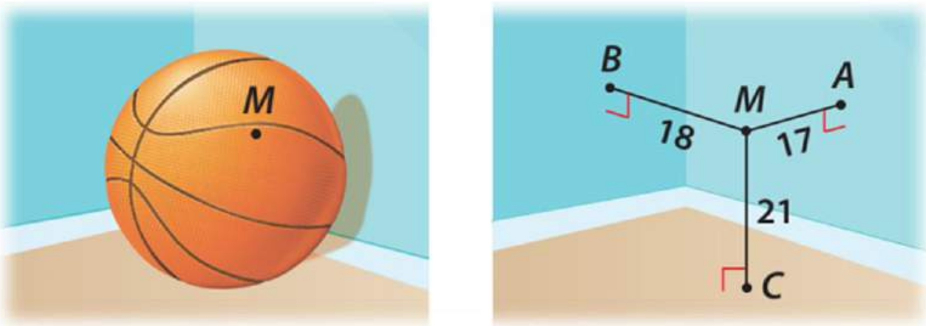
Tìm giá trị lớn nhất của m (làm tròn đến hàng đơn vị) để một người dùng điện thoại ở vị trí $A(m+100;m+370;0)$ có thể sử dụng dịch vụ của trạm nói trên.

Điền đáp số:

» **Câu 43.** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-2}{-3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{2}$, $(P):x+2y-2z-2=0$, $(Q):x+2y-2z+4=0$. Gọi mặt cầu $S(I,R)$ có tâm I thuộc Δ và tiếp xúc với $(P),(Q)$. Khi đó đường kính của mặt cầu có giá trị bằng bao nhiêu?

Điền đáp số:

» **Câu 44.** Một quả bóng rổ được đặt ở một góc của căn phòng hình hộp chữ nhật, sao cho quả bóng chạm và tiếp xúc với hai bức tường và nền nhà của căn phòng đó thì có một điểm trên quả bóng có khoảng cách lần lượt đến hai bức tường và nền nhà là 17 cm, 18 cm, 21 cm (tham khảo hình minh họa). Hỏi độ dài đương kính của quả bóng bằng bao nhiêu cm biết rằng quả bóng rổ tiêu chuẩn có đường kính từ 23 cm đến 24,5 cm? *Kết quả là tròn đến một chữ số thập phân.*



Điền đáp số:

-------------------- Hết --------------------

Chương 05

Bài 1. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

A Lý thuyết

1. Vectơ pháp tuyến và cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng:

Cho mặt phẳng (α).

Vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ và có giá vuông góc với mặt phẳng (α) gọi là *vectơ pháp tuyến* của mặt phẳng (α).

✓ ***Nhận xét:***

» Nếu $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của (α) thì $k \cdot \vec{n}\ (k \neq 0)$ cũng là một vectơ pháp tuyến của (α).

» Một mặt phẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm và một vectơ pháp tuyến của nó.

Cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng:

Cho mặt phẳng (α).

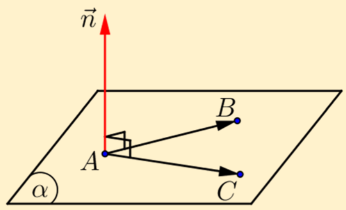
Nếu hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ *không cùng phương* và *giá* của chúng *song song* hoặc *nằm trên* mặt phẳng(α) thì $\vec{a}, \vec{b}$ là cặp véctơ chỉ phương của mặt phẳng (α).

✓ ***Nhận xét:***

» Một mặt phẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm và cặp vectơ chỉ phương của nó.

✓ ***Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng khi biết một cặp vectơ chỉ phương :***

» Trong không gian $Oxyz$, nếu mặt phẳng (α) nhận hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. làm cặp vectơ chỉ phương thì (α) nhận $\vec{n} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ làm vectơ pháp tuyến.



Chú ý

» Vectơ $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1\right)$ được gọi là *tích có hướng* của hai vectơ $\vec{a}=\left(a_1;a_2;a_3\right)$ và $\vec{b}=\left(b_1;b_2;b_3\right)$.

» $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)=\left(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1\right)$

» $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b}\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}$.

» Nếu $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ thì vectơ $\vec{n}$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

2. Phương trình tổng quát của mặt phẳng

Phương trình tổng quát của mặt phẳng:

Trong không gian $Oxyz$, mỗi mặt phẳng đều có dạng phương trình:

$Ax+By+Cz+D=0$ với $A^2+B^2+C^2\neq 0$, được gọi là phương trình tổng quát của mặt phẳng.

✓ ***Nhận xét:***

» Nếu mặt phẳng (α) có phương trình $Ax+By+Cz+D=0$ (với $A^2+B^2+C^2\neq 0$) thì vectơ $\vec{n}=(A;B;C)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α)

» Cho mặt phẳng (α) có phương trình $Ax+By+Cz+D=0$.
Khi đó: $N_0(x_0;y_0;z_0)\in(\alpha)\Leftrightarrow Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$

Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng khi biết một số điều kiện:

✓ *Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua điểm và biết vectơ pháp tuyến:*

» Trong không gian $Oxyz$, phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua điểm $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(A;B;C)$ là:

$$A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)+C\left(z-z_0\right)=0$$

hay $Ax+By+Cz+D=0$ với $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$

✓ *Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua điểm và biết cặp vectơ chỉ phương:*

» Để lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ và có cặp vectơ chỉ phương $\vec{a};\vec{b}$, ta thực hiện như sau:

Bước 1: Tìm một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\vec{a};\vec{b}\right]$.

Bước 2: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$.

Phương trình mặt phẳng qua 3 điểm không thẳng hàng:

✓ *Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng:*

» Để lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng, ta thực hiện như sau:

Bước 1: Tìm cặp vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

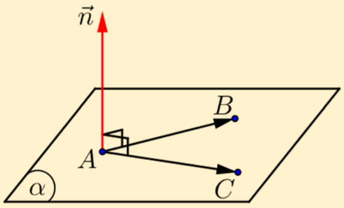
Bước 2: Tìm một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]$.

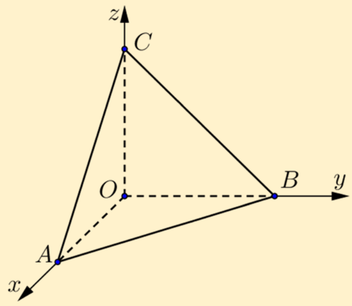
Bước 3: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm A (hoặc điểm B hoặc điểm C) và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$.

✓ ***Nhận xét:***

» Mặt phẳng (α) không đi qua gốc tọa độ O và lần lượt cắt trục Ox tại $A(a;0;0)$, cắt trục Oy tại $B(0;b;0)$, cắt trục Oz tại $C(0;0;c)$ có phương trình là $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. với $a.b.c \neq 0$.

» Phương trình trên được gọi là phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn.





3. Điều kiện để hai mặt phẳng song song, vuông góc

Điều kiện để hai mặt phẳng song song:

Trong không gian $Oxyz$,

cho 2 mặt phẳng $(\alpha_1): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(\alpha_1): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$.

» Khi đó: $(\alpha_1) // (\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \\ D_1 \neq k.D_2 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$

Chú ý

» $(\alpha_1) \equiv (\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \\ D_1 = kD_2 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$

» $(\alpha_1) \cap (\alpha_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ không cùng phương..

Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc:

Trong không gian $Oxyz$,

cho 2 mặt phẳng $(\alpha_1): A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ và $(\alpha_1): A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1=(A_1;B_1;C_1)$, $\vec{n}_2=(A_2;B_2;C_2)$.

» Khi đó: $(\alpha_1)\perp(\alpha_2)\Leftrightarrow \vec{n}_1.\vec{n}_2=0\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

4. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Định nghĩa

Trong không gian $Oxyz$,

$Oxyz$, cho điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và mặt phẳng $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$. Khi đó khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (α) được tính:

$$d(M_0,(\alpha))=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

5. Các mặt phẳng đặc biệt

Các mặt phẳng đặc biệt:

TÍNH CHẤT MẶT PHẲNG	PHƯƠNG TRÌNH	HỆ SỐ ĐẶC BIỆT
(α) đi qua/chứa gốc O.	$(\alpha): Ax+By+Cz=0$	$D=0$
(α) song song/chứa Ox.	$(\alpha): By+Cz+D=0$	$A=0$
(α) song song/chứa Oy.	$(\alpha): Ax+Cz+D=0$	$B=0$
(α) song song/chứa Oz.	$(\alpha): Ax+By+D=0$	$C=0$
(α) song song/trùng (Oxy).	$(\alpha): Cz+D=0$	$A=B=0$
(α) song song/trùng (Oxz).	$(\alpha): By+D=0$	$A=C=0$
(α) song song/trùng (Oyz).	$(\alpha): Ax+D=0$	$B=C=0$

✓ ***Nhận xét:***

» Mặt phẳng không chứa ẩn nào thì mặt phẳng sẽ song song/chứa trục đó hoặc mặt phẳng không chứa ẩn nào thì mặt phẳng sẽ song song/chứa mặt phẳng đó.

B Các dạng bài tập

Dạng 1. Xác định vecto pháp tuyến của mặt phẳng

Phương pháp

Một mặt phẳng có vô số véctơ pháp tuyến và chúng cùng phương với nhau.

» Chẳng hạn $\vec{n}$ là véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) thì $k\cdot\vec{n}$ $(k\neq 0)$ cũng là véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).

» Nếu mặt phẳng (P) có cặp véctơ chỉ phương là $\vec{u}_1;\vec{u}_2$ thì (P) có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=[\vec{u}_1;\vec{u}_2]$

Ví dụ 1.1.

Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (α) song song với giá của hai vecto $\vec{a}=(1;-2;3)$, $\vec{b}=(3;0;5)$. Tìm vecto pháp tuyến của mặt phẳng (α).

Lời giải

Gọi $\vec{n}$ là vecto pháp tuyến của mặt phẳng (α). Ta có : $\vec{n}\perp\vec{a}$ và $\vec{n}\perp\vec{b}$.

Nên chọn $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(-10;4;6)$.

Ví dụ 1.2.

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2y+x+3z-1=0$. Xác định một vecto pháp tuyến của mặt phẳng (P)?

Lời giải

Từ $(P): 2y+x+3z-1=0$ nếu lấy nhanh hệ số và $\Rightarrow \vec{n}=(2;1;3)$ là sai do chưa lấy đúng hệ số trước $x-y-z$.

Sắp xếp đúng như sau: $(P): 2y+x+3z-1=0 \Leftrightarrow (P): x+2y+3z-1=0 \Rightarrow \vec{n}=(1;2;3)$.

Ví dụ 1.3.

Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2;1;-3); B(0;-2;5)$ và $C(1;1;3)$. Tìm tọa độ vecto $\vec{n}$ có phương vuông góc với hai vecto $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-2;-3;8); \overrightarrow{AC}=(-1;0;6) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(-18;4;-3)$.

Vậy: $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-18;4;-3)$.

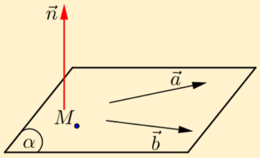
Dạng 2. PTMP khi biết điểm đi qua và cặp vecto chỉ phương

Phương pháp

» Phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(A;B;C)$ có dạng:

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \Rightarrow Ax+By+Cz+D=0$ (với $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$).

» Nếu mặt phẳng (P) có cặp véctơ chỉ phương là $\vec{u}_1;\vec{u}_2$ thì (P) có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=[\vec{u}_1;\vec{u}_2]$



Ví dụ 2.1.

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;1;-3)$ có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(3;-2;6)$.

Lời giải

Phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;1;-3)$ có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(3;-2;6)$ có dạng: $3(x-2)-2(y-1)+6(z+3)=0 \Leftrightarrow 3x-2y+6z+14=0$.

Ví dụ 2.2.

Trong không gian $Oxyz$. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;-1;0)$ và có cặp véctơ chỉ phương là $\vec{a}=(2;1;3),\vec{b}=(1;1;2)$

Lời giải

Mặt phẳng (P) có cặp véctơ chỉ phương là $\vec{a}=(2;1;3),\vec{b}=(1;1;2)$ nên có vecto pháp tuyến là $\vec{n}=[\vec{a};\vec{b}]=(-1;-1;1)$.

Phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;-1;0)$ có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(-1;-1;1)$ có dạng: $-1(x-2)-1(y+1)+1(z-0)=0 \Leftrightarrow -x-y+z+1=0$.

Dạng 3. PTMP qua ba điểm không thẳng hàng

Phương pháp

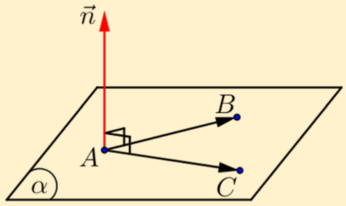
» Phương trình mặt phẳng (P) di qua $A;B;C$ không thẳng hàng.

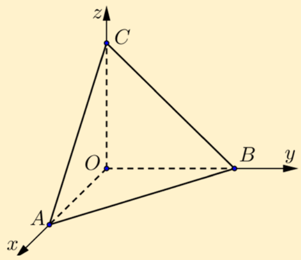
Bước 1: Tìm cặp vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$.

Bước 2: Tìm một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$.

Bước 3: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm A (hoặc điểm B hoặc điểm C) và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$.

» Phương trình mặt phẳng (P) là phương trình mặt chắn, tức mặt phẳng (P) đi qua $A(a;0;0);B(0;b;0);C(0;0;c)$ có dạng: $(P):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$





Ví dụ 3.1.

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (ABC)

(1) Với ba điểm $A(-1;0;3)$, $B(2;-1;1)$, $C(1;-1;0)$.

(2) Với ba điểm $A(1;0;2), B(-2;3;1), C(3;2;1)$.

Lời giải

(1) Với ba điểm $A(-1;0;3)$, $B(2;-1;1)$, $C(1;-1;0)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;-1;-2);\overrightarrow{AC}=(2;-1;-3)$

Mặt phẳng (ABC) có vec tơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right]=(-1;-5;1)$.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là $-(x+1)-5y+z-3=0 \Leftrightarrow -x-5y+z-4=0$

(2) Với ba điểm $A(1;0;2), B(-2;3;1), C(3;2;1)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-3;3;-1),\overrightarrow{AC}=(2;2;-1)$.

Mặt phẳng (P) có một véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-1;-5;-12)$.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là $-x-5y-12z+25=0 \Leftrightarrow x+5y+12z-25=0$

Ví dụ 3.2.

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (ABC)

(1) Với ba điểm $M(2;0;0), N(0;-1;0), P(0;0;2)$.

(2) Với ba điểm $M(0;-2;0), N(3;0;0), P(0;0;-3)$.

Lời giải

(1) Với ba điểm $M(2;0;0), N(0;-1;0), P(0;0;2)$.

Ta có: $M(2;0;0), N(0;-1;0), P(0;0;2) \Rightarrow (MNP): \frac{x}{2}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{2}=1 \Leftrightarrow x-2y+z-2=0$

(2) Với ba điểm $M(0;-2;0), N(3;0;0), P(0;0;-3)$.

Ta có: $M(0;-2;0), N(3;0;0), P(0;0;-3) \Rightarrow (MNP): \frac{x}{3}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{-3}=1$

$\Leftrightarrow \frac{x}{3}-\frac{y}{2}-\frac{z}{3}=1 \Leftrightarrow 2x-3y-2z-6=0$

Ví dụ 3.3.

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) chứa điểm $M(1;3;-2)$, cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho $\frac{OA}{1}=\frac{OB}{2}=\frac{OC}{4}$.

Lời giải

Phương trình mặt chắn cắt tia Ox tại $A(a;0;0)$, cắt tia Oy tại $B(0;b;0)$, cắt tia Oz tại $C(0;0;c)$ có dạng là $(P): \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ (với $a>0$, $b>0, c>0$).

Theo đề: $\frac{OA}{1}=\frac{OB}{2}=\frac{OC}{4} \Leftrightarrow \frac{a}{1}=\frac{b}{2}=\frac{c}{4} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{b}{2} \\ c=2b \end{cases}$.

Vì $M(1;3;-2)$ nằm trên mặt phẳng (P) nên ta có: $\frac{1}{\frac{b}{2}}+\frac{3}{b}+\frac{-2}{2b}=1 \Leftrightarrow \frac{4}{b}=1 \Leftrightarrow b=4$.

Khi đó $a=2$, $c=8$.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là: $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{8}=1 \Leftrightarrow 4x+2y+z-8=0$.

Dạng 4. PTMP trung trực của đoạn thẳng

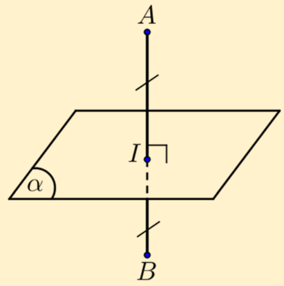
Phương pháp

» Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α) ***trung trực*** đoạn thẳng AB

Bước 1: Véctơ pháp tuyến của mặt (α) là: $\vec{n}=\overrightarrow{AB}$.

Bước 2: Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn AB.

Bước 3: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm I và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\overrightarrow{AB}$.



Ví dụ 4.1.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;0;1)$ và $B(-2;2;3)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB

Lời giải

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có véctơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AB}=(-6;2;2)$ và đi qua trung điểm $I(1;1;2)$ của đoạn thẳng AB.

Do đó, ta có: $-6(x-1)+2(y-1)+2(z-2)=0 \Leftrightarrow -6x+2y+2z=0 \Leftrightarrow 3x-y-z=0$.

Ví dụ 4.2.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3;2;1)$ và $B(5;-4;1)$. Gọi M là hình chiếu vuông góc của A trên (Oxy), và N là điểm đối xứng với B qua (Oyz). Viết phương trình mặt phẳng trung trực (P) của đoạn thẳng MN.

Lời giải

M là hình chiếu của $A(-3;2;1)$ trên trục (Oxy) nên ta có $M(-3;2;0)$.

N là đối xứng với $B(5;-4;1)$ qua (Oyz) nên ta có $N(-5;-4;1)$.

Gọi I là trung điểm MN. Ta có $I\left(-4;-1;\frac{1}{2}\right)$.

Phương trình mặt phẳng $2(x+4)+2(y+1)-1\left(z-\frac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow 4x+4y-2z+21=0$.

Ví dụ 4.2.

Trong không gian $Oxyz$, cho hình vuông $ABCD$ biết $A(1;2;1), B(3;0;0)$, $C(1;-1;-2), D(-1;1;-1)$. Giả sử $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ và G là trọng tâm ΔABC. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của GI.

Lời giải

Vì $ABCD$ là hình vuông nên tâm đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Khi đó $I\left(1;\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $G\left(\frac{5}{3};\frac{1}{3};\frac{-1}{3}\right)$.

Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng GI nên $M\left(\frac{4}{3};\frac{5}{12};-\frac{5}{12}\right)$

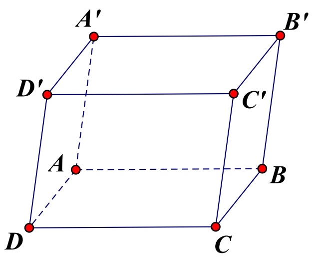
Phương trình mặt phẳng trung trực đoạn thẳng GI:

$$-4\left(x-\frac{4}{3}\right)+\left(y-\frac{5}{12}\right)-\left(z+\frac{5}{12}\right)=0 \Leftrightarrow 8x-2y+2z-9=0.$$

Ví dụ 4.4.

Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết rằng $A(-3;0;0)$, $B(0;2;0)$, $D(0;0;1)$, $A'(1;2;3)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của $C'D$.

Lời giải



Gọi $C'(x;y;z)$. Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;2;0)$; $\overrightarrow{AD}=(3;0;1)$; $\overrightarrow{AA'}=(4;2;3)$.

Mà $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'} \Rightarrow \overrightarrow{AC'}=(10;4;4) \Rightarrow \begin{cases} x=10+3 \\ y=4-0 \\ z=4-0 \end{cases} \Rightarrow C'(13;4;4)$.

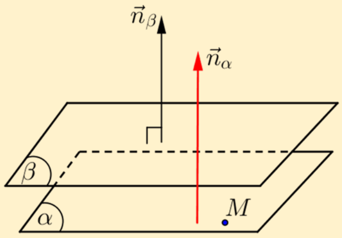
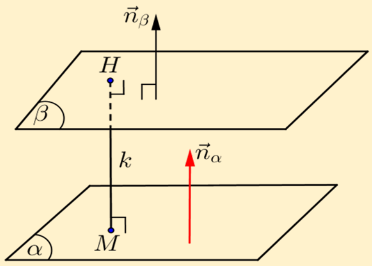
Khi đó mặt phẳng trung trực của $C'D$: $\begin{cases} \text{qua } I\left(\frac{13}{2};2;\frac{5}{2}\right) \\ \vec{n}=\overrightarrow{C'D}=(13;4;3) \end{cases}$

có phương trình là $13\left(x-\frac{13}{2}\right)+4(y-2)+3\left(z-\frac{5}{2}\right)=0 \Leftrightarrow 13x+4y+3z-100=0$.

Dạng 5. PTMP 1 điểm kèm điều kiện song song với mặt phẳng khác

Phương pháp

» Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α)

Loại	Phương pháp
(1) Qua $M(x_0;y_0;z_0)$ và song song $(\beta): Ax+By+Cz+D=0$. 	⌘ *Cách 1:* ≫ Véctơ pháp tuyến (α) là: $\vec{n}_{(\alpha)}=\vec{n}_{(\beta)}=(A;B;C)$. ≫ Mặt phẳng (α) qua điểm M. ⌘ *Cách 2:* ≫ Do $(\alpha)//(\beta)\Rightarrow(\alpha): Ax+By+Cz+D'=0$ $(D\neq D')$ ≫ Thay điểm M vào $(\alpha)\Rightarrow D'=?\Rightarrow(\alpha)$.
(2) Song song $(P): Ax+By+Cz+D=0$ và cách (P) một khoảng bằng k. 	≫ Vì $(\alpha)//(P)\Rightarrow(\alpha): Ax+By+Cz+D'=0$ $(D\neq D')$. ≫ Vì (α) cách (P) một khoảng bằng k $\Rightarrow d((\alpha);(P))=k\xrightarrow{M\in(\alpha)}d(M;(P))=k$ $\Leftrightarrow\dfrac{\lvert D-D'\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=k\Rightarrow D'=?$ ≫ Có $D'\Rightarrow$ phương trình mặt (P) hoàn chỉnh.

Ví dụ 5.1.

Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng qua điểm $A(-1;1;2)$ và song song với mặt phẳng $(\alpha): 2x-2y+z-1=0$ có phương trình là?

Lời giải

Có (P) song song $(\alpha): 2x-2y+z-1=0$ nên $(P): 2x-2y+z+m=0$, với $m\neq-1$.

Do (P) đi qua điểm $A(-1;1;2)$ nên $-2-2+2+m=0\Leftrightarrow m=2$ (nhận)

Vậy mặt phẳng cần tìm là $(P): 2x-2y+z+2=0$.

Ví dụ 5.2.

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(Q): x+2y+2z-3=0$ và mặt phẳng (P) không qua O, song song mặt phẳng (Q) và $d((P);(Q))=1$. Phương trình mặt phẳng (P) là?

Lời giải

Gọi phương trình mặt phẳng (P) có dạng $x+2y+2z+d=0$ Với $d\neq0; d\neq-3$.

Có $d\left((P);(Q)\right)=1 \Leftrightarrow \dfrac{|d+3|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} d=0 \\ d=-6 \end{array}\right.$.

Kết hợp điều kiện $\Rightarrow (P)$ có dạng: $x+2y+2z-6=0$.

Ví dụ 5.3.

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha_1): 3x-y+z-2=0$, $(\alpha_2): x+4y-5=0$ đồng thời song song với mặt phẳng $(\alpha_3): 2x+21y-z+7=0$. Viết phương trình của mặt phẳng (P).

Lời giải

$(P)//(\alpha_3) \Rightarrow (P): 2x+21y-z+m=0\ (m \neq -7)$

Gọi d là giao tuyến của $(\alpha_1);(\alpha_2)$ $d: \begin{cases} (\alpha_1): 3x-y+z-2=0 \\ (\alpha_2): x+4y-5=0 \end{cases}$

Cho $\xrightarrow{y=0} \begin{cases} 3x+z-2=0 \\ x-5=0 \end{cases} \Rightarrow M(5;0;-13)$ và $\xrightarrow{z=0} \begin{cases} 3x-y-2=0 \\ x+4y-5=0 \end{cases} \rightarrow N(1;1;0)$

$M \in (P) \Rightarrow 2.5+21.0-(-13)+m=0 \Rightarrow m=-23$

$N \in (P) \Rightarrow 2.1+21.1-0+m=0 \Rightarrow m=-23$

Vậy $2x+21y-z-23=0$.

Ví dụ 5.4.

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-2y+z-5=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P), cách (P) một khoảng bằng 3 và cắt trục Ox tại điểm có hoành độ dương.

Lời giải

$(Q)//(P)$ nên mặt phẳng $(Q): 2x-2y+z+C=0$; $C \neq -5$, chọn $M(0;0;5) \in (P)$

Ta có $d\left((P);(Q)\right)=d\left(M;(Q)\right)=\dfrac{|5+C|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C=4 \\ C=-14 \end{array}\right.$

» Với $C=4 \Rightarrow (Q): 2x-2y+z+4=0$ khi đó (Q) cắt Ox tại điểm $M_1(-2;0;0)$ có hoành độ âm nên trường hợp này (Q) không thỏa đề bài.

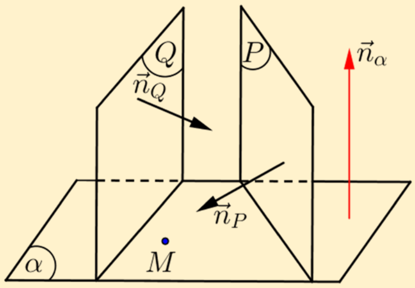
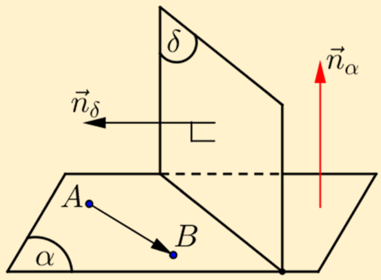
» Với $C=-14 \Rightarrow (Q): 2x-2y+z-14=0$ khi đó (Q) cắt Ox tại điểm $M_2(7;0;0)$ có hoành độ dương do đó $(Q): 2x-2y+z-14=0$ thỏa đề bài.

Vậy phương trình mặt phẳng $(Q): 2x-2y+z-14=0$.

Dạng 6. PTMP 1 điểm kèm điều kiện vuông góc với mặt phẳng khác

Phương pháp

▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α)

Loại	Phương pháp
Qua $M(x_0;y_0;z_0)$ và $\perp$ 2 mặt $(P): Ax+By+Cz+D=0$, $(Q): A'x+B'y+C'z+D'=0$. 	≫ Tìm cặp vécto $\vec{n}_{(P)}$ và $\vec{n}_{(Q)}$. ≫ Véctơ pháp tuyến (α) là: $\vec{n}=\left[\vec{n}_{(Q)};\vec{n}_{(P)}\right]$. ≫ Mặt phẳng (α) qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$. ***Hoặc bài toán sẽ gặp:*** "Qua $M(x_0;y_0;z_0)$ và vuông góc với giao tuyến của $(P): Ax+By+Cz+D=0$; $(Q): A'x+B'y+C'z+D'=0$"
Loại	**Phương pháp**
Qua điểm $A;B$ và vuông góc $(\delta): Ax+By+Cz+D=0$. 	≫ Tìm cặp vécto $\overrightarrow{AB}$ và $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB};\vec{n}_{(\delta)}\right]$. ≫ Véctơ pháp tuyến (α) là: $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB};\vec{n}_{(\delta)}\right]$. ≫ Mặt phẳng (α) qua điểm A.

Ví dụ 6.1.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): 3x-2y+2z+7=0$, $(\beta): 5x-4y+3z+1=0$. Phương trình mặt phẳng đi qua gốc tọa độ O đồng thời vuông góc với cả (α) và (β) là?

Lời giải

Véc tơ pháp tuyến của hai mặt phẳng lần lượt là $\vec{n}_\alpha=(3;-2;2)$, $\vec{n}_\beta=(5;-4;3)$.

Khi đó vecto pháp tuyến mặt phẳng cần tìm là $\vec{n}=\left[\vec{n}_\alpha;\vec{n}_\beta\right]=(2;1;-2)$

Phương trình mặt phẳng đi qua gốc tọa độ O, VTPT $\vec{n}=(2;1;-2)$: $2x+y-2z=0$.

Ví dụ 6.2.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;4;1), B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P): x-3y+2z-5=0$. Lập phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P).

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-3;-3;2)$, vectơ pháp tuyến của mp(P) là $\overrightarrow{n_P}=(1;-3;2)$.

Từ giả thiết suy ra $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{n_P}\right]=(0;8;12)$ là vectơ pháp tuyến của mp(Q).

Phương trình (Q) đi qua $A(2;4;1)$ là: $0(x-2)+8(y-4)+12(z-1)=0 \Leftrightarrow 2y+3z-11=0$.

Ví dụ 6.3.

Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(0;1;0)$, $B(2;3;1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): x+2y-z=0$ có phương trình là?

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;2;1)$, vectơ pháp tuyến mặt phẳng (Q): $\overrightarrow{n_Q}=(1;2;-1)$.

Theo đề bài ta có vectơ pháp tuyến mặt phẳng (P): $\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{n_Q}\wedge\overrightarrow{AB}=(4;-3;-2)$.

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $4x-3y-2z+C=0$.

Mặt phẳng (P) đi qua $A(0;1;0)$ nên: $-3+C=0 \Leftrightarrow C=3$.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là $4x-3y-2z+3=0$.

Dạng 7. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Phương pháp

» Tính khoảng cách từ điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ đến mặt phẳng $(P): Ax+By+Cz+D=0$ như sau

Bước 1: Tìm $M_0(x_0;y_0;z_0)$; viết phương trình mặt phẳng $(P): Ax+By+Cz+D=0$.

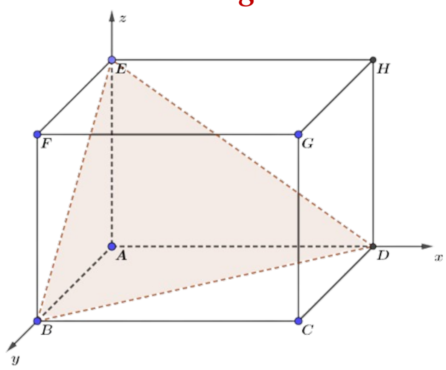
Bước 2: Tính khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng $(P): Ax+By+Cz+D=0$ theo công thức $d(M_0,(P))=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

Lưu ý: $d(M_0,(Oxy))=\sqrt{(z_0)^2}$ $\qquad d(M_0,Ox)=\sqrt{(y_0)^2+(z_0)^2}$

Ví dụ 7.1.

Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ cạnh 1. Điểm M được cho thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{CD}$. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (EBD).

Lời giải



Ta có $A(0;0;0)$, $\overrightarrow{AE}=(0;0;1)$, $\overrightarrow{CD}=(-1;0;0)$.

Đặt $M(a;b;c)$, suy ra $\overrightarrow{AM}=(a;b;c)$.

Đề cho $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{CD}$, ta được $\begin{cases}a+0=-3\\b+0=0\\c+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-3\\b=0\\c=-1\end{cases}$. Suy ra $M(-3;0;-1)$.

Mặt phẳng (EBD), phương trình theo đoạn chắn là $x+y+z-1=0$.

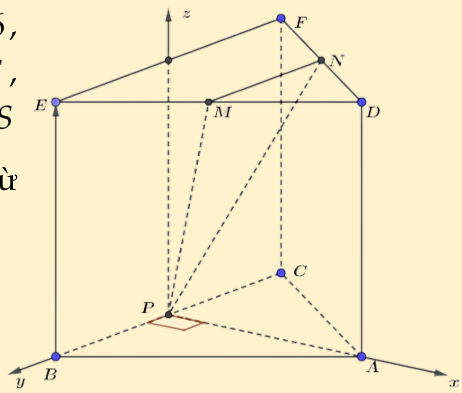
Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (EBD) bằng

$$d(M;(EBD))=\frac{|Ax+By+Cz+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|-3+0-1-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy khoảng cách bằng $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$.

Ví dụ 7.2.

Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.DEF$, $AB=6$, $AD=2$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm DE, DF, BC. Lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình bên. Gọi điểm S thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{SA}+2\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}=\vec{0}$. Tính khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (MNP).



Lời giải

Ta có $P(0;0;0)$, $A(3\sqrt{3};0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;-3;0)$, $E(0;3;2)$, $F(0;-3;2)$, $D(3\sqrt{3};0;2)$

Suy ra $M\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2};\dfrac{3}{2};2\right)$, $N\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2};\dfrac{-3}{2};2\right)$.

Ta có $\left[\overrightarrow{PM},\overrightarrow{PN}\right]=\left(6;0;\dfrac{-9\sqrt{3}}{2}\right)\Rightarrow\vec{n}=\left(4;0;-3\sqrt{3}\right)$.

Phương trình mặt phẳng (MNP) là $4x-3\sqrt{3}z=0$.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm cạnh AC, $IB\Rightarrow I\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2};\dfrac{-3}{2};0\right)$, $J\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{4};\dfrac{3}{4};0\right)$.

Ta có $\overrightarrow{SA}+2\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{SI}+2\overrightarrow{SB}=\vec{0}\Leftrightarrow 4\overrightarrow{SJ}=\vec{0}\Leftrightarrow S\equiv J$.

Do đó $S\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{4};\dfrac{3}{4};0\right)$.

