Chương 5

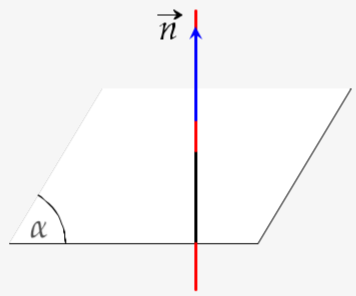
PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

§1. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Véc-tơ pháp tuyến và cặp véc-tơ chỉ phương mặt phẳng

Định nghĩa 1.1.
Véc-tơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ được gọi là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) nếu giá của $\vec{n}$ vuông góc với mặt phẳng (α).



- *Mặt phẳng hoàn toàn xác định khi biết một điểm và một véc-tơ pháp tuyến của nó.*
- *Nếu $\vec{n}$ là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) thì $k\vec{n}$ (với $k \neq 0$) cũng là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).*

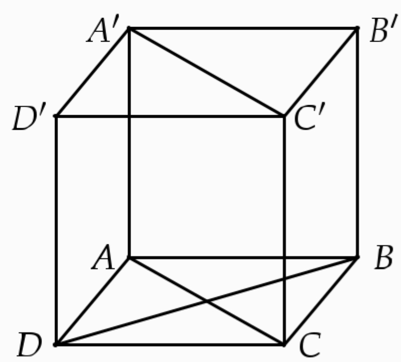
Ví dụ 1

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Trong các khẳng định sau, những khẳng định nào là đúng?

a) $\overrightarrow{AA'}$ và $2\overrightarrow{BB'}$ đều là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(ABCD)$.

b) $\overrightarrow{BD}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(ACC'A')$.

c) $\overrightarrow{A'C'}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(ABCD)$.

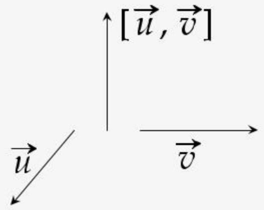


Ví dụ 2

Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;-2;3)$, $B(-3;0;1)$. Gọi (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB. Hãy chỉ ra một véc-tơ pháp tuyến của (α).

Định nghĩa 1.2.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (a; b; c)$ và $\vec{v} = (a'; b'; c')$. Khi đó vectơ $\vec{n} = (bc' - b'c; ca' - c'a; ab' - a'b)$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$, được gọi là tích có hướng của $\vec{u}$ và $\vec{v}$, ký hiệu là $[\vec{u}, \vec{v}]$.



- *$[\vec{u}, \vec{v}] = \vec{0}$ khi và chỉ khi $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng phương.*
- *Với bốn số x, y, x', y', ta ký hiệu $\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$. Khi đó, tích có hướng của $\vec{u} = (a; b; c)$ và $\vec{v} = (a'; b'; c')$ là*

$$[\vec{u}, \vec{v}] = \left(\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \right)$$

Ví dụ 3

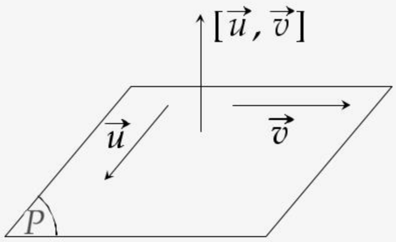
Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{u} = (1; -2; 0)$ và $\vec{v} = (3; 1; -4)$. Tính $[\vec{u}, \vec{v}]$.

Ví dụ 4

Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{u} = (2; 3; 1)$ và $\vec{v} = (4; 6; 2)$. Tính $[\vec{u}, \vec{v}]$.

Định nghĩa 1.3.

- Trong không gian $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ được gọi là cặp véc-tơ chỉ phương của mặt phẳng (P) nếu chúng không cùng phương và có giá nằm trong hoặc song song với mặt phẳng (P).
- Nếu $\vec{u}$, $\vec{v}$ là cặp véc-tơ chỉ phương của (P) thì $[\vec{u}, \vec{v}]$ là một véc-tơ pháp tuyến của (P).



