

CHUYÊN ĐỀ BẤT ĐẲNG THỨC

A. LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa:

- Các mệnh đề “ $A > B$ ” hoặc “ $A < B$ ” được gọi là bất đẳng thức. (BĐT)
- Các mệnh đề: “ $A \geq B$ ” hoặc “ $A \leq B$ ” được gọi là các bất đẳng thức suy rộng.

2. Bất đẳng thức hệ quả và bất đẳng thức tương đương:

- Nếu từ BĐT $A > B$ mà ta biến đổi được thành $C > D$ thì ta nói rằng BĐT $C > D$ là BĐT hệ quả của BĐT $A > B$. kí hiệu $A > B \Rightarrow C > D$
- Nếu BĐT $A > B$ là hệ quả của BĐT $C > D$ và $C > D$ cũng là BĐT hệ quả của BĐT $A > B$ thì ta nói hai BĐT trên tương đương với nhau, Kí hiệu $A > B \Leftrightarrow C > D$

3. Tính chất:

- $A < B \Leftrightarrow A - C < B - C$ (Cộng hai vế của BĐT với cùng một số)
- $\begin{cases} A > B \Leftrightarrow AC > BC, (C > 0) \\ A > B \Leftrightarrow AC < BC, (C < 0) \end{cases}$ (Nhân hai vế của BĐT với cùng một số)
- $A < B, C < D \Rightarrow A + C < B + D$ (Cộng hai BĐT cùng chiều)
- $A < B, C < D \Rightarrow AC < BD, (A, C > 0)$ (Nhân hai BĐT cùng chiều)
- $A < B \Leftrightarrow A^{2n+1} < B^{2n+1}$ hoặc $A^{2n} < B^{2n}$ Với $A > 0$, (Nâng hai vế của BĐT lên một lũy thừa)
- $A < B \Leftrightarrow \sqrt{A} < \sqrt{B}, (A > 0)$ (Khai căn hai vế của một BĐT)
- $|a| - |b| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$ (Tính chất giá trị tuyệt đối).

B. LUYỆN TẬP

Dạng 1: SỬ DỤNG ĐỊNH NGHĨA: $A > B$ TA XÉT HIỆU $A - B > 0$, CHÚ Ý BĐT $A^2 \geq 0$

Bài 1: CMR : với mọi x, y, z thì $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$

HD:

Xét hiệu ta có: $2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z$

Bài 2: CMR : với mọi x, y, z thì $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy + 2yz - 2zx$

HD:

Xét hiệu ta có: $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz + 2zx \geq 0 \Leftrightarrow (x - y + z)^2 \geq 0$

Dấu bằng xảy ra khi $x + z = y$

Bài 3: CMR : với mọi x, y, z thì $x^2 + y^2 + z^2 + 3 \geq 2(x + y + z)$

HD:

Xét hiệu ta có: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 \geq 0$, Dấu bằng khi $x = y = z = 1$

Bài 4: CMR : với mọi a, b ta có: $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a + b}{2}\right)^2$

HD:

Xét hiệu ta có: $\frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \geq 0 \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 - (a^2 - 2ab + b^2) \geq 0$

$\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a + b)^2 \geq 0$, Dấu bằng khi $a = -b$

Bài 5: CMR : với mọi a, b, c ta có : $\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$

HD:

$$\text{Ta có: } \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac}{9}$$

$$\Leftrightarrow 3a^2+3b^2+3c^2 - (a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0, \text{ Dấu bằng khi } a=b=c$$

Bài 6: CMR : $a^2+b^2+c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3}$

HD:

$$\text{Ta có: } 3a^2+3b^2+3c^2 \geq a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$

$$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0, \text{ Dấu bằng khi } a=b=c$$

Bài 7: CMR : $a^2+b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} \geq 2ab$