Vậy khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (MNP) bằng $d=3\sqrt{3}$.

Dạng 8. Vị trí tương đối hai mặt phẳng

Phương pháp

Xét điểm mặt phẳng $(P): Ax+By+Cz+D=0$ có vecto pháp tuyến $\vec{n}_P$, với:

» Mặt phẳng $(Q): A'x+B'y+C'z+D'=0$ có vecto pháp tuyến $\vec{n}_Q$,

Ta có các vị trí tương đối sau:

		Mặt phẳng (P)
Mặt phẳng (Q)	$\frac{A}{A'}\neq\frac{B}{B'}\neq\frac{C}{C'}$	Mặt (P) *cắt* mặt (Q)
	$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}\neq\frac{D}{D'}$	Mặt (P) *song song* mặt (Q)
	$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}=\frac{D}{D'}$	Mặt (P) *trùng* mặt (Q)
	$A.A'+B.B'+C.C'=0$	Mặt (P) *vuông góc* mặt (Q)

Ví dụ 8.1.

Cho ba mặt phẳng $(P_1): 2x-y-2z+1=0$, $(P_2): 4x-2y-4z+4=0$, $(P_3): x+4y-z+1=0$. Chứng minh $(P_1)//(P_2)$ và $(P_1)\perp(P_3)$.

Lời giải

VTPT của ba mặt phẳng là $\vec{n}_1=(2;-1;-2)$, $\vec{n}_2=(4;-2;-4)$, $\vec{n}_3=(1;4;-1)$.

Vì $\begin{cases}\vec{n}_1=\frac{1}{2}\cdot\vec{n}_2\\ 1\neq\frac{1}{2}\cdot 4\end{cases}$ nên $(P_1)//(P_2)$.

Vì $\vec{n}_1\perp\vec{n}_2$ (do $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_3=2\cdot1+(-1)\cdot4+(-2)\cdot(-1)=0$) nên $(P_1)\perp(P_3)$.

Ví dụ 8.2.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): m^2x-y+(m^2-2)z+2=0$ và $(\beta): 2x+m^2y-2z+1=0$. Hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau khi nào?

Lời giải

Ta có $\vec{n}_{(\alpha)}=(m^2;-1;m^2-2)$; $\vec{n}_{(\beta)}=(2;m^2;-2)$.

$(\alpha)\perp(\beta)\Leftrightarrow\vec{n}_{(\alpha)}\perp\vec{n}_{(\beta)}\Leftrightarrow\vec{n}_{(\alpha)}.\vec{n}_{(\beta)}=0\Leftrightarrow 2m^2-m^2-2(m^2-2)=0\Leftrightarrow m^2=4\Leftrightarrow|m|=2$.

Vậy $|m|=2$.

Ví dụ 8.3.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x-3y+5z-1=0$ và $(Q): 4x+(m-3)y+(m^2+1)z-7=0$ (m là tham số). Tìm m để hai mặt phẳng song song.

Lời giải

$$(P)//(Q) \Leftrightarrow \frac{4}{2}=\frac{m-3}{-3}=\frac{m^2+1}{5}\neq\frac{-7}{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m-3}{-3}=2 \\ \dfrac{m^2+1}{5}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-3 \\ m=\pm 3 \end{cases} \Leftrightarrow m=-3.$$

Ví dụ 8.3.

Trong không gian $Oxyz$ cho $A(2;0;0), B(0;4;0), C(0;0;6), D(2;4;6)$. Gọi (P) là mặt phẳng song song với $mp(ABC)$, . (P). cách đều D và mặt phẳng (ABC). Phương trình của (P) là?

Lời giải

$(ABC): \frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{6}=1 \Leftrightarrow 6x+3y+2z-12=0$.

$(P)//(ABC) \Rightarrow (P): 6x+3y+2z+m=0\ (m\neq -12)$.

(P) cách đều D và mặt phẳng $(ABC) \Rightarrow d(D,(P))=d(A,(P))$

$$\Leftrightarrow \frac{|6.2+3.4+2.6+m|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}}=\frac{|6.2+3.0+2.0+m|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}} \Leftrightarrow |36+m|=|12+m| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 36+m=12+m \\ 36+m=-12-m \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow m=-24$ (nhận).

Vậy phương trình của (P) là $6x+3y+2z-24=0$.

Dạng 9. Ứng dụng tích có hướng

Phương pháp

(1) Bốn điểm A,B,C,D tạo thành tứ diện: .... $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\neq 0$.

$\Leftrightarrow$ A,B,C,D không đồng phẳng

(2) Diện tích ΔABC: .... $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$.

$\Rightarrow$Đường cao ΔABC: $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AH.BC\Rightarrow AH=\frac{2S_{\Delta ABC}}{BC}=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}$

(3) Diện tích hình bình hành $ABCD$: .... $S_{ABCD}=2S_{\Delta ABC}=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$.

(4) Thể tích tứ diện $ABCD$: .... $V=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$.

$\Rightarrow$Đường cao chóp $ABCD$:

$$V_{ABCD}=\frac{1}{3}d\left(A,\left(BCD\right)\right).S_{\Delta BCD}\Rightarrow d\left(A,\left(BCD\right)\right)=\frac{3V_{ABCD}}{S_{\Delta BCD}}=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]\right|}$$

▶ Bài toán tính diện tích tam giác:

Trong không gian $Oxyz$, cho $A(...),B(...),C(...)$. Tính diện tích tam giác ABC

Hướng giải quyết

Bước 1: Tìm tọa độ các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$.

Bước 2: Sử dụng $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$ để tính diện tích ΔABC.

Nếu bài toán yêu cầu tính đường cao trong tam giác:

Bước 3: Sử dụng $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}AH.OB\Rightarrow AH=\frac{2S_{\Delta OAB}}{OB}$ để tính độ dài đường cao AH.

▶ Bài toán tính thể tích tứ diện:

Trong không gian $Oxyz$, cho $A(...),B(...),C(...),D(...)$. Tính thể tích tứ diện $ABCD$

Hướng giải quyết

Bước 1: Tìm tọa độ các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}$.

Bước 2: Sử dụng $V=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$ để tính thể tích tứ diện $ABCD$.

Nếu bài toán yêu cầu tính khoảng cách hạ từ đỉnh:

Bước 3: Sử dụng $V_{ABCD}=\frac{1}{3}d\left(A,\left(BCD\right)\right).S_{\Delta BCD}\Rightarrow d\left(A,\left(BCD\right)\right)=\frac{3V_{ABCD}}{S_{\Delta BCD}}$ để tính độ dài khoảng cách

Ví dụ 9.1.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1)$, $B(0;-2;3)$.

(1) Tính diện tích tam giác OAB với O là gốc tạo độ.

(2) Tính độ dài đường cao AH hạ từ đỉnh A của tam giác OAB.

Lời giải

(1) Tính diện tích tam giác OAB với O là gốc tạo độ.

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{OA}=(1;2;-1)\\ \overrightarrow{OB}=(0;-2;3)\end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=(4;-3;-2)$

$\Rightarrow S=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]\right|=\dfrac{1}{2}\sqrt{4^2+(-3)^2+(-2)^2}=\dfrac{\sqrt{29}}{2}$.

(2) Tính độ dài đường cao AH hạ từ đỉnh A của tam giác OAB.

Mặt khác ta có: $OB=\sqrt{0^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{13}$ và $S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}AH.OB$

$\Rightarrow AH=\dfrac{2S_{\Delta OAB}}{OB}=\dfrac{2.\dfrac{\sqrt{29}}{2}}{\sqrt{13}}=\sqrt{\dfrac{29}{13}}=\dfrac{\sqrt{377}}{13}$.

Ví dụ 9.2.

Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;-2;0)$, $B(2;0;3)$, $C(-2;1;3)$ và $D(0;1;1)$.

(1) Tính thể tích khối tứ diện $ABCD$.

(2) Tính độ dài đường cao DH của tứ diện $ABCD$.

Lời giải

(1) Tính thể tích khối tứ diện $ABCD$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(1;2;3)$; $\overrightarrow{AC}=(-3;3;3)$; $\overrightarrow{AD}=(-1;3;1)$.

$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-3;-12;9)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}=(-3).(-1)+(-12).3+9.1=-24$

$V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|=\dfrac{1}{6}|-24|=4$.

(2) Tính độ dài đường cao DH của tứ diện $ABCD$.

Ta có $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-3;-12;9)\Rightarrow\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=3\sqrt{26}$

$d(D;(ABC))=DH=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|}=\dfrac{24}{3\sqrt{26}}=\dfrac{4\sqrt{26}}{13}$

Ví dụ 9.3.

Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ biết $A(3;-2;m), B(2;0;0)$, $C(0;4;0)$, $D(0;0;3)$. Tìm giá trị dương của tham số m để thể tích tứ diện bằng 8.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{DA}=(3;-2;m-3)$, $\overrightarrow{DB}=(2;0;-3)$, $\overrightarrow{DC}=(0;4;-3)$.

Thể tích tứ diện: $V=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}\right].\overrightarrow{DA}\right| \Leftrightarrow 8=\frac{1}{6}\left|24+8(m-3)\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-6 \\ m=6 \end{array}\right.$.

Vì m dương nên $m=6$.

Chương 05

Bài 1. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

C Luyện tập

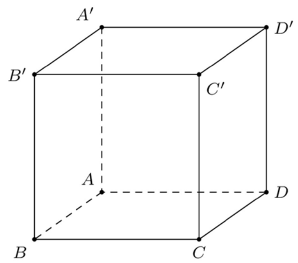
A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Vectơ nào là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(ABCD)$?

A. $\overrightarrow{AC}$. **B.** $\overrightarrow{AC'}$. **C.** $\overrightarrow{AA'}$. **D.** $\overrightarrow{AD'}$.

Lời giải

Chọn C



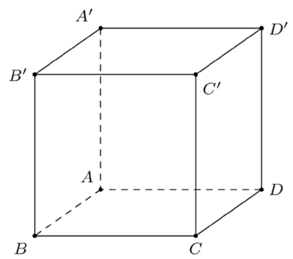
Dựa vào hình vẽ thì $\overrightarrow{AA'}$ là vectơ pháp tuyến của $(ABCD)$.

» Câu 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Vectơ nào là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(ADD'A')$?

A. $\overrightarrow{CC'}$. **B.** $\overrightarrow{AD}$. **C.** $\overrightarrow{BC'}$. **D.** $\overrightarrow{AB}$.

Lời giải

Chọn D



Dựa vào hình vẽ thì $\overrightarrow{AB}$ là vectơ chỉ phương của $(ABCD)$.

» Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;0;0), B(0;4;0), C(0;0;5)$. Tọa độ nào sau đây là tọa độ vectơ chỉ phương của mặt phẳng (ABC)?

A. $(3;4;5)$. **B.** $(0;4;5)$. **C.** $(-3;4;0)$. **D.** $(-3;0;-5)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-3;4;0)$ là vectơ chỉ phương của (ABC).

» Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;2;1),B(-1;4;1),C(3;-2;5)$. Tọa độ nào sau đây là tọa độ vectơ pháp tuyến của của mặt phẳng (ABC)?

A. $(1;2;2)$. **B.** $(8;-16;16)$. **C.** $(-1;2;-2)$. **D.** $(1;4;4)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(-4;2;0)\\ \overrightarrow{AC}=(0;-4;4)\end{cases}\Rightarrow \vec{n}_{(ABC)}=\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(8;16;16).$$

» Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $-2x+2y-z-3=0$. Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là

A. $(4;-4;2)$. **B.** $(-2;2;-3)$. **C.** $(-4;4;2)$. **D.** $(0;0;-3)$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào mặt phẳng (P), ta được vectơ pháp tuyến là $(-2;2;-1)$. Chọn đáp án A vì nó cùng phương với $(-2;2;-1)$.

» Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $\frac{x}{4}+\frac{y}{6}+\frac{z}{2}-1=0$. Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là?

A. $(4;6;2)$. **B.** $(2;3;1)$. **C.** $(3;2;6)$. **D.** $(3;2;1)$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào mặt phẳng (P), ta được vectơ pháp tuyến là $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{6};\frac{1}{2}\right)$. Chọn đáp án C vì nó cùng phương với $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{6};\frac{1}{2}\right)$.

» Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha):2x-3z+1=0$. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là:

A. $\vec{n}_2=(2;0;-3)$. **B.** $\vec{n}_1=(2;-3;1)$. **C.** $\vec{n}_3=(-2;0;-3)$. **D.** $\vec{n}_4=(-2;3;-1)$.

Lời giải

Chọn A

Do mặt phẳng $(\alpha):2x-3z+1=0$ nên vectơ pháp tuyến của (α) là: $\vec{n}_2=(2;0;-3)$

» Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P):x+y+z-3=0$ đi qua điểm nào dưới đây:

A. $M(-1;-1;-1)$. **B.** $N(1;1;1)$. **C.** $P(-3;0;0)$. **D.** $Q(0;0;-3)$.

Lời giải

Chọn B

Thế $M(-1;-1;-1)$ vào mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$ ta được $-1+(-1)+(-1)-3=0$ $\Leftrightarrow -6=0$ (không thỏa). Do đó (P) không đi qua $M(-1;-1;-1)$.

Thế $N(1;1;1)$ vào mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$ ta được $1+1+1-3=0$ $\Leftrightarrow 0=0$ (thỏa). Do đó (P) đi qua $N(1;1;1)$.

Thế $P(-3;0;0)$ vào mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$ ta được $-3+0+0-3=0$ $\Leftrightarrow -6=0$ (không thỏa). Do đó (P) không đi qua $P(-3;0;0)$.

Thế $Q(0;0;-3)$ vào mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$ ta được $0+0+(-3)-3=0$ $\Leftrightarrow -6=0$ (không thỏa). Do đó (P) đi qua $Q(0;0;-3)$.

» Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): \frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$ **không** đi qua điểm nào dưới đây:

A. $P(0;2;0)$. **B.** $Q(0;0;3)$. **C.** $M(1;2;3)$. **D.** $N(1;0;0)$.

Lời giải

Chọn C

Thế $P(0;2;0)$ vào mặt phẳng $(P): \frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$ ta được $\frac{0}{1}+\frac{2}{2}+\frac{0}{3}=1$ $\Leftrightarrow 1=1$ (thỏa). Do đó (P) đi qua $P(0;2;0)$.

Thế $Q(0;0;3)$ vào mặt phẳng $(P): \frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$ ta được $\frac{0}{1}+\frac{0}{2}+\frac{3}{3}=1$ $\Leftrightarrow 1=1$ (thỏa). Do đó (P) đi qua $Q(0;0;3)$.

Thế $M(1;2;3)$ vào mặt phẳng $(P): \frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$ ta được $\frac{1}{1}+\frac{2}{2}+\frac{3}{3}=1$ $\Leftrightarrow 3=1$ (không thỏa). Do đó (P) không đi qua $M(1;2;3)$.

Thế $N(1;0;0)$ vào mặt phẳng $(P): \frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$ ta được $\frac{1}{1}+\frac{0}{2}+\frac{0}{3}=1$ $\Leftrightarrow 1=1$ (thỏa). Do đó (P) đi qua $N(1;0;0)$.

» Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng nào sau đây đi qua gốc tọa độ?

A. $x+20=0$. **B.** $x-2024=0$. **C.** $y+2025=0$. **D.** $2x+5y-8z=0$.

Lời giải

Chọn D

Thế $O(0;0;0)$ vào mặt phẳng $x+20=0$ ta được $0+20=0$ (không thỏa). Do đó mặt phẳng $x+20=0$ không đi qua gốc tọa độ.

Thế $O(0;0;0)$ vào mặt phẳng $x-2024=0$ ta được $0-2024=0$ (không thỏa). Do đó mặt phẳng $x-2024=0$ không đi qua gốc tọa độ.

Thế $O(0;0;0)$ vào mặt phẳng $y+2025=0$ ta được $0+2025=0$ (không thỏa). Do đó mặt phẳng $y+2025=0$ không đi qua gốc tọa độ.

Thế $O(0;0;0)$ vào mặt phẳng $2x+5y-8z=0$ ta được $0+0+0=0$ (thỏa). Do đó mặt phẳng $2x+5y-8z=0$ đi qua gốc tọa độ.

» Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (Oxy) đi qua điểm nào sau đây:

A. $M(1;2;0)$. **B.** $N(3;2;-1)$. **C.** $P(1;0;-3)$. **D.** $Q(0;2;-5)$.

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng (Oxy) có phương trình $z=0$.

Thế $M(1;2;0)$ vào mặt phẳng (Oxy) ta được $0=0$ (thỏa). Do đó mặt phẳng (Oxy) đi qua $M(1;2;0)$.

Thế $N(3;2;-1)$ vào mặt phẳng (Oxy) ta được $-1=0$ (không thỏa). Do đó mặt phẳng (Oxy) không đi qua $N(3;2;-1)$.

Thế $P(1;0;-3)$ vào mặt phẳng (Oxy) ta được $-3=0$ (không thỏa). Do đó mặt phẳng (Oxy) không đi qua $P(1;0;-3)$.

Thế $Q(0;2;-5)$ vào mặt phẳng (Oxy) ta được $-5=0$ (không thỏa). Do đó mặt phẳng (Oxy) không đi qua $Q(0;2;-5)$.

» Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $A(2;-1;3)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;3;-1)$ là:

A. $(\alpha): 2x+3y-z-2=0$. **B.** $(\alpha): 2x+3y-z+2=0$.

C. $(\alpha): 2x-y+3z-2=0$. **D.** $(\alpha): 2x-y+3z+2=0$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình mặt phẳng (α) có dạng $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

Do đó $2(x-2)+3(y+1)-1(z-3)=0 \Leftrightarrow 2x+3y-z+2=0$

» Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+y-2z+4=0$. Mặt phẳng nào sau đây vuông góc với (P)?

A. $2x+y-2z+5=0$. **B.** $x+2y+2z-5=0$.

C. $x+3y-z+1=0$. **D.** $x+y+z-6=0$.

Lời giải

Chọn B

Mặt phẳng $(P): 2x+y-2z+4=0$ có VTPT $\vec{n}=(2;1;-2)$

Mặt phẳng $2x+y-2z+5=0$ có VTPT $\vec{n}_1=(2;1;-2)$

Ta có $\vec{n}_1=\vec{n}$ nên hai mặt phẳng không vuông góc.

Mặt phẳng $x+2y+2z-5=0$ có VTPT $\vec{n}_2=(1;2;2)$

Ta có $\vec{n}_2.\vec{n}=0$ nên hai mặt phẳng vuông góc.

Mặt phẳng $x+3y-z+1=0$ có VTPT $\vec{n}_3=(1;3;-1)$

Ta có $\vec{n}_3.\vec{n}=7\neq 0$ nên hai mặt phẳng không vuông góc.

Mặt phẳng $x+y+z-6=0$ có VTPT $\vec{n}_4=(1;1;1)$

Ta có $\vec{n}_4.\,\vec{n}=1\neq 0$ nên hai mặt phẳng không vuông góc.

» Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ $M(1;2;-3)$ đến $(P): x+2y+2z-10=0$ là

A. 3. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{11}{3}$.

Lời giải

Chọn D

$d(M,(P))=\frac{|1+4-6-10|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{11}{3}$

» Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, vectơ nào sau đây không phải là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P): x+3y-5z+2=0$.

A. $\vec{n}=(-1;-3;5)$. **B.** $\vec{n}=(2;\ 6;\ -10)$.

C. $\vec{n}=(-2;-6;-10)$. **D.** $\vec{n}=(-3;-9;15)$.

Lời giải

Chọn C

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $\vec{n}_{(P)}=(1;3;-5)$.

Vì vectơ $\vec{n}=(-2;-6;-10)$ không cùng phương với $\vec{n}_{(P)}$ nên không phải là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

» Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, véctơ nào sau đây là một véctơ pháp tuyến của (P), biết $\vec{a}=(-1;-2;-2)$, $\vec{b}=(-1;0;-1)$ là cặp véctơ chỉ phương của (P)?

A. $\vec{n}=(2;1;2)$. **B.** $\vec{n}=(2;-1;-2)$. **C.** $\vec{n}=(2;1;-2)$. **D.** $\vec{n}=(-2;1;-2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $[\vec{a};\vec{b}]=(2;1;-2)$, nên véctơ $\vec{n}=(2;1;-2)$ là một véctơ pháp tuyến của (P).

» Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua $A(1;-1;2)$ và có véctơ pháp tuyến $\vec{n}=(4;2;-6)$ là

A. $4x+2y-6z+5=0$. . **B.** $2x+y-3z+5=0$.

C. $2x+y-3z+2=0$. **D.** $2x+y-3z-5=0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $(P):\begin{cases}\bullet\ \text{Qua } A(1;-1;2)\\ \bullet\ \text{VTPT}: \vec{n}_{(P)}=(4;2;-6)\end{cases}$

$\Rightarrow (P): 4(x-1)+2(y+1)-6(z-2)=0 \Leftrightarrow (P): 2x+y-3z+5=0.$

» Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0;1;1); B(1;2;3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB.

A. $(P): x+y+2z-3=0$. **B.** $(P): x+y+2z-6=0$.

C. $(P): x+3y+4z-7=0$. **D.** $(P): x+3y+4z-26=0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $(P): \begin{cases} \bullet \text{ Qua } A(0;1;1) \\ \bullet \text{ VTPT}: \vec{n}_{(P)} = \overrightarrow{AB} = (1;1;2) \end{cases}$

$\Rightarrow (P): 1(x-0)+1(y-1)+2(z-1)=0 \Leftrightarrow (P): x+y+2z-3=0.$

» Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;4;1), B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P): x-3y+2z-5=0$. Lập phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P).

A. $2y+3z-11=0$. **B.** $2x-3y-11=0$. **C.** $x-3y+2z-5=0$. **D.** $3y+2z-11=0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-3;-3;2)$, vectơ pháp tuyến của mp(P) là $\overrightarrow{n_P}=(1;-3;2)$.

Từ giả thiết suy ra $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n_P}\right]=(0;8;12)$ là vectơ pháp tuyến của mp(Q).

Mp (Q) đi qua điểm $A(2;4;1)$ suy ra phương trình tổng quát của mp(Q) là:

$0(x-2)+8(y-4)+12(z-1)=0 \Leftrightarrow 2y+3z-11=0$.

» Câu 20. Cho hai mặt phẳng $(\alpha): 3x-2y+2z+7=0, (\beta): 5x-4y+3z+1=0$. Phương trình mặt phẳng đi qua gốc tọa độ O đồng thời vuông góc với cả (α) và (β) là:

A. $2x-y-2z=0.$ **B.** $2x+y-2z=0.$ **C.** $2x-y+2z=0.$ **D.** $2x+y-2z+1=0.$

Lời giải

Chọn B

Véc tơ pháp tuyến của hai mặt phẳng lần lượt là $\overrightarrow{n_\alpha}=(3;-2;2), \overrightarrow{n_\beta}=(5;-4;3)$.

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{n_\alpha}; \overrightarrow{n_\beta}\right]=(2;1;-2)$

Phương trình mặt phẳng đi qua gốc tọa độ O, VTPT $\vec{n}=(2;1;-2)$: $2x+y-2z=0.$

» Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;-2;-2), B(3;2;0), C(0;2;1)$. Phương trình mặt phẳng (ABC) là

A. $2x-3y+6z+12=0$. **B.** $2x+3y-6z-12=0$.

C. $2x-3y+6z=0$. **D.** $2x+3y+6z+12=0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có:
$\overrightarrow{AB}=(0;4;2)$, $\overrightarrow{AC}=(-3;4;3)$, $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(4;-6;12)$.

Ta có $\vec{n}=(4;-6;12)$ cùng phương $\vec{n}_1=(2;-3;6)$

Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $C(0;2;1)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1=(2;-3;6)$ nên (ABC) có phương trình là:

$2(x-0)-3(y-2)+6(z-1)=0 \Leftrightarrow 2x-3y+6z=0$.

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là: $2x-3y+6z=0$.

» Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;2), B(2;-2;1), C(-2;1;0)$. Khi đó, phương trình mặt phẳng (ABC) là $ax+y-z+d=0$. Hãy xác định a và d.

A. $a=6, d=-6$.
B. $a=1, d=1$.
C. $a=-1, d=-6$.
D. $a=-6, d=6$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(2;-3;-1)$; $\overrightarrow{AC}=(-2;0;-2)$.

$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\left(\begin{vmatrix}-3 & -1\\ 0 & -2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -2 & -2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2 & -3\\ -2 & 0\end{vmatrix}\right)=(6;6;-6)$.

Chọn $\vec{n}=\frac{1}{6}\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(1;1;-1)$ là một VTPT của $mp(ABC)$. Ta có pt $mp(ABC)$ là:

$x+y-1-z+2=0 \Leftrightarrow x+y-z+1=0$. Vậy $a=1, d=1$

» Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $A(1;3;-2)$ và song song với mặt phẳng $(P): 2x-y+3z+4=0$ là

A. $2x+y+3z+7=0$.
B. $2x+y-3z+7=0$.
C. $2x-y+3z+7=0$.
D. $2x-y+3z-7=0$.

Lời giải

Chọn C

Gọi (α) là mặt phẳng cần tìm. Vì $(\alpha)//(P) \Rightarrow \vec{n}_{(\alpha)}=\vec{n}_{(P)}=(2;-1;3)$

Ta có: (α) đi qua $A(1;3;-2)$ và có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(\alpha)}=(2;-1;3)$.

Do đó phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) là:

$2(x-1)-1(y-3)+3(z+2)=0$ hay $2x-y+3z+7=0$

» Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-1;-3)$ và mặt phẳng $(P): 3x-2y+4z-5=0$. Mặt phẳng (Q) đi qua A và song song với mặt phẳng (P) có phương trình :

A. $(Q): 3x-2y+4z-4=0$.
B. $(Q): 3x-2y+4z+4=0$.
C. $(Q): 3x-2y+4z+5=0$.
D. $(Q): 3x+2y+4z+8=0$..

Lời giải

Chọn B

Do (Q) song song với (P) nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(3;-2;4)$.

Phương trình mặt phẳng (Q): $3(x-2)-2(y+1)+4(z+3)=0 \Leftrightarrow 3x-2y+4z+4=0$.

» **Câu 25.** Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;2;3)$, $B(3;4;4)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $2x+y+mz-1=0$ bằng độ dài đoạn thẳng AB

A. $m=2$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=-3$. **D.** $m=\pm 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;2;1) \Rightarrow AB=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3$ (1).

Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P): $d(A,(P))=\dfrac{|2.1+2+m.3-1|}{\sqrt{2^2+1^2+m^2}}=\dfrac{|3m+3|}{\sqrt{5+m^2}}$ (2).

Để $AB=d(A,(P)) \Rightarrow 3=\dfrac{|3m+3|}{\sqrt{5+m^2}} \Leftrightarrow 9(5+m^2)=9(m+1)^2 \Leftrightarrow m=2$.

B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai

» **Câu 26.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+3y+z-2024=0$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;3;1)$.		
(b)	Mặt phẳng (Oxz) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(6;9;3)$.		
(c)	Mặt phẳng (Oyz) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(-4;-6;-2)$.		
(d)	Điểm $M(0;0;2024)$ không thuộc mặt phẳng (P).		

Lời giải

(a) Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;3;1)$.

Véctơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_2(2;3;1)$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) Mặt phẳng (Oxz) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(6;9;3)$.

Ta có $\vec{n}=(6;9;3)=3(2;3;1)$

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) Mặt phẳng (Oyz) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(-4;-6;-2)$.

$\vec{n}=(-4;-6;-2)=-2(2;3;1)$

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) Điểm $M(0;0;2024)$ không thuộc mặt phẳng (P).

Thay điểm $M(0;0;2024)$ vào mặt phẳng $(P): 2.0+3.0+2024-2024=0 \Rightarrow M \in (P)$

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 27.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;0); B(4;1;2)$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai

(a)	$\overrightarrow{AB}=(3;1;2)$		
(b)	Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với AB có phương trình là $3x+y+2z-3=0$.		
(c)	Nếu I là trung điểm đoạn thẳng AB thì $I\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2};1\right)$.		
(d)	Mặt phẳng trung trực đoạn thẳng AB có phương trình là $3x+y+2z-12=0$.		

Lời giải

(a) $\overrightarrow{AB}=(3;1;2)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;1;2)$

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) *Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với* AB *có phương trình là* $3x+y+2z-3=0$.

Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua $A(1;0;0)$ và vuông góc với AB

Suy ra mặt phẳng (Q) nhận vectơ $\overrightarrow{AB}=(3;1;2)$ làm véc tơ pháp tuyến.

Vậy phương trình mặt phẳng (Q) cần tìm: $3(x-1)+y+2z=0 \Leftrightarrow 3x+y+2z-3=0$

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) *Nếu* I *là trung điểm đoạn thẳng* AB *thì* $I\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2};1\right)$.

I là trung điểm đoạn thẳng AB nên $I\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2};1\right)$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) *Mặt phẳng trung trực đoạn thẳng* AB *có phương trình là* $3x+y+2z-12=0$.

Mặt phẳng trung trực đoạn thẳng AB là mặt phẳng đi qua I và vuông góc AB nên có phương trình là $3\left(x-\frac{5}{2}\right)+y-\frac{1}{2}+2(z-1)=0 \Leftrightarrow 3x+y+2z-10=0$

» **Chọn** SAI.

» Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;1;4);B(2;7;9);C(0;9;13)$; $D(1;8;10)$. Mệnh đề nào sau đây đúng và mệnh đề nào sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\overrightarrow{AB}=\vec{i}+6\vec{j}+5\vec{k}$		
(b)	$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$		
(c)	Phương trình mặt phẳng đi qua điểm B và vuông góc với AC là $x-8y-9z+14=0$.		
(d)	Phương trình mặt phẳng chứa AB song song với CD là $8x-7y-13z+50=0$		

Lời giải

(a) $\overrightarrow{AB}=\vec{i}+6\vec{j}+5\vec{k}$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;6;5)$; $\overrightarrow{AC}=(-1;8;9)$,

$\overrightarrow{AB}=(1;6;5)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=\vec{i}+6\vec{j}+5\vec{k}$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow 1.(-1)+6.8+5.9=0$ vô lí .

» **Chọn** SAI.

(c) *Phương trình mặt phẳng đi qua điểm B và vuông góc với AC là $x-8y-9z+14=0$.*

Phương trình mặt phẳng đi qua điểm B và vuông góc với AC có dạng:

$-(x-2)+8(y-7)+9(z-9)=0\Leftrightarrow x-8y-9z+135=0$

» **Chọn** SAI.

(d) *Phương trình mặt phẳng chứa AB song song với CD là $8x-7y-13z+50=0$.*

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;6;5);\overrightarrow{CD}=(1;-1;-3)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right]=(-13;8;-7)$

Phương trình mặt phẳng cần tìm:

$-13(x-1)+8(y-1)-7(z-4)=0\Leftrightarrow 13x-8y+17z-33=0$.

» **Chọn** SAI.

» **Câu 29.** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;4)$, $B(2;7;9)$, $C(0;9;13)$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\overrightarrow{AB}=(1;6;5)$		
(b)	Mặt phẳng (ABC) có 1 vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;-1;1)$		
(c)	(ABC): $x-y+z-4=0$		
(d)	$O\in(ABC)$		

Lời giải

(a) $\overrightarrow{AB}=(1;6;5)$.

$A(1;1;4)$, $B(2;7;9)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(1;6;5)$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) *Mặt phẳng (ABC) có 1 vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;-1;1)$.*

$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(14;-14;14)=14(1;-1;1)$ nên (ABC) có 1 vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;-1;1)$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) (ABC): $x-y+z-4=0$

(ABC) đi qua $A(1;1;4)$ có vtpt $\vec{n}=(1;-1;1)$ nên có phương trình $x-y+z-4=0$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) $O\in(ABC)$.

Tọa độ O không thỏa phương trình (ABC) nên $O\notin(ABC)$.

» **Chọn** SAI.

» **Câu 30.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba mặt phẳng $(P): x+2y-z-1=0$

$(Q): 3x-y+z-5=0$ và $(R): 2x+4y-mz-2=0$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$(P)//(Q)$		
(b)	(α) qua O và song song (P) có phương trình là $(\alpha): x+2y-z=0$		
(c)	$(P)//(R)$ khi $m=2$		
(d)	$(P)\perp(R)$ khi $m=-10$		

Lời giải

(a) $(P)//(Q)$

(P) có VTPT $\overrightarrow{n_1}=(1;2;-1)$, (Q) có VTPT $\overrightarrow{n_2}=(3;-1;1)$

$\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0$ nên $(P)\perp(Q)$.

» **Chọn** SAI.

(b) (α) *qua* O *và song song* (P) *có phương trình là* $(\alpha): x+2y-z=0$.

$(\alpha)//(P)$ nên $(\alpha): x+2y-z+D=0$.

$O\in(\alpha)\Rightarrow D=0$. Vậy $(\alpha): x+2y-z=0$

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) $(P)//(R)$ *khi* $m=2$.

(R) có VTPT $\overrightarrow{n_3}=(2;4;-m)$.

$$(P)//(R)\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{n_1}=k.\overrightarrow{n_3}\\ -1\neq k(-2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=2\\ k=\dfrac{1}{2}\\ k\neq\dfrac{1}{2}\end{cases}\text{ (vô lý).}$$

Vậy không có giá trị của m.

» **Chọn** SAI.

(d) $(P)\perp(R)$ *khi* $m=-10$.

$(P)\perp(R)\Leftrightarrow\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_3}=0\Leftrightarrow 1.2+2.4-1.(-m)=0\Leftrightarrow m=-10$.

