

## BÀI TẬP BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 CÓ LỜI GIẢI

### ĐỀ BÀI

1. Chứng minh  $\sqrt{7}$  là số vô tỉ.
2. a) Chứng minh :  $(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$   
b) Chứng minh bất đẳng thức Bunhiacôpxki :  $(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$
3. Cho  $x + y = 2$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :  $S = x^2 + y^2$ .
4. a) Cho  $a > 0, b > 0$ . Chứng minh bất đẳng thức Cauchy :  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ .  
b) Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng :  $\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$   
c) Cho  $a, b > 0$  và  $3a + 5b = 12$ . Tìm giá trị lớn nhất của tích  $P = ab$ .
5. Cho  $a + b = 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :  $M = a^3 + b^3$ .
6. Cho  $a^3 + b^3 = 2$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :  $N = a + b$ .
7. Cho  $a, b, c$  là các số dương. Chứng minh :  $a^3 + b^3 + abc \geq ab(a + b + c)$
8. Tìm liên hệ giữa các số  $a$  và  $b$  biết rằng :  $|a + b| > |a - b|$
9. a) Chứng minh bất đẳng thức  $(a + 1)^2 \geq 4a$   
b) Cho  $a, b, c > 0$  và  $abc = 1$ . Chứng minh :  $(a + 1)(b + 1)(c + 1) \geq 8$
10. Chứng minh các bất đẳng thức :  
a)  $(a + b)^2 \geq 2(a^2 + b^2)$       b)  $(a + b + c)^2 \geq 3(a^2 + b^2 + c^2)$
11. Tìm các giá trị của  $x$  sao cho :  
a)  $|2x - 3| = |1 - x|$       b)  $x^2 - 4x - 5 = 0$       c)  $2x(2x - 1) = 2x - 1$ .
12. Tìm các số  $a, b, c, d$  biết rằng :  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a(b + c + d)$
13. Cho biểu thức  $M = a^2 + ab + b^2 - 3a - 3b + 2001$ . Với giá trị nào của  $a$  và  $b$  thì  $M$  đạt giá trị nhỏ nhất ? Tìm giá trị nhỏ nhất đó.
14. Cho biểu thức  $P = x^2 + xy + y^2 - 3(x + y) + 3$ . CMR giá trị nhỏ nhất của  $P$  bằng 0.
15. Chứng minh rằng không có giá trị nào của  $x, y, z$  thỏa mãn đẳng thức sau :  
$$x^2 + 4y^2 + z^2 - 2a + 8y - 6z + 15 = 0$$
16. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :  $A = \frac{1}{x^2 - 4x + 9}$
17. So sánh các số thực sau (không dùng máy tính) :  
a)  $\sqrt{7} + \sqrt{15}$  và 7      b)  $\sqrt{17} + \sqrt{5} + 1$  và  $\sqrt{45}$   
c)  $\frac{23 - 2\sqrt{19}}{3}$  và  $\sqrt{27}$       d)  $\sqrt{3\sqrt{2}}$  và  $\sqrt{2\sqrt{3}}$
18. Hãy viết một số hữu tỉ và một số vô tỉ lớn hơn  $\sqrt{2}$  nhưng nhỏ hơn  $\sqrt{3}$
19. Giải phương trình :  $\sqrt{3x^2 + 6x + 7} + \sqrt{5x^2 + 10x + 21} = 5 - 2x - x^2$ .
20. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $A = x^2y$  với các điều kiện  $x, y > 0$  và  $2x + xy = 4$ .

21. Cho  $S = \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 1998}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 1997}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k(1998-k+1)}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1998-1}}$ .

Hãy so sánh S và  $2 \cdot \frac{1998}{1999}$ .

22. Chứng minh rằng : Nếu số tự nhiên a không phải là số chính phương thì  $\sqrt{a}$  là số vô tỉ.

23. Cho các số x và y cùng dấu. Chứng minh rằng :

a)  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$

b)  $\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) - \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \geq 0$

c)  $\left(\frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4}\right) - \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \geq 2$ .

24. Chứng minh rằng các số sau là số vô tỉ :

a)  $\sqrt{1+\sqrt{2}}$

b)  $m + \frac{\sqrt{3}}{n}$  với m, n là các số hữu tỉ, n ≠ 0.

