## BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM SỐ PHỨC

## VẬN DỤNG CAO

**Câu 1.** Gọi $(C)$ là tập hợp các điểm trên mặt phẳng biểu diễn số phức $z = x - 1 + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z| = 1$ và $N$ là điểm biểu diễn số phức $z_0 = 1 - i$. Tìm điểm $M$ thuộc $(C)$ sao cho $MN$ có độ dài lớn nhất.

**A.** $M(1;1)$. **B.** $M\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **C** $M(1;0)$. **D.** $M(0;0)$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Ta có: $M(x;y)$ nằm trên đường tròn $(C):(x-1)^2+y^2=1$. Tâm $I(1;0)$

Do $N(1;-1)\in(C)$ nên $MN$ có độ dài lớn nhất khi $MN$ là đường kính, hay $I(1;0)$ là trung điểm của $MN$. Vậy $M(1;1)$

**Lời bình:** đây là bài toán tọa độ lớp $10$, khi cho một đường tròn $(C)$ và một điểm $N$. Tìm điểm $M$ trên $(C)$ sao cho $MN$ đạt min, max.

**Câu 2.** Gọi $(C)$ là tập hợp các điểm trên mặt phẳng biểu diễn số phức $z = x - 1 + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z| = 1$ và $N$ là điểm biểu diễn số phức $z_0 = 5 + 3i$. $M$ là một điểm thuộc $(C)$ sao cho $MN$ có độ dài lớn nhất. Khi đó độ dài $MN$ lớn nhất bằng

**A.** $6$. **B.** $\sqrt{34}$. **C** $3\sqrt{5}$ **.D.** $5$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Ta có: $M(x;y)$ nằm trên đường tròn $(C):(x-1)^2+y^2=1$. Tâm $I(1;0)$

Do $N(5;3)$ nằm ngoài $(C)$ nên $MN$ có độ dài lớn nhất khi $MN = NI + R = 5 + 1 = 6$.

**Câu 3.** Gọi $(C)$ là tập hợp các điểm trên mặt phẳng biểu diễn số phức $z = x - 1 + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z| = 1$ và $N$ là điểm biểu diễn số phức $z_0 = 5 + 3i$. $M$ là một điểm thuộc $(C)$ sao cho $MN$ có độ dài bé nhất. Khi đó độ dài $MN$ bé nhất bằng

**A.** $6$. **B.** $\sqrt{34}$. **C** $3\sqrt{5}$ **.D.** $4$ .

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

Ta có: $M(x;y)$ nằm trên đường tròn $(C):(x-1)^2+y^2=1$. Tâm $I(1;0)$

Do $N(5;3)$ nằm ngoài $(C)$ nên $MN$ có độ dài bé nhất khi $MN=NI-R=5-1=4$.

**Cõu 4.** Cho hai số phức $z_1;z_2$ thỏa món $|z_1+5|=5;|z_2+1-3i|=|z_2-3-6i|$. Tõm giỏ trị nhỏ nhất của $|z_1-z_2|$.

**A.** $\frac{5}{2}$ **B.** $\frac{121}{6}$ **C.** $\frac{25}{6}$ **D.** $\frac{49}{6}$

**Lời giải**

**Chọn A**

Gọi $z_1=a_1+b_1i,\ z_2=a_2+b_2i\ \ (a_1,b_1,a_2,b_2\in \mathbb{R})$.

Khi đó $|z_1+5|=5\Leftrightarrow(a_1+5)^2+b_1^2=25$.

Tập hợp điểm biểu diễn $z_1$ là đường tròn tâm $I(-5;0);R=5$

Cũng theo giả thiết, ta có:

$$|z_2+1-3i|=|z_2-3-6i|\Leftrightarrow(a_2+1)^2+(b_2-3)^2=(a_2-3)^2+(b_2-6)^2$$
$$\Rightarrow 8a_2+6b_2-35=0.$$