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 31.** Trong không gian $Oxyz$, cho $M(-2;-4;3)$ và $(P): 2x-y+2z-3=0$,

$(Q): 2x-y+2z-6=0$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$d(M,(P))=2$		
(b)	M cách đều hai mặt phẳng (P) và (Q)		
(c)	$d((P),(Q))=1$		
(d)	(α) song song và cách (Q) một khoảng bằng 2 có phương trình là $(\alpha): 2x-y+2z-9=0$		

Lời giải

(a) $d\left(M,\left(P\right)\right)=2$

$$d\left(M,\left(P\right)\right)=\frac{\left|2.(-2)+4+2.3-3\right|}{\sqrt{2^2+\left(-1\right)^2+2^2}}=1.$$

» **Chọn** SAI.

(b) *M cách đều hai mặt phẳng* $\left(P\right)$ *và* $\left(Q\right)$.

$$d\left(M,\left(Q\right)\right)=\frac{\left|2.(-2)+4+2.3-6\right|}{\sqrt{2^2+\left(-1\right)^2+2^2}}=0\Rightarrow M\in\left(Q\right)$$

» **Chọn** SAI.

(c) $d\left(\left(P\right),\left(Q\right)\right)=1$.

$$d\left(\left(P\right),\left(Q\right)\right)=d\left(M,\left(P\right)\right)=\frac{\left|2.(-2)+4+2.3-3\right|}{\sqrt{2^2+\left(-1\right)^2+2^2}}=1.$$

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) $\left(\alpha\right)$ *song song và cách* $\left(Q\right)$ *một khoảng bằng 2 có phương trình là* $\left(\alpha\right):2x-y+2z-9=0$.

$\left(\alpha\right)//\left(Q\right)$ nên $\left(\alpha\right):2x-y+2z+D=0$.

$$d\left(\left(\alpha\right),\left(Q\right)\right)=2\Leftrightarrow d\left(M,\left(\alpha\right)\right)\Leftrightarrow\frac{\left|2.(-2)+4+2.3+D\right|}{\sqrt{2^2+\left(-1\right)^2+2^2}}=2\Leftrightarrow D=0$$

Vậy $\left(\alpha\right):\left(P\right):2x-y+2z=0$

» **Chọn** SAI.

» **Câu 32.** Cho hai mặt phẳng $\left(P\right):2x-y+2z-5=0$; $\left(Q\right):4x-2y+4z+1-m=0$ và điểm $M\left(2;1;5\right)$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Khoảng cách từ M đến mặt phẳng $\left(P\right)$ bằng $\frac{8}{3}$.		
(b)	Với $m=0$ thì khoảng cách M đến mặt phẳng $\left(Q\right)$ bằng $\frac{9}{2}$.		
(c)	Với $m=3$ thì khoảng cách giữa mặt phẳng $\left(P\right)$ và mặt phẳng $\left(Q\right)$ bằng 3.		
(d)	Có hai giá trị của m để khoảng cách từ M đến mặt phẳng $\left(Q\right)$ bằng 1. Khi đó tổng tất cả giá trị của m bằng 5.		

Lời giải

(a) Khoảng cách từ M đến mặt phẳng $\left(P\right)$ *bằng* $\frac{8}{3}$.

Khoảng cách từ M đến mặt phẳng $\left(P\right)$: $d\left(M;\left(P\right)\right)=\frac{\left|2.2-1+2.5-5\right|}{\sqrt{2^2+\left(-1\right)^2+2^2}}=\frac{8}{3}$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) Với $m=0$ *thì khoảng cách M đến mặt phẳng* $\left(Q\right)$ *bằng* $\frac{9}{2}$.

Với $m=0$ thì $(Q):4x-2y+4z+1=0$.

Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (Q): $d\left(M;(Q)\right)=\dfrac{\left|4.2-2.1+4.5+1\right|}{\sqrt{4^2+(-2)^2+4^2}}=\dfrac{9}{2}$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) *Với $m=3$ thì khoảng cách giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng 3.*

Với $m=3$ thì $(Q):4x-2y+4z-2=0 \Leftrightarrow (Q):2x-y+2z-1=0$.

Chọn $N(0;-5;0)\in(P)$. Vì $(P)//(Q)$ nên $d\left((P);(Q)\right)=d\left(N;(Q)\right)=\dfrac{\left|2.0-(-5)+2.0-1\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\dfrac{4}{3}$.

» **Chọn SAI.**

(d) *Có hai giá trị của m để khoảng cách từ M đến mặt phẳng (Q) bằng 1. Khi đó tổng tất cả giá trị của m bằng 5.*

khoảng cách từ M đến mặt phẳng (Q) bằng $1 \Leftrightarrow d\left(M;(Q)\right)=1 \Leftrightarrow \dfrac{\left|4.2-2.1+4.5+1-m\right|}{\sqrt{4^2+(-2)^2+4^2}}=1$

$\Leftrightarrow \dfrac{|27-m|}{6}=1 \Leftrightarrow |27-m|=6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}27-m=6\\27-m=-6\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=21\\m=33\end{array}\right.$

Vậy tổng các giá trị của m bằng $21+33=54$.

» **Chọn** SAI.

C. *Câu hỏi – Trả lời ngắn*

» **Câu 33.** Cho điểm $A(1;2;-1)$ và mặt phẳng $(\alpha):2x-2y+z-7=0$, Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (α) có dạng $\dfrac{a}{b}$ tối giản; $a;b\in\mathbb{Z}$. Tính $T=2a-b$?

Lời giải

✓***Trả lời: 13***

Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (α):

$d\left(M;(\alpha)\right)=\dfrac{\left|2.1-2.2+(-1)-7\right|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\dfrac{8}{3}=\dfrac{a}{b}\Rightarrow\begin{cases}a=8\\b=3\end{cases}$.

Vậy $T=2a-b=13$.

» **Câu 34.** Cho điểm $A(1;2;-1)$ và mặt phẳng $(\alpha):x-2y+2z+2=0$. Mặt phẳng (β) song song với mặt phẳng (α) và cách A một khoảng 1 có dạng $(\alpha):x-by+cz+d=0$. Khi đó $S=3b-c+d$?

Lời giải

✓***Trả lời: 12***

Mặt phẳng (β) song song với mặt phẳng (α) nên mặt phẳng (β) có dạng:

$x-2y+2z+d=0;\ (d\neq 2)$.

Khoảng cách từ M đến (β) bằng $1 \Leftrightarrow \dfrac{|1-2.2+2(-1)+d|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=1 \Leftrightarrow |d-5|=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=8 \\ d=2\ (l) \end{array}\right.$.

Do đó: $(\beta): x-2y+2z+8=0 \Rightarrow \begin{cases} b=2 \\ c=2 \\ d=8 \end{cases}$.

Vậy $S=3.2-2+8=12$

» Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(a;b;1)$ thuộc mặt phẳng $(P): 2x-y+z-3=0$. Tính giá trị biểu thức $S=2a-b$.

Lời giải

✓Trả lời: 2

Vì $M \in (P)$ nên $2a-b+1-3=0 \Leftrightarrow 2a-b=2$.

» Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho phương trình mặt phẳng (P) qua $A(2;1;-3)$ và song song với mặt phẳng $(Q): x-y+2z-1=0$ có dạng $x-y+az+b=0$ Tính giá trị biểu thức $S=a-b$.

Lời giải

✓Trả lời: -3

Vì $(P)\ //\ (Q): x-y+2z-1=0$, nên VTPT của $(Q): \vec{n}_{(Q)}=(1;-1;2)$ cũng là VTPT của (P).

Ta có mặt phẳng (P) qua $A(2;1;-3)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;-1;2)$

Nên phương trình mặt phẳng (P) là: $1.(x-2)-1(y-1)+2(z+3)=0$ hay $x-y+2z+5=0$

Suy ra $\begin{cases} a=2 \\ b=5 \end{cases} \Rightarrow a-b=2-5=-3$.

» Câu 37. Trong gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-1;1)$, $B(1;0;4)$, $C(0;-2;-1)$. Mặt phẳng qua A và vuông góc với đường thẳng BC có phương trình dạng $x+ay+bz+c=0$. Tính giá trị biểu thức $S=a+b+c$.

Lời giải

✓Trả lời: 2

Ta có $\overrightarrow{BC}=(-1;-2;-5)$.

Mặt phẳng qua $A(2;-1;1)$ và vuông góc với đường thẳng BC nhận vectơ $\overrightarrow{BC}=(-1;-2;-5)$ là một vectơ pháp tuyến nên có phương trình là $-(x-2)-2(y+1)-5(z-1)=0$

$\Leftrightarrow -x-2y-5z+5=0 \Leftrightarrow x+2y+5z-5=0 \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=5 \\ c=-5 \end{cases} \Rightarrow a+b+c=2$.

» Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): ax+by+cz-27=0$ qua hai điểm $A(3;2;1)$ và $B(-3;5;2)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): 3x+y+z+4=0$. Tính tổng $S=a+b+c$.

Lời giải

✓Trả lời: -12

Cách 1:

$\overrightarrow{AB}=(-6;3;1)$, $\vec{n}_{(Q)}=(3;1;1)$.

(P) qua hai điểm $A(3;2;1), B(-3;5;2)$ và vuông góc mặt phẳng (Q) , nên (P) có cặp vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}=(-6;3;1)$, $\vec{n}_{(Q)}=(3;1;1)$.

Suy ra (P) có VTPT $\vec{n}_{(P)}=\left[\overrightarrow{AB};\vec{n}_{(Q)}\right]=(2;9;-15)$, và qua điểm $A(3;2;1)$.

Phương trình $(P): 2x+9y-15z-4=0 \Leftrightarrow 6x+27y-45z-12=0$.

Vậy $S=a+b+c=-12$.

Cách 2:

Ta có $\vec{n}_{(P)}=(a;b;c)$, $\vec{n}_{(Q)}=(3;1;1)$.

Mặt phẳng (P) qua hai điểm $A(3;2;1)$ và $B(-3;5;2)$ và vuông góc với mặt phẳng (Q)

$\begin{cases}3a+2b+c=27\\-3a+5b+2c=27\\3a+b+c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=6\\b=27\\c=-45\end{cases}$. Vậy $S=a+b+c=-12$.

» Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua $A(1;0;0)$; $B(0;0;2)$ và cắt tia Oy tại điểm C sao cho thể tích khối chóp $OABC$ bằng 2. Biết điểm $S(-1;6;m)$ thuộc (P), thì m bằng bao nhiêu?

Lời giải

✓Trả lời: 2

Gọi $C(0;y;0)\in Oy$ với $y>0$;

Ta có: $OA=1$, $OB=2$, $OC=y$ và OA, OB, OC đôi một vuông góc;

$\Rightarrow V_{OABC}=\frac{1}{6}OA.OB.OC=\frac{1}{3}y$.

Giả thiết $\Rightarrow \frac{1}{3}y=2 \Rightarrow y=6 \Rightarrow C(0;6;0)$.

Phương trình mặt phẳng $(ABC): \frac{x}{1}+\frac{y}{6}+\frac{z}{2}=1$.

Điểm $S(-1;6;m)$ thuộc (P) $\Leftrightarrow \frac{-1}{1}+\frac{6}{6}+\frac{m}{2}=1 \Leftrightarrow m=2$.

» Câu 40. Trong không gian $Oxyz$, cho $(\alpha): x+2y-z-1=0$ và $(\beta): 2x+4y-mz+2=0$. Tìm m để (α) và (β) song song với nhau.

Lời giải

✓Trả lời: 2

Vec-tơ pháp tuyến của hai mặt phẳng lần lượt là $\vec{n}_{(\alpha)}=(1;\ 2;-1)$; $\vec{n}_{(\beta)}=(2;\ 4;-m)$

Để (α) và (β) song song với nhau thì: $\vec{n}_{(\alpha)}=k.\vec{n}_{(\beta)}\left(k\in\mathbb{N}^*\right) \Leftrightarrow \frac{2}{1}=\frac{4}{2}=\frac{m}{1} \Rightarrow m=2$.

» **Câu 41.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;0)$, $B(3;4;-2)$ và $(P): x-y+z-4=0$. Phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P), có dạng $(Q): ax+by+cz+2=0$. Tính $T=a+b+c$.

Lời giải

✓Trả lời: -2

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;2;-2)=2(1;1;-1)$.

Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}_P=(1;-1;1)$.

Mặt phẳng (Q) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_Q=\left[\overrightarrow{AB},\vec{n}_P\right]=(0;-4;-4)=-4(0;1;1)$.

Vậy phương trình mặt phẳng (Q): $y+z-2=0 \Leftrightarrow -y-z+2=0 \Rightarrow T=a+b+c=-2$.

» **Câu 42.** Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(0;1;2), B(2;-2;1), C(-2;1;0), M(3;0;1)$. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (ABC), (*kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*).

Lời giải

✓Trả lời: 1,73

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(2;-3;-1); \overrightarrow{AC}=(-2;0;-2)$.

$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\left(\begin{vmatrix}-3 & -1\\ 0 & -2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -2 & -2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2 & -3\\ -2 & 0\end{vmatrix}\right)=(6;6;-6).$$

Chọn $\vec{n}=\dfrac{1}{6}\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(1;1;-1)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC).

Phương trình mặt phẳng (ABC) là: $x+y-1-z+2=0 \Leftrightarrow x+y-z+1=0$.

$$d(M,(ABC))=\frac{|3+0-1+1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\sqrt{3}\approx 1,73.$$

» **Câu 43.** Trong không gian $Oxyz$, biết mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng -7 và cách điểm $A(2,-3,4)$ một khoảng bằng 3. Tính tích hai hệ số tự do của phương trình tổng quát mặt phẳng (P) (biết hoành độ của vectơ pháp tuyến của (P) bằng 1).

Lời giải

✓Trả lời: 175

$(P)//(Q): 2x-4y+4z+3=0 \Rightarrow (P): 2x-4y+4z+D=0 \; (D\neq 3)$

$$d(A,(P))=3 \Leftrightarrow \frac{|4+12+16+D|}{\sqrt{4+16+16}}=\frac{|D+32|}{6}=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}D=-14\\ D=-50\end{array}\right.$$

$\Rightarrow (P): 2x-4y+4z-14=0; 2x-4y+4z-50=0$.

Vì hoành độ của vectơ pháp tuyến của (P) bằng 1nên phương trình của các mặt phẳng cần tìm là: $x-2y+2z-7=0; x-2y+2z-25=0$.

Khi đó tích hai hệ số tự do của phương trình tổng quát mặt phẳng (P) là $(-7).(-25)=175$.

» **Câu 44.** Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $M(m;0;0), N(0;n;0), P(0;0;p)$ không trùng với gốc tọa độ và thỏa mãn $m^2+n^2+p^2=3, m,n,p$ là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của khoảng cách từ O đến mặt phẳng (MNP). *(Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).*

Lời giải

✓Trả lời: 0,58

Phương trình mặt phẳng (MNP) có phương trình là $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+\frac{z}{p}=1$.

Theo bất đẳng thức Bunhia-Copsky ta có:

$$\left(m^2+n^2+p^2\right)\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{p^2}\right)\ge 9 \Rightarrow \frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{p^2}\ge\frac{9}{m^2+n^2+p^2}=3$$

Khi đó: $d(O;(P))=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{p^2}}}\le\frac{1}{\sqrt{3}}$. Dấu bằng xảy ra khi $m=n=p=1$.

Vậy khoảng cách lớn nhất từ O đến (MNP) bằng $\frac{1}{\sqrt{3}}\approx 0,58$.

» **Câu 45.** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;2)$ và mặt phẳng $(P):(m-1)x+y+mz-1=0$, với m là tham số. Tìm m để khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) lớn nhất.

Lời giải

✓Trả lời: 5

Ta có $d(A,(P))=\frac{|m-1+1+2m-1|}{\sqrt{(m-1)^2+1+m^2}}=\sqrt{\frac{(3m-1)^2}{2(m^2-m+1)}}$.

Xét $f(m)=\frac{(3m-1)^2}{2(m^2-m+1)}\Rightarrow f'(m)=\frac{(5-m)(3m-1)}{2(m^2-m+1)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\frac{1}{3}\\ m=5\end{array}\right.$.

m	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		5		$+\infty$
$f'(m)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(m)$	$\frac{9}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{14}{3}$	$\searrow$	$\frac{9}{2}$

Vậy $\max d(A,(P))=\sqrt{\frac{14}{3}}$ khi $m=5$.

-------------------- Hết --------------------

Chương 05

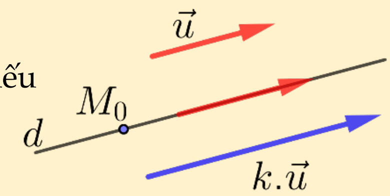
Bài 2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

A Lý thuyết

1. Phương trình đường thẳng

Vectơ chỉ phương của đường thẳng:

Cho đường thẳng Δ và vectơ $\vec{u}$ khác $\vec{0}$.
Vectơ $\vec{u}$ được gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ nếu giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng với Δ.



✓ *Nhận xét:*

» Một đường thẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm mà nó đi qua và một vectơ chỉ phương của nó.

» Nếu $\vec{u}$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng thì $k.\vec{u}$ $(k \neq 0)$ cũng là một vectơ chỉ phương của đường thẳng đó.

Phương trình tham số của đường thẳng:

Trong không gian $Oxyz$,
phương trình tham số của đường thẳng Δ qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và nhận $\vec{u}=(a;b;c)$ làm vectơ chỉ phương có dạng:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \text{ với } t \in \mathbb{R} \ (t \text{ được gọi là tham số và } a^2+b^2+c^2 \neq 0)$$

Phương trình chính tắc của đường thẳng:

Trong không gian $Oxyz$,
phương trình chính tắc của đường thẳng Δ qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và nhận $\vec{u}=(a;b;c)$ làm vectơ chỉ phương có dạng:

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c} \quad (a.b.c \neq 0)$$

Phương trình đường thẳng qua hai điểm cho trước:

Trong không gian $Oxyz$,
cho đường thẳng Δ đi qua hai điểm $A\left(x_A;y_A;z_A\right),B\left(x_B;y_B;z_B\right)$ và nhận $\overrightarrow{AB}=\left(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A\right)$ làm vectơ chỉ phương có:

✓ Phương trình tham số : $\begin{cases}x=x_A+\left(x_B-x_A\right)t\\ y=y_A+\left(y_B-y_A\right)t\\ z=z_A+\left(z_B-z_A\right)t\end{cases}$ với $t\in\mathbb{R}$

✓ Phương trình chính tắc: $\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A}=\dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}=\dfrac{z-z_A}{z_B-z_A}$ (với $x_B\neq x_A,y_B\neq y_A,z_B\neq z_A$)

2. Vị trí tương đối hai đường thẳng. Điều kiện để hai đường thẳng vuông góc

Sự cùng phương – Sự đồng phẳng:

Trong không gian $Oxyz$,

- Hai vectơ được gọi là ***cùng phương*** khi giá của chúng cùng song song với một đường thẳng.
- Ba vectơ được gọi là ***đồng phẳng*** khi giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}=\left(a_1;a_2;a_3\right),\vec{b}=\left(b_1;b_2;b_3\right)$ và $\vec{c}=\left(c_1;c_2;c_3\right)$

✓ Hai $\vec{a},\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}$.

✓ Hai $\vec{a},\vec{b}$ không cùng phương $\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right]\neq\vec{0}$.

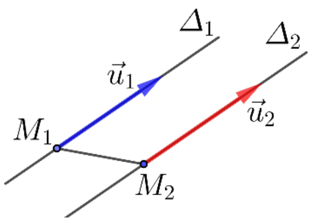
✓ Ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c}=0$.

✓ Ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng $\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c}\neq0$.

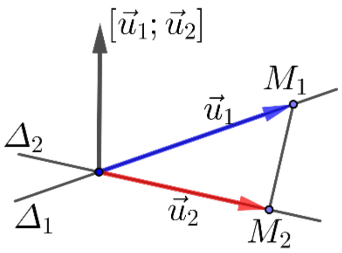
Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng:

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng Δ_1,Δ_2 lần lượt đi qua các điểm M_1,M_2 và tương ứng có $\vec{u}_1=\left(a_1;b_1;c_1\right);\vec{u}_2=\left(a_2;b_2;c_2\right)$ là hai vectơ chỉ phương. Khi đó, ta có:

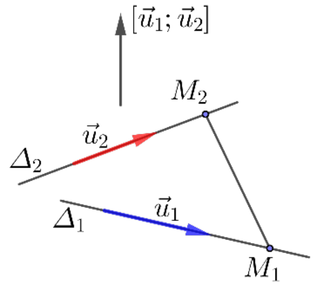
- $\Delta_1\equiv\Delta_2\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{u}_1,\vec{u}_2 & \text{cùng phương}\\ \vec{u}_1,\overrightarrow{M_1M_2} & \text{cùng phương}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\vec{u}_1,\vec{u}_2\right]=\vec{0}\\ \left[\vec{u}_1,\overrightarrow{M_1M_2}\right]=\vec{0}\end{cases}$
- $\Delta_1\parallel\Delta_2\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{u}_1,\vec{u}_2 & \text{cùng phương}\\ \vec{u}_1,\overrightarrow{M_1M_2} & \text{không cùng phương}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\vec{u}_1,\vec{u}_2\right]=\vec{0}\\ \left[\vec{u}_1,\overrightarrow{M_1M_2}\right]\neq\vec{0}\end{cases}$
- Δ_1 cắt $\Delta_2\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{u}_1,\vec{u}_2 & \text{không cùng phương}\\ \vec{u}_1,\vec{u}_2,\overrightarrow{M_1M_2} & \text{đồng phẳng}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\vec{u}_1,\vec{u}_2\right]\neq\vec{0}\\ \left[\vec{u}_1,\vec{u}_2\right].\overrightarrow{M_1M_2}\neq0\end{cases}$
- Δ_1 và Δ_2 chéo nhau $\Leftrightarrow\left[\vec{u}_1,\vec{u}_2\right]\overrightarrow{M_1M_2}\neq0$



Δ_1 song song Δ_2



Δ_1 cắt Δ_2



Δ_1 chéo Δ_2

Chú ý

Để xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng.

Trong không gian *Oxyz*, hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 tương ứng có $\vec{u}_1 = (a_1; b_1; c_1)$ và $\vec{u}_2 = (a_2; b_2; c_2)$ là hai vectơ chỉ phương và có phương trình tham số:

$$\Delta_1 : \begin{cases} x = x_1 + a_1 t_1 \\ y = y_1 + b_1 t_1 \\ z = z_1 + c_1 t_1 \end{cases} (t_1 \in \mathbb{R}), \quad \Delta_2 : \begin{cases} x = x_2 + a_2 t_2 \\ y = y_2 + b_2 t_2 \\ z = z_2 + c_2 t_2 \end{cases} (t_2 \in \mathbb{R})$$

Xét hệ phương trình hai ẩn t_1, t_2: $\begin{cases} x_1 + a_1 t_1 = x_2 + a_2 t_2 \\ y_1 + b_1 t_1 = y_2 + b_2 t_2 \\ z_1 + c_1 t_1 = z_2 + c_2 t_2 \end{cases} \quad (*)$

Khi đó :

» $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow$ $\vec{u}_1$ cùng phương với $\vec{u}_2$ và hệ $(*)$ vô nghiệm.

» $\Delta_1 \,//\, \Delta_2 \Leftrightarrow$ Hệ $(*)$ có vô số nghiệm.

» Δ_1 cắt $\Delta_2 \Leftrightarrow$ Hệ $(*)$ có nghiệm duy nhất.

» Δ_1 và Δ_2 chéo nhau $\Leftrightarrow \vec{u}_1$ không cùng phương với $\vec{u}_2$ và hệ $(*)$ vô nghiệm.

Điều kiện để hai đường thẳng vuông góc:

Trong không gian *Oxyz*, cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 tương ứng có $\vec{u}_1 = (a_1; b_1; c_1)$ và $\vec{u}_2 = (a_2; b_2; c_2)$ là hai vectơ chỉ phương. Khi đó, ta có:

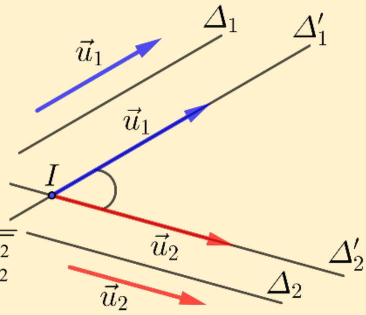
$$\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1 \perp \vec{u}_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1 . \vec{u}_2 = 0 \Leftrightarrow a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$$

3. Góc

Góc giữa hai đường thẳng:

Trong không gian $Oxyz$,
cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 tương ứng có $\vec{u}_1 = (a_1; b_1; c_1)$ và $\vec{u}_2 = (a_2; b_2; c_2)$ là hai vectơ chỉ phương. Khi đó, ta có:

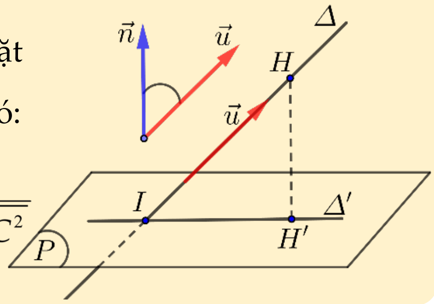
$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = |\cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2)| = \frac{|\vec{u}_1.\vec{u}_2|}{|\vec{u}_1|.|\vec{u}_2|} = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}.\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$



Góc giữa đường thẳng với mặt phẳng:

Trong không gian $Oxyz$,
cho đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$ và mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$. Khi đó, ta có:

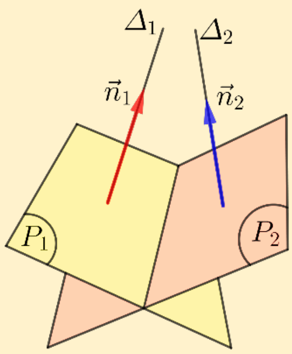
$$\sin(\Delta, (P)) = |\cos(\vec{u}.\vec{n})| = \frac{|\vec{u}.\vec{n}|}{|\vec{u}|.|\vec{n}|} = \frac{|aA + bB + cC|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$



Góc giữa hai mặt phẳng:

Trong không gian $Oxyz$,
cho hai mặt phẳng $(P_1), (P_2)$ có hai vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ và $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$. Khi đó, ta có:

$$\cos((P_1), (P_2)) = |\cos(\vec{n}_1.\vec{n}_2)| = \frac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|.|\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}.\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$



B Các dạng bài tập

Dạng 1. Xác định vectơ chỉ phương của đường thẳng

Phương pháp

» Trong không gian $Oxyz$, vectơ $\vec{u}=(a;b;c)\neq\vec{0}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ thì vectơ $\vec{m}=k.\vec{u}$ cũng là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ.

» Phương trình tham số $\Delta:\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\\z=z_0+ct\end{cases}(t\in\mathbb{R})$ có VTCP $\vec{u}=(a;b;c)$ (hệ số trước t).

» Phương trình chính tắc $\Delta:\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ có VTCP $\vec{u}=(a;b;c)$ (hệ số ở mẫu).

» *Nhận xét:*

- Với phương trình tham số lấy đúng thứ tự hệ số trước *tham số t*.
- Với phương trình chính tắc lấy hệ số dưới mẫu.
- Nếu giả thiết chưa đúng cấu trúc, ta phải sắp xếp lại rồi mới lấy hệ số.

Ví dụ 1.1.

Trong không gian $Oxyz$, xác định một vectơ chỉ phương của đường thẳng dưới đây:

(1) $d:\begin{cases}x=2-t\\y=1+2t\\z=3+t\end{cases}$ (2) $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{2}$ (3) $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{2-z}{1}$

Lời giải

(1) $d:\begin{cases}x=2-t\\y=1+2t\\z=3+t\end{cases}$

Đường thẳng d có một VTCP là $\vec{u}=(-1;2;1)$.

(2) $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{2}$

Đường thẳng d có một VTCP là $\vec{v}=(2;1;2)$.

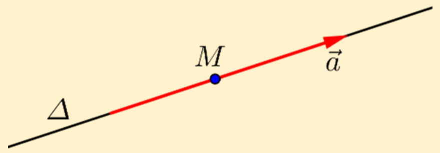
(3) $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{2-z}{1}$

Ta viết lại $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{2-z}{1}\Leftrightarrow d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}\Rightarrow\vec{u}_1=(2;2;-1)$.

Dạng 2. Đường thẳng qua điểm & có sẵn VTCP

Phương pháp

▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ

Loại	Phương pháp
Qua M, có véctơ chỉ phương $\vec{a}=(a;b;c)$ 	≫ Phương trình $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$ hoặc $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ nếu $\{a;b;c\}\neq 0$. ▶ **Lưu ý:** Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra

Ví dụ 2.1.

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua điểm

(1) $M(2;0;-1)$ và có véctơ chỉ phương $\vec{a}=(2;-3;1)$

(2) $N(1;0;-2)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;3;1)$

Lời giải

(1) $M(2;0;-1)$ và có véctơ chỉ phương $\vec{a}=(2;-3;1)$

Đường thẳng đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và có VTCP $\vec{a}=(2;-3;1)$ là $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-3t \\ z=-1+t \end{cases}$.

Và phương trình chính tắc là $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z+1}{1}$.

(2) $N(1;0;-2)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;3;1)$

Đường thẳng đi qua điểm $N(1;0;-2)$ và có VTCP $\vec{u}=(2;3;1)$ là $d:\begin{cases} x=1+2t \\ y=0+3t \\ z=-2+t \end{cases}$.

Và phương trình chính tắc là $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+2}{1}$.

Ví dụ 2.2.

Trong không gian *Oxyz*, viết phương trình tham số của đường thẳng d qua điểm bất kỳ thuộc d và có vectơ chỉ phương tương ứng. Biết đường thẳng d

(1) Đi qua điểm $A(1;1;2)$ và có véctơ chỉ phương $\vec{b}=(1;2;-3)$

(2) Đi qua điểm $C(3;2;1)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;2;3)$

Lời giải

(1) Đi qua điểm $A(1;1;2)$ và có véctơ chỉ phương $\vec{b}=(1;2;-3)$

Đường thẳng d đi qua điểm $A(1;1;2)$ và có VTCP $\vec{b}=(1;2;-3)$ là $d:\begin{cases}x=1+t\\y=1+2t\\z=2-3t\end{cases}$.

Xét $t=1\Rightarrow\begin{cases}x=1+1\\y=1+2.1\\z=2-3.1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=3\\z=-1\end{cases}\Rightarrow M(2;3;-1)$

Khi đó đường thẳng d đi qua điểm $M(2;3;-1)$ có VTCP $\vec{b}=(1;2;-3)$ là $d:\begin{cases}x=2+t\\y=3+2t\\z=-1-3t\end{cases}$.

(2) Đi qua điểm $C(3;2;1)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;2;3)$

Đường thẳng d đi qua điểm $C(3;2;1)$ và có VTCP $\vec{u}=(1;2;3)$ là $d:\begin{cases}x=3+t\\y=2+2t\\z=1+3t\end{cases}$.

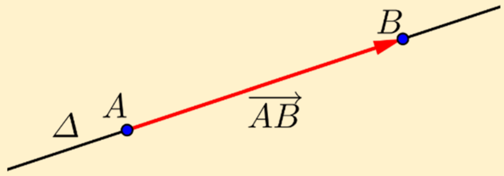
Xét $t=-1\Rightarrow\begin{cases}x=3+(-1)\\y=2+2.(-1)\\z=1+3.(-1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=0\\z=-2\end{cases}\Rightarrow N(2;0;-2)$

Khi đó đường thẳng d đi qua điểm $N(2;0;-2)$ có VTCP $\vec{u}=(1;2;3)$ là $d:\begin{cases}x=2+t\\y=0+2t\\z=-2+3t\end{cases}$.

Dạng 3. Đường thẳng qua hai điểm

Phương pháp

▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ

Loại	Phương pháp
Qua hai điểm A và B. 	» Chọn A hoặc B là điểm mà Δ đi qua. » Nhận $\overrightarrow{AB}$ làm VTCP $\to \vec{u} = \overrightarrow{AB}$. ▶ **Lưu ý:** Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra.

Ví dụ 3.1.

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình chính tắc của đường thẳng

(1) Đi qua gốc tọa độ và $H(1;4;-2)$.

(2) Đi qua hai điểm $M(2;0;-1)$ và $N(2;-3;1)$

Lời giải

(1) Đi qua gốc tọa độ và $H(1;4;-2)$.

Ta có: $\overrightarrow{OH} = (1;4;-2)$.

Đường thẳng OH qua H nhận $\overrightarrow{OH} = (1;4;-2)$ làm VTCP: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z}{-2}$.

(2) Đi qua hai điểm $M(2;0;-1)$ và $N(2;-3;1)$

Ta có: $\overrightarrow{MN} = (-1;\,3;\,2)$.

Đường thẳng MN qua N nhận $\overrightarrow{MN} = (-1;\,3;\,2)$ làm VTCP: $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-3}{2}$.

Ví dụ 3.2.

Trong không gian $Oxyz$, cho ΔABC có $A(-1;3;2)$, $B(2;0;5)$, $C(0;-2;1)$. Viết phương trình đường trung tuyến AM của ΔABC

Lời giải

Gọi $M(x;y;z)$ là trung điểm BC. Khi đó $M(1;-1;3)$

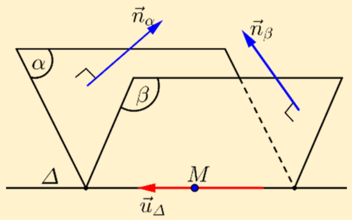
Ta có $\overrightarrow{AM} = \vec{u} = (2;-4;1)$

Khi đó phương trình đường trung tuyến AM: $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{-4} = \dfrac{z-2}{1}$

Dạng 4. Đường thẳng là giao tuyến của hai mặt phẳng

Phương pháp

▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ

Loại	Phương pháp
Giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ và $(\beta): A'x+B'y+C'z+D'=0$  	≫ Cho 1 trong 3 ẩn $x;y;z=0$ để tìm 2 ẩn còn lại $x=0 \longrightarrow \begin{cases} By+Cz+D=0 \\ B'y+C'z+D'=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=? \\ z=? \end{cases} \Rightarrow M(0;?;?)$ ≫ Vecto chỉ phương $\vec{u}=\left[\vec{n}_\alpha;\vec{n}_\beta\right]$. ▶ **Lưu ý:** Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra

Ví dụ 4.1.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x+y-z-1=0$, $(Q): x-2y+z-5=0$. Giao tuyến hai mặt phẳng (P) và (Q) có một vecto chỉ phương là?

