**Ngày soạn:**……………………..
**Ngày dạy**: ……………………..

# CĂN BẬC HAI. CĂN THỨC BẬC HAI VÀ HẰNG ĐẲNG THỨC

**A./ Kiến thức cơ bản:**

1. Căn bậc hai

- Định nghĩa: Căn bậc hai của số thực a là số x sao cho $x^2 = a$.
- Chú ý:

+ Mỗi số thực a > 0, có đúng 2 căn bậc hai là 2 số đối nhau: số dương: $\sqrt{a}$, số âm: $-\sqrt{a}$

+ Số 0 có căn bậc hai là chính nó: $\sqrt{0} = 0$

+ Số thực a < 0 không có căn bậc hai (tức $\sqrt{a}$ không có nghĩa khi a < 0).

2. Căn bậc hai số học

- Định nghĩa: Với $a \ge 0$ thì số $x = \sqrt{a}$ được gọi là căn bậc hai số học của a. Số 0 cũng được gọi là căn bậc hai số học của 0.
- Chú ý: Việc tìm căn bậc hai số học của 1 số không âm được gọi là phép khai phương.
- Định lý: Với a, b > 0, ta có:

+ Nếu $\mathrm{a} < \mathrm{b} \Rightarrow \sqrt{\mathrm{a}} < \sqrt{b}$

+ Nếu $\sqrt{\mathrm{a}} < \sqrt{b} \Rightarrow \mathrm{a} < \mathrm{b}$

3. Căn thức bậc hai

- Cho A là 1 biểu thức thì biểu thức $\sqrt{A}$ được gọi là căn thức bậc hai của A ; A được gọi là biểu thức lấy căn hay biểu thức dưới dấu căn.
- $\sqrt{A}$ có nghĩa (hay xác định hay tồn tại) $\Leftrightarrow A \ge 0$

4. Hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$

- Định lý : Với mọi số thực a, ta có : $\sqrt{a^2} = |a|$
- Tổng quát : Với A là biểu thức, ta có : $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A \text{ nêu } A \ge 0 \\ -A \text{ nêu } A<0 \end{cases}$

**B./ Bài tập áp dụng**

**Dạng 1 : Tìm căn bậc hai, căn bậc hai số học**

* Phương pháp :

- Viết số đã cho dưới dạng bình phương của một số.
- Tìm căn bậc hai số học của số đã cho.
- Xác định căn bậc hai của số đã cho.

**Bài 1** : Tìm căn bậc hai của các số sau : 121 ; 144 ; 324 ; $\frac{1}{64}$ ; $3-2\sqrt{2}$

***LG***

+ Ta có CBHSH của 121 là : $\sqrt{121} = \sqrt{11^2} = 11$ nên CBH của 121 là 11 và -11

+ CBHSH của 144 là : $\sqrt{144}=\sqrt{12^2}=12$ nên CBH của 121 là 12 và -12
+ CBHSH của 324 là : $\sqrt{324}=\sqrt{18^2}=18$ nên CBH của 324 là 18 và -18
+ CBHSH của $\frac{1}{64}$ là : $\sqrt{\frac{1}{64}}=\sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2}=\frac{1}{8}$ nên CBH của $\frac{1}{64}$ là $\frac{1}{8}$ và $-\frac{1}{8}$
+ Ta có : $3-2\sqrt{2}=2-2\sqrt{2}+1=\left(\sqrt{2}-1\right)^2=\sqrt{2}-1(\,vi\ \sqrt{2}-1>0)$ nên CBH của $3-2\sqrt{2}$ là $\sqrt{2}-1$ và $-\sqrt{2}+1$

**Dạng 2 : So sánh các căn bậc hai số học**

* Phương pháp :

- Xác định bình phương của hai số.
- So sánh các bình phương của hai số.
- So sánh giá trị các CBHSH của các bình phương của hai số.