Tập hợp điểm biểu diễn $z_2$ là đường thẳng $\Delta:8x+6y-35=0$

$$d(I,\Delta)=\frac{|-5.8-35|}{\sqrt{8^2+6^2}}=\frac{15}{2}\Rightarrow d(I,\Delta)>R$$

$$\Rightarrow \min|z_1-z_2|=d(I,\Delta)-R=\frac{5}{2}.$$

**Cõu 5.** Cho số phức z thỏa món $|z+1|+|z-1|=4$. Gọi $m=min|z|$ và $M=max|z|$ khi đú $M.n$ bằng

**A.** $2$ . **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ . **D.** $\sqrt{3}$ .

**Cõu 6.** Cho số phức z thỏa món $|z-2-3i|=1$. Gọi $M=max|\bar{z}+1+i|$, $m=min|\bar{z}+1+i|$. Tớnh giỏ trị của biểu thức $(M^2+n^2)$

**A.** $28$ **B.** $24$ **C.** $26$ **D.** $20$

**Câu 7.** Kí hiệu $z_1$ là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $4z^2-16z+17=0$. Trên mặt phẳng tọa độ điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức $w=(1+2i)z_1-\frac{3}{2}i$ ?

**A.** $M(-2;1)$. **B.** $M(3;-2)$. **C.** $M(3;2)$. **D.** $M(2;1)$.

**Câu 8.** Cho hai số phức $z_1, z_2$ thỏa mãn $|z_1+1-i|=2$ và $z_2=iz_1$. Tìm giá trị nhỏ nhất $m$ của biểu thức $|z_1-z_2|$ ?

**A.** $m=\sqrt{2}-1$. **B.** $m=2\sqrt{2}$. **C.** $m=2$. **D.** $m=2\sqrt{2}-2$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Do $|z_1+1-i|=2$ nên điểm biểu diễn $M_1$ của $z_1$ thuộc đường tròn tâm $I(-1;1)$ bán kính $R=2$.

Do $z_2=iz_1$ nên điểm $M_2$ (điểm biểu diễn của $z_2$) là ảnh của $M_1$ qua phép quay tâm $O$, góc quay $90^0$ . Suy ra $|z_1-z_2|=M_1M_2=\sqrt{2}OM_1$ ngắn nhất khi $OM_1$ ngắn nhất.

Ta có: $\min OM_1=R-OI=2-\sqrt{2}$ .

Vậy: $m=\sqrt{2}\left(2-\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}-2$.

Đề xuất

Do $|z_1+1-i|=2$ nên điểm biểu diễn $M_1$ của $z_1$ thuộc đường tròn tâm $I(-1;1)$ bán kính $R=2$.

$$|z_1-z_2|=|z_1-iz_1|=|(1-i)z_1|=\sqrt{2}|z_1|=\sqrt{2}OM\ge\sqrt{2}(R-OI)=\sqrt{2}\left(2-\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}-2.$$

(Vẽ hình thể hiện mô tả cho phần đánh giá)

**Câu 9.** Tính môđun của số phức $z$ thỏa mãn $3z.\bar{z}+2017(z+\bar{z})=48-2016i$

**A.** $|z|=4$. **B.** $|z|=\sqrt{2020}$. **C.** $|z|=\sqrt{2017}$. **D.** $|z|=2$

**Lời giải**

**Chọn A.**

- Đặt $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})\Rightarrow \bar{z}=a-bi$.

- Ta có: $3z.\bar{z}+2017(z+\bar{z})=48-2016i\Leftrightarrow 3(a^2+b^2)+4034b.i=48-2016i\Rightarrow a^2+b^2=16$

- Vậy $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=4$. Chọn A.

**Câu 11:** Tính môđun của số phức $z$ thỏa mãn $|z|+2z.\bar{z}-3=0.$

**A.** $|z|=\frac{3}{2}$. **B.** $|z|=\frac{3}{2}$. **C.** $|z|=1$. **D.** $|z|=3$.

**Câu 12:** Số số phức $z$ thỏa mãn đẳng thức: $|z|^2+\frac{1}{2}(z-\bar{z})=1+\frac{1}{2}(z+\bar{z})i$ là

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

**Câu 13:** Cho số phức $z$ thỏa mãn điêu kiện $|z-1|=\sqrt{2}$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T=|z+i|+|z-2-i|$$

**A.** $\max T=8\sqrt{2}$. **B.** $\max T=8$. **C.** $\max T=4\sqrt{2}$. **D.** $\max T=4$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C**

Đặt $z=x+yi(x,y\in\mathbb{R})$, ta có:

$|z-1|=\sqrt{2}\Leftrightarrow|x-1+yi|=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow(x-1)^2+y^2=2\Leftrightarrow x^2+y^2=2x+1(*)$

Lại có: $T=|z+i|+|z-2-i|=|x+(y+1)i|+|x-2|+(y-1)i$

$= \sqrt{x^2+(y+1)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}$

$= \sqrt{x^2+y^2+2y+1}+\sqrt{x^2+y^2-4x-2y+5}$

Kết hợp với $(*)$, ta được:

$T=\sqrt{2x+2y+2}+\sqrt{6-2x-2y}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhacopxki ta được

$T \le \sqrt{(1^2+1^2)\left[\left(\sqrt{2x+2y+2}\right)^2+\left(\sqrt{6-2x-2y}\right)^2\right]}=4$

Vậy $\max T=4$.