Lời giải

Gọi $d=(P)\cap(Q)$.

Khi đó một vecto chỉ phương của d là $\vec{u}=\left[\vec{n}_P,\vec{n}_Q\right]=(-1;-3;-5)$.

Vậy $\vec{u}=(1;3;5)$ cũng là một vecto chỉ phương của d.

Ví dụ 4.2.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): 2x+y-z+3=0$ và $(\beta): x+y+z-1=0$. Phương trình chính tắc đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) là?

Lời giải

Ta có $\begin{cases} \vec{n}_{(\alpha)}=(2;1;-1) \\ \vec{n}_{(\beta)}=(1;1;1) \end{cases} \Rightarrow \left[\vec{n}_{(\alpha)},\vec{n}_{(\beta)}\right]=(2;-3;1) \Rightarrow \vec{u}_\Delta=\left[\vec{n}_\alpha,\vec{n}_\beta\right]=(2;-3;1)$..

Gọi $M=(\alpha)\cap(\beta)$, thì $M\in\Delta$ và M thỏa $\begin{cases} 2x+y-z+3=0 \\ x+y+z-1=0 \end{cases} \xrightarrow{x=0} \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow M(0;-1;2)$

Đường thẳng Δ đi qua $M(0;-1;2)$ và nhận $\vec{u}_\Delta=(2;-3;1)$ làm một vecto chỉ phương có phương trình chính tắc là $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z-2}{1}$.

Ví dụ 4.3.

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y-5z+4=0$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+5}{6}$. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với (P). Xác định phương trình giao tuyến d' của (Q) và (P)?

Lời giải

Gọi đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên (P)

Đường thẳng d đi qua điểm $A(-1;-1;-5)$ và có $\vec{u}_d=(2;1;6)$.

(P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_P=(1;1;-5)$.

(Q) chứa d và vuông góc với $(P) \Rightarrow (P)\cap(Q)=d'$.

Vectơ pháp tuyến của (Q) là $\vec{n}_Q=\left[\vec{n}_P,\vec{u}_d\right]=(11;-16;-1)$.

Phương trình của mặt phẳng (Q) là : $11x-16y-z-10=0$.

Do $(P)\cap(Q)=d'$ nên VTCP của đường thẳng d' là $\vec{u}_{d'}=\left[\vec{n}_Q,\vec{n}_P\right]=-27(3;2;1)$,

$\longrightarrow d'$ có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1=(3;2;1)$.

Gọi $I=d\cap(P)$, khi đó tọa độ I là nghiệm của hệ $\begin{cases} x+y-5z+4=0 \\ \frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+5}{6} \end{cases}$.

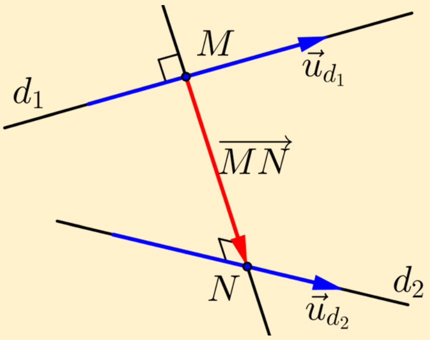
Giải hệ ta được $(x;y;z)=(1;0;1)$.

Do đó $d':\begin{cases} x=1+3t \\ y=2t \\ z=1+t \end{cases}$, suy ra đường thẳng d' đi qua điểm $P(4;2;2)$.

Dạng 5. Đường thẳng là đường vuông góc chung của hai đường thẳng

Phương pháp

▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ

<table>
<tr><th>Loại</th><th>Phương pháp</th></tr>
<tr><td>Là đường vuông góc chung của d_1 và d_2

</td><td>≫ Gọi $\begin{cases} M \in d_1 \\ N \in d_2 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MN}(?)$ (tọa độ theo $t;k$).
≫ MN là đường vuông góc chung
$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_1.\overrightarrow{MN} = 0 \\ \vec{u}_2.\overrightarrow{MN} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = ? \\ k = ? \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(?) \\ N(?) \end{cases}.$
≫ Khi đó đường thẳng $\Delta : \begin{cases} qua \left[\begin{array}{l} M \\ N \end{array} \right. \\ \vec{u}_\Delta = \overrightarrow{MN} \end{cases}.$
▶ **Lưu ý:** Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra</td></tr>
</table>

Ví dụ 5.1.

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = -2 + 5t \end{cases}$ và $d_2 : \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 2 + s \\ z = 1 + 3s \end{cases}$. Viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng $d_1 ; d_2$.

Lời giải

Gọi Δ là đường vuông góc chung của hai đường thẳng $d_1 ; d_2$.

Đường thẳng d_1 có VTCP là $\vec{u}_1 = (2;1;5)$; d_2 có VTCP là $\vec{u}_2 = (1;1;3)$.

Gọi $A = \Delta \cap d_1 \Rightarrow A(1+2t;2+t;-2+5t)$; $B = \Delta \cap d_2 \Rightarrow B(1+s;2+s;1+3s)$.

$\overrightarrow{AB} = (s-2t;s-t;3+3s-5t)$.

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\vec{u}_1 = 0 \\ \overrightarrow{AB}.\vec{u}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(s-2t)+s-t+5(3+3s-5t) = 0 \\ s-2t+s-t+3(3+3s-5t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18s - 30t = -15 \\ 11s - 18t = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 0 \\ t = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$

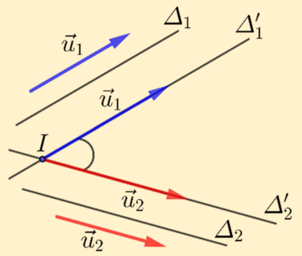
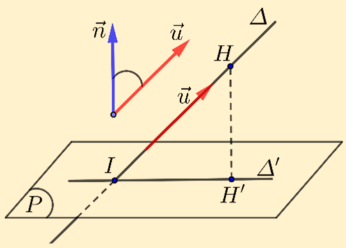
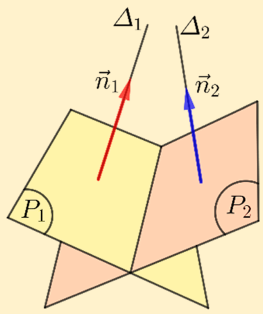
Suy ra $B(1;2;1)$ và $\overrightarrow{AB} = \left(-1;-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

Phương trình đường thẳng đi qua B và có VTCP $\vec{u} = (-2;-1;1)$ là $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

Dạng 6. **Góc**

Phương pháp

▶ Trong không gian $Oxyz$,

Loại	Hình vẽ
Hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 tương ứng có $\vec{u}_1 = (a_1; b_1; c_1)$ và $\vec{u}_2 = (a_2; b_2; c_2)$ là hai vectơ chỉ phương. Khi đó, ta có: $$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \left\|\cos(\vec{u}_1 . \vec{u}_2)\right\| = \frac{\left\|\vec{u}_1 . \vec{u}_2\right\|}{\left\|\vec{u}_1\right\| . \left\|\vec{u}_2\right\|} = \frac{\left\|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2\right\|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} . \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$	
Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$ và mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$. Khi đó, ta có: $$\sin(\Delta, (P)) = \left\|\cos(\vec{u} . \vec{n})\right\| = \frac{\left\|\vec{u} . \vec{n}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\| . \left\|\vec{n}\right\|} = \frac{\left\|aA + bB + cC\right\|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} . \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$	
Hai mặt phẳng $(P_1), (P_2)$ có hai vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ và $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$. Khi đó, ta có: $$\cos((P_1), (P_2)) = \left\|\cos(\vec{n}_1 . \vec{n}_2)\right\| = \frac{\left\|\vec{n}_1 . \vec{n}_2\right\|}{\left\|\vec{n}_1\right\| . \left\|\vec{n}_2\right\|} = \frac{\left\|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2\right\|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} . \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$	

Ví dụ 6.1.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 5 - 2t \\ z = 14 - 3t \end{cases}$ và $d_2 : \begin{cases} x = 1 - 4t' \\ y = 2 + t' \\ z = -1 + 5t' \end{cases}$. Tính góc giữa hai đường thẳng đã cho.

Lời giải

Đường thẳng d_1 có một VTCP $\vec{u}_1 = (1; -2; -3)$.

Đường thẳng d_2 có một VTCP $\vec{u}_2 = (-4; 1; 5)$.

Ta có: $\cos\left(\widehat{d_1, d_2}\right) = \frac{\left|\vec{u}_1 . \vec{u}_2\right|}{\left|\vec{u}_1\right| . \left|\vec{u}_2\right|} = \frac{\left|1.(-4) + (-2).1 + (-3).5\right|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-3)^2} . \sqrt{(-4)^2 + 1^2 + 5^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow (d_1, d_2) = 30^\circ$

Ví dụ 6.2.

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+3}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 2x + y + z - 1 = 0$. Tính góc giữa Δ và (P)

Lời giải

Đường thẳng Δ có một VTCP $\vec{u} = (1;2;-1)$.

Mặt phẳng (P) có một VTPT $\vec{n} = (2;1;1)$.

Ta có: $\sin\left(\widehat{\Delta,(P)}\right) = \frac{|\vec{u}.\vec{n}|}{|\vec{u}|.|\vec{n}|} = \frac{|1.2+2.1+(-1).1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}.\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\widehat{\Delta,(P)}\right) = 30^{\circ}$

Ví dụ 6.3.

Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa hai mặt phẳng $(P): x + 2y + z + 10 = 0$ và $(Q): -x + y + 2z + 13 = 0$.

Lời giải

Mặt phẳng (P) có một VTPT là $\vec{n}_1 = (1;2;1)$.

Mặt phẳng (Q) có một VTPT là $\vec{n}_2 = (-1;1;2)$.

Ta có: $\cos\left(\widehat{(P),(Q)}\right) = \frac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|.|\vec{n}_2|} = \frac{|1.(-1)+2.1+1.2|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}.\sqrt{(-1)^2+1^2+2^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\widehat{(P),(Q)}\right) = 60^{\circ}$

Dạng 7. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Phương pháp

▶ Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng:

$d:\begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \\ z = z_0 + a_3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $M_0(x_0; y_0; z_0) \in d$;

$d':\begin{cases} x = x'_0 + a'_1t' \\ y = y'_0 + a'_2t' \\ z = z'_0 + a'_3t' \end{cases} (t' \in \mathbb{R})$ có vectơ chỉ phương $\vec{a}' = (a'_1; a'_2; a'_3)$.

Khi đó:

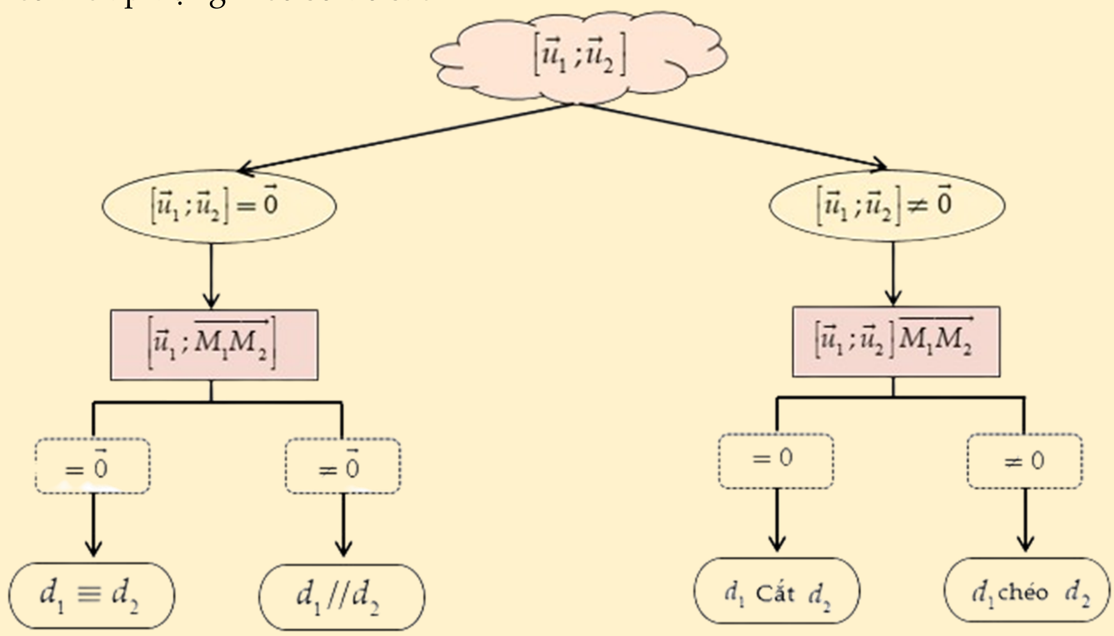
» $d // d' \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{a}'$ cùng phương và $M_0 \notin d'$.

» d trùng $d' \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{a}'$ cùng phương $M_0 \in d'$

» $d \cap d' \Leftrightarrow$ hệ phương trình ẩn t, t' sau: $\begin{cases} x_0 + a_1t = x'_0 + a'_1t' \\ y_0 + a_2t = y'_0 + a'_2t' \\ z_0 + a_3t = z'_0 + a'_3t' \end{cases}$ có đúng một nghiệm.

» d và d' chéo nhau $\Leftrightarrow \vec{a}$ và $\vec{a}'$ không cùng phương và $\begin{cases} x_0 + a_1t = x'_0 + a'_1t' \\ y_0 + a_2t = y'_0 + a'_2t' \\ z_0 + a_3t = z'_0 + a'_3t' \end{cases}$ vô nghiệm.

Hoặc ta có thể áp dụng theo sơ đồ sau:



Ví dụ 7.1.

Trong không gian $Oxyz$, xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau:

(1) $d:\begin{cases}x=1+t\\y=2t\\z=3-t\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$ và $d':\begin{cases}x=2+2t'\\y=3+4t'\\z=5-2t'\end{cases}(t'\in\mathbb{R})$

(2) $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+3t\\z=5+t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$ và $d':\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+1}{2}$

(3) $d:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{2}$ và $d':\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+2}{-2}$

Lời giải

(1) $d:\begin{cases}x=1+t\\y=2t\\z=3-t\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$ và $d':\begin{cases}x=2+2t'\\y=3+4t'\\z=5-2t'\end{cases}(t'\in\mathbb{R})$

Ta có các vectơ chỉ phương của d và d' lần lượt là $\vec{a}=(1;2;-1)$ và $\vec{a}'=(2;4;-2)$.

Vì $\vec{a}'=2\vec{a}$ nên $\vec{a}$ và $\vec{a}'$ cùng phương.

$\Rightarrow d$ và d' song song với nhau hoặc trùng nhau.

Xét điểm $M(1;0;3)\in d$, ta có $M\notin d'$ nên $d//d'$.

(2) $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+3t\\z=5+t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$ và $d':\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+1}{2}$

Ta có d và d' lần lượt nhận $\vec{a}=(2;3;1)$ và $\vec{a}'=(3;2;2)$ là các vectơ chỉ phương.

Vì $\vec{a}$ và $\vec{a}'$ không cùng phương nên d và d' cắt nhau hoặc chéo nhau.

d' qua $M(1;-2;-1)$; có VTCP $\vec{a}'=(3;2;2)$ nên có phương trình là: $d':\begin{cases}x=1+3t'\\y=-2+2t'\\z=-1+2t'\end{cases}(t'\in\mathbb{R})$

Xét hệ phương trình : $\begin{cases}1+2t=1+3t'\\-1+3t=-2+2t'\\5+t=-1+2t'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-\dfrac{3}{5}\\t'=-\dfrac{2}{5}\\5+t=-1+2t'\end{cases}$ $\Rightarrow$ Hệ vô nghiệm

Vậy hai đường thẳng d và d' chéo nhau.

(3) $d:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{2}$ và $d':\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+2}{-2}$

Ta có: d đi qua $M(0;1;0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(1;-1;2)$;

d' đi qua $M'(1;2;-2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}'=(5;1;-2)$.

Nên phương trình tham số của d và d' lần lượt là:

$$d:\begin{cases}x=t\\y=1-t\\z=2t\end{cases} \text{ và } d':\begin{cases}x=1+5t'\\y=2+t'\\z=-2-2t'\end{cases}$$

Xét hệ phương trình $\begin{cases}t=1+5t'\\1-t=2+t'\\2t=-2-2t'\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t-5t'=1\\-t-t'=1\\2t+2t'=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=-\dfrac{2}{3}\\t'=-\dfrac{1}{3}\end{cases} \Rightarrow$ hệ có nghiệm duy nhất

Vậy hai đường thẳng d và d' cắt nhau.

Ví dụ 7.1.

Trong không gian $Oxyz$, cho $d_1:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{-3}$ và $d_2:\begin{cases}x=2t\\y=-3-t\\z=0\end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(1) d_1 và d_2 đồng phẳng.

(2) d_1 cắt và vuông góc với d_2.

(3) d_1 vuông góc d_2 và không cắt nhau.

(4) d_1 song song với d_2.

Lời giải

Ta có: VTCP của d_1 là $\vec{u}_1=(1;2;-3)$; VTCP của d_2 là $\vec{u}_2=(2;-1;0)$.

Từ đó ta có: $\vec{u}_1.\vec{u}_2=0 \Rightarrow \vec{u}_1\perp\vec{u}_2 \Rightarrow d_1\perp d_2$ (1).

Giao điểm d_1, d_2 (nếu có) là nghiệm: $\begin{cases}\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{-3}\\x=2t\\y=-3-t\\z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{2t}{1}=\dfrac{-2}{-3}\\\dfrac{-3-t}{2}=\dfrac{-2}{-3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=\dfrac{1}{3}\\t=-\dfrac{13}{3}\end{cases}$ (vô lý).

Từ đó ta có d_1 không cắt d_2 (2).

Từ (1) và (2) ta có d_1 vuông góc d_2 và không cắt nhau.

Vậy mệnh đề (3) là mệnh đề đúng.

Dạng 8. Bài toán thực tế

Ví dụ 8.1.

Trong một khu du lịch, người ta cho du khách trải nghiệm thiên nhiên bằng cách đu theo đường trượt zipline từ vị trí A cao 15 m của tháp 1 này sang vị trí B cao 10 m của tháp 2 trong khung cảnh tuyệt đẹp xung quanh. Với hệ trục toạ độ $Oxyz$ cho trước (đơn vị: mét), toạ độ của A và B lần lượt là $(3;2,5;15)$ và $(21;27,5;10)$

(1) Viết phương trình đường thẳng chứa đường trượt zipline này.

(2) Xác định toạ độ của du khách khi ở độ cao 12 mét.

Lời giải

(1) Viết phương trình đường thẳng chứa đường trượt zipline này.

Ta có : $A(3;2,5;15)$, $B(21;27,5;10) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(18;15;-5)$

Phương trình tham số đường thẳng AB là : $\begin{cases} x=3+18t \\ y=2,5+15t \\ z=15-5t \end{cases} \ (t\in\mathbb{R})$.

Vậy phương trình đường thẳng chứa đường trượt zipline là $\begin{cases} x=3+18t \\ y=2,5+15t \\ z=15-5t \end{cases} \ (t\in\mathbb{R})$.

(2) Xác định toạ độ của du khách khi ở độ cao 12 mét.

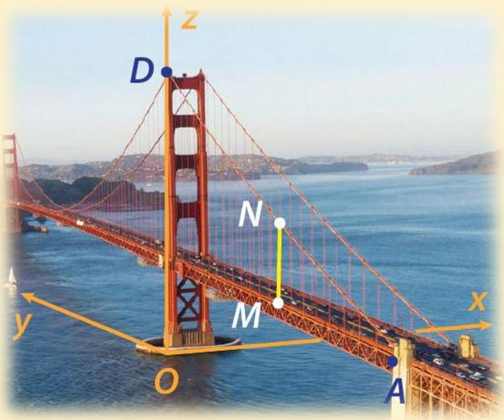
Khi du khách khi ở độ cao 12 mét $\Rightarrow z=12 \Rightarrow 15-5t=12 \Rightarrow t=\frac{3}{5}$

Thay $t=\frac{3}{5}$ vào phương trình đường thẳng AB ta được $\begin{cases} x=13,8 \\ y=11,5 \\ z=12 \end{cases} \Rightarrow C(13,8;11,5,12)$

Vậy toạ độ của du khách khi ở độ cao 12 mét là $C(13,8;11,5,12)$.

Ví dụ 8.2.

Cầu Cổng Vàng *(The Golden Gate Bridge)* ở Mỹ. Xét hệ trục toạ độ $Oxyz$ với O là bệ của chân cột trụ tại mặt nước, trục Oz trùng với cột trụ, mặt phẳng (Oxy) là mặt nước và xem như trục Oy cùng phương với cầu như hình vẽ. Dây cáp AD (xem như là một đoạn thẳng) đi qua đỉnh D thuộc trục Oz và điểm A thuộc mặt phẳng Oyz, trong đó điểm D là đỉnh cột trụ cách mặt nước $227m$, điểm A cách mặt nước $75m$ và cách trục Oz $343m$.



Giả sử ta dùng một đoạn dây nối điểm N trên dây cáp AD và điểm M trên thành cầu, biết M cách mặt nước $75m$ và MN song song với cột trụ.

(1) Tính độ dài MN, biết điểm M cách trục Oz một khoảng bằng $230m$.

(2) Người ta có thể dùng đoạn dây dài $100m$ để nối dây cáp AD với thành cầu tại vị trí điểm M cách trục Oz một khoảng bằng 148 m không? Vì sao?

(nguồn ảnh: https://www.goldengate.org/assets/1/6/ggb-exhibit-chapter-statistics.pdf).

Lời giải

(1) Tính độ dài MN, biết điểm M cách trục Oz một khoảng bằng $230m$.

Ta có $A \in Oyz$ và A cách mặt nước $75m$ và cách trục Oz $343m \Rightarrow A(0;343;75)$

Điểm D là đỉnh cột trụ cách mặt nước $227m \Rightarrow D(0;0;227)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AD} = (0;-343;152)$

$\Rightarrow$ phương trình đường thẳng AD là $\begin{cases} x = 0 \\ y = -343t \\ z = 227 + 152t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

Vì $N \in AD \Rightarrow N(0;-343t;227+152t)$

Điểm M trên thành cầu, M cách mặt nước $75m$ và cách trục Oz một khoảng bằng $230m$ nên tọa độ điểm M là $M(0;230;75)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (0;-343t-230;152+152t)$

MN song song với cột trụ $\Rightarrow MN \perp Oy \Rightarrow \overrightarrow{MN}.\vec{j} = 0 \Rightarrow -343t - 230 = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{230}{343}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \left(0;0;\dfrac{17176}{343}\right) \Rightarrow MN = \dfrac{17176}{343}$

(2) Người ta có thể dùng đoạn dây dài $100m$ để nối dây cáp AD với thành cầu tại vị trí điểm M cách trục Oz một khoảng bằng 148 m không? Vì sao?

Điểm M cách trục Oz một khoảng bằng $148m$

$\Rightarrow M(0;148;75) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (0;-343t-148;152+152t)$

$MN//Oz \Rightarrow MN \perp Oy \Rightarrow \overrightarrow{MN}.\vec{j} = 0 \Rightarrow -343t - 148 = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{148}{343}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \left(0;0;\dfrac{29640}{343}\right) \Rightarrow MN = \dfrac{29640}{343} \approx 86,41m$.

Vậy có thể dùng đoạn dây dài $100m$ để nối dây cáp AD với thành cầu tại vị trí điểm M cách trục Oz một khoảng bằng $148m$.

Chương 05

Bài 2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

C Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Cho đường thẳng Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;-4;-6)$. Vectơ nào sau đây không phải là vectơ chỉ phương của Δ?

A. $\vec{u}_1=(1;-2;-3)$. **B.** $\vec{u}_2=(-1;2;3)$. **C.** $\vec{u}_3=(-2;-4;6)$. **D.** $\vec{u}_4=(-3;6;9)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\frac{2}{-2}\neq\frac{-4}{-4}$ nên $\vec{u}_3$ không cùng phương với $\vec{u}$.

Vậy $\vec{u}_3$ không phải là vectơ chỉ phương của Δ.

» Câu 2. Cho đường thẳng Δ có phương trình $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-1}{4}$. Vectơ nào sau đây là vectơ chỉ phương của Δ?

A. $\vec{u}_1=(-1;2;-1)$. **B.** $\vec{u}_2=(1;-2;1)$. **C.** $\vec{u}_3=(-3;2;-4)$. **D.** $\vec{u}_4=(3;2;4)$.

Lời giải

Chọn C

$\Delta: \frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-1}{4}$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(3;-2;4)$.

$\vec{u}_3=(-3;2;-4)=-\vec{u}_1$ nên $\vec{u}_3$ là một vectơ chỉ phương của Δ.

» Câu 3. Cho đường thẳng Δ có phương trình $\begin{cases}x=3-t\\y=-1\\z=3t\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$. Vectơ nào sau đây là vectơ chỉ phương của Δ?

A. $\vec{u}_1=(3;-1;3)$. **B.** $\vec{u}_2=(3;-1;0)$. **C.** $\vec{u}_3=(-1;-1;3)$. **D.** $\vec{u}_4=(-1;0;3)$.

Lời giải

Chọn D

$\Delta: \begin{cases}x=3-t\\y=-1\\z=3t\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_4=(-1;0;3)$.

» Câu 4. Cho đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (Oxy). Vectơ nào sau đây là vectơ chỉ phương của Δ?

A. $\vec{i}=(1;0;0)$. B. $\vec{j}=(0;1;0)$. C. $\vec{k}=(0;0;1)$. D. $\vec{u}=(1;1;0)$.

Lời giải

Chọn C

Mặt phẳng (Oxy) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{k}=(0;0;1)$.

Đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (Oxy) nên $\vec{k}=(0;0;1)$ là một vectơ chỉ phương của Δ.

» Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, phương trình chính tắc của đường thẳng AB với $A(1;1;2)$ và $B(-4;3;-2)$ là:

A. $\frac{x+4}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+2}{-2}$. B. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-2}{-2}$.

C. $\frac{x+1}{-5}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+2}{-4}$. D. $\frac{x+4}{-5}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+2}{-4}$.

Lời giải

Chọn D

Đường thẳng AB đi qua điểm $B(-4;3;-2)$, nhận $\overrightarrow{AB}=(-5;2;-4)$ làm vectơ chỉ phương, có phương trình chính tắc là: $\frac{x+4}{-5}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+2}{-4}$.

» Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $A(2;0;-1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): 2x-y+z+3=0$ là:

A. $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-t \\ z=-1+t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$. B. $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-1 \\ z=1-t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

C. $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-1 \\ z=-1+t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$. D. $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-t \\ z=1-t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng đi qua điểm $A(2;0;-1)$, nhận $\overrightarrow{n_{(P)}}=(2;-1;1)$ làm vectơ chỉ phương, có phương trình tham số là: $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-t \\ z=-1+t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

» Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua hai điểm $A(1;-3;5)$, $B(2;-1;7)$ có phương trình chính tắc là

A. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-7}{2}$. B. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-5}{-2}$.

C. $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-5}{-2}$. D. $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+5}{-2}$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng đi qua hai điểm $A(1;-3;5)$, $B(2;-1;7)$ có một VTCP là $\overrightarrow{BA}=(-1;-2;-2)$,

Suy ra PTCT là $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-5}{-2}$.

» Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có phương trình $\frac{x-1}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-7}{5}$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng Δ?

A. $M(1;-3;5)$. **B.** $N(2;-1;7)$. **C.** $P(1;-3;7)$ **D.** $Q(3;-5;7)$.

Lời giải

Chọn C

Thay tọa độ các điểm vào PT đường thẳng ta có $P(1;-3;7)\in\Delta$.

» Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có phương trình $\begin{cases}x=3-t\\y=1+3t\\z=2t\end{cases}$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng Δ?

A. $M(3;1;2)$. **B.** $N(3;1;0)$. **C.** $P(-1;3;2)$ **D.** $Q(-1;-3;0)$.

Lời giải

Chọn D

Thay tọa độ các điểm vào PT đường thẳng ta có $N(3;1;0)\in\Delta$.

» Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng nào dưới đây đi qua điểm $A(3;-3;2)$

A. $\frac{x-3}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+2}{2}$. **B.** $\frac{x+3}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+2}{-2}$.

C. $\frac{x-3}{-1}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z-2}{2}$. **D.** $\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z+5}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Thay tọa độ điểm A vào các PT đường thẳng ta có $\frac{x-3}{-1}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z-2}{2}$ đi qua A.

» Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây **không** thuộc đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=5-3t\\y=1-t\\z=2+2t\end{cases}$.

A. $M(3;1;-2)$. **B.** $N(5;1;2)$. **C.** $P(-1;-1;6)$ **D.** $Q(2;0;4)$.

Lời giải

Chọn A

Thay tọa độ các điểm vào PT đường thẳng ta có $M(3;1;-2)\notin\Delta$.

» **Câu 12.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1:\begin{cases}x=5-2t\\y=5+3t\\z=2t\end{cases}$, $\Delta_2:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z-6}{4}$.

Góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 bằng

A. 30^o. **B.** 90^o. **C.** 60^o **D.** 45^o.

Lời giải

Chọn B

Ta có VTCP của Δ_1 và Δ_2 lần lượt là $\overrightarrow{a_1}(2;-3;2)$ và $\overrightarrow{a_2}(1;-2;4)\Rightarrow \overrightarrow{a_1}.\overrightarrow{a_2}=0$

Vậy góc giữa Δ_1 và Δ_2 bằng 90^o.

» **Câu 13.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{-2}$, $d_2:\dfrac{x+2}{-2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{2}$.

Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng đã cho.

A. Chéo nhau. **B.** Trùng nhau. **C.** Song song. **D.** Cắt nhau.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{u_{d_1}}=(2;1;-2)\\\overrightarrow{u_{d_2}}=(-2;-1;2)\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{u_1}=-\overrightarrow{u_2}$. Do đó d_1 song song hoặc trùng với d_2.

Gọi điểm $M(1;0-2)\in d_1$. Thay M vào d_2 ta được: $\dfrac{1+2}{-2}=\dfrac{0-1}{-1}=\dfrac{-2}{2}$ (vô lí).

Vậy $d_1\ //\ d_2$.

» **Câu 14.** Trên một phần mềm đã thiết kế sân khấu 3D trong không gian $Oxyz$. Tính cos giữa hai tia sáng có phương trình lần lượt là $d_1:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-1}$, $d_2:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-1}{9}$.

A. $-\dfrac{1}{2}$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

d_1 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1=(2;1;-1)$.

d_2 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2=(3;3;9)$.

Ta có $\cos(d_1,d_2)=\dfrac{|2.3+1.3+(-1).9|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}.\sqrt{3^2+3^2+9^2}}=0$.

» **Câu 15.** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Gọi M_1, M_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên các trục Ox, Oy. Vectơ nào dưới đây là một véctơ chỉ phương của đường thẳng M_1M_2?

A. $\overrightarrow{u_4}=(-1;2;0)$ **B.** $\overrightarrow{u_1}=(0;2;0)$ **C.** $\overrightarrow{u_2}=(1;2;0)$ **D.** $\overrightarrow{u_3}=(1;0;0)$

Lời giải

Chọn A

M_1 là hình chiếu của M lên trục $Ox \Rightarrow M_1(1;0;0)$.

M_2 là hình chiếu của M lên trục $Oy \Rightarrow M_2(0;2;0)$.

Khi đó: $\overrightarrow{M_1M_2}=(-1;2;0)$ là một vectơ chỉ phương của M_1M_2.

» Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, tọa độ nào sau đây là tọa độ của một véctơ chỉ phương của đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=2+4t\\y=1-6t\\z=9t\end{cases},(t\in\mathbb{R})$?

A. $\left(\frac{1}{3};\frac{-1}{2};\frac{3}{4}\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$. **C.** $(2;1;0)$. **D.** $(4;-6;0)$.

Lời giải

Chọn A

Từ phương trình Δ suy ra véctơ chỉ phương của Δ là $\vec{u}=(4;-6;9)=12\left(\frac{1}{3};\frac{-1}{2};\frac{3}{4}\right)$.

» Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa hai đường thẳng $d_1:\frac{x}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{2}$ và $d_2:\frac{x+1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{1}$

A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn D

VTCP $\vec{u}_{d_1}=(1;-1;2)$, VTCP $\vec{u}_{d_2}=(-1;1;1)$

Ta có $\cos(d_1,d_2)=\left|\cos(\vec{u}_{d_1},\vec{u}_{d_2})\right|=\frac{|1.(-1)-1.1+2.1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}.\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}}=0$

Vậy $(d_1,d_2)=90°$.

» Câu 18. Tính cosin góc giữa đường thẳng d với trục Ox biết $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{1}$.

A. $\frac{\sqrt{2}}{6}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

Lời giải

Chọn B

VTCP $\vec{u}_d=(2;1;1)$, VTCP của trục Ox là $\vec{i}=(1;0;0)$.

Vậy $\cos(d,Ox)=\left|\cos(\vec{u}_d,\vec{i})\right|=\frac{|2+0+0|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}.\sqrt{1^2+0^2+0^2}}=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

» **Câu 19.** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=6+5t\\y=2+t\\z=1\end{cases}$ và mặt phẳng $(P):3x-2y+1=0$. Góc hợp bởi giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) bằng

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn B

Gọi φ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P).