**Bài 2** : So sánh

a) 2 và $\sqrt{3}$ b) 7 và $\sqrt{47}$ c) $2\sqrt{33}$ và 10

d) 1 và $\sqrt{3}-1$ e) $\sqrt{3}$ *và* 5-$\sqrt{8}$ g) $\sqrt{2}+\sqrt{11}$ *và* $\sqrt{3}+5$

***LG***

a) Vì 4 > 3 nên $\sqrt{4}>\sqrt{3}\Rightarrow 2>\sqrt{3}$

b) Vì 49 > 47 nên $\sqrt{49}>\sqrt{47}\Rightarrow 7>\sqrt{47}$

c) Vì 33 > 25 nên $\sqrt{33}>\sqrt{25}\Rightarrow\sqrt{33}>5\Rightarrow 2\sqrt{33}>10$

d) Vì 4 > 3 nên $\sqrt{4}>\sqrt{3}\Rightarrow 2>\sqrt{3}\Rightarrow 2-1>\sqrt{3}-1\Rightarrow 1>\sqrt{3}-1$

e) * Cách 1: Ta có: $\left.\begin{matrix}\sqrt{3}<2\\ \sqrt{8}<3\end{matrix}\right\}\Rightarrow\sqrt{3}+\sqrt{8}<5\Rightarrow\sqrt{3}<5-\sqrt{8}$

* Cách 2: giả sử

$\sqrt{3}<5-\sqrt{8}\Leftrightarrow\sqrt{3}+\sqrt{8}<5\Leftrightarrow\left(\sqrt{3}+\sqrt{8}\right)^2<5^2\Leftrightarrow 3+2\sqrt{24}+8<25$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{24}<14\Leftrightarrow\sqrt{24}<7\Leftrightarrow 24<49$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng do đó bất đẳng thức đầu tiên đúng.

g) Ta có: $\left.\begin{matrix}\sqrt{2}<\sqrt{3}\\ \sqrt{11}<5\end{matrix}\right\}\Rightarrow\sqrt{2}+\sqrt{11}<\sqrt{3}+5$

**Dạng 3: Tìm điều kiện để căn thức xác định: $\sqrt{A}$ xác định** $\Leftrightarrow A\ge 0$

**Bài 3**: Tìm điều kiện của x để các biểu thức sau xác định:

$a)\sqrt{\frac{2}{3}x-\frac{1}{5}}$ $b)\sqrt{x^2+2}$ $c)\sqrt{\frac{1+x}{2x-3}}$ $d)\sqrt{3x-5}+\sqrt{\frac{2}{x-4}}$

***LG***

Để các căn thức trên có nghĩa thì:

a) $\frac{2}{3}x-\frac{1}{5}\ge 0\Leftrightarrow\frac{2}{3}x\ge\frac{1}{5}\Leftrightarrow x\ge\frac{3}{10}$

b) Ta có: $x^2+2>0,\forall x\Rightarrow\sqrt{x^2+2}$ xác định với mọi x

c) $\frac{1+x}{2x-3} \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1+x \ge 0 \\ 2x-3 > 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} 1+x \le 0 \\ 2x-3 < 0 \end{cases}$

+ Với $\begin{cases} 1+x \ge 0 \\ 2x-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ x > \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$

+ Với $\begin{cases} 1+x \le 0 \\ 2x-3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -1 \\ x < \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \le -1$

Vậy căn thức xác định nếu $x > \frac{3}{2}$ hoặc $x \le -1$

d) $\begin{cases} 3x-5 \ge 0 \\ \frac{2}{x-4} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-5 \ge 0 \\ x-4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \frac{5}{3} \\ x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow x > 4$

## Dạng 4 : Rút gọn biểu thức

**Bài 4**: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{4-2\sqrt{3}}$

c) $C = \sqrt{9x^2} - 2x\,(x<0)$

b) $B = \sqrt{6+2\sqrt{5}} + \sqrt{6-2\sqrt{5}}$

d) $D = x - 4 + \sqrt{16-8x+x^2}\ (x > 4)$

***LG***

a) Cách 1 : $A = \sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2} = \sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1 = 2\sqrt{3}$

Cách 2 :

$A^2 = 4+2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}+2\sqrt{(4-2\sqrt{3}).(4+2\sqrt{3})} = 8+2\sqrt{16-12} = 8+2.2 = 12$

$\Rightarrow A = 2\sqrt{3}$

b) $B = \sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2} = \sqrt{5}+1+\sqrt{5}-1 = 2\sqrt{5}$

c) $C = \sqrt{\left(3x\right)^2} - 2x = |3x| - 2x = -3x - 2x = -5x\,(vi\ x<0)$

d)