25. Có hai số vô tỉ dương nào mà tổng là số hữu tỉ không ?

26. Cho các số x và y khác 0. Chứng minh rằng :  $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 4 \geq 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$ .

27. Cho các số x, y, z dương. Chứng minh rằng :  $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geq \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ .

28. Chứng minh rằng tổng của một số hữu tỉ với một số vô tỉ là một số vô tỉ.

29. Chứng minh các bất đẳng thức :

a)  $(a+b)^2 \geq 2(a^2 + b^2)$

b)  $(a+b+c)^2 \geq 3(a^2 + b^2 + c^2)$

c)  $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \geq n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$ .

30. Cho  $a^3 + b^3 = 2$ . Chứng minh rằng  $a + b \leq 2$ .

31. Chứng minh rằng :  $[x] + [y] \leq [x+y]$ .

32. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :  $A = \frac{1}{x^2 - 6x + 17}$ .

33. Tìm giá trị nhỏ nhất của :  $A = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$  với  $x, y, z > 0$ .

34. Tìm giá trị nhỏ nhất của :  $A = x^2 + y^2$  biết  $x + y = 4$ .

35. Tìm giá trị lớn nhất của :  $A = xyz(x+y)(y+z)(z+x)$  với  $x, y, z > 0$  ;  $x + y + z = 1$ .

36. Xét xem các số a và b có thể là số vô tỉ không nếu :

a)  $ab$  và  $\frac{a}{b}$  là số vô tỉ.

b)  $a + b$  và  $\frac{a}{b}$  là số hữu tỉ ( $a + b \neq 0$ )

c)  $a + b$ ,  $a^2$  và  $b^2$  là số hữu tỉ ( $a + b \neq 0$ )

37. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh :  $a^3 + b^3 + abc \geq ab(a + b + c)$

38. Cho  $a, b, c, d > 0$ . Chứng minh :  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2$

39. Chứng minh rằng  $[2x]$  bằng  $2[x]$  hoặc  $2[x] + 1$

40. Cho số nguyên dương a. Xét các số có dạng :  $a + 15$  ;  $a + 30$  ;  $a + 45$  ; ;  $a + 15n$ . Chứng minh rằng trong các số đó, tồn tại hai số mà hai chữ số đầu tiên là 96.

41. Tìm các giá trị của x để các biểu thức sau có nghĩa :

$$A = \sqrt{x^2 - 3} \quad B = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x - 5}} \quad C = \frac{1}{\sqrt{x - \sqrt{2x - 1}}} \quad D = \frac{1}{1 - \sqrt{x^2 - 3}} \quad E = \sqrt{x + \frac{2}{x}} + \sqrt{-2x}$$

$$G = \sqrt{3x - 1} - \sqrt{5x - 3} + \sqrt{x^2 + x + 1}$$

42. a) Chứng minh rằng :  $|A + B| \leq |A| + |B|$ . Dấu " $=$ " xảy ra khi nào ?

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau :

$$M = \sqrt{x^2 + 4x + 4} + \sqrt{x^2 - 6x + 9}.$$

c) Giải phương trình :  $\sqrt{4x^2 + 20x + 25} + \sqrt{x^2 - 8x + 16} = \sqrt{x^2 + 18x + 81}$

43. Giải phương trình :  $2x^2 - 8x - 3\sqrt{x^2 - 4x - 5} = 12$ .

44. Tìm các giá trị của x để các biểu thức sau có nghĩa :

$$A = \sqrt{x^2 + x + 2} \quad B = \frac{1}{\sqrt{1 - 3x}} \quad C = 2 - \sqrt{1 - 9x^2} \quad D = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$$

$$E = \frac{1}{\sqrt{2x + 1} + \sqrt{x}} \quad G = \frac{x}{x^2 - 4} + \sqrt{x - 2} \quad H = \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 3\sqrt{1 - x^2}$$

45. Giải phương trình :  $\frac{x^2 - 3x}{\sqrt{x - 3}} = 0$

46. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :  $A = \sqrt{x} + x$ .

47. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :  $B = \sqrt{3 - x} + x$

48. So sánh : a)  $a = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$  và  $b = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}}$  ; b)

$$\sqrt{5 - \sqrt{13 + 4\sqrt{3}}} \quad \text{và} \quad \sqrt{3} - 1$$

c)  $\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$  và  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$  (n là số nguyên dương)

49. Với giá trị nào của x, biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất :

$$A = 1 - \sqrt{1 - 6x + 9x^2} + (3x - 1)^2.$$

50. Tính :

a)  $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$

b)  $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$

c)  $\sqrt{27 - 10\sqrt{2}}$

d)  $A = \sqrt{m^2 + 8m + 16} + \sqrt{m^2 - 8m + 16}$

e)  $B = \sqrt{n + 2\sqrt{n-1}} + \sqrt{n-2\sqrt{n-1}}$

(n > 1)

51. Rút gọn biểu thức :  $M = \frac{8\sqrt{41}}{\sqrt{45 + 4\sqrt{41}} + \sqrt{45 - 4\sqrt{41}}}$ .

52. Tìm các số x, y, z thỏa mãn đẳng thức :

$$(2x - y)^2 + (y - 2)^2 + \sqrt{(x + y + z)^2} = 0$$

53. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \sqrt{25x^2 - 20x + 4} + \sqrt{25x^2 - 30x + 9}.$$

54. Giải các phương trình sau :

a)  $\sqrt{x^2 - x - 2} - \sqrt{x - 2} = 0$

b)  $\sqrt{x^2 - 1} + 1 = x^2$

c)  $\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + x - 2} = 0$

d)  $x - \sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} = 1$

e)  $\sqrt{x^2 + 4x + 4} + |x - 4| = 0$

g)  $\sqrt{x - 2} + \sqrt{x - 3} = -5$

h)  $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 1$

i)  $\sqrt{x + 5} + \sqrt{2 - x} = x^2 - 25$

k)  $\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}} = 1$

l)  $\sqrt{8x + 1} + \sqrt{3x - 5} = \sqrt{7x + 4} + \sqrt{2x - 2}$

55. Cho hai số thực x và y thỏa mãn các điều kiện :  $xy = 1$  và  $x > y$ .

CMR:  $\frac{x^2 + y^2}{x - y} \geq 2\sqrt{2}$ .

56. Rút gọn các biểu thức :

a)  $\sqrt{13 + 30\sqrt{2} + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}$

b)  $\sqrt{m + 2\sqrt{m-1}} + \sqrt{m - 2\sqrt{m-1}}$

c)  $\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$

d)  $\sqrt{227 - 30\sqrt{2}} + \sqrt{23 + 22\sqrt{2}}$

57. Chứng minh rằng  $\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

58. Rút gọn các biểu thức :

a)  $C = \frac{\sqrt{6 + 2(\sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2})} - \sqrt{6 - 2(\sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2})}}{\sqrt{2}}$

b)  $D = \frac{\sqrt{9 - 6\sqrt{2}} - \sqrt{6}}{\sqrt{3}}$

59. So sánh :

a)  $\sqrt{\sqrt{6} + \sqrt{20}}$  và  $\sqrt{1 + \sqrt{6}}$

b)  $\sqrt{\sqrt{17 + 12\sqrt{2}}}$  và  $\sqrt{2} + 1$

c)  $\sqrt{\sqrt{28 - 16\sqrt{3}}}$  và  $\sqrt{3} - 2$

60. Cho biểu thức :  $A = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 4x + 4}}$

a) Tìm tập xác định của biểu thức A.

b) Rút gọn biểu thức A.

61. Rút gọn các biểu thức sau : a)  $\sqrt{11-2\sqrt{10}}$       b)  $\sqrt{9-2\sqrt{14}}$

c) 
$$\frac{\sqrt{3} + \sqrt{11+6\sqrt{2}} - \sqrt{5+2\sqrt{6}}}{\sqrt{2} + \sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{7+2\sqrt{10}}}$$

62. Cho  $a + b + c = 0$  ;  $a, b, c \neq 0$ . Chứng minh đẳng thức :

$$\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right|$$

63. Giải bất phương trình :  $\sqrt{x^2 - 16x + 60} < x - 6$ .

64. Tìm x sao cho :  $\sqrt{x^2 - 3} + 3 \leq x^2$ .

65. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của  $A = x^2 + y^2$ , biết rằng :  
 $x^2(x^2 + 2y^2 - 3) + (y^2 - 2)^2 = 1$  (1)

66. Tìm x để biểu thức có nghĩa:

a)  $A = \frac{1}{\sqrt{x - \sqrt{2x - 1}}}$       b)  $B = \frac{\sqrt{16 - x^2}}{\sqrt{2x + 1}} + \sqrt{x^2 - 8x + 8}$ .