Ví dụ 5

Trong không gian $Oxyz$, cho các véc-tơ $\vec{u} = (2; -1; 0)$, $\vec{v} = (1; -1; 2)$. Gọi (α) là một mặt phẳng song song với các giá của $\vec{u}$, $\vec{v}$. Hãy tìm một véc-tơ pháp tuyến của (α).

Ví dụ 6

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm không thẳng hàng $A(1; -2; 1)$, $B(-2; 1; 0)$, $C(-2; 3; 2)$. Hãy chỉ ra một véc-tơ chỉ phương của mặt phẳng (ABC).

2. Phương trình tổng quát của mặt phẳng

Định nghĩa 1.4. Trong không gian $Oxyz$, mỗi mặt phẳng đều có phương trình dạng $Ax + By + Cz + D = 0$, trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0, được gọi là phương trình tổng quát của mặt phẳng đó.

Trong không gian Oxyz, mỗi phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ (các hệ số A, B, C, D không đồng thời bằng 0) xác định một mặt phẳng nhận $\vec{n} = (A; B; C)$ làm một véc-tơ pháp tuyến.

Ví dụ 7

Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào trong các phương trình sau là phương trình tổng quát của một mặt phẳng?

a) $x + 2y - 3z^2 + 1 = 0$; b) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y} + \dfrac{3}{z} = 0$; c) $y + 1 = 0$.

Ví dụ 8

Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào trong các phương trình sau là phương trình tổng quát của một mặt phẳng?

a) $x^2 + 2y^2 - 3z^2 - 1 = 0$; b) $\dfrac{x}{2} - y + \dfrac{z}{3} + 5 = 0$; c) $xy + 5 = 0$.

Ví dụ 9

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha)\colon x + 2y - z + 1 = 0$.

a) Hãy chỉ ra một véc-tơ pháp tuyến của (α).

b) Véc-tơ $\vec{m} = (2; 4; -2)$ có là véc-tơ pháp tuyến của (α) hay không?

c) Trong hai điểm $A(1; 3; 2)$, $B(1; 1; 4)$, điểm nào thuộc mặt phẳng (α)?

Ví dụ 10

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $\alpha\colon x + 2 = 0$.

a) Điểm $A(-2; 1; 0)$ có thuộc (α) hay không?

b) Hãy chỉ ra một véc-tơ pháp tuyến của (α).

3. Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng

Định nghĩa 1.5. Trong không gian $Oxyz$, nếu mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$ thì có phương trình là

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \Leftrightarrow Ax + By + Cz + D = 0,$$

với $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$.

Ví dụ 11

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(2; -1; 0)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (3; -4; 6)$.

Ví dụ 12

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;2;-4)$ và vuông góc với trục Oz

Định nghĩa 1.6. Trong không gian $Oxyz$, bài toán viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm M và biết cặp véc-tơ chỉ phương $\vec{u}$, $\vec{v}$ có thể thực hiện theo các bước như sau

- Tìm véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = [\vec{u}, \vec{v}]$.
- Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua M và biết véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}$.

Ví dụ 13

Trong không gian $Oxyz$, cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ với $A(1;2;3)$, $B(4;3;5)$, $C(2;3;2)$, $A'(1;1;1)$. Viết phương trình mặt phẳng $(A'B'C')$.

Ví dụ 14

Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;-2;-1)$, $B(4;1;2)$, $C(2;3;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $A(1;-2;-1)$ đồng thời song song với trục Oy và đường thẳng BC.

Định nghĩa 1.7. Trong không gian $Oxyz$, bài toán viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng A, B, C có thể thực hiện theo các bước sau

- Tìm các cặp véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.
- Tìm véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$.
- Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua A và biết véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}$.

Ví dụ 15

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;1;-1)$, $B(3;2;1)$, $C(3;1;4)$.

a) Chứng minh rằng A, B, C không thẳng hàng.

b) Viết phương trình mặt phẳng (ABC).

Ví dụ 16

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) không đi qua gốc tọa độ và cắt ba trục Ox, Oy, Oz tương ứng tại các điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ $(a, b, c \neq 0)$.