$D = x-4+\sqrt{16-8x+x^2} = x-4+\sqrt{(4-x)^2} = x-4+|4-x| = x-4+x-4 = 2(x-4)\,(vi\ x>4)$

## Dạng 5 : Tìm Min, Max

**Bài 5** : Tìm Min

$a)\ y = \sqrt{x^2-2x+5}$

$b)\ y = \sqrt{\frac{x^2}{4} - \frac{x}{6} + 1}$

***LG***

a) Ta có : $x^2-2x+5 = (x-1)^2+4 \ge 4 \Rightarrow \sqrt{x^2-2x+5} \ge \sqrt{4} = 2$

vậy Miny = 2. dấu ‘‘ = ’’ xảy ra khi và chỉ khi x – 1 = 0 => x = 1

b) Ta có : $\frac{x^2}{4}-\frac{x}{6}+1=\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{35}{36}\ge\frac{35}{36}\Rightarrow y=\sqrt{\frac{x^2}{4}-\frac{x}{6}+1}\ge\sqrt{\frac{35}{36}}=\frac{\sqrt{35}}{6}$

vậy Miny = $\frac{\sqrt{35}}{6}$ . Dấu « = » xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x}{2}-\frac{1}{6}=0\Leftrightarrow\frac{x}{2}=\frac{1}{6}\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$

*************************************************

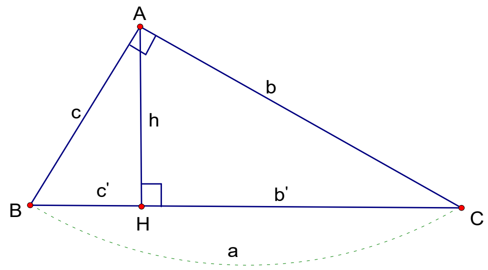
**Ngày dạy**: ……………………..

## VẬN DỤNG CÁC HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC VUÔNG

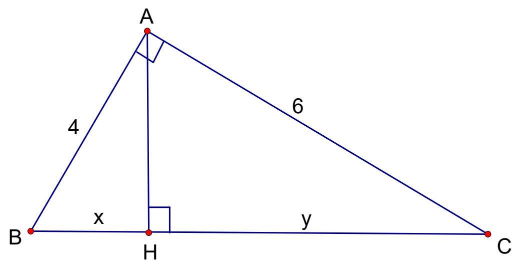
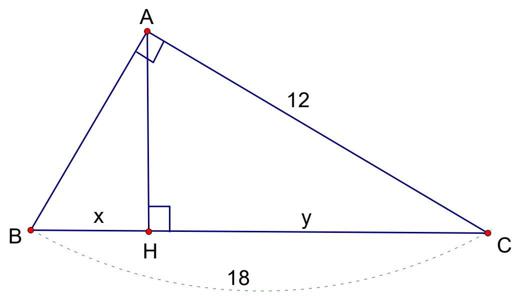
### A./ Kiến thức cơ bản

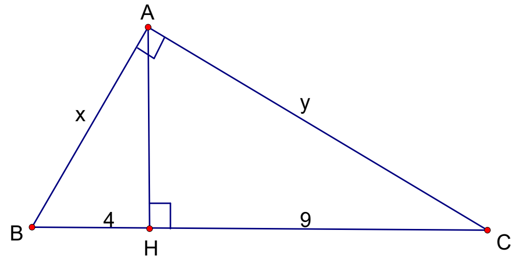
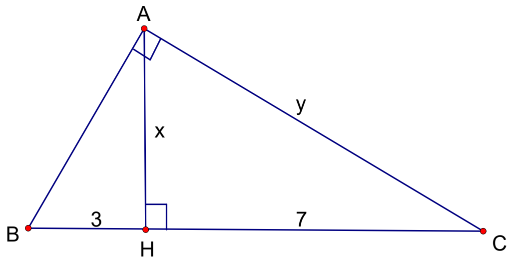
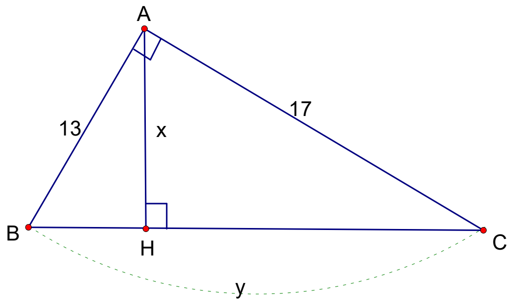
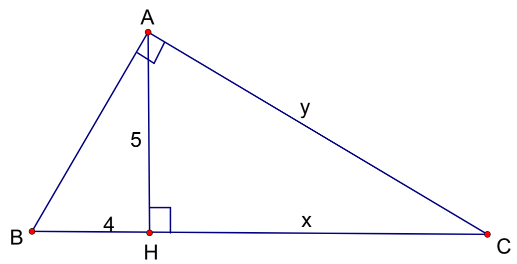
Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH sao cho ta có:
$AH=h, BC=a, AB=c, AC=b, BH=c', CH=b'$ khi đó:

### B./ Bài tập áp dụng

| | |
|---|---|
| 1) $b^2=a.b'$; $c^2=a.c'$<br>2) $h^2=b'.c'$ 3) $b.c=a.h$<br>4) $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$<br>5) $a^2=b^2+c^2$ $(Pitago)$ | <br> |

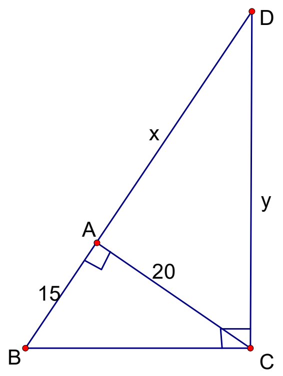
**Bài 1** : Tìm x, y trong các hình vẽ sau:

| | |
|---|---|
| a)<br><br> | + ta có:<br>$BC=\sqrt{AB^2+AC^2}$ $(Pitago)$<br>$\Rightarrow BC=\sqrt{4^2+6^2}=\sqrt{52}\approx 7,21$<br>+ Áp dụng định lý 1 :<br>$AB^2=BC.BH\Rightarrow 4^2=\sqrt{52}.x\Rightarrow x\approx 2,22$<br>$AC^2=BC.CH\Rightarrow 6^2=\sqrt{52}.y\Rightarrow y\approx 4,99$<br>Hay y = BC – x = 7,21 – 2,22 = 4,99 |
| b)<br><br> | - Xét tam giác ABC vuông tại A. áp dụng định lý 1 ta có :<br>$AC^2=BC.CH\Rightarrow 12^2=18.y\Rightarrow y=8$<br>$\Rightarrow x=BC-y=18-8=10$ |

<table>
<tr>
<td>c)<br><br></td>
<td>* Cách 1 :<br>$AH^2 = BH.CH = 4.9 = 36 \Rightarrow AH = 6$<br>Theo Pitago cho các tam giác vuông AHB; AHC ta có:<br>$x = \sqrt{BH^2 + AH^2} = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52}$<br>$y = \sqrt{CH^2 + AH^2} = \sqrt{6^2 + 9^2} = \sqrt{117}$<br>* Cách 2: Áp dụng định lý 1 ta có:<br>$AB^2 = BC.BH = (BH + CH).BH = (4+9).4 = 52$<br>$\Rightarrow AB = \sqrt{52} \Rightarrow x = \sqrt{52}$<br>$AC^2 = BC.CH = (BH + CH).CH = (4+9).9 = 117$<br>$\Rightarrow AC = \sqrt{117} \Rightarrow y = \sqrt{117}$</td>
</tr>
<tr>
<td>d)<br><br></td>
<td>Áp dụng định lý 2, ta có:<br>$AH^2 = BH.CH \Rightarrow x^2 = 3.7 = 21 \Leftrightarrow x = \sqrt{21}$<br>Áp dụng định lý 1. ta có :<br>$AC^2 = BC.CH = (BH + CH).CH$<br>$\Rightarrow y^2 = (3+7).7 = 70 \Leftrightarrow y = \sqrt{70}$<br>$(y = \sqrt{x^2 + CH^2} = \sqrt{21+49} = \sqrt{70})$</td>
</tr>
<tr>
<td>e)<br><br></td>
<td>Theo Pitago, ta có :<br>$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} \Rightarrow y = \sqrt{13^2 + 17^2} = \sqrt{458}$<br>Áp dụng định lý 3, ta có :<br>$AB.AC = BC.AH$<br>$\Rightarrow 13.17 = \sqrt{458}.x \Leftrightarrow x = \dfrac{221}{\sqrt{458}} \approx 10,33$</td>
</tr>
<tr>
<td>g)<br><br></td>
<td>Áp dụng định lý 2, ta có :<br>$AH^2 = BH.CH \Rightarrow 5^2 = 4.x \Leftrightarrow x = \dfrac{5^2}{4} = 6,25$<br>Theo Pitago cho tam giác AHC vuông tại H, ta có :<br>$y = \sqrt{AH^2 + CH^2} = \sqrt{5^2 + 6,25^2} \approx 8$<br>$(DL1: y^2 = BC.x = (4+6,25).6,25 \Leftrightarrow y \approx 8)$</td>
</tr>
</table>