67. Cho biểu thức :  $A = \frac{x + \sqrt{x^2 - 2x}}{x - \sqrt{x^2 - 2x}} - \frac{x - \sqrt{x^2 - 2x}}{x + \sqrt{x^2 - 2x}}$ .

a) Tìm giá trị của x để biểu thức A có nghĩa.

b) Rút gọn biểu thức A.    c) Tìm giá trị của x để  $A < 2$ .

68. Tìm 20 chữ số thập phân đầu tiên của số :  $\sqrt{0,9999\dots 9}$  (20 chữ số 9)

69. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của :  $A = |x - \sqrt{2}| + |y - 1|$  với  $|x| + |y| = 5$

70. Tìm giá trị nhỏ nhất của  $A = x^4 + y^4 + z^4$  biết rằng  $xy + yz + zx = 1$

71. Trong hai số :  $\sqrt{n} + \sqrt{n+2}$  và  $2\sqrt{n+1}$  (n là số nguyên dương), số nào lớn hơn ?

72. Cho biểu thức  $A = \sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$ . Tính giá trị của A theo hai cách.

73. Tính :  $(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5})(-\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})$

74. Chứng minh các số sau là số vô tỉ :  $\sqrt{3} + \sqrt{5}$  ;  $\sqrt{3} - \sqrt{2}$  ;  $2\sqrt{2} + 3$

75. Hãy so sánh hai số :  $a = 3\sqrt{3} - 3$  và  $b = 2\sqrt{2} - 1$  ;  $\sqrt{2+\sqrt{5}}$  và  $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}$

76. So sánh  $\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{2}$  và số 0.

77. Rút gọn biểu thức :  $Q = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + 4}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}}$ .

78. Cho  $P = \sqrt{14 + \sqrt{40}} + \sqrt{56} + \sqrt{140}$ . Hãy biểu diễn P dưới dạng tổng của 3 căn thức bậc hai

79. Tính giá trị của biểu thức  $x^2 + y^2$  biết rằng :  $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = 1$ .

80. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của :  $A = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ .

81. Tìm giá trị lớn nhất của :  $M = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$  với  $a, b > 0$  và  $a + b = 1$ .

82. CMR trong các số

$2b + c - 2\sqrt{ad}$  ;  $2c + d - 2\sqrt{ab}$  ;  $2d + a - 2\sqrt{bc}$  ;  $2a + b - 2\sqrt{cd}$  có ít nhất hai số dương ( $a, b, c, d > 0$ ).

83. Rút gọn biểu thức :  $N = \sqrt{4\sqrt{6} + 8\sqrt{3} + 4\sqrt{2} + 18}$ .

84. Cho  $x + y + z = \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}$ , trong đó  $x, y, z > 0$ . Chứng minh  $x = y = z$ .

85. Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$  và  $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ . Chứng minh:  $(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 2^n$ .

86. Chứng minh :  $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \geq 2\sqrt{2(a+b)\sqrt{ab}}$  ( $a, b > 0$ ).

87. Chứng minh rằng nếu các đoạn thẳng có độ dài  $a, b, c$  lập được thành một tam giác thì các đoạn thẳng có độ dài  $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$  cũng lập được thành một tam giác.

88. Rút gọn : a)  $A = \frac{\sqrt{ab} - \sqrt{b^2}}{b} - \sqrt{\frac{a}{b}}$       b)  $B = \frac{\sqrt{(x+2)^2 - 8x}}{\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}}$

89. Chứng minh rằng với mọi số thực  $a$ , ta đều có :  $\frac{a^2 + 2}{\sqrt{a^2 + 1}} \geq 2$ . Khi nào có đẳng thức ?

90. Tính :  $A = \sqrt{3 + \sqrt{5}} + \sqrt{3 - \sqrt{5}}$  bằng hai cách.

91. So sánh : a)  $\frac{3\sqrt{7} + 5\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$  và 6,9      b)  $\sqrt{13} - \sqrt{12}$  và  $\sqrt{7} - \sqrt{6}$

