TẬP 1: ĐÁNH GIÁ HÀM ĐƠN ĐIỆU

I. Nguyên lý cơ bản

- Nếu hàm số $f(x)$ đơn điệu và liên tục trên tập xác định của nó thì phương trình $f(x)=a$ có tối đa một nghiệm (Trong đó a là hằng số cho trước).
- Nếu hàm số $f(x)$ đơn điệu và không liên tục trên tập xác định của nó thì phương trình $f(x)=a$ có tối đa $n+1$ nghiệm (Trong đó a là hằng số cho trước và n là số điểm gián đoạn của đồ thị hàm số).
- Nếu hàm số $f(x)$ đơn điệu tăng và liên tục trên tập xác định D thì $f(a)\ge f(b)\Leftrightarrow a\ge b$ với a,b nằm trong tập xác định của hàm số.
- Nếu hàm số $f(x)$ đơn điệu tăng và liên tục trên tập xác định D thì $f(a)>f(b)\Leftrightarrow a>b$ với a,b nằm trong tập xác định của hàm số.
- Nếu hàm số $f(x)$ đơn điệu giảm và liên tục trên tập xác định D thì $f(a)\ge f(b)\Leftrightarrow a\le b$ với a,b nằm trong tập xác định của hàm số.
- Nếu hàm số $f(x)$ đơn điệu giảm và liên tục trên tập xác định D thì $f(a)>f(b)\Leftrightarrow a<b$ với a,b nằm trong tập xác định của hàm số.
- Việc dự đoán hình dáng của đồ thị hàm số có thể được phân tích bằng chức năng TABLE trong máy tính CASIO.
- Nếu $f(x),g(x)$ cùng đồng biến, dương và liên tục trên cùng một tập xác định D thì $h(x)=f(x).g(x)$ và $k(x)=f(x)+g(x)$ là các hàm số đồng biến và liên tục trên D.
- Nếu $f(x),g(x)$ cùng nghịch biến, dương và liên tục trên cùng một tập xác định D thì $h(x)=f(x).g(x)$ là hàm số đồng biến và liên tục trên D còn $k(x)=f(x)+g(x)$ là hàm số nghịch biến và liên tục trên tập xác định D.
- Nếu $f(x)$ đồng biến, dương và $g(x)$ nghịch biến, dương trên cùng một

tập xác định D thì $h\left(x\right)=f\left(x\right).g\left(x\right)$ là hàm số nghịch biến và liên tục trên tập xác định D.

II. Bài tập vận dụng

Bài 1: Giải phương trình: $x^3+x^2+x+3\sqrt[4]{x+1}=3$

Sử dụng công cụ Mode 7 (Table) với:

$$f(X)=X^3+X^2+X+3\sqrt[4]{X+1}-3$$

- START = – 1
- END = 3
- STEP = 0.5

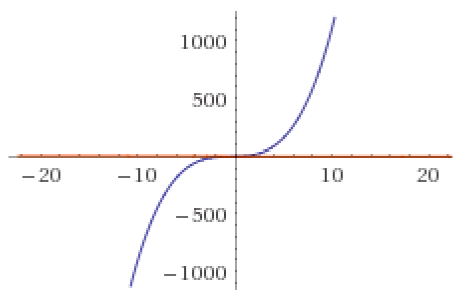
Ta có bảng giá trị như hình bên. Từ bảng giá trị này ta thấy phương trình có nghiệm $x=0$ và hàm số đồng biến trên $\left[-1;+\infty\right)$. Do đó đây chính là nghiệm duy nhất của phương trình.

X	$F(X)$
– 1	– 4
– 0.5	– 0.852
0	0
0.5	1.195
1	3.5676
1.5	7.8973
2	14.498
2.5	25.478
3	40.242

HÌNH DÁNG HÀM SỐ

Thông qua các giá trị của TABLE, ta thấy hình dáng của hàm số có dạng như hình vẽ bên:

- Đồng biến trên tập xác định.
- Hàm số liên tục.
- Cắt trục hoành tại duy nhất 1 điểm.



Điều kiện: $x\ge -1$.
Nhận xét: $x=-1$ không phải là nghiệm của phương trình.
Do đó xét $f(x)=x^3+x^2+x+3\sqrt[4]{x+1}-3$ trên $(-1;+\infty)$.

Ta có: $f(x)=3x^2+2x+1+\dfrac{3}{4\left(\sqrt[4]{x+1}\right)^3}>0\forall x\in(-1;+\infty)$.

Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến và liên tục trên $(-1;+\infty)$.

Vậy $f(x)$ có tối đa một nghiệm. Mà $x=0$ là một nghiệm nên đây là nghiệm duy nhất của phương trình.

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=0$.

Bài 2: Giải phương trình: $\sqrt{5x^3-1}+\sqrt[3]{2x-1}+x=4$

Sử dụng công cụ Mode 7 (Table) với:

$$f(X)=\sqrt{5X^3-1}+\sqrt[3]{2X-1}+X-4$$

X	$F(X)$
0.5	ERROR
1	0

- START = 0.5
- END = 4.5
- STEP = 0.5

1.5	2.7442
2	5.6872

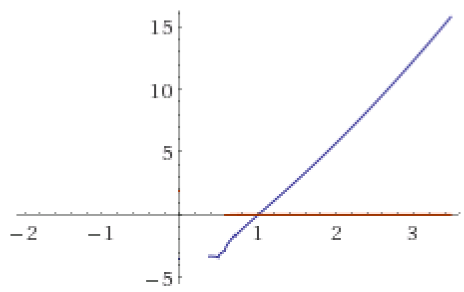
Từ bảng giá trị này ta thấy phương trình có nghiệm $x=1$ và hàm số đồng biến trên $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}};+\infty\right)$.

2.5	8.8694
3	12.285
3.5	15.924
4	19.773
4.5	23.821

HÌNH DÁNG HÀM SỐ

Thông qua các giá trị của TABLE, ta thấy hình dáng của hàm số có dạng như hình vẽ bên:

- Đồng biến trên tập xác định.
- Hàm số liên tục.
- Cắt trục hoành tại duy nhất 1 điểm.



Điều kiện: $x \geq \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$.

Ta có: $\sqrt{5x^3-1}+\sqrt[3]{2x-1}+x=4 \Leftrightarrow \sqrt{5x^3-1}+\sqrt[3]{2x-1}+x-4=0$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{5x^3-1}+\sqrt[3]{2x-1}+x-4$ trên $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}};+\infty\right)$ có:

$$f'(x)=\frac{15x^2}{2\sqrt{5x^3-1}}+\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^2}}+1>0,\ \forall x\in\left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}};+\infty\right).$$

Do đó $f(x)$ đồng biến và liên tục trên $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}};+\infty\right)$.

Do đó phương trình $f(x)=0$ có tối đa một nghiệm.

Vì $f(1)=0$ nên $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất là $x=1$.

Bài 3: Giải phương trình: $3\left(\sqrt{2x^2+1}-1\right)=x\left(1+3x+8\sqrt{2x^2+1}\right)$

Sử dụng công cụ Mode 7 (Table) với:

$f\left(X\right)=3\left(\sqrt{2X^2+1}-1\right)-X\left(1+3X+8\sqrt{2x^2+1}\right)$

- START = -2
- END = 2
- STEP = 0.5

Từ bảng giá trị này ta thấy phương trình có nghiệm $x=0$ và hàm số nghịch biến.

X	$F(X)$
-2	44
-1.5	26.928
-1	14.052
-0.5	5.3232
0	0
0.5	-5.474
1	-15.66
1.5	-32.35