CHƯƠNG I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

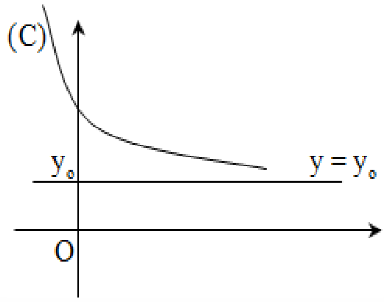
BÀI 3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

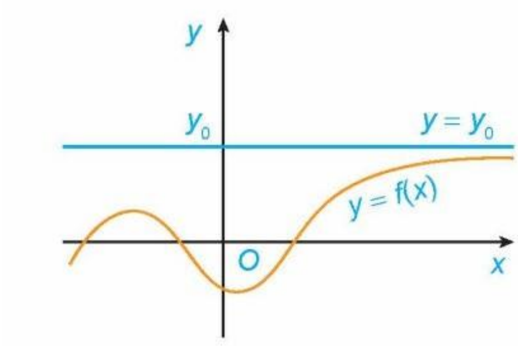
I LÝ THUYẾT.

I. Đường tiệm cận ngang

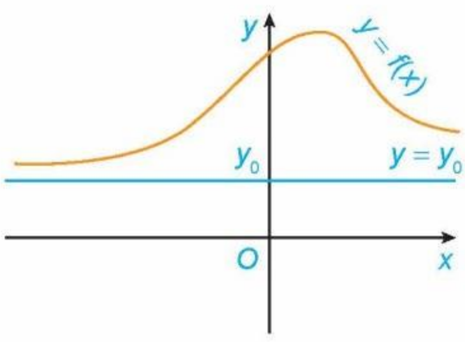
Cho hàm số $y = f(x)$ có xác định trên một khoảng vô hạn là khoảng có một trong các dạng $(a,+\infty)$; $(-\infty,a)$; $(-\infty,+\infty)$. Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là **đường TCN** (hay **TCN**) của đồ thị nếu thỏa mãn ít nhất một trong các điều kiện sau:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = y_0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = y_0$





Đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \to +\infty$).



Đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \to -\infty$).

Ví dụ. Tìm đường tiệm cận ngang của đồ thi hàm số $y = \dfrac{x-3}{2x+1}$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

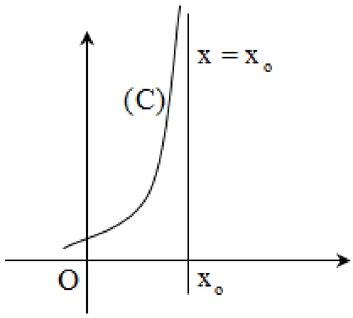
Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-3}{2x+1} = \dfrac{1}{2}$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-3}{2x+1} = \dfrac{1}{2}$

Vậy đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-3}{2x+1}$ là đường thẳng

$y=\frac{1}{2}$.