92. Tính :  $P = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}$ .

93. Giải phương trình :  $\sqrt{x+2} + 3\sqrt{2x-5} + \sqrt{x-2} - \sqrt{2x-5} = 2\sqrt{2}$ .

94. Chứng minh rằng ta luôn có :  $P_n = \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$  ;  $\forall n \in \mathbb{Z}_+$

95. Chứng minh rằng nếu  $a, b > 0$  thì  $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}}$ .

96. Rút gọn biểu thức :  $A = \frac{\sqrt{x - \sqrt{4(x-1)}} + \sqrt{x + \sqrt{4(x-1)}}}{\sqrt{x^2 - 4(x-1)}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x-1}\right)$ .

97. Chứng minh các đẳng thức sau : a)  $\frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}} : \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = a - b$  (a,

b > 0 ; a > b)

b)  $\left(\frac{\sqrt{14} - \sqrt{7}}{1 - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{15} - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{3}}\right) : \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} = -2$       c)  $\left(1 + \frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1}\right) \left(1 - \frac{a - \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1}\right) = 1 - a$   
(a > 0).

98. Tính : a)  $\sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{29 - 6\sqrt{20}}}$  ; b)  $2\sqrt{3 + \sqrt{5} - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}$  .

c)  $\left(\sqrt{\sqrt{7 + \sqrt{48}} - \sqrt{\sqrt{28 - 16\sqrt{3}}}}\right) \cdot \sqrt{\sqrt{7 + \sqrt{48}}}$  .

99. So sánh : a)  $\sqrt{3} + \sqrt{5}$  và  $\sqrt{15}$       b)  $2 + \sqrt{15}$  và  $\sqrt{12} + \sqrt{7}$

c)  $\sqrt{18} + \sqrt{19}$  và 9      d)  $\frac{16}{\sqrt{2}}$  và  $\sqrt{5} \cdot \sqrt{25}$

100. Cho hằng đẳng thức :

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}} \quad (a, b > 0 \text{ và } a^2$$

b > 0).

Áp dụng kết quả để rút gọn :

a)  $\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}$  ; b)  $\frac{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}}{\sqrt{17 - 12\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}{\sqrt{17 + 12\sqrt{2}}}$

c)  $\sqrt{\frac{2\sqrt{10} + \sqrt{30} - 2\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2\sqrt{10} - 2\sqrt{2}}} : \frac{2}{\sqrt{3} - 1}$

101. Xác định giá trị các biểu thức sau :

a)  $A = \frac{xy - \sqrt{x^2 - 1} \cdot \sqrt{y^2 - 1}}{xy + \sqrt{x^2 - 1} \cdot \sqrt{y^2 - 1}}$  với  $x = \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a}\right)$ ,  $y = \frac{1}{2} \left(b + \frac{1}{b}\right)$  (a > 1 ;

b > 1)

b)  $B = \frac{\sqrt{a + bx} + \sqrt{a - bx}}{\sqrt{a + bx} - \sqrt{a - bx}}$  với  $x = \frac{2am}{b(1 + m^2)}$ , |m| < 1.

102. Cho biểu thức  $P(x) = \frac{2x - \sqrt{x^2 - 1}}{3x^2 - 4x + 1}$

a) Tìm tất cả các giá trị của x để P(x) xác định. Rút gọn P(x).

b) Chứng minh rằng nếu x > 1 thì P(x).P(-x) < 0.

103. Cho biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x + 2 - 4\sqrt{x - 2}} + \sqrt{x + 2 + 4\sqrt{x - 2}}}{\sqrt{\frac{4}{x^2} - \frac{4}{x} + 1}}$ .

a) Rút gọn biểu thức A.                      b) Tìm các số nguyên x để biểu thức A là một số nguyên.