HD:

$$\text{Ta chứng minh: } a^2+b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} \Leftrightarrow 2a^2+2b^2 \geq a^2+2ab+b^2$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2-2ab \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0, \text{ Dấu bằng khi } a=b$$

$$\text{Ta chứng minh } \frac{(a+b)^2}{2} \geq 2ab \Leftrightarrow a^2+2ab+b^2 \geq 4ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0, \text{ Dấu bằng khi } a=b$$

Bài 8: Cho a, b, c là các số thực. CMR: $a^2 + \frac{b^2}{4} \geq ab$

HD:

$$\text{Ta có: } 4a^2+b^2-4ab \Leftrightarrow (2a-b)^2 \geq 0$$

$$\text{Dấu bằng khi } b=2a$$

Bài 9: Cho a, b, c là các số thực. CMR : $a^2+b^2+1 \geq ab+a+b$

HD:

$$\text{Ta có: } a^2+b^2+1-ab-a-b \geq 0 \Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2-2ab-2a-2b \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2-2ab+b^2)+(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1) \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2 \geq 0.$$

$$\text{Dấu bằng khi } a=b=1$$

Bài 10: Cho a, b, c, d là các số thực . CMR : $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \geq a(b+c+d+e)$

HD:

$$\text{Ta có: } a^2+b^2+c^2+d^2+e^2-ab-ac-ad-ae \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4a^2+4b^2+4c^2+4d^2+4e^2-4ab-4ac-4ad-4ae \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2-4ab+4b^2)+(a^2-4ac+4c^2)+(a^2-4ad+4d^2)+(a^2-4ae+4e^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-2b)^2+(a-2c)^2+(a-2d)^2+(a-2e)^2 \geq 0$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } a=2b=2c=2d=2e$$

Bài 11: Cho a, b thỏa mãn: $a + b = 1, a > 0, b > 0$. CMR: $\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right) \geq 9$

HD:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: VT} &= \left(1 + \frac{a+b}{a}\right)\left(1 + \frac{a+b}{b}\right) = \left(2 + \frac{b}{a}\right)\left(2 + \frac{a}{b}\right) = 4 + 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 1 \\ &= 5 + 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq 5 + 2 \cdot 2 = 9. \text{ Dấu bằng khi } \frac{a}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow a^2 + b^2 \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Bài 12: Cho $x, y \geq 0$, CMR: $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \geq xy$

HD:

$$\text{Ta có: } x^2 + y^2 + 2xy \geq 4xy \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0, \text{ Dấu bằng khi } x = y$$

Bài 13: Cho $a > 0, b > 0$. CMR: $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$

HD:

$$\text{Ta có: } (a^3 - a^2b) + (b^3 - ab^2) \geq 0 \Leftrightarrow a^2(a - b) - b^2(a - b) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)(a^2 - b^2) \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)^2(a + b) \geq 0$$

Dấu bằng khi $a = b$

Bài 14: Cho $a \geq b \geq 1$, CMR: $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}$

HD:

$$\text{Xét hiệu: } \left(\frac{1}{1+a^2} - \frac{1}{1+ab}\right) + \left(\frac{1}{1+b^2} - \frac{1}{1+ab}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a(b-a)}{(1+a^2)(1+ab)} + \frac{b(a-b)}{(1+b^2)(1+ab)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(b-a)^2(ab-1)}{(1+ab)(a^2+1)(b^2+a)} \geq 0, \text{ Dấu bằng khi } a = b \text{ hoặc } a \cdot b = 1$$

Bài 15: CMR : với mọi số thực x, y, z, t ta luôn có : $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \geq x(y + z + t)$

HD:

$$\text{Ta có: } x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - xy - xz - xt \geq 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 - 4xy - 4xz - 4xt \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4xy + 4y^2) + (x^2 - 4xz + 4z^2) + (x^2 - 4xt + 4t^2) + x^2 \geq 0$$

Dấu bằng khi $x = 2y = 2z = 2t = 0$

Bài 17: CMR : $\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \geq ab - ac + 2bc$