Ta có $\vec{u}_d=(5;1;0)$ và $\vec{n}_{(P)}=(3;-2;0)$

Khi đó $\sin\varphi=\left|\cos\left(\vec{u}_d,\vec{n}_{(P)}\right)\right|=\dfrac{\left|\vec{u}_d.\vec{n}_{(P)}\right|}{\left|\vec{u}_d\right|.\left|\vec{n}_{(P)}\right|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\varphi=45°$.

» **Câu 20.** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{2}$ và mặt phẳng $(\alpha):x+y-z-2=0$. Cosin của góc tạo bởi đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) bằng

A. $-\dfrac{\sqrt{78}}{9}$. **B.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{9}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{78}}{9}$.

Lời giải

Chọn D

Đường thẳng Δ có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=(2;-1;2)$ và mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;1;-1)$.

Ta có $\sin(\Delta,(\alpha))=\left|\cos(\vec{u},\vec{n})\right|=\dfrac{|\vec{u}.\vec{n}|}{|\vec{u}|.|\vec{n}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{9}\Rightarrow\cos(\Delta,(\alpha))=\dfrac{\sqrt{78}}{9}$.

» **Câu 21.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P):2x-y-z-3=0$ và $(Q):x-z-2=0$. Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn A

Mp (P) có một VTPT $\vec{n}_P=(2;-1;-1)$. Mp (Q) có một VTPT $\vec{n}_Q=(1;0;-1)$.

Ta có $\cos\left[(P),(Q)\right]=\left|\cos\left(\vec{n}_P,\vec{n}_Q\right)\right|=\dfrac{\left|\vec{n}_P.\vec{n}_Q\right|}{\left|\vec{n}_P\right|.\left|\vec{n}_Q\right|}=\dfrac{|2+0+1|}{\sqrt{4+1+1}.\sqrt{1+1}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $\left[(P),(Q)\right]=30°$.

» **Câu 22.** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(1;0;0)$, $N(0;1;0)$ và $P(0;0;1)$. Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (MNP) và mặt phẳng (Oxy) bằng

A. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **C.** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A

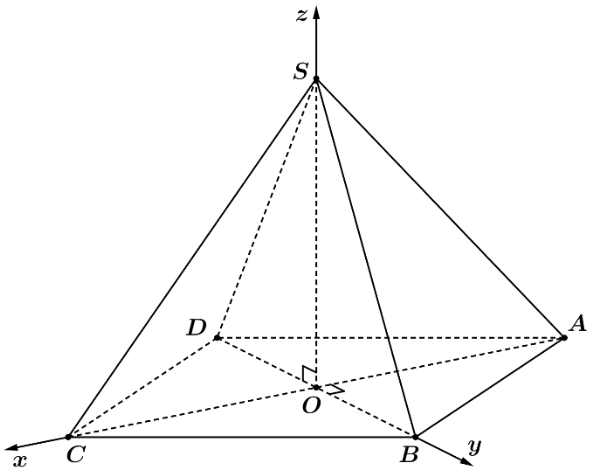
Mặt phẳng (MNP) có một VTPT là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right]=(1;1;1)$.

Mặt phẳng (Oxy) có một VTPT là $\vec{k}=(0;0;1)$.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (MNP) và (Oxy).

Ta có $\cos\varphi=\left|\cos\left(\vec{n},\vec{k}\right)\right|=\dfrac{|1.0+1.0+1.1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

» **Câu 23.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$, chiều cao bằng $2a$ và O là tâm của đáy. Bằng cách thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ bên dưới, khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB) bằng



A. $\dfrac{2a}{3}$.　　**B.** $\dfrac{2a}{\sqrt{17}}$.　　**C.** $\dfrac{4a}{\sqrt{17}}$.　　**D.** $\dfrac{4a}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Vì $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên $SO\perp(ABCD)$ và $ABCD$ là hình vuông.

Suy ra $OA=OB=OC=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}.\sqrt{2}}{2}=a$.

Dựa vào hình vẽ, ta có $C(a;0;0),B(0;a;0),A(-a;0;0),S(0;0;2a)$.

Suy ra $\overrightarrow{AS}=(a;0;2a),\overrightarrow{BS}=(0;-a;2a)$.

Mặt phẳng (SAB) có một cặp vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;0;2)$ và $\vec{v}=(0;-1;2)$ nên có VTPT là $\vec{n}=[\vec{u},\vec{v}]=\left(\begin{vmatrix}0&2\\-1&2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2&1\\2&0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1&0\\0&-1\end{vmatrix}\right)=(2;-2;-1)$.

Suy ra (SAB) có phương trình là $(SAB):2x-2y-z+2a=0$.

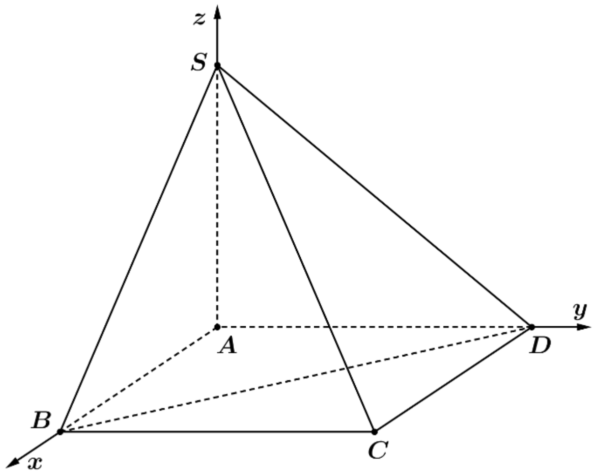
Vậy $d(C,(SAB))=\dfrac{|2.a-2.0-2.0+2a|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\dfrac{4a}{3}$.

» Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SA\perp\left(ABCD\right)$. Cho biết $AB=2a, AD=3a$ và $SA=2a$. Cosin góc giữa hai đường thẳng SC và BD bằng

A. $-\dfrac{5}{\sqrt{221}}$. **B.** $\dfrac{5}{\sqrt{221}}$. **C.** $\dfrac{3}{\sqrt{221}}$. **D.** $-\dfrac{3}{\sqrt{221}}$.

Lời giải

Chọn B



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ sao cho $A\equiv O$.

Ta có $B\left(2a;0;0\right), D\left(0;3a;0\right), S\left(0;0;2a\right)$ và $C\left(2a;3a;0\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{SC}=\left(2a;3a;-2a\right)$ và $\overrightarrow{BD}=\left(-2a;3a;0\right)$.

Hai đường thẳng SC và BD có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}=\left(2;3;-2\right)$ và $\vec{v}=\left(-2;3;0\right)$.

Vậy $\cos\left(SC,BD\right)=\dfrac{\left|\vec{u},\vec{v}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|}=\dfrac{\left|2.\left(-2\right)+3.3+\left(-2\right).0\right|}{\sqrt{2^2+3^2+\left(-2\right)^2}.\sqrt{\left(-2\right)^2+3^2+0^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{221}}$.

» Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, với mặt phẳng $\left(Oxy\right)$ là mặt đất, một máy bay cất cánh từ vị trí $A\left(0;10;0\right)$ với vận tốc $\vec{v}=\left(150;150;40\right)$. Tính góc nâng của máy bay (góc giữa hướng chuyển động bay lên của máy bay với đường băng và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

A. $10°$. **B.** $12°$. **C.** $11°$. **D.** $9°$.

Lời giải

Chọn C

Gọi Δ là đường thẳng biểu thị cho hướng chuyển động bay lên của máy bay.

Ta có Δ nhận vectơ $\vec{v}=(150;150;40)=10(15;15;4)$ làm vectơ chỉ phương.

Mặt phẳng (Oxy) có VTPT $\vec{n}=(0;0;1)$.

Gọi φ là góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (Oxy).

Suy ra $\sin\varphi=\left|\cos(\vec{v},\vec{n})\right|=\dfrac{|\vec{v}.\vec{n}|}{|\vec{v}|.|\vec{n}|}=\dfrac{|15.0+15.0+4.1|}{\sqrt{15^2+15^2+4^2}.\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{466}}$.

Vậy góc nâng của máy bay là $\varphi\approx 11°$.

B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai

» Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho các đường thẳng $\Delta_1:\begin{cases}x=1\\y=2-3t\ (t\in\mathbb{R})\\z=3+4t\end{cases}$,

$\Delta_2:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z+3}{2}$ và mặt phẳng $(P):x+3y-2z+1=0$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ_1 là $\vec{a}=(1;-3;4)$		
(b)	Đường thẳng d_1 vuông góc với (P) có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;3;-2)$		
(c)	Đường thẳng d_2 vuông góc với Δ_2 và song song với mặt phẳng (Oxy) có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_2=(3;-3;2)$		
(d)	Đường thẳng d_3 qua $A(1;-1;2)$, cắt và vuông góc với trục Oz có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_3=(-1;-1;0)$		

Lời giải

(a) Vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ_1 là $\vec{a}=(1;-3;4)$.

Vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ_1 là $\vec{a}=(0;-3;4)$.

» Chọn SAI.

(b) Đường thẳng d_1 vuông góc với (P) có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;3;-2)$

Mặt phẳng (P) có 1 vectơ pháp tuyến là $\vec{u}=(1;3;-2)$.

Đường thẳng d_1 vuông góc với (P) nên có 1 vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;3;-2)$.

» Chọn ĐÚNG.

(c) Đường thẳng d_2 vuông góc với Δ_2 và song song với mặt phẳng (Oxy) có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_2=(3;-3;2)$

Mặt phẳng (Oxy) có 1 vectơ pháp tuyến là $\vec{k}=(0;0;1)$.

Đường thẳng Δ_2 có vectơ chỉ phương là $\vec{v}=(3;-3;2)$

Đường thẳng d_2 vuông góc với Δ_2 và song song với mặt phẳng (Oxy) có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_2=\left[\vec{v},\vec{k}\right]=(-3;3;0)=-3(1;-1;0)$

» Chọn SAI.

(d) Đường thẳng d_3 qua $A(1;-1;2)$, cắt và vuông góc với trục Oz có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_3=(-1;-1;0)$

Gọi $H=d_3\cap Oz$. Ta có $\begin{cases} d_3\perp Oz \\ A\in d_3 \end{cases}$,

Suy ra H là hình chiếu của A lên $Oz \Rightarrow H(0;0;2)$.

Vậy đường thẳng d_3 có 1 vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AH}=(-1;1;0)$.

» Chọn SAI.

» Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+3}{2}$; $d_2:\begin{cases} x=-1+t \\ y=3+t \\ z=2-mt \end{cases}$ và mặt phẳng $(P):2x+2y+z-3=0$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Khi $m=0$, số đo góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 bằng 135°		
(b)	$\cos(d_1,Ox)=\dfrac{-1}{3}$		
(c)	Đường thẳng Δ đi qua gốc toạ độ O và vuông góc với (P) tạo với đường thẳng d_1 một góc α có $\cos\alpha=\dfrac{4}{9}$		
(d)	Khi $m=\dfrac{a}{b}, a,b\in\mathbb{Z}$, $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản, số đo góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 bằng 90°. Giá trị biểu thức $a^2+b^2=13$		

Lời giải

$d_1:\dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+3}{2}$ có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(-1;-2;2)$

(a) Khi $m=0$, số đo góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 bằng 135°.

Khi $m=0$, đường thẳng d_2 có vectơ chỉ phương là $\vec{v}=(1;1;0)$

$\cos(d_1,d_2)=\left|\cos(\vec{u},\vec{v})\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Suy ra số đo góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 bằng 45°.

» Chọn SAI.

(b) $\cos(d_1,Ox)=\dfrac{-1}{3}$.

Trục Ox có vectơ chỉ phương là $\vec{i}=(1;0;0)$

$\cos(d_1,Ox)=\left|\cos(\vec{u},\vec{i})\right|=\dfrac{1}{3}$

» Chọn SAI.

(c) Đường thẳng Δ đi qua gốc toạ độ O và vuông góc với (P) tạo với đường thẳng d_1 một góc α có $\cos\alpha=\dfrac{4}{9}$.

Mặt phẳng $(P): 2x+2y+z-3=0$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;2;1)$

Đường thẳng Δ đi qua gốc toạ độ O và vuông góc với (P) nên có vectơ chỉ phương là $\vec{n}=(2;-2;1)$

$\cos(d_1,\Delta)=|\cos(\vec{u},\vec{n})|=\dfrac{4}{9}$

» Chọn ĐÚNG.

(d) *Khi* $m=\dfrac{a}{b}, a,b\in\mathbb{Z}$, $\dfrac{a}{b}$ *là phân số tối giản, số đo góc giữa hai đường thẳng* d_1 *và* d_2 *bằng* 90°. *Giá trị biểu thức* $a^2+b^2=13$.

Số đo góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 bằng 90° khi hai đường thẳng vuông góc

Khi đó $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v}=0\Leftrightarrow -3-2m=0\Leftrightarrow m=\dfrac{-3}{2}$

Suy ra $a=-3; b=2$

Vậy $a^2+b^2=13$

» Chọn ĐÚNG.

» Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-2}{3}$ và mặt phẳng $(P): x+2y-z+2025=0$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Số đo góc giữa hai đường thẳng Δ và (P) bằng 90°		
(b)	Biết hình chiếu của O lên (P) là $H(3;-1;2)$. α là số đo góc giữa (P) và đường thẳng Δ, $\cos\alpha=\dfrac{1}{14}$		
(c)	Đường thẳng d_1 là giao tuyến của (P) và (Oxy). Gọi β là góc giữa d_1 và mặt phẳng (Oxz). Khi đó $\beta>30^\circ$		
(d)	Đường thẳng d_2 vuông góc với (P) tạo với $(Q): x+my-3=0$ một góc 30°. Khi đó tổng tất cả các giá trị của tham số m bằng $\dfrac{-16}{5}$.		

Lời giải

$\Delta: \dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-2}{3}$ có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(-1;2;3)$

(a) *Số đo góc giữa hai đường thẳng* Δ *và* (P) *bằng* 90°.

$(P): x+2y-z+2025=0$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{v}=(1;2;-1)$

$\sin(\Delta,(P))=|\cos(\vec{u},\vec{v})|=0$, suy ra số đo góc giữa hai đường thẳng Δ và mặt phẳng $(P): x+2y-z+2025=0$ bằng 0°.

» Chọn SAI.

(b) *Biết hình chiếu của O lên mặt phẳng (P) là $H(3;-1;2)$. α là số đo góc giữa mặt phẳng (P) và đường thẳng Δ,* $\cos\alpha=\dfrac{1}{14}$

Hình chiếu của O lên mặt phẳng (P) là $H(3;-1;2)$ nên vectơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{OH}=(3;-1;2)$

$$\sin\alpha=\left|\cos\left(\vec{u},\overrightarrow{OH}\right)\right|=\frac{|-3-2+6|}{14}=\frac{1}{14}$$

» Chọn SAI.

(c) *Đường thẳng d_1 là giao tuyến của (P) và (Oxy). Gọi β là góc giữa d_1 và mặt phẳng (Oxz). Khi đó* $\beta>30^\circ$

(Oxy) có vectơ pháp tuyến là $\vec{k}=(0;0;1)$

$(P): x+2y-z+2025=0$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{v}=(1;2;-1)$

Suy ra vectơ chỉ phương của d là $\left[\vec{k},\vec{v}\right]=(-2,1,0)=\vec{a}$

$$\sin\beta=\left|\cos\left(\vec{a},\vec{j}\right)\right|=\frac{1}{\sqrt{5}}\Rightarrow\beta\approx27^\circ<30^\circ$$

» Chọn SAI.

(d) *Đường thẳng d_2 vuông góc với (P) tạo với $(Q): x+my-3=0$ một góc 30°. Khi đó tổng tất cả các giá trị của tham số m bằng* $\dfrac{-16}{5}$.

Đường thẳng d_2 vuông góc với (P) nên có vectơ chỉ phương là $\vec{v}=(1;2;-1)$

$(Q): x+my-3=0$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_Q=(1;m;0)$

$$\sin\left(d_2,(Q)\right)=\left|\cos\left(\vec{n}_Q,\vec{v}\right)\right|=\frac{|2+2m|}{\sqrt{6}.\sqrt{m^2+1}}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2|2+2m|=\sqrt{6}.\sqrt{m^2+1}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(4+8m+4m^2\right)=3\left(m^2+1\right)\Leftrightarrow 5m^2+16m+5=0\Leftrightarrow m=\frac{-8\pm\sqrt{39}}{5}$$

Tổng tất cả các giá trị của tham số m bằng $\dfrac{-16}{5}$

» Chọn ĐÚNG.

» Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABC$ có ba điểm $S(0;0;3)$, $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(0;2;0)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng ? Khẳng định nào sai ?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Côsin góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (ABC) bằng 0		
(b)	Côsin góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC) bằng $\dfrac{2}{7}$		

(c)	Côsin góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (P) bằng $\frac{10\sqrt{3}}{21}$		
(d)	Góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (ABC) bằng $90°$		

Lời giải

(a) Côsin góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (ABC) bằng 0

Nhận xét bốn điểm $S(0;0;3)$, $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(0;2;0)$ thuộc một tứ diện vuông $S.ABC$ nên dễ thấy $(SAB)\perp(ABC)\Rightarrow \cos((SAB);(ABC))=0$

» Chọn ĐÚNG.

(b) Côsin góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC) bằng $\frac{2}{7}$

Ta có: $(SBC):\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1\Rightarrow(SBC):6x+3y+2z-6=0\Rightarrow\vec{n}_{(SBC)}=(6;3;2)$

(ABC) có $\vec{n}_{(ABC)}=\overrightarrow{SA}=(0;0;3)$

$$\cos((SBC);(ABC))=\frac{\left|\vec{n}_{(ABC)}.\vec{n}_{(SBC)}\right|}{\left|\vec{n}_{(ABC)}\right|.\left|\vec{n}_{(SBC)}\right|}=\frac{|6.0+3.0+2.3|}{\sqrt{0^2+0^2+3^2}.\sqrt{6^2+3^2+2^2}}=\frac{2}{7}$$

» Chọn ĐÚNG

(c) Côsin góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (P) bằng $\frac{10\sqrt{3}}{21}$

Ta có: $\begin{cases}\vec{n}_{(SBC)}=(6;3;2)\\ \vec{n}_{(P)}=(1;1;1)\end{cases}$

Nên $\cos((SBC);(P))=\frac{\left|\vec{n}_{(SBC)}.\vec{n}_{(P)}\right|}{\left|\vec{n}_{(SBC)}\right|.\left|\vec{n}_{(P)}\right|}=\frac{|6.1+3.1+2.1|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}.\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{10\sqrt{3}}{21}$

» Chọn ĐÚNG.

(d) Góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (ABC) bằng $90°$

Nhận xét bốn điểm $S(0;0;3)$, $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(0;2;0)$ thuộc một tứ diện vuông $S.ABC$ nên dễ thấy $(SAC)\perp(ABC)\Rightarrow((SAB);(ABC))=90°$

» Chọn ĐÚNG

» Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d:\begin{cases}x=-3+2t\\y=1-t\\z=-1+4t\end{cases}$ và $d':\frac{x+4}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-4}{-1}$;

$(\Delta):\frac{x-2}{-3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-1}{1}$ Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng ? Khẳng định nào sai ?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hai đường thẳng d và d' vuông góc với nhau		

(b)	Hai đường thẳng d và d' cắt nhau tại điểm có tọa độ $(-1;0;3)$		
(c)	Hai đường thẳng d' và (Δ) song song hoặc trùng nhau		
(d)	Hai đường thẳng d' và (Δ) trùng nhau		

Lời giải

***(a)** Hai đường thẳng d và d' vuông góc với nhau*

Ta có: $\begin{cases} \vec{u}_d = (2;-1;4) \\ \vec{u}_{d'} = (3;2;-1) \end{cases}$ và $\vec{u}_d.\vec{u}_{d'} = 2.3 + (-1).2 + 4.(-1) = 0 \Rightarrow d \perp d'$

» Chọn ĐÚNG.

***(b)** Hai đường thẳng d và d' cắt nhau tại điểm có tọa độ $(-1;0;3)$*

Hai đường thẳng d và d' cắt nhau tại điểm có tọa độ

Ta có: $d': \dfrac{x+4}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-4}{-1} \Rightarrow d': \begin{cases} x = -4+3t' \\ y = -2+2t' \\ z = 4-t' \end{cases}$ và $d: \begin{cases} x = -3+2t \\ y = 1-t \\ z = -1+4t \end{cases}$

Xét hệ : $\begin{cases} -3+2t = -4+3t' \\ 1-t = -2+2t' \\ -1+4t = 4-t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t-3t' = -1 \\ -t-2t' = -3 \\ 4t+t' = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t' = 1 \\ 4.1+1 = 5\,(đúng) \end{cases}$

Vậy tọa độ giao điểm của d và d' là $(-1;0;3)$

» Chọn ĐÚNG.

***(c)** Hai đường thẳng d' và (Δ) song song hoặc trùng nhau*

Ta có: $\begin{cases} \vec{u}_\Delta = (-3;-2;1) \\ \vec{u}_{d'} = (3;2;-1) \end{cases}$, có: $\dfrac{-3}{3} = \dfrac{-2}{2} = \dfrac{1}{-1} \Rightarrow \vec{u}_\Delta$ cùng phương $\vec{u}_{d'}$ suy ra $\left[\begin{array}{l} d'//\Delta \\ d' \equiv \Delta \end{array}\right.$

» Chọn ĐÚNG.

***(d)** Hai đường thẳng d' và (Δ) trùng nhau*

Ta có: $A(-4;-2;4) \in d'$, ta kiểm tra A có thuộc Δ hay không ?

$\dfrac{-4-2}{-3} = \dfrac{-2-2}{-2} = \dfrac{4-1}{1}$ (vô lí) $\Rightarrow A \notin \Delta$ nên $d'//\Delta$

» Chọn SAI.

» Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, Hai máy bay cùng xuất phát từ hai phi trường, trên màn hình rađa của trạm điều khiển (với đơn vị trên ba trục chính theo đơn vị km), sau khi xuất phát t giờ $(t \ge 0)$, vị trí của máy bay số một được xác định bởi công thức $\begin{cases} x = 20+2t \\ y = 20+t \\ z = -10-t \end{cases}$, vị trí máy bay số hai có tọa độ là $(30+t';20+t';-10-t')$ Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng ? Khẳng định nào sai ?

	Mệnh đề	Đúng	Sai

(a)	Côsin góc giữa hai máy bay số một và máy bay số hai là $\frac{5\sqrt{2}}{6}$		
(b)	Sau 10 giờ kể từ thời điểm bay hai máy bay gần nhau nhất		
(c)	Nếu máy bay số một vẫn ở phi trường (đứng ở vị trí ban đầu) thì vị trí tọa độ của máy bay là $(20;20;-10)$		
(d)	Sau 5 giờ thì vị trí tọa dộ máy bay số 2 trong không gian là $(35;25;-10)$		

Lời giải

***(a)** Côsin góc giữa hai máy bay số một và máy bay số hai là* $\frac{5\sqrt{2}}{6}$

Giả sử đường bay của máy bay số 1 là $(\Delta_1):\begin{cases}x=20+2t\\y=20+t\\z=-10-t\end{cases}$ có $\vec{u}_1=(2;1;-1)$ và đường bay

của máy bay số 2 thỏa $(30+t';20+t';-10-t')\in(\Delta_2)\begin{cases}x=30+t'\\y=20+t'\\z=-10-t'\end{cases}$ có $\vec{u}_2=(1;1;-1)$

Ta có: $\cos(\Delta_1,\Delta_2)=\frac{|\vec{u}_1.\vec{u}_2|}{|\vec{u}_1|.|\vec{u}_2|}=\frac{|2.1+1.1+2|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}.\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{5\sqrt{2}}{6}$

» Chọn ĐÚNG.

***(b)** Sau 10 giờ kể từ thời điểm bay hai máy bay gần nhau nhất.*

Sau bao lâu kể từ thời điểm bay hai máy bay gần nhau nhất?

Kể từ thời điểm xuất phát, để hai may bay gần nhau nhất thì hai máy bay phải gần tọa độ giao điểm của Δ_1 và Δ_2

Ta có: $\Delta_1\cap\Delta_2\Leftrightarrow\begin{cases}20+2t=30+t'\\20+t=20+t'\\-10-t=-10-t'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2t-t'=10\\t-t'=0\\t-t'=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=10\\t'=10\end{cases}$

Vậy sau 10 giờ thì hai máy bay gần nhau nhất.

» Chọn ĐÚNG.

***(c)** Nếu máy bay số một vẫn ở phi trường (đứng ở vị trí ban đầu) thì vị trí tọa độ của máy bay là* $(20;20;-10)$

Nếu máy bay số một vẫn ở phi trường thì thời điểm lúc đó là 0 giờ $\Rightarrow t=0$ thay

$(\Delta_1):\begin{cases}x=20+2t\\y=20+t\\z=-10-t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=20\\y=20\\z=-10\end{cases}$ thì vị trí tọa độ của máy bay là $(20;20;-10)$

» Chọn ĐÚNG.

***(d)** Sau 5 giờ thì vị trí tọa dộ máy bay số 2 trong không gian là* $(35;25;-10)$

Sau 5 giờ thì vị trí tọa dộ máy bay số 2 trong không gian nên $t'=5$

Suy ra $\begin{cases} x = 30 + 5 \\ y = 20 + 5 \\ z = -10 - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 35 \\ y = 25 \\ z = -15 \end{cases}$, vậy trí tọa độ máy bay số 2 trong không gian là $(35; 25; -15)$

» **Chọn** SAI.

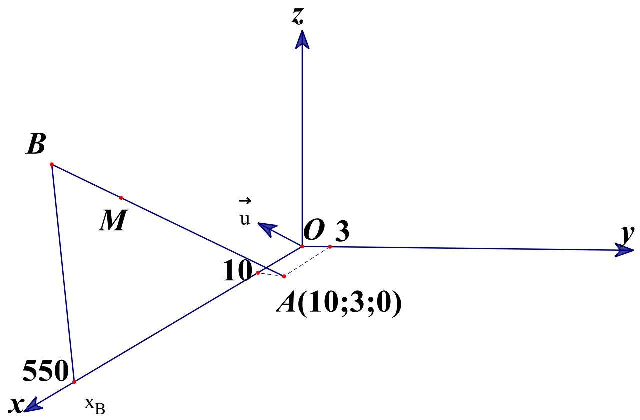
» **Câu 32.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, một cabin cáp treo xuất phát từ điểm $A(10;3;0)$ và chuyển động đều theo đường cáp có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2;-2;1)$ với tốc độ là $4,5\,\text{m/s}$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét).

Các khẳng định sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Phương trình tham số của đường cáp là: $\begin{cases} x = 10 + 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.		
(b)	Giả sử sau thời gian $t(\text{s})$ kể từ lúc xuất phát $(t \geq 0)$, cabin đến điểm M. Khi đó tọa độ điểm M là $M\left(3t + 10; -3t + 3; \frac{3t}{2}\right)$		
(c)	Cabin dừng ở điểm B có hoành độ $x_B = 550$, khi đó quảng đường AB dài 800m.		
(d)	Đường cáp AB tạo với mặt phẳng (Oxy) một góc $30°$.		

Lời giải

Gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$



(a) Phương trình tham số của đường cáp là: $\begin{cases} x = 10 + 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Phương trình tham số của đường cáp là: $\begin{cases} x = 10 + 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) Giả sử sau thời gian $t(\text{s})$ *kể từ lúc xuất phát* $(t \geq 0)$, *cabin đến điểm* M. *Khi đó tọa độ điểm* M *là* $M\left(3t + 10; -3t + 3; \frac{3t}{2}\right)$.

Do tốc độ di chuyển của cabin là $4,5\text{m/s}$ nên độ dài $AM = 4,5t(\text{m})$. Vì vậy $\left|\overrightarrow{AM}\right| = 4,5t$ với $t \geq 0$.

Ta có $\overrightarrow{AM}$ và $\vec{u}$ cùng hướng nên $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$ với $k > 0$.

Suy ra $\left|\overrightarrow{AM}\right| = k\left|\vec{u}\right| = k.\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1} = 3k \Rightarrow 3k = 4,5t \Rightarrow k = \frac{3t}{2} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{3t}{2}\vec{u} = \left(3t; -3t; \frac{3t}{2}\right)$

Gọi tọa độ điểm M là $M(x_M; y_M; z_M)$.

Vì $\overrightarrow{AM} = \left(3t; -3t; \frac{3t}{2}\right)$ nên $\begin{cases} x_M = 3t + x_A \\ y_M = -3t + y_M \\ z_M = \frac{3t}{2} + z_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 3t + 10 \\ y_M = -3t + 3 \\ x_M = \frac{3t}{2} \end{cases}$.

Vậy điểm M có tọa độ là $M\left(3t + 10; -3t + 3; \frac{3t}{2}\right)$.

» Chọn ĐÚNG.

(c) Cabin dừng ở điểm B *có hoành độ* $x_B = 550$, *khi đó quảng đường* AB *dài* 800m.

Do $x_B = 550$ nên $3t + 10 = 550 \Rightarrow t = 180(\text{s})$.

Do đó điểm $B(550; -537; 270)$.

Vậy $AB = \sqrt{(550 - 10)^2 + (-537 - 3)^2 + (270 - 0)^2} = \sqrt{656100} = 810(\text{m})$.

» Chọn SAI.

(d) Đường cáp AB tạo với mặt phẳng (Oxy) một góc $30°$.

Đường thẳng AB có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=(2;-2;1)$ và (Oxy) có một vectơ pháp tuyến $\vec{k}=(0;0;1)$. Do đó ta có: $\sin\left(AB,(Oxy)\right)=\left|\cos\left(\vec{u},\vec{k}\right)\right|=\frac{\left|\vec{u}.\vec{k}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{k}\right|}=\frac{1}{3.1}=\frac{1}{3}$.

Vậy $\left(AB,(Oxy)\right)\approx 19°$.

» Chọn SAI.

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;2;-4)$ và hai đường thẳng $d_1:\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{2}$. Gọi H là hình chiếu của A trên đường thẳng d_1. Đường thẳng AH có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(a;b;c)$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Khi đó $2a-b+c$ bằng

Lời giải

✓Trả lời: 1

Ta có phương trình tham số của d_1 là $\begin{cases}x=2+t\\y=1-t\\z=-1+2t\end{cases}$.

Đường thẳng d_1 có một vectơ chỉ phương là $\vec{u_1}=(1;-1;2)$

Điểm $H\in d_1$ nên $H(2+t;1-t;-1+2t)\Rightarrow\overrightarrow{AH}=(2+t;-1-t;3+2t)$.

Vì H là hình chiếu của A trên đường thẳng d_1 nên $\overrightarrow{AH}\perp\vec{u_1}\Leftrightarrow\overrightarrow{AH}.\vec{u_1}=0$ hay

$(2+t).1+(-1-t).(-1)+(3+2t).2=0\Leftrightarrow 6t+9=0\Leftrightarrow t=-\frac{3}{2}$

Khi đó $\overrightarrow{AH}=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$.

Vì $a,b,c\in\mathbb{Z}$ nên đường thẳng AH có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=2\overrightarrow{AH}=(1;1;0)$.

Vậy $2a-b+c=2.1-1+0=1$.

» Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-3;5)$ có hình chiếu vuông góc trên các trục Ox, Oy, Oz là B, C, D. Gọi H là trực tâm tam giác BCD. Phương trình chính tắc của đường thẳng OH có dạng $\frac{x}{a}=\frac{y}{-b}=\frac{z}{-c}$. Khi đó $a+b+c$ bằng

Lời giải

✓Trả lời: 19

Ta có $B(2;0;0)$, $C(0;-3;0)$, $D(0;0;5)$.

Mặt phẳng (BCD) có phương trình $\frac{x}{2}+\frac{y}{-3}+\frac{y}{5}=1$ hay $15x-10y+6z-60=0$.

H là trực tâm tam giác BCD nên $OH \perp (BCD)$. Do đó OH có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (15;-10;6)$.

Vậy phương trình chính tắc của OH là $\frac{x}{15} = \frac{y}{-10} = \frac{z}{6}$. Suy ra $a = 15; b = 10; c = -6 \Rightarrow a+b+c = 15+10-6 = 19$.

» Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{1}$ và mặt phẳng $(\alpha): x-2y-2z+5=0$. Điểm $A(a;b;c)$ có hoành độ dương thuộc đường thẳng d sao cho khoảng cách từ A đến (α) bằng 3. Tính tổng $a+b-c$?

Lời giải

✓Trả lời: 1

Điểm A có hoành độ dương thuộc đường thẳng d, tọa độ A là $(2t;-t;-1+t)$ với $t>0$.

Khoảng cách từ A đến (α) bằng 3 nên ta có: $\frac{|2t-2(-t)-2(-1+t)+5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}} = 3$

$\Leftrightarrow \frac{|2t+7|}{3} = 3 \Leftrightarrow |2t+7| = \pm 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-8\ (L) \\ t=1(TM) \end{array}\right.$.

Vậy tọa độ A là $(2;-1;0) \Rightarrow a+b-c = 2-1-0 = 1$

» Câu 36. Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{2}$, $d_2: \begin{cases} x=2t \\ y=1 \\ z=1-t \end{cases}$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2. Giá trị $\cos\varphi$ có dạng $\frac{a\sqrt{c}}{b}$. Tính giá trị biểu thức $P = b-3a+c$?

Lời giải

✓Trả lời: 8

Ta có $\vec{u}_{d_1} = (-1;2;2), \vec{u}_{d_2} = (2;0;-1)$

Khi đó $\cos\varphi = \frac{|\vec{u}_{d_1}.\vec{u}_{d_2}|}{|\vec{u}_{d_1}||\vec{u}_{d_2}|} = \frac{|-1.2+2.0+2.(-1)|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}.\sqrt{2^2+0^2+(-1)^2}} = \frac{4}{3\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{15}$.

