HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VÀ GIẢI TAM GIÁC

Baâi 1 GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA 1 GÓC TỪ 0° ĐẾN 180°

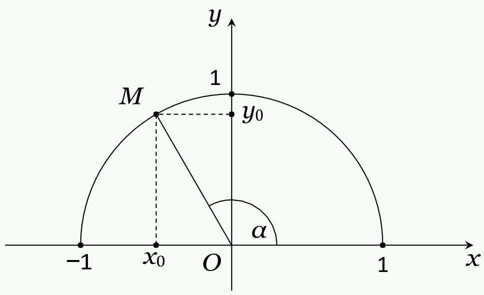
A – TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Giá trị lượng giác của một góc

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, nửa đường tròn tâm O, bán kính $R = 1$ nằm phía trên trục hoành được gọi là *nửa đường tròn đơn vị*.

Định nghĩa 1.1.

Với mỗi góc α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$) ta xác định được một điểm M duy nhất trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$ và giả sử điểm M có tọa độ $M(x_0; y_0)$.



Khi đó ta có định nghĩa

- **sin** của góc α là y_0, kí hiệu $\sin\alpha = y_0$.
- **cô-sin** của góc α là x_0, kí hiệu là $\cos\alpha = x_0$.
- **tang** của góc α là $\frac{y_0}{x_0}$ $(x_0 = 0)$, kí hiệu là $\tan\alpha = \frac{y_0}{x_0}$.
- **cô-tang** của góc α là $\frac{x_0}{y_0}$ $(y_0 = 0)$, kí hiệu là $\cot\alpha = \frac{x_0}{y_0}$.

Các số $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ được gọi chung là các *giá trị lượng giác* của góc α.

CHÚ Ý

a) Từ định nghĩa trên, ta có

- $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, với $\alpha = 90^\circ$.
- $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, với $\alpha = 0^\circ$ và $\alpha = 180^\circ$.
- $\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}$, với $\alpha \in \{0^\circ, 90^\circ, 180^\circ\}$.

b) Nếu α là góc tù thì $\cos\alpha < 0$, $\tan\alpha < 0$, $\cot\alpha < 0$.

c) Bảng giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt mà em nên nhớ

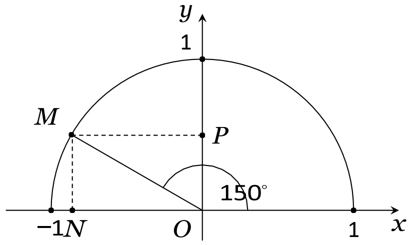
α	0°	30°	45°	60°	90°	180°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\|\|$	0
$\cot\alpha$	$\|\|$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\|\|$

VÍ DỤ 1

Tính các giá trị lượng giác của góc 150°.

BÀI GIẢI

Gọi M là điểm trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = 150^\circ$. Gọi N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên các trục Ox, Oy.



Vì $\widehat{xOM} = 150^\circ$ nên $\widehat{MON} = 30^\circ$.

Trong tam giác vuông MON, ta có $\sin\widehat{MON} = \frac{MN}{OM} = MN, \Rightarrow MN = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

Từ đó, ta có $OP = MN = \frac{1}{2}$ và $ON = \sqrt{OM^2 - MN^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Mặt khác, điểm M nằm bên trái trục tung nên có tọa độ là $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Theo định nghĩa, ta có $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$; $\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\cot 135^\circ = -\sqrt{3}$. □

2. Mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc bù nhau

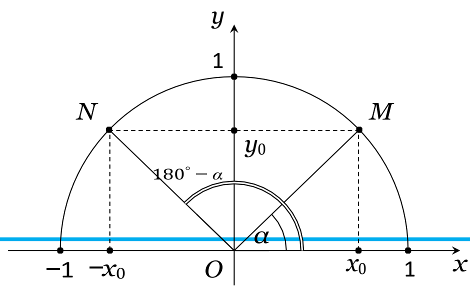
Ở lớp dưới ta đã biết hai góc ***phụ nhau*** thì các tỷ số lượng giác của chúng có mối liên hệ

- $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$;
- $\tan(90^\circ - \alpha) = \cot\alpha$;
- $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$;
- $\cot(90^\circ - \alpha) = \tan\alpha$.

Sau đây ta sẽ tìm hiểu về mối liên hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc ***bù nhau***.

Với mỗi góc α (với $0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$): góc α và góc $180^\circ - \alpha$ là hai góc bù nhau.

Đặt $\widehat{xOM} = \alpha$. Ta có $\widehat{xON} = 180^\circ - \alpha$. Trên nửa đường tròn đơn vị, cho dây cung MN song song với trục Ox.



Giả sử $M(x_0; y_0)$. Vì $x_N = -x_M = -x_0$ và $y_N = y_M = y_0$ nên ta có các tính chất sau:

Với mỗi góc α thỏa mãn $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$, ta luôn có

- $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$;
- $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$;
- $\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan\alpha$ $(\alpha = 90^\circ)$;
- $\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot\alpha$ $(\alpha = 0^\circ$ và $\alpha = 180^\circ)$.

VÍ DỤ

Tính các giá trị lượng giác của các góc 120°, 135° và 150°.

BÀI GIẢI

Do các góc 120°, 135°, 150° tương ứng bù với các góc 60°, 45°, 30° nên từ bảng giá trị lượng giác ở trên, ta có bảng giá trị lượng giác sau

α	120°	135°	150°
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\cos\alpha$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan\alpha$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\cot\alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$

□

B – CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tính các giá trị lượng giác

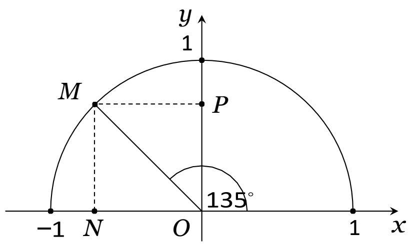
Sử dụng các công thức cơ bản ở phần lý thuyết để tính ra các giá trị lượng giác.

Cần chú ý dấu của các giá trị lượng giác khi tính.

1. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Tính các giá trị lượng giác của góc 135°.

Lời giải.



Gọi M là điểm trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = 135^\circ$. Gọi N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên các trục Ox, Oy.

Vì $\widehat{xOM} = 135^\circ$ nên $\widehat{MON} = 45^\circ$ và $\widehat{MOP} = 45^\circ$. Do đó các tam giác MON, MOP là vuông cân với cạnh huyền $OM = 1$.

Từ đó, ta có $ON = OP = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Mặt khác, điểm M nằm bên trái trục tung nên có tọa độ là $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Theo định nghĩa, ta có $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\tan 135^\circ = -1$; $\cot 135^\circ = -1$. □

Ví dụ 2. Cho $\sin\alpha = \frac{1}{4}$. Tính $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ biết $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Lời giải.

Ta có $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$.

Với $\sin\alpha = \frac{1}{4}$ thì $\cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$.

Vì $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ nên $\cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Từ đó suy ra $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$, $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \sqrt{15}$. □

$\cos\alpha$ 15 $\sin\alpha$