HD:

$$\text{Ta có: } a^2 + 4b^2 + 4c^2 - 4ab + 4ac - 8bc \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 4a(b - c) + 4(b^2 + c^2 - 2bc) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 4a(b - c) + 4(b - c)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a - 2a + 2c)^2 \geq 0$$

Bài 19: CMR : $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy - 2zx + 2yz$

HD:

$$\text{Ta có: } x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz + 2zx \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x(y - z) + y^2 - 2yz + z^2 \geq 0$$

$$x^2 - 2x(y - z) + (y - z)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x - y + z)^2 \geq 0$$

Bài 20: CMR : $x^4 + y^4 + z^4 + 1 \geq 2x(xy^2 - x - z + 1)$

HD:

$$\text{Ta có: } x^4 + y^4 + z^4 + 1 - 2x^2y^2 + 2x^2 - 2xz - 2x \geq 0$$

$$(x^4 + y^4 - 2x^2y^2) + (x^2 - 2xz + z^2) + (x^2 - 2x + 1) \geq 0$$

$$(x^2 - y^2)^2 + (x - z)^2 + (x - 1)^2 \geq 0, \text{ Dấu bằng khi } x = z = 1, y = \pm 1$$

Bài 21: CMR : $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

HD:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca &\geq 0 \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Bài 22: CMR : $a^2 + b^2 \geq ab$

HD:

$$\text{Ta có: } a^2 + b^2 - ab \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 2a \cdot \frac{b}{2} + \frac{b^2}{4} + \frac{3b^2}{4} \geq 0 \Leftrightarrow \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0$$

Bài 23: CMR : $x^2 + xy + y^2 \geq 0$

HD:

$$\text{Ta có: } x^2 + 2x \cdot \frac{y}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{3y^2}{4} \geq 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} \geq 0$$

Bài 24: CMR : $a(a+b)(a+c)(a+b+c) + b^2c^2 \geq 0$

HD:

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow a(a+b+c)(a+b)(a+c) + b^2c^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (a^2 + ab + ac)(a^2 + ab + ac + bc) + b^2c^2 \geq 0 \\ \text{Đặt } \begin{cases} a^2 + ab + ac = x \\ bc = y \end{cases}, \text{ Khi đó ta có: } &x(x+y) + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + xy + y^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Bài 25: CMR : $(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) \geq (a^3 + b^3)^2$

HD:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } a^6 + a^2b^4 + a^4b^2 + b^6 &\geq a^6 + 2a^3b^3 + b^6 \\ &\Leftrightarrow (a^4b^2 - a^3b^3) + (a^2b^4 - a^3b^3) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow a^3b^2(a-b) + a^2b^3(b-a) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (a-b)(a^3b^2 - a^2b^3) \geq 0 \Leftrightarrow a^2b^2(a-b)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Bài 26: CMR : $(a+b)(a^3 + b^3) \leq 2(a^4 + b^4)$

HD:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } a^4 + ab^3 + a^3b + b^4 &\leq 2a^4 + 2b^4 \Leftrightarrow a^4 - ab^3 + b^4 - a^3b \geq 0 \\ &\Leftrightarrow a^3(a-b) + b^3(b-a) \geq 0 \Leftrightarrow (a^3 - b^3)(a-b) \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2(a^2 + ab + b^2) \geq 0 \end{aligned}$$

Bài 27: Cho $a, b > 0$, CMR : $2(a^3 + b^3) \geq (a+b)(a^2 + b^2)$

HD:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } 2a^3 + 2b^3 &\geq a^3 + ab^2 + a^2b + b^3 \\ &\Leftrightarrow a^3 - a^2b + b^3 - ab^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow a^2(a-b) + b^2(b-a) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (a-b)^2(a+b) \geq 0 \end{aligned}$$