**Câu 14 (ĐỀ THI THPT QUỐC GIA NĂM 2019):** Xét các số phức $z$ thỏa mãn $|z|=\sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ $Oxy$, tập hợp điểm biểu diễn của các số phức $w=\frac{4+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

**A.** $\sqrt{34}$. **B.** $26$. **C.** $34$. **D.** $\sqrt{26}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $w=\frac{4+iz}{1+z} \Rightarrow w(1+z)=4+iz \Leftrightarrow z(w-i)=4-w \Rightarrow \sqrt{2}|w-i|=|4-w|$

Đặt $w=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$

Ta có $\sqrt{2}.\sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-4)^2+y^2} \Leftrightarrow 2(x^2+y^2-2y+1)=x^2-8x+16+y^2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+8x-4y-14=0 \Leftrightarrow (x+4)^2+(y-2)^2=34$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn của các số phức $w$ là đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{34}$

**Câu 15:** Gọi $M$ và $m$ lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=\left|\frac{z+i}{z}\right|$ với $z$ là số phức khác $0$ và thỏa mãn $|z|\ge 2$. Tính $2M-m$.

**A.** $2M-m=\frac{3}{2}$. **B.** $2M-m=\frac{5}{2}$. **C.** $2M-m=10$. **D.** $2M-m=6$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Ta có $P=\left|1+\frac{i}{z}\right|\le 1+\frac{1}{|z|}\le\frac{3}{2}$. Mặt khác: $\left|1+\frac{i}{z}\right|\ge 1-\frac{1}{|z|}\ge\frac{1}{2}$.

Vậy, giá trị nhỏ nhất của $P$ là $\frac{1}{2}$, xảy ra khi $z=-2i$; giá trị lớn nhất của $P$ bằng $\frac{3}{2}$ xảy ra khi $z=2i$. $\Rightarrow$ $2M-m=\frac{5}{2}$.

**Câu 16:** Cho số phức $z$ thỏa mãn $|z|=1$. Gọi $M$ và $m$ lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+1|+|z^2-z+1|$. Tính giá trị của $M.m$ .

**A.** $\frac{13\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{39}{4}$. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** $\frac{13}{4}$.

**Câu 17:** Cho số phức $z$ thỏa mãn $|z-3|+|z+3|=8$. Gọi $M$ , $m$ lần lượt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất $|z|$. Khi đó $M+m$ bằng

**A.** $4-\sqrt{7}$. **B.** $4+\sqrt{7}$. **C.** $7$. **D.** $4+\sqrt{5}$.

**Câu 18:** Cho số phức $w=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$ thoả điều kiện $|w^2+4|=2|w|$. Đặt $P=8(x^2-y^2)+12$. Khẳng định nào sau đây đúng

**A.** $P=-\left(|w|^2-2\right)^2$ **B.** $P=-\left(|w|^2-2\right)^2$. **C.** $P=\left(|w|-4\right)^2$. **D.** $P=\left(|w|^2-4\right)^2$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Ta có: $|w^2+4|=2|w|\Leftrightarrow|x^2-y^2+4+2xyi|=2|x+yi|\Leftrightarrow(x^2-y^2+4)^2+4x^2y^2=4(x^2+y^2)$

$\Leftrightarrow x^4+y^4+16+2x^2y^2+4x^2-12y^2=0\Leftrightarrow x^4+y^4+2x^2y^2-4x^2-4y^2+4+8(x^2-y^2)+12=0$

$\Leftrightarrow 8(x^2-y^2)+12=-(x^4+y^4+2x^2y^2-4x^2-4y^2+4)\Leftrightarrow P=-(x^2+y^2-2)^2=-\left(|w|^2-2\right)^2$.