**Bài 2** : Cho tam giác ABC vuông tại A, có các cạnh góc vuông AB = 15cm, AC = 20cm. Từ C kẻ đường vuông góc với cạnh huyền, đường này cắt đường thẳng AB tại D. Tính AD và CD?

**LG**




$\Delta BCD, \hat{C} = 90^0, CA \perp BD$. Theo định lý 3, ta có: $CA^2 = AB.AD \Rightarrow 20^2 = 15.AD \Leftrightarrow AD = \dfrac{80}{3}$

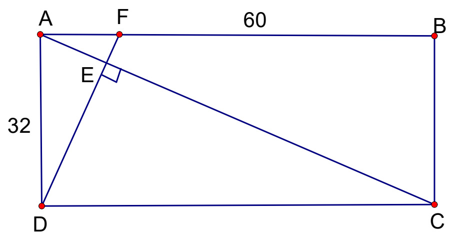
Theo Pitago trong tgiác ACD vuông tại A, ta có: $CD = \sqrt{AD^2 + CA^2} = \sqrt{\left(\dfrac{80}{3}\right)^2 + 20^2} = \dfrac{100}{3}$

**Bài 3**: Cho hình chữ nhật ABCD có AB = 60cm, AD = 32cm. Từ D kẻ đường thẳng vuông góc với đường chéo AC, đường thẳng này cắt AC tại E và AB tại F. Tính độ dài EA, EC, ED, FB, FD.

**LG**

Xét tam giác ADC vuông tại D, ta có: $AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{32^2 + 60^2} = 68$

Theo định lý 1: $AD^2 = AC.AE \Leftrightarrow AE = \dfrac{AD^2}{AC} = \dfrac{32^2}{68} = \dfrac{256}{17}$




Theo định lý 1, ta có:

$CD^2 = AC.CE \Rightarrow CE = \dfrac{CD^2}{AC} = \dfrac{60^2}{68} = \dfrac{900}{17}$

Theo định lý 2, ta có:

$DE = \sqrt{AE.EC} = \sqrt{...} = \dfrac{480}{17}$

Xét tam giác DAF, theo định lý 1: $AD^2 = DF.DE \Rightarrow DF = \dfrac{AD^2}{DE} = ... = \dfrac{544}{15}$

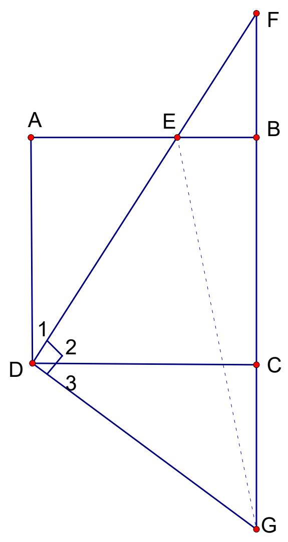
Theo Pitago: $AF = \sqrt{DF^2 - AD^2} = .... = \dfrac{256}{15} \Rightarrow FB = AB - AF = 60 - \dfrac{256}{15} = \dfrac{644}{15}$

**Bài 4**: Cho hình vuông ABCD. Gọi E là một điểm nằm giữa A, B. Tia DE và tia CB cắt nhau ở F. Kẻ đường thẳng qua D vuông góc với DE, đường thẳng này cắt đường thẳng BC tại G. Chứng minh rằng:

a) Tam giác DEG cân.

b) Tổng $\dfrac{1}{DE^2} + \dfrac{1}{DF^2}$ không đổi khi E chuyển động trên AB.