Bài 28: Cho $a, b > 0$, CMR: $4(a^3 + b^3) \geq (a+b)^3$

HD:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } 4a^3 + 4b^3 &\geq a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ &\Leftrightarrow 3a^3 - 3a^2b + 3b^3 - 3ab^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 3a^2(a-b) + 3b^2(b-a) \geq 0 \Leftrightarrow 3(a-b)(a^2 - b^2) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 3(a-b)^2(a+b) \geq 0 \end{aligned}$$

Bài 29: Cho $a, b, c > 0$, CMR: $a^3 + b^3 + abc \geq ab(a+b+c)$

HD:

Ta có: $a^3 + b^3 + abc \geq a^2b + ab^2 + abc$

$$\Leftrightarrow a^3 - a^2b + b^3 - ab^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2(a-b) + b^2(b-a) \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2(a+b) \geq 0$$

Bài 30: CMR: $(a^2 + b^2)^2 \geq ab(a+b)^2$

HD:

Ta có: $a^4 + 2a^2b^2 + b^4 \geq ab(a^2 + 2ab + b^2) = a^3b + 2a^2b^2 + ab^3$

$$\Leftrightarrow (a^4 - a^3b) + (b^4 - ab^3) \geq 0 \Leftrightarrow a^3(a-b) + b^3(b-a) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a^3 - b^3)(a-b) \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2(a^2 + ab + b^2) \geq 0$$

Bài 31: CMR: $a^2 + b^2 + c^2 \geq a(b+c)$

HD:

Ta có: $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac \geq 0 \Leftrightarrow 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 - 4ab - 4ac \geq 0$

$$\Leftrightarrow (a^2 - 4ab + 4b^2) + (a^2 - 4ac + 4c^2) + 2a^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-2b)^2 + (a-2c)^2 + 2a^2 \geq 0$$

Bài 32: CMR: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq a(b+c+d)$

HD:

Ta có: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ab - ac - ad \geq 0 \Leftrightarrow 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 4d^2 - 4ab - 4ac - 4ad \geq 0$

$$\Leftrightarrow (a^2 - 4ab + 4b^2) + (a^2 - 4ac + 4c^2) + (a^2 - 4ad + 4d^2) + a^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-2b)^2 + (a-2c)^2 + (a-2d)^2 + a^2 \geq 0$$

Bài 33: CMR: $a^2 + b^2 + c^2 + \frac{3}{4} \geq (a+b+c)$

HD:

Ta có: $(a^2 - a) + (b^2 - b) + (c^2 - c) + \frac{3}{4} \geq 0 \Leftrightarrow \left(a^2 - a + \frac{1}{4}\right) + \left(b^2 - b + \frac{1}{4}\right) + \left(c^2 - c + \frac{1}{4}\right) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$$

Bài 34: CMR: $a^4 + b^4 + 2 \geq 4ab$

HD:

Ta có: $a^4 + b^4 - 4ab + 2 \geq 0 \Leftrightarrow a^4 + b^4 - 2a^2b^2 + 2a^2b^2 - 4ab + 2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 + 2(a^2b^2 - 2ab + 1) \geq 0 \Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 + 2(ab - 1)^2 \geq 0$$

Bài 35: CMR: $x^4 - 4x + 5 > 0$

HD:

Ta có: $(x^4 - 4x^2 + 4) + (4x^2 - 4x + 1) > 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2)^2 + (2x - 1)^2 > 0$

Không xảy ra dấu bằng.

Bài 36: CMR: $x^4 - x + \frac{1}{2} > 0$

HD:

Ta có: $\left(x^4 - x^2 + \frac{1}{4}\right) + \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$

Bài 37: CMR: $x^3 + 4x + 1 > 3x^2 (x > 0)$

HD:

Ta có: $x^3 - 3x^2 + 4x + 1 > 0 \Leftrightarrow x(x^2 - x + 4) + x^2 + 1 > 0 \Leftrightarrow x(x-2)^2 + x^2 + 1 > 0, \forall x > 0$