**104.** Tìm giá trị lớn nhất (nếu có) hoặc giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các biểu thức sau:

a)  $\sqrt{9-x^2}$       b)  $\sqrt{x-x}$  ( $x > 0$ )      c)  $1+\sqrt{2-x}$       d)  $\sqrt{x-5}-4$   
 e)  $1-2\sqrt{1-3x}$       g)  $\sqrt{2x^2-2x+5}$       h)  $1-\sqrt{-x^2+2x+5}$       i)  $\frac{1}{2x-\sqrt{x+3}}$

**105.** Rút gọn biểu thức :  $A = \sqrt{x+\sqrt{2x-1}} - \sqrt{x-\sqrt{2x-1}}$ , bằng ba cách ?

**106.** Rút gọn các biểu thức sau : a)  $\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{48-10\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}$

b)  $\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$       c)  $\sqrt{94-42\sqrt{5}} - \sqrt{94+42\sqrt{5}}$ .

**107.** Chứng minh các hằng đẳng thức với  $b \geq 0$ ;  $a \geq \sqrt{b}$

a)  $\sqrt{a+\sqrt{b}} \pm \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{2(a \pm \sqrt{a^2-b})}$       b)

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

**108.** Rút gọn biểu thức :  $A = \sqrt{x+2\sqrt{2x-4}} + \sqrt{x-2\sqrt{2x-4}}$

**109.** Tìm x và y sao cho :  $\sqrt{x+y-2} = \sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{2}$

**110.** Chứng minh bất đẳng thức :  $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}$ .

**111.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh :  $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$ .

**112.** Cho  $a, b, c > 0$ ;  $a+b+c=1$ . Chứng minh :

a)  $\sqrt{a+1} + \sqrt{b+1} + \sqrt{c+1} < 3,5$       b)  $\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \leq \sqrt{6}$ .

**113.** CM :  $\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)} + \sqrt{(a^2+d^2)(b^2+d^2)} \geq (a+b)(c+d)$

với  $a, b, c, d > 0$ .

**114.** Tìm giá trị nhỏ nhất của :  $A = x + \sqrt{x}$ .

**115.** Tìm giá trị nhỏ nhất của :  $A = \frac{(x+a)(x+b)}{x}$ .

**116.** Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của  $A = 2x + 3y$  biết  $2x^2 + 3y^2 = 5$ .

**117.** Tìm giá trị lớn nhất của  $A = x + \sqrt{2-x}$ .

**118.** Giải phương trình :  $\sqrt{x-1} - \sqrt{5x-1} = \sqrt{3x-2}$

**119.** Giải phương trình :  $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2$

**120.** Giải phương trình :  $3x^2 + 21x + 18 + 2\sqrt{x^2 + 7x + 7} = 2$

**121.** Giải phương trình :  $\sqrt{3x^2 + 6x + 7} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14} = 4 - 2x - x^2$



122. Chứng minh các số sau là số vô tỉ :  $\sqrt{3} - \sqrt{2}$  ;  $2\sqrt{2} + \sqrt{3}$

123. Chứng minh  $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} \leq 2$ .

124. Chứng minh bất đẳng thức sau bằng phương pháp hình học :

$$\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{b^2 + c^2} \geq b(a + c) \quad \text{với } a, b, c > 0.$$

125. Chứng minh  $\sqrt{(a+b)(c+d)} \geq \sqrt{ac} + \sqrt{bd}$  với  $a, b, c, d > 0$ .

126. Chứng minh rằng nếu các đoạn thẳng có độ dài  $a, b, c$  lập được thành một tam giác thì các đoạn thẳng có độ dài  $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$  cũng lập được thành một tam giác.

127. Chứng minh  $\frac{(a+b)^2}{2} + \frac{a+b}{4} \geq a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$  với  $a, b > 0$ .

128. Chứng minh  $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$  với  $a, b, c > 0$ .

129. Cho  $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = 1$ . Chứng minh rằng  $x^2 + y^2 = 1$ .

130. Tìm giá trị nhỏ nhất của  $A = \sqrt{x-2}\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2}\sqrt{x-1}$

131. Tìm GTNN, GTLN của  $A = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ .

132. Tìm giá trị nhỏ nhất của  $A = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-2x+5}$

133. Tìm giá trị nhỏ nhất của  $A = \sqrt{-x^2+4x+12} - \sqrt{-x^2+2x+3}$ .

134. Tìm GTNN, GTLN của :

a)  $A = 2x + \sqrt{5-x^2}$       b)  $A = x(99 + \sqrt{101-x^2})$

135. Tìm GTNN của  $A = x + y$  biết  $x, y > 0$  thỏa mãn  $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1$

( $a$  và  $b$  là hằng số dương).

