Chương

2

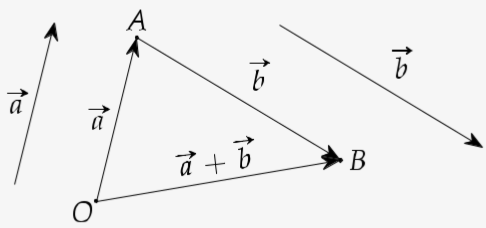
VECTƠ VÀ HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

§1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

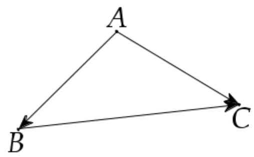
1. Tổng của hai véc tơ

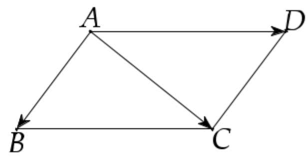
Định nghĩa 1.1.
Trong không gian, cho hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy ba điểm O, A, B sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Ta gọi $\overrightarrow{OB}$ là tổng của hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, ký hiệu $\vec{a} + \vec{b}$.
Phép lấy tổng của hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là phép cộng véctơ.



① *Quy tắc ba điểm: Với ba điểm A, B, C, ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$*

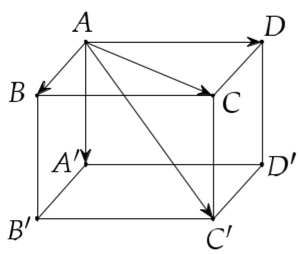
② *Quy tắc hình bình hành: Cho $ABCD$ là hình bình hành, ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$*





③ *Quy tắc hình hộp: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$*

Hệ thức tương tự: $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BD'}$.



Tính chất 1.1.

① Tính chất giao hoán: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;

② Tính chất kết hợp: $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$;

③ Với mọi véctơ $\vec{a}$, ta luôn có: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

④ Tổng của ba véctơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}$.

2. Hiệu của hai véc tơ

Định nghĩa 1.2.

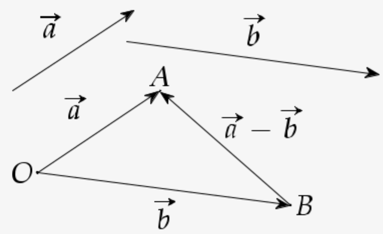
a) Véctơ đối:

① Vectơ đối của $\vec{a}$ kí hiệu là $-\vec{a}$.

② Vectơ đối của $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{BA}$, nghĩa là $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ (*dùng để làm mất dấu trừ trước vectơ*).

③ Vectơ $\vec{0}$ được coi là vectơ đối của chính nó.

b) Định nghĩa hiệu của hai véctơ: Trong không gian, cho hai véctơ $\vec{a}$, $\vec{b}$. Ta gọi $\vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$ là mhiệu của hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, ký hiệu $\vec{a} - \vec{b}$.
Phép lấy hiệu của hai véctơ được gọi là mphép trừ véctơ.



① *Với ba điểm A, B, C ta có $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.*

② *Hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đối nhau thì $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$.*

3. Tích của một số với một véc-tơ

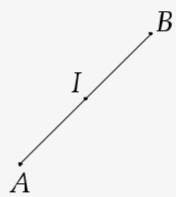
Định nghĩa 1.3. Cho số thực $k \neq 0$ và vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của một số k với vectơ $\vec{a}$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:

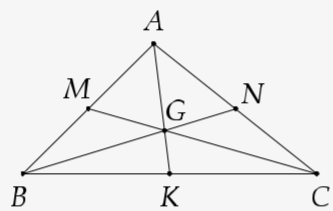
- Cùng hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k < 0$.
- Có độ dài bằng $|k| \cdot |\vec{a}|$.

$0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ *và* $k \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

Tính chất 1.2.

Hệ thức trung điểm, trọng tâm:





① I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì

- $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$;
- $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$; $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$;...

② G là trọng tâm của tam giác ABC thì

- $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$;
- $\overrightarrow{GA} = -\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AK}$; $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GK}$;...