**LG**




a) Ta có: $\widehat{D}_1 = \widehat{D}_3$ (cùng phụ với $\widehat{D}_2$)

xét $\Delta ADE$ và $\Delta CDG$ ta có :

$$\left.\begin{array}{l} AD = DC(gt) \\ \angle D_1 = \angle D_3\,(cmt) \\ \angle A = \angle C = 90^0 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ADE = \Delta CDG\,(g\,c\,g)$$

$\Rightarrow DE = DG \Rightarrow \Delta DEG$ cân tại D

b) vì DE = DG $\Rightarrow \dfrac{1}{DE^2} = \dfrac{1}{DG^2}$

ta có : $\dfrac{1}{DE^2} + \dfrac{1}{DF^2} = \dfrac{1}{DG^2} + \dfrac{1}{DF^2}$

xét tam giác DGF vuông tại D, ta có :

$\dfrac{1}{CD^2} = \dfrac{1}{DG^2} + \dfrac{1}{DF^2}$ (định lý 4)

Vì $\dfrac{1}{CD^2}$ không đổi khi E chuyển động trên AB, suy ra tổng $\dfrac{1}{DE^2} + \dfrac{1}{DF^2} = \dfrac{1}{DG^2} + \dfrac{1}{DF^2}$ không đổi khi E thay đổi trên AB.

**Ngày soạn:**……………………..
**Ngày dạy**: ……………………..

## CÁC PHÉP TÍNH VỀ CĂN BẬC HAI

**A./ Kiến thức cơ bản** :

1. Khai phương một tích. Nhân các căn bậc hai.

a) Định lý : $a;b \geq 0, ta\,có: \sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$

b) Quy tắc khai phương một tích : Muốn khai phương một tích các số không âm, ta có thể khai phương từng thừa số rồi nhân các kết quả với nhau ( $a;b \geq 0, ta\,có: \sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$ )

c) Quy tắc nhân các căn bậc hai : Muốn nhân các CBH của các số không âm, ta có thể nhân các số dưới dấu căn với nhau rồi khai phương kết quả đó ( $a;b \geq 0: \sqrt{a}.\sqrt{b} = \sqrt{a.b}$ )

d) Chú ý :

- Với A > 0 ta có : $\left(\sqrt{A}\right)^2 = \sqrt{A^2} = A$
- Nếu A, B là các biểu thức : $A;B \geq 0\,ta\,có: \sqrt{A.B} = \sqrt{A}.\sqrt{B}$
- Mở rộng : $\sqrt{A.B.C} = \sqrt{A}.\sqrt{B}.\sqrt{C}\;\;(A,B,C \geq 0)$

2. Khai phương một thương. Chia các căn bậc hai

a) Định lý : $a \ge 0, b > 0$ $ta\,có$: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

b) Quy tắc khai phương một thương : Muốn khai phương một thương $\frac{a}{b}$, trong đó số a không âm và số b dương, ta có thể lần lượt khai phương số a và số b, rồi lấy kết quả thứ nhất chia cho kết quả thứ hai ( $a \ge 0, b > 0$ $ta\,có$: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$. )

c) Quy tắc chia hai CBH : Muốn chia CBH của số a không âm cho số b dương, ta có thể chia số a cho số b rồi khai phương kết quả đó ( $a \ge 0, b > 0 : \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ )

d) Chú ý : Nếu A, B là biểu thức : $A \ge 0, B > 0 : \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A}{B}}$

**B./ Bài tập áp dụng** :

## Dạng 1 : Tính

**Bài 1** : Thực hiện phép tính:

$$a)\sqrt{1\frac{24}{25}.5\frac{1}{16}.0,01} = \sqrt{\frac{49}{25}.\frac{81}{16}.\frac{1}{100}} = \sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2}.\sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^2}.\sqrt{\left(\frac{1}{10}\right)^2} = \frac{7}{5}.\frac{9}{4}.\frac{1}{10} = \frac{63}{200}$$

$$b)\sqrt{2,25.1,46-2,25.0,02} = \sqrt{2,25(1,46-0,02)} = \sqrt{2,25.1,44} = \sqrt{(1,5.1,2)^2} = 1,5.1,2 = 1,8$$

$$c)\sqrt{2,5.16,9} = \sqrt{\frac{25}{10}.\frac{169}{10}} = \sqrt{\frac{(5.13)^2}{10^2}} = \frac{5.13}{10} = \frac{13}{2}$$

$$d)\sqrt{117,5^2-26,5^2-1440} = \sqrt{(117,5+26,5).(117,5-26,5)-1440} = \sqrt{144.91-144.10}$$
$$= \sqrt{144(91-10)} = \sqrt{144.81} = \sqrt{(12.9)^2} = 108$$

