Chương

1

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

§1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

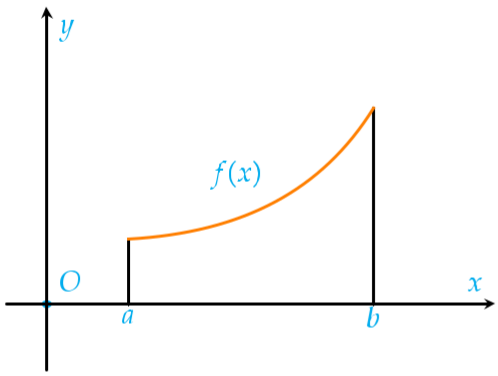
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Tính đơn điệu của hàm số

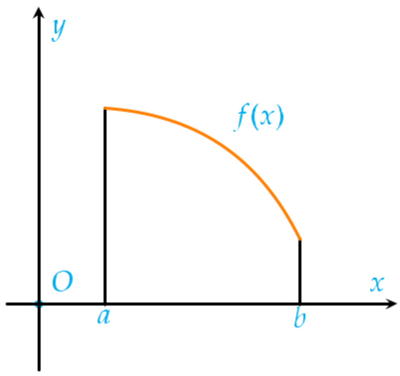
Định nghĩa 1.1. Giả sử K là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng và $y = f(x)$ là hàm số xác định trên K.

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là nghịch biến trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

- *Nếu hàm số đồng biến trên K thì đồ thị của hàm số đi lên từ trái sang phải (H.1.3a). Nếu hàm số nghịch biến trên K thì đồ thị của hàm số đi xuống từ trái sang phải (H.1.3b).*



a) Hàm số đồng biến trên $(a; b)$



a) Hàm số nghịch biến trên $(a; b)$

- *Hàm số đồng biến hay nghịch biến trên K còn được gọi chung là đơn điệu trên K. Việc tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số còn được gọi là tìm các khoảng đơn điệu(hay xét tính đơn điệu) của hàm số.*
- *Khi xét tính đơn điệu của hàm số mà không chỉ rõ tập K thì ta hiểu là xét trên tập xác định của hàm số đó.*

Định lý 1.1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K.

- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng K.
- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng K.

2. Cực trị của hàm số

Định nghĩa 1.2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a;b)$ (a có thể là $-\infty$, b có thể là $+\infty$) và điểm $x_0 \in (a;b)$.

- Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h, x_0 + h) \subset (a;b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại x_0.
- Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h, x_0 + h) \subset (a;b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0.

- *Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại x_0 thì x_0 được gọi là điểm cực đại của hàm số $f(x)$. Khi đó, $f(x_0)$ được gọi là giá trí cực đại của hàm số $f(x)$ và kí hiệu là $f_{CĐ}$ hay $y_{CĐ}$. Điểm $M_0(x_0; f(x_0)$) được gọi là điểm cực đại của đồ thị hàm số.*
- *Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 thì x_0 được gọi là điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$. Khi đó, $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực tiểu của hàm số $f(x)$ và kí hiệu là f_{CT} hay y_{CT}. Điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ được gọi là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.*
- *Các điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị. Giá trị cực đại và giá tri cực tiểu được goi chung là giá trị cực trị (hay cực trị) của hàm số.*

Phương pháp 1.1. Từ định lí trên ta có các bước tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$ như sau:

a) Tìm tập xác định của hàm số.

b) Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm mà tại đó đạo hàm $f'(x)$ bằng 0 hoặc đạo hàm không tồn tại.

c) Lập bảng biến thiên của hàm số. Từ bảng biên thiên suy ra các cực trị của hàm số.

B VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1

Tìm các khoảng đơn điệu và các điểm cực trị của hàm số sau

a) $y = -x^3 + 3x^2 - 4$; b) $y = x^3 - 3x^2 + 1$; c) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$;

d) $y = -2x^4 + 4x^2$; e) $y = x^4 + 4x^3 - 1$; f) $y = -16x^4 + x - 1$.

Ví dụ 2

Tìm các khoảng đơn điệu và cực trị của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$; b) $y = \dfrac{3x+1}{x-1}$; c) $y = \dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$;

d) $y = x + \dfrac{4}{x}$; e) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$; f) $y = x - 3\sqrt[3]{x^2}$.