Nhận xét:

① Với hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bất kỳ, với mọi số h và k, ta luôn có

- $k\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = k\vec{a} + k\vec{b}$;
- $(h+k)\,\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$;
- $h\,(k\vec{a}) = (hk)\,\vec{a}$;

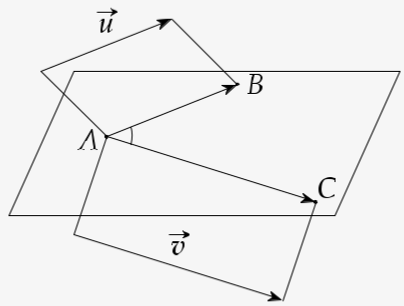
- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$;
- $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$;
- $k\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\vec{a} = \vec{0}\\ k = 0\end{array}\right.$.

② Hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b}$ khác $\vec{0}$) cùng phương khi và chỉ khi có số k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.

③ Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số $k \neq 0$ để $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

4. Tích vô hướng của hai véc-tơ

Định nghĩa 1.4.
Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai véctơ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm A bất kỳ, gọi B và C là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Khi đó, ta gọi $\widehat{BAC}$ là góc giữa hai véctơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$, ký hiệu $(\vec{u}, \vec{v})$.



$0^\circ \leq (\vec{u}, \vec{v}) \leq 180^\circ$.

- *Nếu $\vec{u}$ cùng hướng với $\vec{v}$ thì $(\vec{u}, \vec{v}) = 0^\circ$;*
- *Nếu $\vec{u}$ ngược hướng với $\vec{v}$ thì $(\vec{u}, \vec{v}) = 180^\circ$;*
- *Nếu $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$ thì $(\vec{u}, \vec{v}) = 90^\circ$.*

Định nghĩa 1.5. Trong không gian, cho hai véctơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác $\vec{0}$.
Tích vô hướng của hai véctơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số, kí hiệu $\vec{u} \cdot \vec{v}$, được xác định bởi công thức $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$

① *Trong trường hợp $\vec{u} = 0$ hoặc $\vec{v} = 0$, ta quy ước $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.*

② $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = |\vec{u}|^2$; $\quad \vec{u}^2 \geqslant 0$. $\vec{u}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

③ *Với hai véctơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ khác $\vec{0}$, ta có* $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$

④ *Với hai véctơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ khác $\vec{0}$, ta có* $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{0}$.

Tính chất 1.3. Với ba véctơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ và số thực k, ta có:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
- $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;
- $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1 Xác định véc-tơ, chứng minh đẳng thức véc tơ,độ dài véc tơ

Ví dụ 1

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a. Gọi G là trọng tâm tam giác $AB'D'$.

a) Tìm vectơ: $\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BA}$; $\quad \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{D'A'}$. b) Chứng minh: $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.

c) Chứng minh: $\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{B'D}$.

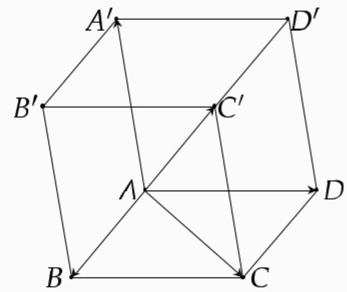
d) Chứng minh: $\overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{C'B'} - \overrightarrow{D'C'} = \overrightarrow{BD'}$.

e) Chứng minh: $\overrightarrow{A'C} = 3\overrightarrow{A'G}$.

f) Tính độ dài véc tơ $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{AA'}$.

Ví dụ 2

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Hãy xác định các véc-tơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu, điểm cuối là các đỉnh của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ thỏa



a) cùng phương với $\overrightarrow{AB}$;

b) cùng phương $\overrightarrow{AA'}$;

c) bằng với $\overrightarrow{AD}$;

d) bằng với $\overrightarrow{A'B}$;

e) đối với $\overrightarrow{CD'}$;

f) đối với $\overrightarrow{B'C}$.