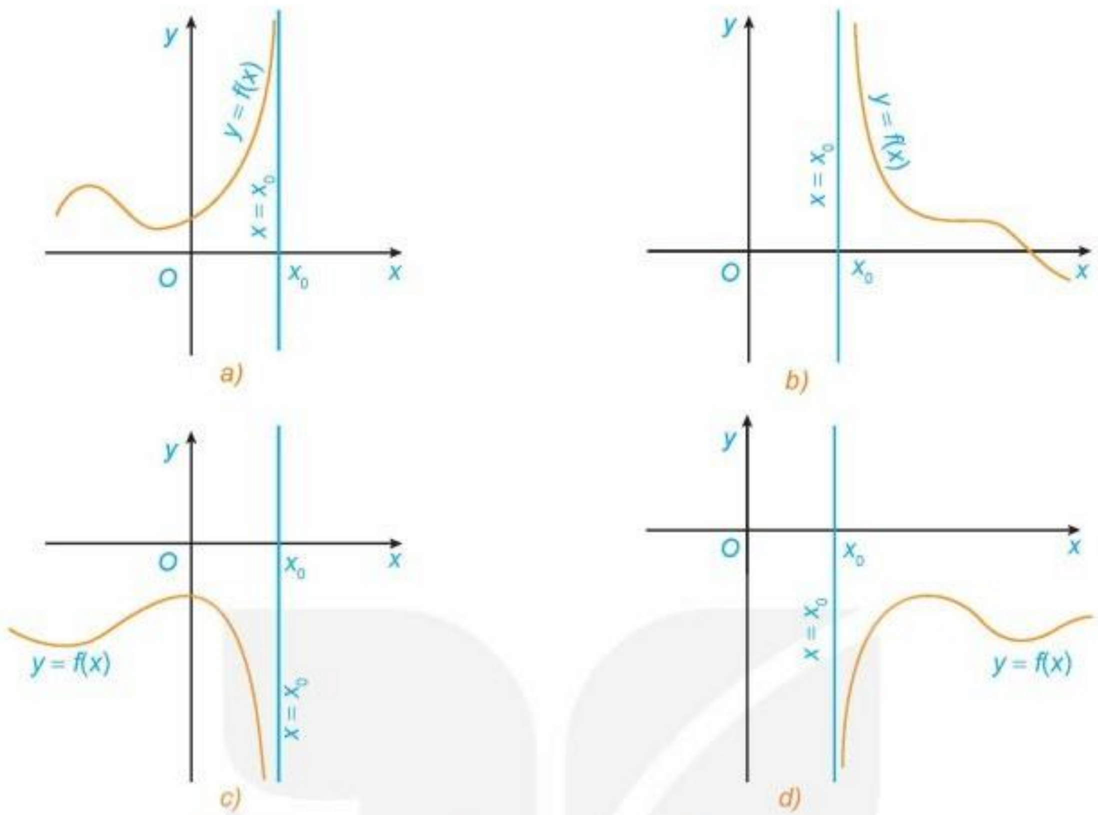
II. Đường tiệm cận đứng

Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là **đường tiệm cận đứng** (**TCĐ**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu thỏa mãn ít nhất một trong các điều kiện sau:



$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$



a) và c). Đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \to x_0^-$).

b) và d). Đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \to x_0^+$).

☞ **Lưu ý:**

i) Hàm $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $ac \neq 0$ có tiệm cận đứng $x = -\dfrac{d}{c}$; tiệm cận ngang $y = \dfrac{a}{c}$.

ii) Hàm $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ với $f(x)$, $g(x)$ là những hàm đa thức

+) Nếu bậc tử nhỏ hơn bậc mẫu thì có tiệm cận ngang $y = 0$.

+) Nếu bậc tử bằng bậc mẫu thì có tiệm cận ngang $y = \dfrac{a_n}{b_n}$ với a_n, b_n là hệ số của lũy thừa cao nhất trên tử và dưới mẫu.

+) Nếu bậc tử lớn hơn bậc mẫu thì không có tiệm cận ngang.

+) $x = x_0$ là tiệm cận đứng $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g\left(x_0\right) = 0; f\left(x_0\right) \neq 0 \\ \begin{cases} g\left(x_0\right) = f\left(x_0\right) = 0 \\ \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty \end{cases} \end{array} \right.$.

iii) Ứng dụng máy tính CASIO để tìm tiệm cận đứng hoặc tiệm cận ngang

Để tìm tiệm cận đứng hoặc tiệm cận ngang của một hàm số thông qua máy tính CASIO, ta sử dụng phím CALC trên máy.

Một số lưu ý về kết quả và cách bấm:

Giới hạn	**Thao tác trên máy tính**
$x \to x_o^+$	CALC $x_o + 10^{-10}$
$x \to x_o^-$	CALC $x_o - 10^{-10}$
$x \to +\infty$	CALC 10^{10}
$x \to -\infty$	CALC -10^{10}

Ví dụ 1: Tìm đường tiệm cận đứng của đồ thi hàm số $y = \dfrac{x+2}{x-2}$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Ta có $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x+2}{x-2} = +\infty$, suy ra đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x = 2$.

Ví dụ 2: Tìm đường tiệm cận đứng của đồ thi hàm số $y = \dfrac{3x+4}{2x-1}$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

Ta có $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^+} \dfrac{3x+4}{2x-1} = +\infty$, suy ra đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x = \dfrac{1}{2}$.

▶ ***Lời bình***: Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ là đường thẳng $x = -\dfrac{d}{c}$.

Ví dụ 3. Tìm đường tiệm cận đứng của đồ thi hàm số $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 - x - 2}$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{2; -1\}$

Ta có $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 - x - 2} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 - x - 2} = -\infty$