Vậy $a=4, b=15, c=5 \Rightarrow b-3a+c = 15-3.4+5 = 8$

» Câu 37. Trong không gian $Oxyz$ cho tam giác ABC có $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Tọa độ chân đường phân giác góc $\widehat{ABC}$ của tam giác ABC là $I(a;b;c)$. Tính tổng $a+b+c$?

Lời giải

✓Trả lời: 4

Ta có: Ta có phương trình đường thẳng AC là $\begin{cases} x=1-5t \\ y=2+5t \\ z=-1+6t \end{cases},\left(t\in\mathbb{R}\right)$.

Gọi I là chân đường phân giác góc $\widehat{ABC}$ của tam giác $ABC \Rightarrow I\left(1-5t;2+5t;-1+6t\right)$.

Lại có $\overrightarrow{BA}=\left(-1;3;-4\right)$, $\overrightarrow{BC}=\left(-6;8;2\right)$, $\overrightarrow{BI}=\left(-5t-1;5t+3;6t-4\right)$.

Vì I là chân đường phân giác góc $\widehat{ABC}$ của tam giác nên ABC:

$$\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BI}\right)=\cos\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BI}\right) \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BI}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|.\left|\overrightarrow{BI}\right|}=\frac{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BI}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|.\left|\overrightarrow{BI}\right|}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5t+1+15t+9+16-24t}{\sqrt{\left(-1\right)^2+3^2+\left(-4\right)^2}}=\frac{30t+6+40t+24+12t-8}{\sqrt{\left(-6\right)^2+8^2+2^2}} \Leftrightarrow \frac{-4t+26}{\sqrt{26}}=\frac{82t+22}{\sqrt{104}}$$

$$\Leftrightarrow -8t+52=82t+22 \Leftrightarrow t=\frac{1}{3} \Rightarrow I\left(-\frac{2}{3};\frac{11}{3};1\right).$$

Vậy $a=-\frac{2}{3},b=\frac{11}{3},c=1 \Rightarrow a+b+c=-\frac{2}{3}+\frac{11}{3}+1=4$

» Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+t \\ z=-2-t \end{cases}$ và $\left(P\right):-x+2y+2z+5=0$. Gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A\left(-1;0;-1\right)$ cắt đường thẳng Δ_1 và tạo với đường thẳng Δ_2 một góc nhỏ nhất. Vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}=\left(a;b;c\right)$. Tính tổng $a+2b-3c$?

Lời giải

✓Trả lời: 9

Giả sử đường thẳng d cắt đường thẳng Δ_1 tại B, ta có: $B\left(1+2t;2+t;-2-t\right)\in\Delta_1$.

Đường thẳng d có VTCP là: $\overrightarrow{AB}=\left(2t+2;t+2;-t-1\right)$, mặt phẳng $\left(P\right)$ có VTPT $\vec{n}=\left(-1;2;2\right)$.

Gọi φ là góc giữa d và Δ_2, ta có: $\sin\varphi=\frac{\left|-2t-2+2t+4-2t-2\right|}{3\sqrt{6t^2+14t+9}}=\frac{\left|2t\right|}{3\sqrt{6t^2+14t+9}}\geq 0$, $\Rightarrow d$ tạo với đường thẳng Δ_2 một góc φ nhỏ nhất khi $\varphi=0°$ hay $\sin\varphi=0 \Rightarrow t=0$.

Khi đó đường thẳng d đi qua điểm $A\left(-1;0;-1\right)$ và có VTCP $\overrightarrow{AB}=\left(2;2;-1\right)$.

Vậy $a=2,b=2,c=-1 \Rightarrow a+2b-3c=2+2.2-3.\left(-1\right)=9$

» Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $\left(P\right):ax+by+cz-1=0$ với $c<0$ đi qua 2 điểm $A\left(0;1;0\right);B\left(1;0;0\right)$ và tạo với $\left(Oyz\right)$ một góc $60°$. Tính tổng $a+b+c$? *(Làm tròn đến hàng phần trăm)*

Lời giải

✓Trả lời: 0,59

Mặt phẳng (P) đi qua 2 điểm A, B nên ta có: $\begin{cases} b-1=0 \\ a-1=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=1$

Và (P) tạo với (Oyz) một góc $60°$ nên $\cos((P);(Oyz)) = \dfrac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{1}} = \dfrac{1}{2}$ $(*)$

Thay $a=b=1$ vào phương trình $(*)$ được: $\sqrt{2+c^2} = 2 \Rightarrow c = -\sqrt{2}$

Khi đó: $a+b+c = 2-\sqrt{2} \approx 0,59$

» Câu 40. Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x=4+t \\ y=-4-t \\ z=6+2t \end{cases}; d_2: \dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y-11}{4} = \dfrac{z-5}{2}$.

Đường thẳng d đi qua $A(5;-3;5)$ cắt d_1, d_2 lần lượt ở B, C . Tính tỉ số $\dfrac{AB}{AC}$

Lời giải

✓Trả lời: 0,5

$B \in d_1 \Rightarrow B(4+t;-4-t;6+2t)$. Phương trình tham số $d_2: \begin{cases} x=5+2s \\ y=11+4s \\ z=5+2s \end{cases}$

$C \in d_2 \Rightarrow C(5+2s;11+4s;5+2s)$. Khi đó: $\overrightarrow{AB} = (-1+t;-1-t;2t+1); \overrightarrow{AC} = (2s;4s+14;2s)$

Do A,B,C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}: \overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{AC}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t-1=2ks \\ -t-1=4ks+14k \\ 2t+1=2ks \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-2 \\ s=-3 \\ k=\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

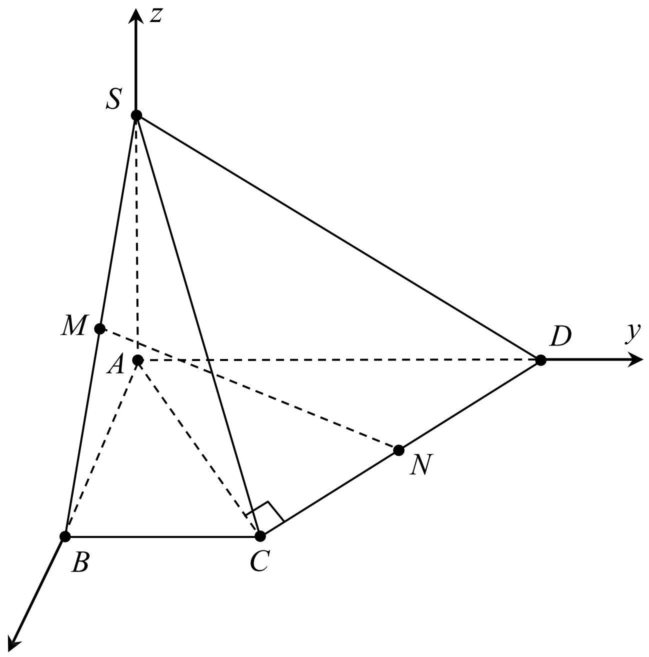
Do đó $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{1}{2} = 0,5$

» Câu 41. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, thỏa mãn điều kiện, $AB=BC=a$, $AD=2a$, SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$, $SA=a$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SB,CD. Tính cosin của góc giữa MN và (SAC). *(Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)*

Lời giải

✓Trả lời: 0,74

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ



Chọn đơn vị là a

Có $A(0;0;0), B(1;0;0), C(1;1;0), D(0;2;0), S(0;0;1), M\left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right), N\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2};0\right)$.

Vecto chỉ phương của $\overrightarrow{MN}$ là $\overrightarrow{MN}=\left(0;\frac{3}{2};\frac{-1}{2}\right) \Rightarrow 2\overrightarrow{MN}=(0;3;-1)$

Vecto pháp tuyến của (SAC) là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AS}\right]=(1;-1;0)$

Vậy $\sin(MN,(SAC))=\frac{|3|}{\sqrt{9+1}.\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{5}}{10}$

Suy ra: $\cos(MN,(SAC))=\sqrt{1-\left(\frac{3\sqrt{5}}{10}\right)^2}=\frac{\sqrt{55}}{10}\approx 0,74$

» Câu 42. Một phần mềm mô phỏng vận động viên đang tập bắn súng trong không gian $Oxyz$. Cho biết trục d của nòng súng có phương trình : $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-3}{-5}$ và hồng tâm $A(8;-19;6m+4)$. Hỏi m bằng bao nhiêu vận động viên có bắn trúng hồng tâm.

Lời giải

✓ *Trả lời: -6*

Để vận động viên có bắn trúng hồng tâm thì trục d phải đi qua hồng tâm. Ta thay điểm $A(8;-19;6m+4)$ vào phương trình trục d:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-3}{-5}\Leftrightarrow\frac{8-1}{1}=\frac{-19-2}{-3}=\frac{6m+4-3}{-5}=7\Leftrightarrow 6m=-36\Leftrightarrow m=-6.$$

Vậy $m=-6$ thì vận động viên bắn trúng hồng tâm.

» Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, một cabin cáp treo ở Bà Nà Hill xuất phát từ điểm $A(-2;1;5)$ và chuyển động đều theo đường cáp có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(0;-2;6)$ với tốc độ là 4 m/s (đơn vị trên mỗi trục toạ độ là mét). Giả sử sau 5 (s) kể từ lúc xuất phát , cabin đến điểm M. Gọi tọa độ $M(a;b;c)$. Tính $a+3b+c$.

Lời giải

✓Trả lời: 6

Phương trình tham số của đường cáp là : $d:\begin{cases}x=-2\\y=1-2k\\z=5+6k\end{cases}\quad(k\in\mathbb{R})$

Do tốc độ chuyển động của cabin là 4 m/s nên độ dài $AM=4t\ (m)$.

Vì vậy sau 5 (s) kể từ lúc xuất phát, cabin đến điểm M thì $AM=4.5=20\ (m)$.

Vì $M\in d\Rightarrow M(-2;1-2k;5+6k)$

$\overrightarrow{AM}(0;-2k;6k)$. Do 2 vec tơ $\overrightarrow{AM};\vec{u}$ cùng hướng $k>0$

$AM=20\Leftrightarrow\sqrt{0^2+4k^2+36k^2}=20\Leftrightarrow 40k^2=400\Leftrightarrow k=\pm\sqrt{10}$

Vì $k>0\Rightarrow k=\sqrt{10}$.

Vậy tọa độ $M(-2;1-2\sqrt{10};5+6\sqrt{10})$. Khi đó $a+3b+c=-2+3(1-2\sqrt{10})+5+6\sqrt{10}=6$.

» Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, nhà công vụ của một trạm hải đăng nằm trên mặt phẳng $(P): x+2y+z-4=0$ và phương trình trạm hải đăng là đường thẳng $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{3}$.

Người ta muốn làm một con đường Δ nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt và vuông góc với trạm hải đăng. Giả sử phương trình đường thẳng Δ có dạng $\frac{x-1}{a}=\frac{y-b}{-1}=\frac{z-d}{c}$. Hỏi có bao nhiêu số trong các số a,b,c,d chia hết cho 3

Lời giải

✓*Trả lời: 1*

Ta có $\vec{u}_{\Delta}=(2;1;3)$ là VTCP của d và $\vec{n}_{(P)}=(1;2;1)$ là VTPT của (P).

Gọi $A=d\cap\Delta$. Do $\Delta\subset(P)$ nên $A=d\cap(P)$.

Suy ra tọa độ A thỏa hệ: $\begin{cases}x+2y+z-4=0\\ \frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\\ z=1\end{cases}\Rightarrow A(1;1;1)$.

Gọi $\vec{u}_{\Delta}$ là véc-tơ chỉ phương của Δ. Lại có: $\begin{cases}\Delta\subset(P)\\ \Delta\perp d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{u}_{\Delta}\perp\vec{n}_{(P)}\\ \vec{u}_{\Delta}\perp\vec{u}_{d}\end{cases}$ ta chọn $\vec{u}_{\Delta}=\left[\vec{n}_{(P)};\vec{u}_{d}\right]=(5;-1;-3)$.

Vậy phương trình đường thẳng Δ là $\frac{x-1}{5}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{-3}\Rightarrow a=5;b=1;c=-3;d=1$

Vậy có 1 số chia hết cho 3.

» Câu 45. Tại một nút giao thông có 2 con đường khác mức. Trên thiết kế, trong không gian $Oxyz$ hai con đường đó thuộc hai đường thẳng $d_1:\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{-1}$; $d_2:\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{-3}$.

Người ta muốn tạo một con đường Δ cắt d_1, d_2 lần lượt tại A và B sao cho AB nhỏ nhất. Tính độ dài AB, *kết quả làm tròn đến hàng phần trăm.*

Lời giải

✓Trả lời: 2,45

Ta có AB ngắn nhất khi AB là đoạn vuông góc chung của d_1 và d_2.

Gọi $A(2+a;2+a;-a)\in d_1$; $B(2+b;-1+2b;-3b)\in d_2 \Rightarrow \overrightarrow{AB}(b-a;2b-a-3;-3b+a)$.

d_1, d_2 lần lượt có các véc tơ chỉ phương là $\vec{u}_{d_1}=(1;1;-1)$ và $\vec{u}_{d_2}=(1;2;-3)$

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\vec{u}_{d_1}=0\\ \overrightarrow{AB}.\vec{u}_{d_2}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1(b-a)+1(2b-a-3)-1(-3b+a)=0\\ 1(b-a)+2(2b-a-3)-3(-3b+a)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}6b-3a-3=0\\ 14b-6a-6=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}a=-1\\ b=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A(1;1;1)\\ B(2;-1;0)\end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(1;-2;-1)$

Do đó $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{6}\simeq 2,45$.

Chương 05

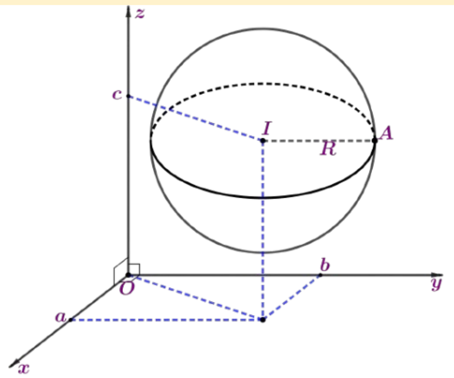
Bài 3. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU TRONG KHÔNG GIAN

A. Lý thuyết

1. Phương trình mặt cầu

Phương trình mặt cầu:

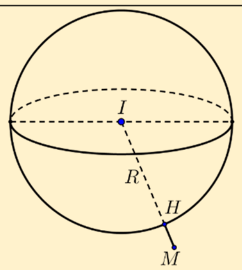
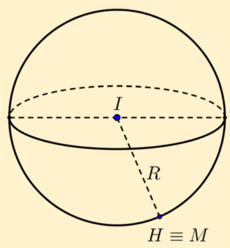
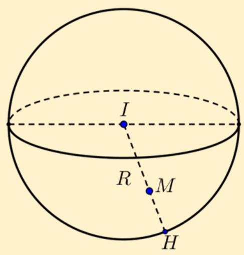
		LOẠI 1	LOẠI 2
Phương Trình		$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$	$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$
Xác Định	*Tâm*	Lấy hệ số tự do trong ngoặc $\div -1$.	Lấy hệ số trước $x;y;z$ $\div -2$.
	Bán Kính	Lấy căn bậc 2 vế phải.	$R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$. Điều kiện tồn tại: $a^2+b^2+c^2-d>0$.



2. Vị trí tương đối

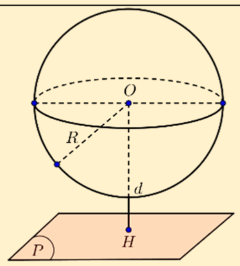
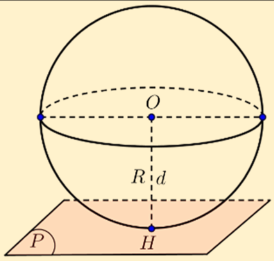
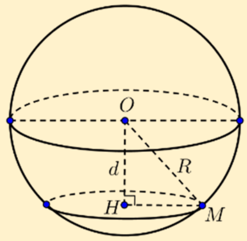
Giữa mặt cầu và điểm:

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M và $S(I;R)$. Khi đó:

	Điểm		
	Nằm ngoài $\Leftrightarrow IM \cap (S) = H$	*Nằm trên* $\Leftrightarrow IM \cap (S) = M \equiv H$	*Nằm trong* $\Leftrightarrow IM \cap (S) = \varnothing$
	$IM > R$	$IM = R$	$IM < R$
Mặt cầu			

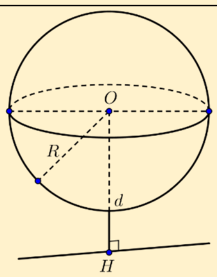
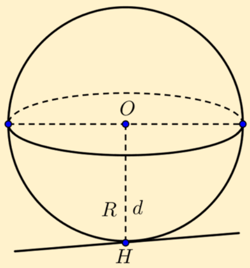
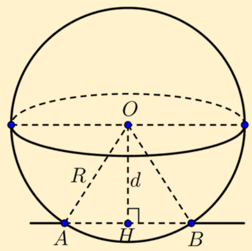
Giữa mặt cầu và mặt phẳng:

Trong không gian $Oxyz$, cho $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ và $S(I;R)$. Khi đó:

	Mặt phẳng		
	Không cắt $\Leftrightarrow (\alpha)\cap(S)=\varnothing$	***Tiếp xúc*** $\Leftrightarrow (\alpha)\cap(S)=\{M\}$	***Cắt theo giao tuyến là đường tròn*** $\Leftrightarrow (\alpha)\cap(S)=C(I';r)$
Mặt cầu	$d(I;(\alpha))>R$	$d(I;(\alpha))=R$ $\Leftrightarrow$ Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu tại điểm M.	$d(I;(\alpha))<R$ $\Leftrightarrow$ (α) cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn có tâm I' và bán kính r. $R=\sqrt{r^2+d^2(I;(\alpha))}$.
			

Giữa mặt cầu và mặt phẳng:

Trong không gian $Oxyz$, cho $\Delta: \dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ và $S(I;R)$. Khi đó:

	Đường thẳng		
	Không cắt $\Leftrightarrow \Delta\cap(S)=\varnothing$	***Tiếp xúc*** $\Leftrightarrow \Delta\cap(S)=\{H\}$	***Cắt tại hai điểm A;B*** $\Leftrightarrow \Delta\cap(S)=\{A;B\}$
Mặt cầu	$d(I;\Delta)>R$	$d(I;\Delta)=R$ $\Leftrightarrow$ Đường thẳng tiếp xúc mặt cầu tại điểm H	$d(I;\Delta)<R$ $\Leftrightarrow R=\sqrt{\dfrac{AB^2}{4}+d^2(I;\Delta)}$
			

B Các dạng bài tập

Dạng 1. Xác định tâm – bán kính – nhận biết phương trình mặt cầu

Phương pháp

		LOẠI 1	LOẠI 2
Phương Trình		$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$	$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$
Nhận xét		(1) Hệ số trước x,y,z bằng nhau và bằng 1. (2) Hệ số trước các ngoặc bằng nhau và bằng 1. (3) Vế phải là hằng số dương.	(1) Hệ số trước x^2,y^2,z^2 bằng nhau và bằng 1. (2) Phương trình đầy đủ x^2,y^2,z^2 (3) Thỏa mãn điều kiện tồn tại $a^2+b^2+c^2-d>0$
Xác Định	*Tâm*	Lấy hệ số tự do trong ngoặc $\div -1$.	Lấy hệ số trước $x;y;z$ $\div -2$.
	Bán Kính	Lấy căn bậc 2 vế phải.	$R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$. Điều kiện tồn tại: $a^2+b^2+c^2-d>0$.

- Định nghĩa $S(I;R)=\{M \mid IM=R>0\}$.
- Cho hai điểm A,B cố định.

  Nếu $MA\perp MB$ thì tập hợp điểm M là mặt cầu (S) có tâm I là trung điểm AB và bán kính $R=\dfrac{AB}{2}$

Ví dụ 1.1.

Trong không gian $Oxyz$, xác định tọa độ tâm và bán kính các mặt cầu sau:

(1) $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-2=0$. (2) $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=9$

Lời giải

(1) $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-2=0$.

Mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-2=0$ là $I(1;-2;3)$ và $R=\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2-(-2)}=4$

(2) $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=9$

Mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=9$ có tọa độ tâm $I(1;-2;0)$ và $R=3$.

Ví dụ 1.2.

Trong không gian $Oxyz$, cho các phương trình sau:

(1) $2x^2+2y^2=(x+y)^2-z^2+2x-1-2xy$ (2) $x^2+y^2+z^2-2x+2y=0$

(3) $x^2+y^2+z^2+2x-2y+1=0$ (4) $(x+y)^2=2xy-z^2+1-4x$

Có bao nhiêu phương trình mặt cầu và mặt cầu đấy nhận $I(-1;1;0)$ làm tâm?

Lời giải

(1) $2x^2+2y^2=(x+y)^2-z^2+2x-1-2xy$

$2x^2+2y^2=(x+y)^2-z^2+2x-1-2xy \Leftrightarrow 2x^2+2y^2=x^2+y^2+2xy-z^2+2x-1-2xy$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2+z^2=0$ không là phương trình mặt cầu.

(2) $x^2+y^2+z^2-2x+2y=0$

$x^2+y^2+z^2-2x+2y=0$

Kiểm tra: $1^2+(-1)^2=2>0$ là phương trình mặt cầu, có tâm $I(1;-1;0)$.

(3) $x^2+y^2+z^2+2x-2y+1=0$

$x^2+y^2+z^2+2x-2y+1=0$.

Kiểm tra: $(-1)^2+1^2-1=1>0$ là phương trình mặt cầu, có tâm $I(-1;1;0)$.

(4) $(x+y)^2=2xy-z^2+1-4x$

$(x+y)^2=2xy-z^2+1-4x \Leftrightarrow x^2+2xy+y^2-2xy+z^2-1+4x=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+4x-1=0$

Kiểm tra: $(-2)^2-(-1)=5>0$ là phương trình mặt cầu, có tâm $I(-2;0;0)$.

Vậy, phương trình là phương trình mặt cầu và nhận

Ví dụ 1.3.

Trong không gian $Oxyz$, cho các phương trình sau:

(1) $x^2+y^2+z^2-2x=0$ (2) $x^2+y^2-z^2+2x-y+1=0$

(3) $2x^2+2y^2=(x+y)^2-z^2+2x-1$ (4) $(x+y)^2=2xy-z^2-1$

Có bao nhiêu phương trình mặt cầu?

Lời giải

(1) $x^2+y^2+z^2-2x=0$

$x^2+y^2+z^2-2x=0$ có tâm $I(1;0;0)$ và $R=\sqrt{1^2+0^2+0^2}=1$ là phương trình mặt cầu.

(2) $x^2+y^2-z^2+2x-y+1=0$

$x^2+y^2-z^2+2x-y+1=0$ không là phương trình mặt cầu vì hệ số trước z^2 khác hệ số trước x^2 và y^2.

(3) $2x^2+2y^2=(x+y)^2-z^2+2x-1$

$2x^2+2y^2=(x+y)^2-z^2+2x-1 \Leftrightarrow 2x^2+2y^2=x^2+y^2+2xy-z^2+2x-1$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2xy-2x+1=0$ không là phương trình mặt cầu.

(4) $(x+y)^2=2xy-z^2-1$

$(x+y)^2=2xy-z^2-1 \Leftrightarrow x^2+y^2+2xy=2xy-z^2-1$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+1=0$ không là phương trình mặt cầu vì $x^2+y^2+z^2+1>0\,\forall x;y;z$.

Ví dụ 1.4.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;0;-1)$ và $B(0;6;0)$. Chứng minh rằng nếu điểm $M(x;y;z)$ thỏa mãn $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ thì M thuộc một mặt cầu (S). Tìm tâm và bán kính của mặt cầu (S).

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{MA}=(-x;-y;-1-z)$ và $\overrightarrow{MB}=(-x;6-y;-z)$.

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0 \Leftrightarrow x^2-6y+y^2+z+z^2=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-6y+z=0$.

Khi đó theo dạng mặt cầu thì ta có: $a=0, b=3, c=-\frac{1}{2}$ và $d=0$.

Xét $a^2+b^2+c^2-d=\frac{37}{4}>0$.

Vậy tập hợp điểm M là mặt cầu có tâm $I\left(0;3;-\frac{1}{2}\right)$, bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\frac{\sqrt{37}}{2}$.

Ví dụ 1.5.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;2;-2)$; $B(3;-3;3)$. Điểm M trong không gian thỏa mãn $\frac{MA}{MB}=\frac{2}{3}$. Tính độ dài OM lớn nhất.

Lời giải

Gọi $M(x;y;z)$.

Ta có $\frac{MA}{MB}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow 3MA=2MB \Leftrightarrow 9MA^2=4MB^2$

$\Leftrightarrow 9\left[(x+2)^2+(y-2)^2+(z+2)^2\right]=4\left[(x-3)^2+(y+3)^2+(z-3)^2\right]$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+12x-12y+12z=0 \Leftrightarrow (x+6)^2+(y-6)^2+(z+6)^2=108$.

Như vậy, điểm M thuộc mặt cầu (S) tâm $I(-6;6;-6)$ và bán kính $R=\sqrt{108}=6\sqrt{3}$.

Do đó OM lớn nhất bằng $OI+R=\sqrt{(-6)^2+6^2+(-6)^2}+6\sqrt{3}=12\sqrt{3}$.

Dạng 2. Mặt cầu có tâm và đi qua một điểm

Phương pháp

▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S)

Loại	Phương pháp
Tâm $I(a;b;c)$ và bán kính R.	Từ giả thiết ta đã có sẵn tâm I và bán kính R. Phương trình $(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.
Tâm $I(a;b;c)$ và qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$.	≫ Bán kính mặt cầu $R=IM=\left\|\overrightarrow{IM}\right\|=\sqrt{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2+(z_0-c)^2}$. ≫ Mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R=IM$.

Ví dụ 2.1.

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình các mặt cầu sau:

(1) Tâm $I(-1;2;-3)$, bán kính $R=3$ (2) Tâm $I(0;-4;1)$ đường kính bằng 4.

Lời giải

(1) Tâm $I(-1;2;-3)$, bán kính $R=3$

Phương trình mặt cầu tâm $I(-1;2;-3)$, bán kính $R=3$ là: $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9$

(2) Tâm $I(0;-4;1)$ đường kính bằng 4.

Đường kính của mặt cầu bằng 4 nên bán kính $R=2$

Phương trình của mặt cầu tâm $I(0;-4;1)$ là $x^2+(y+4)^2+(z-1)^2=4$.

Ví dụ 2.2.

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình các mặt cầu sau:

(1) Tâm $I(-1;2;1)$ đi qua gốc tọa độ. (2) Tâm $I(1;2;3)$ đi qua điểm $A(1;1;2)$.

(1) Tâm $I(-1;2;1)$ đi qua gốc tọa độ.

Bán kính của mặt cầu là $R=IO=\sqrt{1^2+(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$.

Phương trình của mặt cầu tâm $I(-1;2;1)$ qua O là $x^2+y^2+z^2=6$.

(2) Tâm $I(1;2;3)$ đi qua điểm $A(1;1;2)$.

Bán kính của mặt cầu là $R=IA=\sqrt{0^2+1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

Phương trình của mặt cầu tâm $I(1;2;3)$ qua $A(1;1;2)$ là $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=2$.

Dạng 3. Mặt cầu có đường kính

Phương pháp

▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S)

Loại	Phương pháp
Nhận $M(x_M;y_M;z_M)$ và $N(x_N;y_N;z_N)$ làm đường kính	≫ Gọi I là tâm mặt cầu (S) $\Rightarrow I$ là trung điểm của MN $\Rightarrow I\left(\dfrac{x_M+x_N}{2};\dfrac{y_M+y_N}{2};\dfrac{z_M+z_N}{2}\right)$. ≫ Bán kính mặt cầu $R=\dfrac{MN}{2}=IM$.

Ví dụ 3.1.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;-3)$ và $B(3;2;1)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là?

Lời giải

Gọi I là trung điểm của $AB=\sqrt{(3-1)^2+(2-0)^2+(1+3)^2}=2\sqrt{6}\Rightarrow R=\dfrac{AB}{2}=\sqrt{6}$.

Khi đó $\begin{cases} x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{1+3}{2}=2 \\ y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{0+2}{2}=1 \\ z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2}=\dfrac{-3+1}{2}=-1 \end{cases}\Rightarrow I(2;1;-1)$.

Phương trình mặt cầu cần tìm: $x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z=0$.

Ví dụ 3.2.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vecto $\overrightarrow{AO}=(-1;-2;3)$ và $\overrightarrow{BO}=(-7;-4;-5)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là?

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AO}(-1;-2;3)\Rightarrow A(1;2;-3)$; $\overrightarrow{BO}(-7;-4;-5).\Rightarrow B(7;4;5)$.

Phương trình mặt cầu đường kính AB thì tâm là trung điểm của AB $\Rightarrow I(4;3;1)$

Bán kính $R=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{\sqrt{(7-1)^2+(4-2)^2+(5+3)^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{104}}{2}$

Phương trình mặt cầu $(x-4)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=26$

Vậy phương trình mặt cầu (S) $(x-4)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=26$

Dạng 4. Mặt cầu qua 4 điểm không đồng phẳng

Phương pháp

▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S)

Loại	Phương pháp
Đi qua 4 điểm $A;B;C;D$ không đồng phẳng	≫ Gọi $I(a;b;c)$ là tọa độ tâm mặt cầu cần tìm. ≫ Mặt cầu (S) đi qua 4 điểm $\Leftrightarrow IA = IB = IC = ID \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \\ IA^2 = ID^2 \end{cases} \Rightarrow$ tọa độ I. ≫ Mặt cầu có tâm và bán kính .

Ví dụ 4.1.

Trong không gian $Oxyz$, nếu mặt cầu $.(S).$ đi qua bốn điểm $M(2;2;2), N(4;0;2), P(4;2;0)$ và $Q(4;2;2)$ thì tâm I của (S) có tọa độ là?

Lời giải

Gọi phương trình mặt cầu: $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0 \quad (a^2 + b^2 + c^2 - d > 0)$.

Vì $M, N, P, Q \in (S)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2^2 + 2^2 + 2^2 + 4a + 4b + 4c + d = 0 \\ 4^2 + 0^2 + 2^2 + 8a + 4c + d = 0 \\ 4^2 + 2^2 + 0^2 + 8a + 4b + d = 0 \\ 4^2 + 2^2 + 2^2 + 8a + 4b + 4c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -1 \\ c = -1 \\ d = 8 \end{cases} \Rightarrow I(3;1;1) \text{ là tâm mặt cầu } (S).$$

Ví dụ 4.2.

Trong không gian $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2;0;0)$, $B(0;2;0), C(0;0;2)$, $D(2;2;2)$. Viết phương trình mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Lời giải

Gọi phương trình mặt cầu có dạng $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$.

Vì mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ nên tọa độ các điểm $A, B, C, D \in (S)$.

Ta có: $\begin{cases} 4 + 4a + d = 0 \\ 4 + 4b + d = 0 \\ 4 + 4c + d = 0 \\ 12 + 4a + 4b + 4c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \\ c = -1 \\ d = 0 \end{cases}$

Suy ra phương trình mặt cầu là $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 0$.

Dạng 5. Mặt cầu có tâm thuộc đường thẳng/mặt phẳng

Phương pháp

▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S)

Loại	Phương pháp
Tâm $I\in(P)$ và đi qua $A;B;C$. *Với* $(P):\alpha.x+\beta.y+\gamma.z+\delta=0$ *hoặc* (P) *là các mặt phẳng* $(Oxy),(Oxz),(Oyz)$. ⌘ **Nhận xét:** *Trong trường hợp* $I\in$ *một trong các mặt phẳng* $(Oxy),(Oxz),(Oyz)$ *bài toán sẽ đơn giản hơn.*	≫ Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu ≫ Ta có $I\in(P)\Rightarrow \alpha.a+\beta.b+\gamma.c+\delta=0\ (1)$. ≫ Mặt cầu (S) đi qua ba điểm $A;B;C$ $\Leftrightarrow IA=IB=IC\Leftrightarrow\begin{cases}IA^2=IB^2\ (2)\\IA^2=IC^2\ (3)\end{cases}$. ≫ Từ $(1);(2)$ và $(3)\Rightarrow I$ là thỏa hệ: $\begin{cases}\alpha.a+\beta.b+\gamma.c+\delta=0\\IA^2=IB^2\\IA^2=IC^2\end{cases}\Rightarrow$ tọa độ I. ≫ Mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R=IA$.
Tâm $I\in d$ và đi qua $A;B$. *Với* $d:\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ *hoặc* d *là các trục* $Ox;Oy;Oz$. ⌘ **Nhận xét:** *Trong trường hợp* $I\in$ *một trong các trục* $Ox;Oy;Oz$ *bài toán sẽ đơn giản hơn.*	≫ Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu ≫ Ta có $I\in d\Rightarrow I(x_0+at;y_0+bt;z_0+ct)$. ≫ Viết $\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IB}$ theo t và tính độ dài $\left\|\overrightarrow{IA}\right\|;\left\|\overrightarrow{IB}\right\|$ ≫ Mặt cầu (S) đi qua hai điểm $A;B$ $\Leftrightarrow IA=IB\Leftrightarrow\left\|\overrightarrow{IA}\right\|=\left\|\overrightarrow{IB}\right\|\Rightarrow t=?$. ≫ Từ $t=?\Rightarrow$ tọa độ I. ≫ Mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R=IA$.

Ví dụ 5.1.