136. Tìm GTNN của  $A = (x+y)(x+z)$  với  $x, y, z > 0$ ,  $xyz(x+y+z) = 1$ .

137. Tìm GTNN của  $A = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}$  với  $x, y, z > 0$ ,  $x+y+z = 1$ .

138. Tìm GTNN của  $A = \frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x}$  biết  $x, y, z > 0$ ,

$$\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 1.$$

139. Tìm giá trị lớn nhất của : a)  $A = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$  với  $a, b > 0$ ,  $a+b=1$

b)

$$B = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^4 + (\sqrt{a} + \sqrt{c})^4 + (\sqrt{a} + \sqrt{d})^4 + (\sqrt{b} + \sqrt{c})^4 + (\sqrt{b} + \sqrt{d})^4 + (\sqrt{c} + \sqrt{d})^4$$

với  $a, b, c, d > 0$  và  $a+b+c+d=1$ .

140. Tìm giá trị nhỏ nhất của  $A = 3^x + 3^y$  với  $x+y=4$ .

141. Tìm GTNN của  $A = \frac{b}{c+d} + \frac{c}{a+b}$  với  $b+c \geq a+d$ ;  $b, c > 0$ ;  $a, d \geq 0$ .

142. Giải các phương trình sau :

a)  $x^2 - 5x - 2\sqrt{3x} + 12 = 0$       b)  $x^2 - 4x = 8\sqrt{x-1}$       c)  $\sqrt{4x+1} - \sqrt{3x+4} = 1$   
d)  $\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1} = 2$       e)  $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-1} = 1$       g)  $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}} = \sqrt{2}$   
h)  $\sqrt{x+2-4\sqrt{x-2}} + \sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}} = 1$       i)  $\sqrt{x} + \sqrt{x+\sqrt{1-x}} = 1$

k)  $\sqrt{1-\sqrt{x^2-x}} = \sqrt{x}-1$       l)  $\sqrt{2x^2+8x+6} + \sqrt{x^2-1} = 2x+2$

m)  $\sqrt{x^2+6} = x-2\sqrt{x^2-1}$       n)  $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+10} = \sqrt{x+2} + \sqrt{x+5}$

o)  $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} + 2\sqrt{(x-1)(x^2-3x+5)} = 4-2x$

p)  $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+2} + \sqrt{2x+2-\sqrt{x+2}} = 1+2\sqrt{x+2}$ .

q)  $\sqrt{2x^2-9x+4} + 3\sqrt{2x-1} = \sqrt{2x^2+21x-11}$

143. Rút gọn biểu thức :  $A = (2\sqrt{2} - \sqrt{5} + 3\sqrt{2})(\sqrt{18} - \sqrt{20} + 2\sqrt{2})$ .

144. Chứng minh rằng,  $\forall n \in \mathbf{Z}_+$ , ta luôn có :

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - 1).$$

145. Trục căn thức ở mẫu : a)  $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{5}}$       b)  $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$ .

146. Tính :

a)  $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-6\sqrt{20}}}}$       b)  $\sqrt{6+2\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$       c)  $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$

147. Cho  $a = \sqrt{3-\sqrt{5}} \cdot (3+\sqrt{5})(\sqrt{10}-\sqrt{2})$ . Chứng minh rằng a là số tự nhiên.

148. Cho  $b = \frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{17-12\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{17+12\sqrt{2}}}$ . b có phải là số tự nhiên không ?

149. Giải các phương trình sau :

a)  $(\sqrt{3}-1)x - x + 4 - \sqrt{3} = 0$       b)  $(\sqrt{3}-1)x = 2(\sqrt{3}+1)x - 3\sqrt{3}$

c)  $\frac{(5-x)\sqrt{5-x} + (x-3)\sqrt{x-3}}{\sqrt{5-x} + \sqrt{x-3}} = 2$       d)  $x + \sqrt{x-5} = 5$

150. Tính giá trị của biểu thức :

$$M = \sqrt{|12\sqrt{5}-29|} + \sqrt{25+4\sqrt{21}} - \sqrt{12\sqrt{5}+29} - \sqrt{25-4\sqrt{21}}$$

151. Rút gọn :  $A = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$ .