Ví dụ 3

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, O lần lượt là trung điểm của AB, CD và AC. Chứng minh rằng

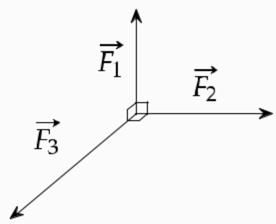
a) $\overrightarrow{BN}$ và $\overrightarrow{DM}$ đối nhau;

b) $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$;

c) $\overrightarrow{SD} - \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{SC}$.

Ví dụ 4

Ba lực $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$ cùng tác động vào một vật có phương đôi một vuông góc nhau và có độ lớn lần lượt là 2 N, 3 N, 4 N.



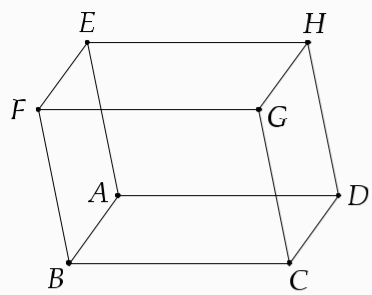
a) Tính độ lớn hợp lực của $\vec{F_2}, \vec{F_3}$.

b) Tính độ lớn hợp lực của ba lực đã cho.

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Các véc-tơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp và bằng véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ là các véc-tơ nào sau đây?



Ⓐ $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{HG}, \overrightarrow{EF}$.

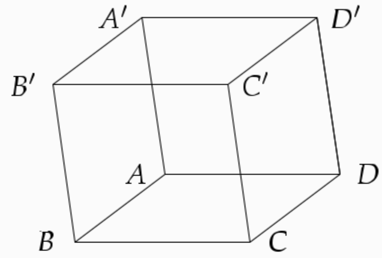
Ⓑ $\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{HG}, \overrightarrow{EF}$.

Ⓒ $\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{HG}, \overrightarrow{FE}$.

Ⓓ $\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{GH}, \overrightarrow{EF}$.

Câu 2

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?



(A) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{AD}$.

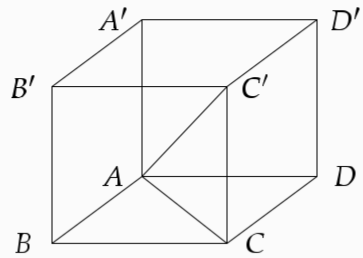
(B) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$.

(C) $\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{A'C} = 2\overrightarrow{AC}$.

(D) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{D'D} = \vec{0}$.

Câu 3

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?



(A) $|\overrightarrow{AC}| = a\sqrt{2}$.

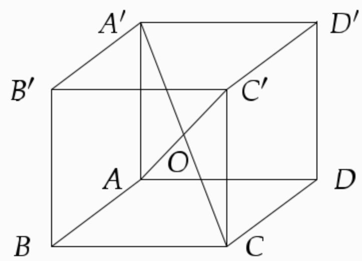
(B) $|\overrightarrow{AC'}| = a\sqrt{3}$.

(C) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{D'B'} = \vec{0}$.

(D) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BC'}$.

Câu 4

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là tâm của hình lập phương. Khẳng định nào dưới đây là đúng?



(A) $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}\right)$.

(B) $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}\right)$.

(C) $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}\right)$.

(D) $\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}\right)$.

Câu 5

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính độ dài vectơ $\vec{x} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'}$ theo a.

(A) $|\vec{x}| = a\sqrt{2}$.

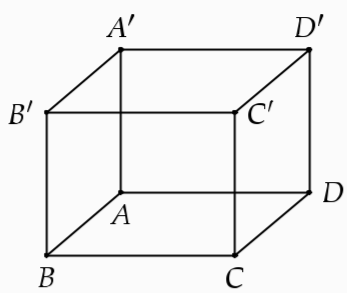
(B) $|\vec{x}| = 2a\sqrt{2}$.

(C) $|\vec{x}| = 2a\sqrt{6}$.

(D) $|\vec{x}| = a\sqrt{6}$.

Câu 6

Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính độ dài véctơ $\vec{x} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC'}$ theo a.



(A) $a\sqrt{2}$.

(B) $\left(1 + \sqrt{3}\right)a$.

(C) $a\sqrt{6}$.

(D) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.