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) đi qua 2 điểm $A(1;2;3),B(2;0;-2)$, và có tâm nằm trên trục Ox. Viết phương trình mặt cầu (S)?

Lời giải

Vì mặt cầu có tâm I thuộc trục Ox nên tâm có dạng $I(x;0;0)$.

Vì mặt cầu đi qua $A(1;2;3),B(2;0;-2)$, nên $IA=IB\Leftrightarrow IA^2=IB^2$

$\Leftrightarrow(1-x)^2+4+9=(2-x)^2+4\Leftrightarrow 2x=-6\Leftrightarrow x=-3\Rightarrow IA=\sqrt{4^2+2^2+3^2}=\sqrt{29}$.

Do đó phương trình mặt cầu là $(x+3)^2+y^2+z^2=29$.

Ví dụ 5.2.

Trong không gian $Oxyz$, tìm bán kính mặt cầu qua 2 điểm $A(3;-1;2)$, $B(1;1;-2)$ và có tâm I thuộc $\Delta: \frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-1}$?

Lời giải

Vì mặt cầu có tâm I thuộc Δ nên $I(2t;1+t;-t) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA}=(2t;1+t;-t) \\ \overrightarrow{IB}=(1-2t;t;-2+t) \end{cases}$.

Vì mặt cầu đi qua hai điểm $A(3;-1;2), B(1;1;-2)$, nên $IA=IB$

$\Leftrightarrow (2t)^2+(1+t)^2+(-t)^2=(1-2t)^2+(t)^2+(-2+t)^2$

$\Leftrightarrow 4t+12=0 \Leftrightarrow t=-3 \Rightarrow IA=\sqrt{(-6)^2+(-2)^2+(3)^2}=7$.

Ví dụ 5.3.

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu đi qua 3 điểm $A(-2;3;3), B(-1;1;2), C(4;2;2)$ và có tâm nằm thuộc mặt phẳng (Oyz).

Lời giải

Vì mặt cầu có tâm I thuộc mặt phẳng (Oyz) nên tâm có dạng $I(0;b;c)$.

Vì mặt cầu đi qua ba điểm $A(-2;3;3), B(-1;1;2), C(4;2;2)$ nên ta có:

$IA=IB=IC=R \Leftrightarrow IA^2=IB^2=IC^2=R^2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4+(3-b)^2+(3-c)^2=1+(1-b)^2+(2-c)^2 \\ 1+(1-b)^2+(2-c)^2=16+(2-b)^2+(2-c)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 40+9-6c+c^2=65+4-4c+c^2 \\ b=9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2c=20 \\ b=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-10 \\ b=9 \end{cases} \Rightarrow I(0;9;-10), R=IA=\sqrt{4+36+169}=\sqrt{209}$.

Phương trình mặt cầu là $x^2+(y-9)^2+(z+10)^2=209$.

Dạng 6. Mặt cầu tiếp xúc đường thẳng/mặt phẳng

Phương pháp

▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S)

Loại	Phương pháp
Tâm $I(a;b;c)$ và tiếp xúc với (P). *Với $(P): Ax+By+Cz+D=0$ hoặc (P) là các mặt phẳng $(Oxy),(Oxz),(Oyz)$.* ⌘ **Nhận xét:** *Trong trường hợp I tiếp xúc một trong các mặt phẳng $(Oxy),(Oxz),(Oyz)$ bài toán sẽ đơn giản hơn.*	≫ Bán kính mặt cầu $R=\left[\begin{array}{ll} d(I;(\alpha))=\dfrac{\lvert Aa+Bb+Cc+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} & Tiep\ xuc\ (\alpha) \\ d(I;(Oxy))=\sqrt{z_I^2} & Tiep\ xuc\ (Oxy) \\ d(I;(Oxz))=\sqrt{y_I^2} & Tiep\ xuc\ (Oxz) \\ d(I;(Oyz))=\sqrt{x_I^2} & Tiep\ xuc\ (Oyz) \end{array}\right.$. ≫ Mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R=d(I;(\alpha))$.
Tâm $I(a;b;c)$ và tiếp xúc với Δ. *Với $\Delta: \dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ hoặc Δ là các trục $Ox;Oy;Oz$.* ⌘ **Nhận xét:** *Trong trường hợp I tiếp xúc một trong các trục $Ox;Oy;Oz$ bài toán sẽ đơn giản hơn.*	≫ Bán kính mặt cầu $R=\left[\begin{array}{ll} d(I;\Delta)=\dfrac{\left\lvert\left[\vec{u};\overrightarrow{MI}\right]\right\rvert}{\lvert\vec{u}\rvert} & Tiep\ xuc\ \Delta \\ d(I;Ox)=\sqrt{y_I^2+z_I^2} & Tiep\ xuc\ Ox \\ d(I;Oy)=\sqrt{x_I^2+z_I^2} & Tiep\ xuc\ Oy \\ d(I;Oz)=\sqrt{x_I^2+y_I^2} & Tiep\ xuc\ Oz \end{array}\right.$ ≫ Mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R=d(I;\Delta)$.

Ví dụ 6.1.

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu tâm $I(1;-2;1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy).

Lời giải

Do mặt cầu (S) tiếp xúc $(Oxy) \Rightarrow R=d(I;(Oxy))=\sqrt{z_I^2}=\sqrt{(1)^2}=1$.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm: $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=1$.

Ví dụ 6.2.

Trong không gian $Oxyz$, tìm bán kính mặt cầu đi qua điểm $B(1;3;0)$ và tiếp xúc với (Oyz) tại $M(0;3;-2)$.

Lời giải

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu (S).

Vì (S) tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) tại $M(0;3;-2)$

Nên hình chiếu của I lên mặt phẳng (Oyz) là $H(0;b;c)$ trùng với M.

Do đó $b=3, c=-2$ và $I(a;3;-2)$.

$$IB^2 = IM^2 \Leftrightarrow (a-1)^2 + 4 = a^2 \Leftrightarrow -2a+5=0 \Leftrightarrow a=\frac{5}{2} \Rightarrow I\left(\frac{5}{2};3;-2\right).$$

Ví dụ 6.3.

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-2;-4), B(2;3;4), C(3;5;7)$. Tìm phương trình mặt cầu có tâm là A và tiếp xúc với BC.

Lời giải

$\overrightarrow{AB}=(1;5;8)$, $\overrightarrow{BC}=(1;2;3) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}\right]=(-1;5;-3)$

Mặt cầu có tâm là A và tiếp xúc với $BC \Rightarrow R = d\left[A;(BC)\right] = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$

Vậy phương trình mặt cần tìm là: $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+4)^2=\frac{5}{2}$.

Ví dụ 6.4.

Trong không gian $Oxyz$, cho $B(1;1;9)$, $C(1;4;0)$. Mặt cầu (S) đi qua B và tiếp xúc với (Oxy) tại C có phương trình là?

Lời giải

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu (S).

Vì (S) tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) tại $C(1;4;0)$

Nên hình chiếu của I lên mặt phẳng (Oxy) là $H(a;b;0)$ trùng với C.

Do đó $a=1, b=4$ và $I(1;4;c)$.

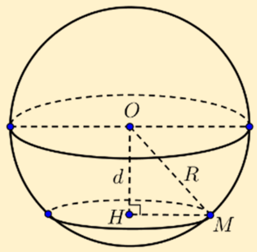
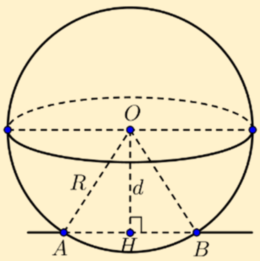
$$IB^2 = IC^2 \Leftrightarrow 3^2 + (c-9)^2 = c^2 \Leftrightarrow -18c+90=0 \Leftrightarrow c=5.$$

Vậy phương trình mặt cần tìm là: $(x-1)^2+(y-4)^2+(z-5)^2=25$.

Dạng 7. Mặt cầu cắt đường thẳng/mặt phẳng

Phương pháp

▶ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S)

Loại	Phương pháp
Tâm $I(a;b;c)$ và cắt (P) theo giao tuyến là đường tròn tâm I' bán kính r. *Với* $(P): Ax+By+Cz+D=0$ *hoặc* (P) *là các mặt phẳng* $(Oxy),(Oxz),(Oyz)$. ⌘ **Nhận xét:** *Trong trường hợp* I *tiếp xúc một trong các mặt phẳng* $(Oxy),(Oxz),(Oyz)$ *bài toán sẽ đơn giản hơn.*	≫ Tính $d(I;(\alpha))=\dfrac{\lvert Aa+Bb+Cc+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ ≫ Bán kính: $R^2=d^2(I;(\alpha))+r^2=OH^2+HM^2$ ≫ Mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính R. 
Tâm $I(a;b;c)$ và cắt Δ tại $A(x_A;y_A;z_A)$, $B(x_B;y_B;z_B)$ và H là trung điểm AB. *Với* $\Delta: \dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ *hoặc* Δ *là các trục* $Ox;Oy;Oz$. ⌘ **Nhận xét:** *Trong trường hợp* I *tiếp xúc một trong các trục* $Ox;Oy;Oz$ *bài toán sẽ đơn giản hơn.*	≫ Tính $d(I;\Delta)=\dfrac{\left\lvert\left[\vec{u};\overrightarrow{MI}\right]\right\rvert}{\lvert\vec{u}\rvert}$ ≫ Bán kính: $R^2=d^2(I;(\alpha))+AH^2=OH^2+\dfrac{AB^2}{4}$ ≫ Mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R=d(I;\Delta)$. 

Ví dụ 7.1.

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+3)^2+(z-4)^2=25$. Mặt phẳng (Oxy) cắt mặt cầu (S) có giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu?

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm: $I(2;-3;4)$, $R=5$.

Gọi H là tâm đường tròn cắt nên H là hình chiếu của I. Vậy $H(2;-3;0)$.

Bán kính đường tròn: $r=\sqrt{R^2-IH^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$.

Ví dụ 7.2.

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(2;4;1)$ và $(P): x+y+z-4=0$. Tìm phương trình mặt cầu (S) tâm I sao cho (S) cắt (P) theo đường tròn có đường kính bằng 2

Lời giải

Ta có: $d(I,(P)) = \dfrac{|2+4+1-4|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \sqrt{3}$.

Gọi R là bán kính mặt cầu, ta có: $R^2 = d^2(\mathrm{I},(P)) + r^2 = 3+1 = 4$.

$\Rightarrow (S): (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 4$.

Ví dụ 7.3.

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-2;-4;5)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu tâm là A và cắt trục Oz tại hai điểm B, C sao cho ΔABC vuông.

Lời giải

Do $AB = AC$ nên ΔABC vuông tại A.

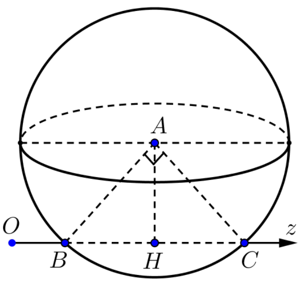
Gọi H trung điểm $BC \to AH = BH = HC$.

Do đó H là hình chiếu của điểm A lên trục Oz.

Xét ΔABH: $AB^2 = AH^2 + BH^2 = 2AH^2$

$\Rightarrow R = AH\sqrt{2} = d(A, Oz).\sqrt{2} = \sqrt{{x_A}^2 + {y_A}^2}.\sqrt{2} = 2\sqrt{10}$

Vậy mặt cầu có phương trình: $(x+2)^2 + (y+4)^2 + (z-5)^2 = 40$



Ví dụ 7.4.

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;2)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{1}$. Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A và B với $AB = 10$. Viết phương trình của mặt cầu (S).

Lời giải

Gọi H là trung điểm AB ta có: $IH = d(I,d)$ và $IH \perp d$.

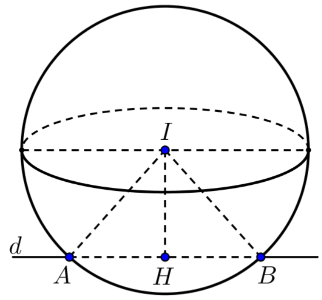
$H(1+t;-t;t) \Rightarrow \overrightarrow{IH} = (t;-t+1;t-2)$.

Vì: $IH \perp d \Rightarrow \overrightarrow{IH}.\overrightarrow{u_d} = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

$\Rightarrow H(2;-1;1) \Rightarrow d(I,d) = IH = \sqrt{2}$.

Xét ΔIAH: $IA = \sqrt{AH^2 + IH^2} = \sqrt{\left(\dfrac{10}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{27}$.

Vậy phương trình mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 27$.



Dạng 8. Vị trí tương đối liên quan mặt cầu

Phương pháp

	Mặt cầu	
Mặt phẳng	Tính $d\left(I;(P)\right)=\dfrac{\left\|ax_I+by_I+cz_I+d\right\|}{\left\|\vec{n}_{(P)}\right\|}$ và so sánh với bán kính R	
	$d\left(I;(P)\right)>R$	Mặt phẳng ***không cắt*** mặt cầu
	$d\left(I;(P)\right)=R$	Mặt phẳng ***tiếp xúc*** mặt cầu tại M
	$d\left(I;(P)\right)<R$	Mặt phẳng ***cắt*** mặt cầu
Đường thẳng	Tính $d(I;d)=\dfrac{\left\|\left[\vec{u};\overrightarrow{MI}\right]\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$ và so sánh với bán kính R	
	$d(I;d)>R$	Đường thẳng ***không cắt*** mặt cầu
	$d(I;d)=R$	Đường thẳng ***tiếp xúc*** mặt cầu
	$d(I;d)<R$	Đường thẳng ***cắt*** mặt cầu
Điểm	Tính IM và so sánh với bán kính R	
	$IM>R$	Điểm M ***nằm ngoài*** mặt cầu
	$IM=R$	Điểm M ***nằm trên*** mặt cầu
	$IM<R$	Điểm M ***nằm trong*** mặt cầu

Ví dụ 8.1.

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z-3=0$ và một điểm $M(4;2;-2)$. Xét vị trí của điểm M so với mặt cầu (S)

Lời giải

Ta có $x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z-3=0 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=9$

$\Rightarrow$ Mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;-1)$ và bán kính $R=3$

Mà $\overrightarrow{IM}=(2;1;-1) \Rightarrow IM=\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{6}<R$.

Vậy điểm M nằm trong mặt cầu (S).

Ví dụ 8.2.

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-2y+2z-1=0$ và mặt phẳng $(P): 2x+y-2z+1=0$. Xét vị trí của mặt phẳng (P) so với mặt cầu (S)

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;-1)$, bán kính $R=\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2+1}=2$.

Với $(P): 2x + y - 2z + 1 = 0$ thì $d(I;(P)) = \dfrac{|2.1 + 1 - 2.(-1) + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = 2 = R$.

Vậy mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S).

Ví dụ 8.3.

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $(\Delta): \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z}{-2}$ và và mặt cầu (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z + 2 = 0$. Số điểm chung của (Δ) và (S) là?

Lời giải

Đường thẳng (Δ) đi qua $M(1;-2;0)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1;3;-2)$

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;2)$ và bán kính $R = 2$.

Ta có $\overrightarrow{MI} = (0;1;2)$ và $\left[\vec{u}, \overrightarrow{MI}\right] = (8;-2;1) \Rightarrow d(I,\Delta) = \dfrac{\left|\left[\vec{u}, \overrightarrow{MI}\right]\right|}{|\vec{u}|} = \dfrac{\sqrt{966}}{14}$

Vì $d(I,\Delta) > R$ nên (Δ) không cắt mặt cầu (S).

Ví dụ 8.4.

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) lần lượt có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z - 6 = 0$, $2x + 2y + z + 2m = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để (P) tiếp xúc với (S)?

Lời giải

(S) có tâm là $I(1;-1;1)$ và bán kính $R = 3$.

Do mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (P) nên: $d(I,(P)) = R$

$\Leftrightarrow \dfrac{|2 - 2 + 1 + 2m|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 3 \Leftrightarrow |2m + 1| = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = -5 \end{array}\right.$.

Ví dụ 8.5.

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 1$ và đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{m} = \dfrac{z}{-1}$. Giá trị của m để Δ không cắt mặt cầu (S) là ?

Lời giải

Từ phương trình đường thẳng Δ và mặt cầu (S) ta có:

$(1 + t - 2)^2 + (2 + mt + 1)^2 + (-t - 1)^2 = 1$

$\Leftrightarrow (t-1)^2 + (3 + mt)^2 + (t+1)^2 = 1 \Leftrightarrow (m^2 + 2)t^2 + 2.3mt + 10 = 0 \quad (1)$

Để Δ không cắt mặt cầu (S) thì (1) vô nghiệm, hay (1) có $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}$

Dạng 9. Bài toán thực tế

Ví dụ 9.1.

Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là kilomet), một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu phát được đặt tại điểm $I(6;-2;4)$.

(1) Cho biết bán kính phủ sóng của trạm là 3 km. Viết phương trình mặt cầu (S) biểu diễn ranh giới của vùng phủ sóng.

(2) Một người sử dụng điện thoại tại điểm $M(5;2;-2)$. Hãy cho biết điểm M nằm trong hay nằm ngoài mặt cầu (S) và người đó có thể sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên hay không.

(3) Câu hỏi tương tự đối với người sử dụng điện thoại ở điểm $N(6;0;3)$.

Lời giải

(1) Cho biết bán kính phủ sóng của trạm là 3 km. Viết phương trình mặt cầu (S) biểu diễn ranh giới của vùng phủ sóng.

Trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu phát được đặt tại điểm $I(6;-2;4)$.

Do đó gọi mặt cầu (S) có tâm $I(6;-2;4)$ và bán kính $R=3$ nên có phương trình:

$(S):(x-6)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=9$.

(2) Một người sử dụng điện thoại tại điểm $M(5;2;-2)$. Hãy cho biết điểm M nằm trong hay nằm ngoài mặt cầu (S) và người đó có thể sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên hay không.

Ta có: $\overrightarrow{IM}=(-1;4;-6)\Rightarrow IM=\sqrt{(-1)^2+4^2+(-6)^2}=\sqrt{53}\,km>R=3\,km$.

$\Rightarrow$ Điểm M nằm ngoài mặt cầu (S) và người đó không thể sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên.

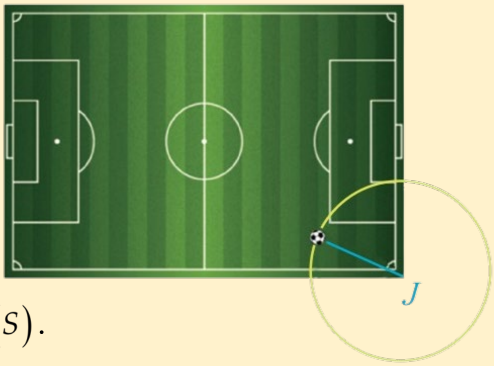
(3) Câu hỏi tương tự đối với người sử dụng điện thoại ở điểm $N(6;0;3)$.

Ta có: $\overrightarrow{IN}=(0;2;-1)\Rightarrow IN=\sqrt{0^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}\,km<R=3\,km$.

$\Rightarrow$ Điểm N nằm trong mặt cầu (S) và người đó có thể sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên.

Ví dụ 9.2.

Công nghệ hỗ trợ trọng tài VAR (Video Assistant Referee) thiết lập một hệ tọa độ $Oxyz$ để theo dõi vị trí của quả bóng M. Cho biết M đang nằm trên mặt sân có phương trình $z=0$, đồng thời thuộc mặt cầu $(S):(x-32)^2+(y-50)^2+(z-8)^2=100$ (đơn vị độ dài tính theo mét).



(1) Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S).

(2) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc J của tâm I trên mặt sân.

(3) Tính khoảng cách từ vị trí M của quả bóng đến điểm J.

Lời giải

(1) Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S).

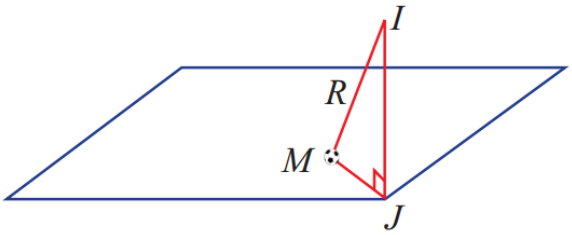
Mặt cầu (S) có phương trình: $(S):(x-32)^2+(y-50)^2+(z-8)^2=100$ nên có tâm $I(32;50;8)$ và bán kính $R=\sqrt{100}=10$.

(2) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc J của tâm I trên mặt sân.

Trong không gian $Oxyz$, mặt sân có phương trình $z=0$ trùng với mặt phẳng tọa độ (Oxy), suy ra hình chiếu vuông góc của điểm $I(32;50;8)$ xuống mặt sân có tọa độ $J(32;50;0)$.

(3) Tính khoảng cách từ vị trí M của quả bóng đến điểm J.

Trong tam giác vuông IJM, ta có: $\overrightarrow{JI}=(0;0;8)\Rightarrow IJ=8,\ IM=R=10$.



Suy ra: $JM=\sqrt{IM^2-JI^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$.

Vậy khoảng cách từ vị trí M của quả bóng đến điểm J là $6\,m$.

Chương 05

Bài 3. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU TRONG KHÔNG GIAN

C Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+(y-4)^2+(z-1)^2=25$. Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) là

A. $I(0;-4;-1), R=25$. **B.** $I(0;-4;-1), R=5$.
C. $I(0;4;1), R=25$. **D.** $I(0;4;1), R=5$.

Lời giải

Chọn D

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;4;1)$ và bán kính $R=5$.

» Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-6x+4y-8z+4=0$. Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) là

A. $I(-3;2;-4), R=25$. **B.** $I(3;-2;4), R=5$.
C. $I(3;-2;4), R=25$. **D.** $I(-3;2;-4), R=5$.

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;-2;4)$ và bán kính $R=\sqrt{3^2+(-2)^2+4^2-4}=5$.

» Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-4x+8y-2z-4=0$. Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) là

A. $I(2;-4;1), R=5$. **B.** $I(-2;4;-1), R=25$.
C. $I(2;-4;1), R=\sqrt{21}$. **D.** $I(-2;4;-1), R=21$.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-4;1)$ và bán kính $R=\sqrt{2^2+(-4)^2+1^2-(-4)}=5$.

» Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$. Điểm có tọa độ nào sau đây nằm trên mặt cầu?

A. $(-1;2;-3)$. **B.** $(1;-2;-1)$. **C.** $(1;-2;1)$. **D.** $(1;-2;3)$.

Lời giải

Chọn B

Thay tọa độ của các điểm đã cho vào phương trình mặt cầu ta được điểm có tọa độ $(1;-2;-1)$ nằm trên mặt cầu.

» Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+(y-1)^2+z^2=2$. Trong các điểm cho dưới đây, điểm nào nằm ngoài mặt cầu (S)?

A. $M(1;1;1)$ **B.** $N(0;1;0)$ **C.** $P(1;0;1)$ **D.** $Q(1;1;0)$

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;1;0)$ và bán kính $R=\sqrt{2}$.

Khoảng cách từ các điểm đã cho tới tâm mặt cầu:

$MI=\sqrt{2}=R$; $NI=0<R$, $PI=\sqrt{3}>R$, $QI=1<R$.

Do đó điểm P nằm ngoài mặt cầu.

» Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z-3=0$ và một điểm $M(4;2;-2)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Điểm M là tâm của mặt cầu (S). **B.** Điểm M nằm trên mặt cầu (S).

C. Điểm M nằm trong mặt cầu (S). **D.** Điểm M nằm ngoài mặt cầu (S).

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;-1)$ và bán kính $R=3$.

Khi đó $IM=\sqrt{(4-2)^2+(2-1)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{6}<R$.

Vậy điểm M nằm trong mặt cầu (S).

» Câu 7. Phương trình nào sau đây là phương trình của mặt cầu?

A. $(x-1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=3$. **B.** $(x-1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=-3$.

C. $(x-1)+(y-3)+(z+2)=9$. **D.** $(x-1)+(y-3)+(z+2)=-9$.

Lời giải

Chọn A

Do phương trình mặt cầu có dạng $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ nên vế phải của phương trình là $R^2>0$

» Câu 8. Điều kiện để phương trình $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ là phương trình mặt cầu?

A. $a+b+c-d>0$. **B.** $a^2+b^2+c^2+d>0$.

C. $a^2+b^2+c^2-d>0$. **D.** $a^2+b^2+c^2-d\ge 0$.

Lời giải

Chọn C

Để phương trình $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ là phương trình mặt cầu thì $a^2+b^2+c^2-d>0$

» Câu 9. Trong các phương trình sau, phương trình nào không phải là phương trình của mặt cầu?

A. $x^2+y^2+z^2=1$. **B.** $x^2+y^2+z^2+2x+2y-4z+11=0$.

C. $x^2+y^2+z^2+2x+4y-4z-21=0$. **D.** $2x^2+2y^2+2z^2+4x+4y-8z-10=0$.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình $x^2+y^2+z^2+2x+2y-4z+11=0$

Có $a=\frac{2}{-2}=-1$; $b=\frac{2}{-2}=-1$; $c=\frac{-4}{-2}=2$; $d=11$

Ta có $a^2+b^2+c^2-d=(-1)^2+(-1)^2+2^2-11=-5<0$

Nên phương trình $x^2+y^2+z^2+2x+2y-4z+11=0$ không là phương trình mặt cầu.

» Câu 10. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình của mặt cầu tâm $I(1;-2;3)$ bán kính $R=3$

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=3$.
B. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$.
C. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=3$.
D. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình mặt cầu $I(1;-2;3)$ bán kính $R=3$ có dạng $(x-1)^2+(y+2)^2+(y-3)^2=9$

» Câu 11. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình của mặt cầu tâm $I(-1;2;-3)$ và đi qua điểm $M(0;3;2)$

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=13$.
B. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=\sqrt{13}$.
C. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=27$.
D. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=\sqrt{27}$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\overrightarrow{IM}=(1;1;5)\Rightarrow R=IM=\sqrt{27}$.

Phương trình mặt cầu $I(-1;2;-3)$, $R=\sqrt{27}$ có dạng $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=27$.

» Câu 12. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình của mặt cầu tâm $I(0;3;1)$ bán kính $R=2$

A. $x^2+y^2+z^2+6y+2z+6=0$.
B. $x^2+y^2+z^2+6y+2z-6=0$.
C. $x^2+y^2+z^2-6y-2z-6=0$.
D. $x^2+y^2+z^2-6y-2z+6=0$.

Lời giải

Chọn D

Do phương trình mặt cầu có tâm $I(0;3;1)$ nên $-2a=0$; $-2b=-6$; $-2c=-2$.

Mặt khác bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\sqrt{0^2+3^2+1^2-6}=2$ nên giá trị $d=6$.

» Câu 13. Xác định tâm và bán kính của mặt cầu $x^2+y^2+z^2+8x-6y+2z-10=0$.

A. Tâm $I(-4;3;-1)$ và bán kính $R=6$.
B. Tâm $I(-4;3;-1)$ và bán kính $R=36$.
C. Tâm $I(4;-3;1)$ và bán kính $R=6$.
D. Tâm $I(4;-3;1)$ và bán kính $R=36$.

Lời giải

Lời giải

Chọn A

Phương trình $x^2+y^2+z^2+8x-6y+2z-10=0$ có $a=-4;b=3;c=-1,d=-10$

Vậy tâm của mặt cầu là $I(-4;3;-1)$, bán kính $R=\sqrt{16+9+1+10}=\sqrt{36}=6$.

» Câu 14. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là kilomet), một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu phát được đặt tại điểm $I(-6;-1;4)$. Cho biết bán kính phủ sóng của trạm là $2\,km$. Người sử dụng điện thoại đứng ở điểm nào sau đây thì sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên?

A. $A(-4;0;2)$ **B.** $B(-5;-2;5)$. **C.** $C(-6;2;2)$ **D.** $D(0;-1;4)$

Lời giải

Chọn B

Ta có $IA=3>2; IB=\sqrt{3}<2, IC=\sqrt{13}>2, ID=6>2$.

Vậy người đứng tại điểm B nằm trong mặt cầu nên sẽ sử dụng được dịch vụ của trạm thu phát sóng điện thoại di động.

» Câu 15. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là kilomet), một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu phát được đặt tại điểm $I(-6;-1;4)$. Cho biết bán kính phủ sóng của trạm là $2\,km$. Người sử dụng điện thoại đứng ở điểm nào sau đây thì **không** sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên?

A. $A(-5;0;3)$ **B.** $B(-5;-2;5)$. **C.** $C(-6;2;2)$ **D.** $D(-7;-2;3)$

Lời giải

Chọn C

Ta có $IA=\sqrt{3}<2; IB=\sqrt{3}<2, IC=\sqrt{13}>2, ID=\sqrt{3}<2$.

Vậy người đứng tại điểm C nằm ngoài mặt cầu nên sẽ không sử dụng được dịch vụ của trạm thu phát sóng điện thoại di động.

» Câu 16. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình của mặt cầu?

A. $x^2+y^2+z^2+2x+2y-2z+4=0$ **B.** $x^2+y^2+z^2+4x-2y+2z+6=0$

C. $x^2+y^2+z^2+2x-6y+4z+14=0$ **D.** $x^2+y^2+z^2+8x-6y+2z-10=0$

Lời giải

Chọn D

Phương trình $x^2+y^2+z^2+2x+2y-2z+4=0$ có $a^2+b^2+c^2-d=-1<0$.

Phương trình $x^2+y^2+z^2+4x-2y+2z+6=0$ có $a^2+b^2+c^2-d=0$.

Phương trình $x^2+y^2+z^2+2x-6y+4z+14=0$ có $a^2+b^2+c^2-d=0$.

Phương trình $x^2+y^2+z^2+8x-6y+2z-10=0$ có $a^2+b^2+c^2-d=36>0$.

Vậy phương trình $x^2+y^2+z^2+8x-6y+2z-10=0$ là phương trình của mặt cầu.

» Câu 17. Trong các phương trình sau, có bao nhiêu phương trình là phương trình của mặt cầu?

(i). $x^2+y^2+z^2+4z-32=0$ *(ii).* $x^2+y^2+z^2+2x+2y-2z+4=0$

(iii). $x^2+y^2+z^2+2x-6y+4z-10=0$ *(iv).* $x^2+y^2+z^2+8x-6y+2z-4=0$

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Phương trình $x^2+y^2+z^2+4z-32=0$ có $a^2+b^2+c^2-d=36>0$.

Phương trình $x^2+y^2+z^2+2x+2y-2z+4=0$ có $a^2+b^2+c^2-d=-1<0$.

Phương trình $x^2+y^2+z^2+2x-6y+4z-10=0$ có $a^2+b^2+c^2-d=24>0$.

Phương trình $x^2+y^2+z^2+8x-6y+2z-4=0$ có $a^2+b^2+c^2-d=30>0$.

Vậy có 3 phương trình là phương trình của mặt cầu.

» Câu 18. Viết phương trình mặt cầu có tâm $M(3;1;-4)$ và đi qua điểm $N(1;0;1)$.

A. $(x+3)^2+(y+1)^2+(z-4)^2=30$ **B.** $(x-3)^2+(y-1)^2+(z+4)^2=30$

C. $(x-3)^2+(y-1)^2+(z+4)^2=\sqrt{30}$ **D.** $(x-3)^2-(y-1)^2-(z+4)^2=30$

Lời giải

Chọn B

Ta có $R=MN=\sqrt{30}$

Phương trình mặt cầu $(x-3)^2+(y-1)^2+(z+4)^2=30$

» Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(3;4;2)$. Phương trình mặt cầu tâm I và tiếp xúc với trục Oz là

A. $(x-3)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=16$. **B.** $(x-3)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=4$.

C. $(x-3)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=5$. **D.** $(x-3)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=25$.

Lời giải

Chọn A

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên trục Oz, suy ra $H(0;0;2)$.

Ta có: $\overrightarrow{HI}=(3;4;0)$.

Mặt cầu tâm I và tiếp xúc trục Oz có bán kính:

$R=d(I,Oz)=HI=\sqrt{3^2+4^2+0^2}=5$.

Suy ra phương trình mặt cầu: $(x-3)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=25$.

» Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho $(S): x^2+y^2+z^2-4x-2y+10z-14=0$. Mặt phẳng $(P): -x+4z+5=0$ cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn (C). Toạ độ tâm H của (C) là

A. $H(-3;1;-2)$. **B.** $H(-7;1;-3)$. **C.** $H(9;1;1)$. **D.** $H(1;1;-1)$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;-5)$ và mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}=(-1;0;4)$.

Vì mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn (C) nên tâm H của (C) là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P).

Đường thẳng IH qua $I(2;1;-5)$ và nhận $\vec{n}=(-1;0;4)$ là VTCP có phương trình là

$\begin{cases} x=2-t \\ y=1 \\ z=-5+4t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$. Khi đó $IH\cap(P)=H(2-t;1;-5+4t)$.

Ta có $-(2-t)+4(-5+4t)+5=0 \Leftrightarrow t=1$. Suy ra $H(1;1;-1)$.

» Câu 21. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$. Gọi (S) là mặt cầu có bán kính $R=5$, có tâm I thuộc đường thẳng d và tiếp xúc với trục Oy. Biết rằng I có tung độ dương. Điểm nào sau đây thuộc mặt cầu (S)?

A. $M(-1;-2;1)$. **B.** $N(3;2;-1)$. **C.** $P(-5;2;-7)$. **D.** $Q(5;-2;7)$.

Lời giải

Chọn B

Điểm I thuộc đường thẳng d nên I có tọa độ: $I(2+t;-t;-1+2t)$

Vì mặt cầu (S) tiếp xúc với trục Oy nên $d(I,Oy)=R \Leftrightarrow \sqrt{(2+t)^2+(-1+2t)^2}=5$

$\Leftrightarrow \sqrt{5t^2+5}=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-2 \end{array}\right.$

Với $t=2$ ta có $I(4;-2;3)$.