Ví dụ 3

Thể tích V (đơn vị: centimét khối) của 1 kg nước tại nhiệt độ T $(0^\circ\text{C} \leq T \leq 30^\circ\text{C})$ được tính bởi công thức

$$V(T) = 999,87 - 0,06426T + 0,0085043T^2 - 0,0000679T^3$$

Hỏi thể tích $V(T)$, $0^\circ\text{C} \leq T \leq 30^\circ\text{C}$, giảm trong khoảng nhiệt độ nào?

C PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1 Tìm khoảng đơn điệu và cực trị của hàm số cho trước

① Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = f(x)$.

② Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm $x_i\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ thuộc $\mathscr{D}$ mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.

③ Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần, xét dấu y' và lập bảng biến thiên. Từ đây, nêu các khoảng đồng biến, nghịch biến và các điểm cực trị.

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Cho hàm số $y = 7x^3 + 5x^2 + x - 1$. Hàm số nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-\infty, +\infty)$.

(B) $\left(-\dfrac{1}{7}, +\infty\right)$.

(C) $\left(-\infty, -\dfrac{1}{3}\right)$ và $\left(-\dfrac{1}{7}, +\infty\right)$.

(D) $\left(-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{7}\right)$.

Câu 2

Cho hàm số $y = 3x^4 - 6x^2 + 3$. Hàm số nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

(B) $(0, +\infty)$.

(C) $(-1; 1)$.

(D) $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

Câu 3

Cho hàm số $y = \dfrac{x+2}{-x-1}$. Hàm số đồng biến trên khoảng nào?

(A) $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

(B) $(-\infty; +\infty)$.

(C) $(-1, +\infty)$.

(D) $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

Câu 4

Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2 - 2$. Điểm cực đại của đồ thị hàm số là

(A) $(0; -2)$.

(B) $x = 0$.

(C) $x = \pm 1$.

(D) $(-1; -1)$ và $(1; -1)$.

Câu 5

Tìm điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 30$.

A) $x = 1$.
B) $x = 3$.
C) $A(3; 30)$.
D) $B(1; 34)$.

Câu 6

Tìm điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2x + 9}{x - 2}$.

A) $x = -1$.
B) $x = 5$.
C) $A(-1; -4)$.
D) $B(5; 8)$.

Câu 7

Số điểm cực trị của hàm số $y = \dfrac{x + 1}{x - 1}$.

A) 2.
B) 1.
C) 3.
D) 0.

Câu 8

Cho hàm số $y = -\dfrac{1}{3}x^3 - x - 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A) Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 1)$ và trên $(1; +\infty)$.
B) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
C) Hàm số đồng biến trên $(-1; 1)$.
D) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 9

Gọi x_1 là điểm cực đại x_2 là điểm cực tiểu của hàm số $y = -x^3 + 3x + 2$. Tính $x_1 + 2x_2$.

A) 2.
B) 1.
C) -1.
D) 0.

Câu 10

Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ bằng

A) $2\sqrt{5}$.
B) $2\sqrt{2}$.
C) 2.
D) 4.

Câu 11

Hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A) $(-1; 0)$.
B) $(-1; +\infty)$.
C) $(-3; 8)$.
D) $(-\infty; -1)$.

Câu 12

Cho hàm số $y = -\dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{2}x^2 - 3$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -3$.
B) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.
C) Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.
D) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$.

Câu 13

Cho hàm số $y = \dfrac{3x-1}{x-2}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- **A** Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- **B** Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.
- **C** Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.
- **D** Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Câu 14

Cho hàm số $y = \dfrac{x-2}{x+3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- **A** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$.
- **B** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -3)$ và $(-3; +\infty)$.
- **C** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -3)$ và $(-3; +\infty)$.
- **D** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$.

Câu 15

Cho hàm số $y = x^2 + 4\ln(3-x)$. Tìm giá trị cực đai $y_{\text{CĐ}}$ của hàm số đã cho.

- **A** $y_{\text{CĐ}} = 2$.
- **B** $y_{\text{CĐ}} = 4$.
- **C** $y_{\text{CĐ}} = 1 + 4\ln 2$.
- **D** $y_{\text{CĐ}} = 1$.

Câu 16

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $y' = f'(x) = 3x^3 - 3x^2$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- **A** Trên khoảng $(1; +\infty)$ hàm số đồng biến.
- **B** Trên khoảng $(-1; 1)$ hàm số nghịch biến.
- **C** Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị.
- **D** Đồ thị hàm số có một điểm cực tiểu.

Câu 17

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(x-2)^3$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

- **A** 1.
- **B** 2.
- **C** 0.
- **D** 3.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$. Khi đó

a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -3$.

c) Hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[1; 3]$ tại $x = 1$.

d) Đồ thị hàm số đối xứng qua điểm $I(1; -1)$.