Với $t=-2$ ta có $I(0;2;-5)$.

Nên mặt cầu (S) có phương trình là: $x^2+(y-2)^2+(z+5)^2=25$.

Thay tọa độ các điểm trong các phương án vào phương trình mặt cầu, nhận thấy điểm $N(3;2;-1)$ thỏa mãn.

» Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, một thiết bị phát sóng đặt tại vị trí $A(3;0;0)$. Vùng phủ sóng của thiết bị có bán kính bằng 5. Hỏi vị trí của điểm nào sau đây không thuộc vùng phủ sóng của thiết bị nói trên?

A. $M(5;0;0)$. **B.** $N(3;2;-1)$. **C.** $P(-1;3;1)$. **D.** $Q(0;-2;0)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $AM=2<R$ nên điểm M thuộc vùng phủ sóng.

Ta có $AN=\sqrt{5}<R$ nên điểm N thuộc vùng phủ sóng.

Ta có $AP=\sqrt{26}>R$ nên điểm P không thuộc vùng phủ sóng.

Ta có $AQ=\sqrt{13}<R$ nên điểm Q thuộc vùng phủ sóng.

» Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $OABC$ có tọa độ đỉnh $A(m;\ m;\ 0)$, $B(0;\ m;\ m)$, $C(m;\ 0;\ m)$. Biết tứ diện $OABC$ có bán kính mặt cầu (S) nội tiếp bằng $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Khi đó phương trình mặt cầu (S) là

A. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=\frac{1}{3}$. **B.** $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=\frac{1}{3}$.

C. $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=\frac{1}{3}$. **D.** $(x+2)^2+(y+2)^2+(z+2)^2=\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Vì $OABC$ là tứ diện đều, nên tâm I của mặt cầu nội tiếp tứ diện trùng với trọng tâm của tứ diện ta có $I\left(\frac{m}{2},\frac{m}{2},\frac{m}{2}\right)$.

G là trọng tâm tam giác ABC, $G\left(\frac{2m}{3},\frac{2m}{3},\frac{2m}{3}\right) \Rightarrow IG=\frac{m\sqrt{3}}{6}$

Theo bài $IG=\frac{m\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow m=2$.

Khi đó tâm $I(1,1,1)$.

Phương trình mặt cầu $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=\frac{1}{3}$.

» **Câu 24.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-4x+12y+6z+24=0$. Hai điểm M,N thuộc (S) sao cho $MN=8$ và $OM^2-ON^2=-112$. Khoảng cách từ O đến đường thẳng MN bằng

A. 4. **<u>B.</u>** 3. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: (S) có tâm $I(2;-6;-3)$ và bán kính $R=5$.

Ta có: $\overrightarrow{OI}=(2;-6;-3)\Rightarrow OI=7$.

Gọi H là trung điểm $MN \Rightarrow IH=\sqrt{R^2-\frac{MN^2}{4}}=3$.

Ta có: $OM^2-ON^2=-112\Rightarrow\left(\overrightarrow{OM}\right)^2-\left(\overrightarrow{ON}\right)^2=-112\Rightarrow\left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IM}\right)^2-\left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IN}\right)^2=-112$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{OI}\left(\overrightarrow{IM}-\overrightarrow{IN}\right)=-112\Rightarrow\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{MN}=56$.

Ta lại có: $\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{MN}=OI.MN.\cos\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{MN}\right)=56\Rightarrow\cos\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{MN}\right)=1\Rightarrow OI//MN$.

Do $OI//MN\Rightarrow d(O;MN)=d(I;MN)=IH=3$.

B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai

» **Câu 25.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(C):(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=16$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Điểm $A(1;2;-1)$ nằm bên ngoài mặt cầu (C).		
(b)	Điểm $B(0;0;1)$ nằm bên trong mặt cầu (C).		
(c)	Điểm $C(0;2;1)$ nằm trên mặt cầu (C).		
(d)	Với điểm $D(2;1;-1)$, ta có $ID<4$.		

Lời giải

(a) Điểm $A(1;2;-1)$ nằm bên ngoài mặt cầu (C).

Tâm $I(1;-2;0)$.

Ta có $(1-1)^2+(2+2)^2+(-1)^2=17>16 \Rightarrow$ điểm $A(1;2;-1)$ nằm bên ngoài mặt cầu (C).

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Điểm $B(0;0;1)$ nằm bên trong mặt cầu (C).

Ta có $(0-1)^2+(0+2)^2+1^2=6<16 \Rightarrow$ điểm $B(0;0;1)$ nằm bên trong mặt cầu (C).

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) *Điểm* $C(0;2;1)$ *nằm trên mặt cầu* (C).

Ta có $(0-1)^2+(2+2)^2+1^2=18>16 \Rightarrow$ điểm $C(0;2;1)$ nằm bên ngoài mặt cầu (C).

» **Chọn** SAI.

(d) *Với điểm* $D(2;1;-1)$, *ta có* $ID<4$.

Ta có $ID=\sqrt{(2-1)^2+(1+2)^2+(-1)^2}=\sqrt{11}<4$.

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 26.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$ có tâm I và bán kính R.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;2)$, bán kính $R=3$.		
(b)	Điểm $A(0;2;-3)$ nằm trong mặt cầu.		
(c)	Điểm $J(1;2;3)$ nằm ngoài mặt cầu và khoảng cách từ tâm I đến điểm J bằng $\sqrt{10}$.		
(d)	Khoảng cách từ tâm I đến tâm mặt cầu $(S'):x^2+y^2+(z-1)^2=3$ bằng $\sqrt{2}$.		

Lời giải

(a) *Phương trình mặt cầu* (S) *có tâm* $I(1;-1;2)$, *bán kính* $R=3$.

Phương trình mặt cầu tâm $I(1;-1;2)$, bán kính $R=3$ là $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$.

» **Chọn** SAI.

(b) *Điểm* $A(0;2;-3)$ *nằm trong mặt cầu.*

Ta có: $(0+1)^2+(2-1)^2+(-3+2)^2=3=R=3$, do đó điểm A nằm trên mặt cầu.

» **Chọn** SAI.

(c) *Điểm* $J(1;2;3)$ *nằm ngoài mặt cầu và khoảng cách từ tâm* I *đến điểm* J *bằng* $\sqrt{10}$.

Ta có: $(1+1)^2+(2-1)^2+(3+2)^2=30>R=3$, do đó điểm J nằm ngoài mặt cầu.

Và $\overrightarrow{IJ}=(0;3;1)\Rightarrow\left|\overrightarrow{IJ}\right|=\sqrt{0^2+3^2+1^2}=\sqrt{10}$

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) *Khoảng cách từ tâm* I *đến tâm mặt cầu* $(S'):x^2+y^2+(z-1)^2=3$ *bằng* $\sqrt{2}$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;2)$,

Mặt cầu (S') có tâm $K(0;0;1)$,

Khi đó $\overrightarrow{IK}=(-1;1;-1)\Rightarrow\left|\overrightarrow{IK}\right|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{3}\neq\sqrt{2}$

» **Chọn** SAI.

» Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y+1=0$ có tâm I và bán kính R.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;0)$ và bán kính $R=2$.		
(b)	Bán kính của mặt cầu (S) là đoạn IM với điểm $M(1;1;2)$.		
(c)	Mặt cầu (S) có đường kính AB với $A(0;1;-2)$ và $B(2;-1;-4)$.		
(d)	Mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x+y-z-2=0$.		

Lời giải

(a) *Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;0)$ và bán kính $R=2$.*

Mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y+1=0$ có $a=1$, $b=-2$, $c=0$, $d=1$

$\Rightarrow$ tâm $I(1;-2;0)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=2$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) *Bán kính của mặt cầu (S) là đoạn IM với điểm $M(1;1;2)$.*

Xét $M(1;1;2)$: $1^2+1^2+2^2-2.1+4.1+1=9$ do đó M không nằm trên (S)

Vậy bán kính mặt cầu (S) không là đoạn IM.

» Chọn SAI.

(c) *Mặt cầu (S) có đường kính AB với $A(0;1;-2)$ và $B(2;-1;-4)$.*

Mặt cầu (S) nhận AB làm đường kính thì $\dfrac{AB}{2}=R$ và tâm I là trung điểm của AB.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-2;-2)\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{2^2+(-2)^2+(-2)^2}=2\sqrt{3}\Rightarrow\dfrac{AB}{2}=\sqrt{3}\neq R=2$

» Chọn SAI.

(d) *Mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x+y-z-2=0$.*

Mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x+y-z-2=0 \Leftrightarrow R=d(I,(P))$.

Ta có $d(I,(P))=\dfrac{|1+(-2)-0-2|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\sqrt{3}\neq R=2$.

» Chọn SAI.

» Câu 28. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$ và $C(0;0;3)$. Khi đó

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Mặt cầu tâm B, bán kính $R=3$ có phương trình là $x^2+(y-2)^2+z^2=3$.		
(b)	Mặt cầu tâm A, đi qua B có phương trình là $(x-1)^2+y^2+z^2=5$.		
(c)	Mặt cầu nhận BC làm đường kính có phương trình là $x^2+(y-1)^2+(z-3)^2=\dfrac{13}{4}$.		

(d)	Mặt cầu tâm O và có bán kính $R=OG$ với G là trọng tâm ΔABC, có phương trình là $x^2+y^2+z^2=\frac{14}{9}$.		

Lời giải

(a) Mặt cầu tâm B, bán kính $R=3$ có phương trình là $x^2+(y-2)^2+z^2=3$.

Mặt cầu tâm B, bán kính $R=3$ có phương trình là $x^2+(y-2)^2+z^2=9$.

» **Chọn** SAI.

(b) Mặt cầu tâm A, đi qua B có phương trình là $(x-1)^2+y^2+z^2=5$.

Ta có bán kính mặt cầu là $R=AB=\sqrt{5}$, nên phương trình mặt cầu là $(x-1)^2+y^2+z^2=5$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) Mặt cầu nhận BC làm đường kính có phương trình là $x^2+(y-1)^2+(z-3)^2=\frac{13}{4}$.

Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow I\left(0;1;\frac{3}{2}\right)$, $BC=\sqrt{13} \Rightarrow R=\frac{\sqrt{13}}{2}$.

Vậy phương trình mặt cầu đường kính BC là $x^2+(y-1)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{13}{4}$.

» **Chọn** SAI.

(d) Mặt cầu tâm O và có bán kính $R=OG$ với G là trọng tâm ΔABC, có phương trình là $x^2+y^2+z^2=\frac{14}{9}$.

Ta có $G\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};1\right) \Rightarrow OG=\frac{\sqrt{14}}{3}$ nên phương trình mặt cầu cần tìm là $x^2+y^2+z^2=\frac{14}{9}$.

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 29.** Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một ngọn hải đăng (xem hình vẽ) được đặt ở vị trí $I(25;30;50)$. Mặt cầu (S) mô tả ranh giới của vùng phủ sáng trên biển của hải đăng, biết rằng ngọn hải đăng đó được thiết kế với bán kính phủ sáng $R=5$km.

(Nguồn:https://shutterstock.com)

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Mặt cầu (S) có phương trình là $(x-25)^2+(y-30)^2+(z-50)^2=25$.		
(b)	Điểm $A(1025;30;50)$ nằm bên trong mặt cầu (S).		

(c)	Một người đi biển ở vị trí $M(45;60;50)$ thì có thể được chiếu sáng bởi ánh sáng của ngọn hải đăng.		
(d)	Một người đi biển ở vị trí $N(5125;30;0)$ thì **không** thể được chiếu sáng bởi ánh sáng của ngọn hải đăng.		

Lời giải

(a) *Mặt cầu (S) có phương trình là $(x-25)^2+(y-30)^2+(z-50)^2=25$.*

Ta có mặt cầu mô tả ranh giới của vùng phủ sáng trên biển của hải đăng, biết rằng ngọn hải đăng đó được thiết kế với bán kính phủ sáng $R=5\,\text{km}=5000\,\text{m}$, có phương trình là $(x-25)^2+(y-30)^2+(z-50)^2=5000^2$.

» Chọn SAI.

(b) *Điểm $A(1025;30;50)$ nằm bên trong mặt cầu (S).*

Ta có $IA=\sqrt{(1025-25)^2}=1000<5000=R$. Suy ra điểm A nằm bên trong mặt cầu (S).

» Chọn ĐÚNG.

(c) *Một người đi biển ở vị trí $M(45;60;50)$ thì có thể được chiếu sáng bởi ánh sáng của ngọn hải đăng.*

Ta có $IM=\sqrt{20^2+30^2}=10\sqrt{13}<5000=R$, suy ra điểm M nằm bên trong mặt cầu (S).

Do đó người ở vị trí $M(45;60;50)$ thì có thể được chiếu sáng bởi ánh sáng của ngọn hải đăng.

» Chọn ĐÚNG.

(d) *Một người đi biển ở vị trí $N(5125;30;0)$ thì **không** thể được chiếu sáng bởi ánh sáng của ngọn hải đăng.*

Ta có $IN=\sqrt{5100^2+(-50)^2}>5000=R$, suy ra điểm N nằm bên ngoài mặt cầu (S).

Do đó người ở vị trí $N(5125;30;0)$ thì không thể được chiếu sáng bởi ánh sáng của ngọn hải đăng.

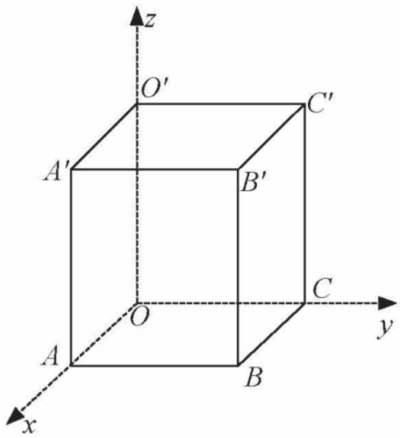
» Chọn ĐÚNG.

» Câu 30. Trong không gian $Oxyz$ cho hình hộp chữ nhật $OABC.O'A'B'C'$ với O là gốc tọa độ, $A(2;0;0)$, $C(0;3;0)$, $O'(0;0;4)$. Ta có

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Mặt cầu tâm O, bán kính OA có phương trình là $x^2+y^2+z^2=2$.		
(b)	Mặt cầu tâm A, đi qua C có phương trình là $(x-2)^2+y^2+z^2=13$.		
(c)	Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên (ACO'), mặt cầu tâm O đi qua H có phương trình là $x^2+y^2+z^2=\frac{12}{61}$.		
(d)	Mặt cầu đi qua các đỉnh của hình hộp có phương trình là $(x-1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+(z-2)^2=\frac{29}{4}$.		

Lời giải

Gắn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ, ta có tọa độ các đỉnh của hình hộp



$O(0;0;0), A(2;0;0); B(2;3;0), C(0;3;0)$, $O'(0;0;4), A'(2;0;4); B'(2;3;4), C'(0;3;4)$

(a) *Mặt cầu tâm O, bán kính OA có phương trình là $x^2+y^2+z^2=2$.*

Ta có $OA=2$, mặt cầu tâm O, bán kính OA có phương trình là $x^2+y^2+z^2=4$.

» Chọn SAI.

(b) *Mặt cầu tâm A, đi qua C có phương trình là $(x-2)^2+y^2+z^2=13$.*

Ta có $AC^2=OA^2+OC^2=4+9=13 \Rightarrow$ mặt cầu tâm A, đi qua C có phương trình là $(x-2)^2+y^2+z^2=13$.

» Chọn ĐÚNG.

(c) *Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên (ACO'), mặt cầu tâm O đi qua H có phương trình là $x^2+y^2+z^2=\dfrac{12}{61}$.*

Ta có $(ACO'): \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1 \Leftrightarrow 6x+4y+3z-12=0$.

$R=d(O,(ACO'))=\dfrac{|-12|}{\sqrt{36+16+9}}=\dfrac{12}{\sqrt{61}}$. Vậy phương trình mặt cầu $x^2+y^2+z^2=\dfrac{144}{61}$

» Chọn SAI.

(d) *Mặt cầu đi qua các đỉnh của hình hộp có phương trình là $(x-1)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2+(z-2)^2=\dfrac{29}{4}$.*

Mặt cầu đi qua các đỉnh của hình hộp có tâm I là trung điểm của $OB' \Rightarrow I\left(1;\dfrac{3}{2};2\right)$ và có bán kính $R=\dfrac{OB'}{2}=\dfrac{\sqrt{29}}{2}$.

Phương trình mặt cầu là $(x-1)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2+(z-2)^2=\dfrac{29}{4}$.

» Chọn ĐÚNG.

» Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: x=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 3x+y-z-5=0$. Mặt cầu (S) có tâm I thuộc đường thẳng d và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn lớn nhất có bán kính $r=5$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai

(a)	Mặt phẳng $(P): 3x+y-z-5=0$ có VTPT $\vec{n}=(3;1;-1)$.		
(b)	Tọa độ tổng quát của tâm I là $(t;-1+2t;-2-t)$.		
(c)	$d(I,(P))=3$.		
(d)	Mặt cầu (S) có phương trình là $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=25$.		

Lời giải

(a) *Mặt phẳng $(P): 3x+y-z-5=0$ có VTPT $\vec{n}=(3;1;-1)$.*

$(P): 3x+y-z-5=0$ có VTPT là $\vec{n}=(3;1;-1)$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) *Tọa độ tổng quát của tâm I là $(t;-1+2t;-2-t)$.*

Ta có: $d: x=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{-1} \Rightarrow d: \begin{cases} x=t \\ y=1+2t \\ z=2-t \end{cases}, t\in\mathbb{R} I\in d \Rightarrow I(t;1+2t;2-t)$

» Chọn SAI.

(c) $d(I,(P))=3$.

Do giao tuyến của (S) và (P) là đường tròn lớn nên $I\in(P) \Rightarrow d(I,(P))=0$.

» Chọn SAI.

(d) *Mặt cầu (S) có phương trình là $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=25$.*

Ta có $I\in d \Rightarrow I(t;1+2t;2-t)$

Theo giả thiết $I=d\cap(P)$ nên tọa độ điểm I thỏa mãn phương trình mặt phẳng (P)

Thay tọa độ điểm I vào (P) ta có :

$$3t+(1+2t)-(2-t)-5=0 \Leftrightarrow 6t-6=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow I(1;3;1)$$

Vì $(S)\cap(P)$ theo giao tuyến là đường tròn lớn có bán kính $r=5$ nên ta có bán kính mặt cầu (S) là $R=r=5$.

Vậy mặt cầu có phương trình là: $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=25$.

» Chọn ĐÚNG

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» Câu 32. Trong không gian Oxy, tổng tất cả bao nhiêu số tự nhiên của tham số m để phương trình $x^2+y^2+z^2+2(m-2)y-2(m+3)z+3m^2+7=0$ là phương trình của một mặt cầu.

Lời giải

✓ Trả lời: 6

Ta có: $\begin{cases} a=0 \\ b=m-2 \\ c=-(m+3) \\ d=3m^2+7 \end{cases}$

Phương trình trên là phương trình mặt cầu khi:

$a^2+b^2+c^2-d>0 \Leftrightarrow (m-2)^2+(m+3)^2-(3m^2+7)>0$

$\Leftrightarrow -m^2+2m+6>0 \Leftrightarrow 1-\sqrt{7}<m<1+\sqrt{7}$.

Mà $m \in \mathbb{N} \Rightarrow m \in \{0;1;2;3\}$. Nên $0+1+2+3=6$

» Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;m;1)$ và mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2y+4z-9=0$. Tập các giá trị của m để điểm A nằm trong khối cầu có dạng $(a;b)$ với $a;b$ là các số nguyên. Giá trị của a^b bằng.

Lời giải

✓ ***Trả lời: -1***

Mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2y+4z-9=0$.

Điểm $A(1;m;1)$ nằm trong khối cầu $(S) \Leftrightarrow 1^2+m^2+1^2-2m+4.1-9<0 \Leftrightarrow m^2-2m-3<0$

$\Leftrightarrow m \in (-1;3)$.

Vậy $a^b=-1$

» Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, có bao nhiêu giá trị nguyên dương m để phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z+m=0$ là phương trình của một mặt cầu?

Lời giải

✓ ***Trả lời: 5***

Ta có: $x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z+m=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=6-m$.

Để phương trình trên là phương trình mặt cầu thì $6-m>0 \Leftrightarrow m<6$.

Vậy giá trị nguyên dương m cần tìm là $1;2;3;4;5$.

Vậy có 5 giá trị thỏa đề.

» Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;-3;2)$ và đi qua $A(5;-1;4)$ có dạng $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$. Tính giá trị biểu thức $T=a+b+c+R^2$.

Lời giải

✓ ***Trả lời: 24***

Tâm $I(1;-3;2)$

Bán kính $R=IA=\sqrt{16+4+4}=\sqrt{24}$

Vậy phương trình mặt cầu (S): $(x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=24$.

Ta có: $a+b+c+R^2=1+(-3)+2+24=24$.

» Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-4)$, $B(1;-3;1)$, $C(2;2;3)$. Tính đường kính l của mặt cầu (S) đi qua ba điểm trên và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy) *(làm tròn kết quả đến hàng phần chục).*

Lời giải

✓ ***Trả lời: 10,2***

Gọi tâm mặt cầu là: $I(x;y;0)$.

$$\begin{cases} AI=BI \\ AI=CI \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+4^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y+3)^2+1^2} \\ \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+4^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2+3^2} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-2)^2+4^2=(y+3)^2+1^2 \\ (x-1)^2+4^2=(x-2)^2+3^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2-4y+4+4^2=y^2+6y+9+1^2 \\ x^2-2x+1+16=x^2-4x+4+9 \end{cases}$

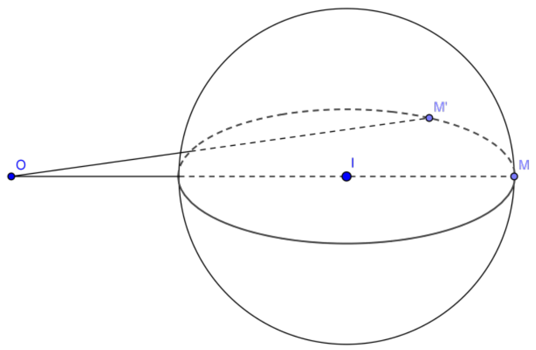
$\Leftrightarrow \begin{cases} 10y=10 \\ 2x=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$. Suy ra $I(-2;1;0)$

Vậy $l=2R=2\sqrt{(-2-1)^2+(1-2)^2+4^2}=2\sqrt{26}\approx 10,2$.

» Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(-2;2;-2)$, $B(3;-3;3)$ và điểm M không cố định trong không gian thỏa mãn $\frac{MA}{MB}=\frac{2}{3}$. Khi đó độ dài OM lớn nhất bằng bao nhiêu? *Làm tròn kết quả đến hàng phần chục.*

Lời giải

✓ Trả lời: 20,8



Gọi $M(x;y;z)$.

Ta có: $\frac{MA}{MB}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow 9MA^2=4MB^2$

$\Leftrightarrow 9\left[(x+2)^2+(y-2)^2+(z+2)^2\right]=4\left[(x-3)^2+(y+3)^2+(z-3)^2\right]$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+12x-12y+12z=0$

Suy ra M thuộc mặt cầu (S) tâm $I(-6;6;-6)$ bán kính $R=6\sqrt{3}$.

Khi đó $OM_{\max}=d(O;I)+R=OI+R=6\sqrt{3}+6\sqrt{3}=12\sqrt{3}\approx 20,8$.

» Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, khi phương trình $x^2+y^2+z^2-2(m+2)x+4my-2mz+7m^2-1=0$ là phương trình mặt cầu. Xác định m để mặt cầu có bán kính lớn nhất.

Lời giải

✓ Trả lời: 2

Phương trình $x^2+y^2+z^2-2(m+2)x+4my-2mz+7m^2-1=0$ là phương trình mặt cầu

$\Leftrightarrow (m+2)^2+4m^2+m^2-(7m^2-1)>0 \Leftrightarrow -m^2+4m+5>0 \Leftrightarrow -1<m<5$.

Với $m\in(-1;5)$ ta có mặt cầu có bán kính là $R=\sqrt{-m^2+4m+5}=\sqrt{-(m-2)^2+9}$.

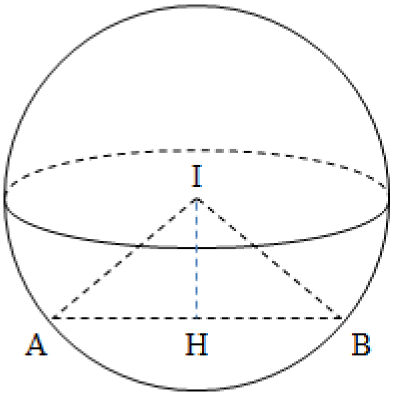
Ta có $(m-2)^2\ge 0 \Rightarrow -(m-2)^2+9\le 9 \Leftrightarrow \sqrt{-(m-2)^2+9}\le 3$.

Vậy, bán kính mặt cầu lớn nhất bằng 3 khi $m=2$.

» Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I và cắt trục Ox tại hai điểm A và B sao cho $AB=2\sqrt{3}$. Khi đó, phương trình mặt cầu (S) có dạng là $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$, tính giá trị của $P=\dfrac{abc}{R}$?

Lời giải

✓ *Trả lời: -1,5*



Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên trục $Ox \Rightarrow H(1;0;0) \Rightarrow IH=\sqrt{13}$

Mà $HA=\dfrac{1}{2}AB=\sqrt{3}$.

Nên bán kính mặt cầu cần tìm là $R=IA=\sqrt{IH^2+HA^2}=4$.

Khi đó, phương trình mặt cầu cần tìm là: $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$.

Vậy giá trị của $P=\dfrac{abc}{R}=\dfrac{1\cdot(-2)\cdot 3}{4}=-\dfrac{3}{2}=-1,5$.

» Câu 40. Cho các điểm $A(-2;4;1)$, $B(2;0;3)$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+t\\y=1+2t\\z=-2+t\end{cases}$. Gọi (S) là mặt cầu đi qua A,B và có tâm thuộc đường thẳng d. Bán kính của mặt cầu (S) là $R=a\sqrt{b}$, tính giá trị của $P=a+b$?

Lời giải

✓ *Trả lời: 6*

Tâm $I\in d \Rightarrow I(1+t;1+2t;-2+t)$.

$\overrightarrow{AI}=(3+t;-3+2t;-3+t)$; $\overrightarrow{BI}=(-1+t;1+2t;-5+t)$.

Vì (S) đi qua A,B nên ta có:

$IA=IB \Leftrightarrow IA^2=IB^2 \Leftrightarrow (3+t)^2+(-3+2t)^2+(-3+t)^2=(-1+t)^2+(1+2t)^2+(-5+t)^2$

$\Leftrightarrow 4t=0 \Leftrightarrow t=0 \Rightarrow \overrightarrow{IA}=(3;-3;-3)$.

Suy ra, bán kính mặt cầu (S): $R=IA=\sqrt{3^2+(-3)^2+(-3)^2}=3\sqrt{3}$.

Vậy giá trị của $P=a+b=3+3=6$.

» Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + z - 3 = 0$. Gọi mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$ thuộc Δ và tiếp xúc với (P) tại $H(1;-1;0)$. Khi đó giá trị $a^2 + b^2 + c^2$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

✓ ***Trả lời: 14***

Ta có: phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$. Vì $I \in \Delta \Rightarrow I(1-2t;2t;2+t)$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1-2t;2t;2+t) \in \Delta$ và tiếp xúc với (P) tại $H(1;-1;0)$ nên ta có:

$$d(I,(P)) = IH \Leftrightarrow \frac{|2(1-2t) - 2t + (2+t) - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \sqrt{(2t)^2 + (-1-2t)^2 + (-2-t)^2}$$

$$\Leftrightarrow (-5t+1)^2 = 6(9t^2 + 8t + 5) \Leftrightarrow -29t^2 - 58t - 29 = 0 \Leftrightarrow t = -1.$$

$t = -1 \Rightarrow I(3;-2;1) \Rightarrow a = 3, b = -2, c = 1$.

Vậy $a^2 + b^2 + c^2 = 14$.

» Câu 42. Trong hệ trục $Oxyz$ cho trước (đơn vị trên trục là mét), cho một trạm thu phát sóng 5G có bán kính vùng phủ sóng của trạm ở ngưỡng 600m được đặt ở vị trí $I(200;450;60)$. Tìm giá trị lớn nhất của m (làm tròn đến hàng đơn vị) để một người dùng điện thoại ở vị trí $A(m+100;m+370;0)$ có thể sử dụng dịch vụ của trạm nói trên.

Lời giải

✓ ***Trả lời: 512***

Để một người dùng điện thoại ở vị trí $A(m+100;m+370;0)$ có thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng 5G có bán kính vùng phủ sóng của trạm ở ngưỡng 600m được đặt ở vị trí $I(200;450;60)$ thì $IA \le 600 \Leftrightarrow (m-100)^2 + (m-80)^2 + (-60)^2 \le 600^2$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - 360m - 340000 \le 0 \Leftrightarrow \frac{180 - \sqrt{712400}}{2} \le m \le \frac{180 + \sqrt{712400}}{2}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của m là $\dfrac{180 + \sqrt{712400}}{2} \approx 512$.

» Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-2}{-3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{2}$, $(P): x + 2y - 2z - 2 = 0$, $(Q): x + 2y - 2z + 4 = 0$. Gọi mặt cầu $S(I,R)$ có tâm I thuộc Δ và tiếp xúc với $(P),(Q)$. Khi đó đường kính của mặt cầu có giá trị bằng bao nhiêu?

Lời giải

✓ ***Trả lời: 2***

Ta có: phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$. Vì $I \in \Delta \Rightarrow I(2-3t;1+2t;1+2t)$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(2-3t;1+2t;1+2t)$ thuộc Δ và tiếp xúc với $(P),(Q)$ nên ta có:

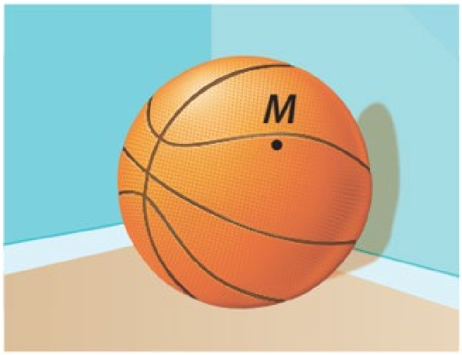
$$d\left(I,(P)\right)=d\left(I,(Q)\right)\Leftrightarrow\frac{\left|(2-3t)+2(1+2t)-2(1+2t)-2\right|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{\left|(2-3t)+2(1+2t)-2(1+2t)+4\right|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}$$

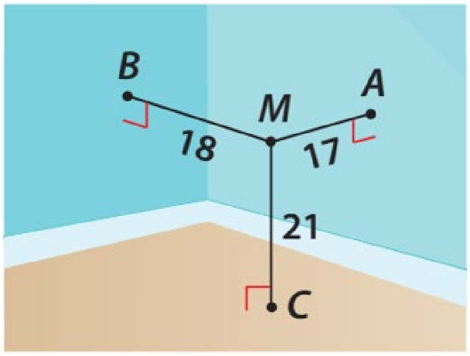
$\Leftrightarrow|-3t|=|-3t+6|\Rightarrow t=1$.

Suy ra mặt cầu (S) có tâm $I(-1;3;3)$ và bán kính $R=1$.

Vậy đường kính của mặt cầu (S) bằng 2.

» Câu 44. Một quả bóng rổ được đặt ở một góc của căn phòng hình hộp chữ nhật, sao cho quả bóng chạm và tiếp xúc với hai bức tường và nền nhà của căn phòng đó thì có một điểm trên quả bóng có khoảng cách lần lượt đến hai bức tường và nền nhà là 17 cm, 18 cm, 21 cm (tham khảo hình minh họa). Hỏi độ dài đương kính của quả bóng bằng bao nhiêu cm biết rằng quả bóng rổ tiêu chuẩn có đường kính từ 23 cm đến 24,5 cm? *Kết quả là tròn đến một chữ số thập phân.*

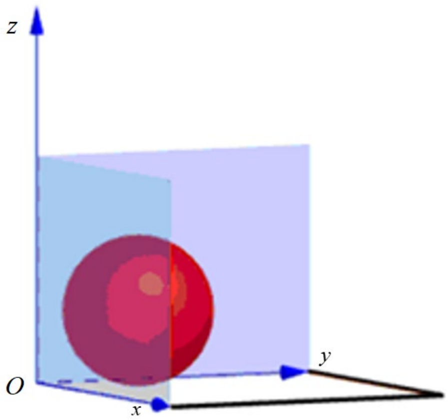




Lời giải

✓ Trả lời: 23,9

Ta đặt hệ trục vào căn phòng sao cho có hai bức tường là mặt $(Oxz),(Oyz)$, và nền là (Oxy).



Vậy bài toán dẫn đến việc tìm đường kính của mặt cầu tiếp xúc với 3 mặt phẳng toạ độ và chứa điểm $M(17;18;21)$.

Ta có thể gọi phương trình mặt cầu là $(S):(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2=a^2$, với $a>0$ (do mặt cầu tiếp xúc với các mặt phẳng toạ độ nên $a=b=c=R$).

Do $M(17;18;21)\in(S)$ nên $(17-a)^2+(18-a)^2+(21-a)^2=a^2$

$$\Rightarrow 2a^2-112a+1054=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=28-\sqrt{257}\\a=28+\sqrt{257}\end{array}\right..$$

Vì quả bóng rổ tiêu chuẩn có đường kính từ 23 cm đến 24,5 cm nên $a = 28 - \sqrt{257}$ thỏa.
Vậy đường kính quả bóng bằng $2a = 56 - 2\sqrt{257} \approx 23,9\left(\text{cm}\right)$.