## Dạng 2 : Rút gọn các biểu thức

**Bài 2** : Tính giá trị các biểu thức:

$$a)\,A = \sqrt{0,1}+\sqrt{0,9}+\sqrt{6,4}+\sqrt{0,4}+\sqrt{44,1} = \sqrt{\frac{1}{10}}+\sqrt{\frac{9}{10}}+\sqrt{\frac{64}{10}}+\sqrt{\frac{4}{10}}+\sqrt{\frac{441}{10}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{10}}+\frac{3}{\sqrt{10}}+\frac{8}{\sqrt{10}}+\frac{2}{\sqrt{10}}+\frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{35}{\sqrt{10}} = \frac{35\sqrt{10}}{10} = \frac{7\sqrt{10}}{2}$$

$$b)\,B = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{14}}{2\sqrt{3}+\sqrt{28}} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)}{2\sqrt{3}+2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)}{2(\sqrt{3}+\sqrt{7})} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$c)\quad C=\dfrac{3+\sqrt{5}}{4-\sqrt{3}}+\dfrac{3-\sqrt{5}}{4+\sqrt{3}}=\dfrac{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(4+\sqrt{3}\right)+\left(3-\sqrt{5}\right)\left(4-\sqrt{3}\right)}{\left(4+\sqrt{3}\right)\left(4-\sqrt{3}\right)}$

$=\dfrac{12+3\sqrt{3}+4\sqrt{5}+\sqrt{15}+12-3\sqrt{3}-4\sqrt{5}+\sqrt{15}}{16-3}=\dfrac{24+2\sqrt{15}}{13}$

**Bài 3** : Rút gọn các biểu thức:

a) $\sqrt{9(x-5)^2}\ \ (x\ge 5)=3|x-5|=3(x-5)$

b) $\sqrt{x^2.(x-2)^2}\ \ (x<0)=|x|.|x-2|=-x(2-x)=x(x-2)$

c) $\dfrac{\sqrt{108x^3}}{\sqrt{12x}}\ \ (x>0)=\sqrt{\dfrac{108x^3}{12x}}=\sqrt{9x^2}=3|x|=3x$

d) $\dfrac{\sqrt{13x^4y^6}}{\sqrt{208x^6y^6}}\ \ (x<0;y\ne 0)=\sqrt{\dfrac{13x^4y^6}{208x^6y^6}}=\sqrt{\dfrac{1}{16x^2}}=\dfrac{1}{4|x|}=\dfrac{1}{-4x}=\dfrac{-1}{4x}$

## Dạng 3 : Chứng minh

**Bài 4** : Chứng minh các biểu thức sau:

$a)\ \sqrt{6+\sqrt{35}}.\sqrt{6-\sqrt{35}}=1$

$VT=\sqrt{(6+\sqrt{35}).(6-\sqrt{35})}=\sqrt{36-35}=1=VP$

$b)\ \sqrt{9-\sqrt{17}}.\sqrt{9+\sqrt{17}}=8$

$VT=\sqrt{(9-\sqrt{17}).(9+\sqrt{17})}=\sqrt{81-17}=\sqrt{64}=8=VP$

$c)\ \left(\sqrt{2}-1\right)^2=\sqrt{9}-\sqrt{8}$

$\left.\begin{array}{l}VT=2-2\sqrt{2}+1=3-2\sqrt{2}\\ VP=3-\sqrt{2^2.2}=3-2\sqrt{2}\end{array}\right\}\Rightarrow VT=VP$

$d)\ \left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)^2=\sqrt{49}-\sqrt{48}$

$\left.\begin{array}{l}VT=4-2\sqrt{12}+3=7-2\sqrt{2^2.3}=7-4\sqrt{3}\\ VP=7-\sqrt{4^2.3}=7-4\sqrt{3}\end{array}\right\}\Rightarrow VT=VP$

$e)\ 2\sqrt{2}\left(2-3\sqrt{3}\right)+\left(1-2\sqrt{2}\right)^2+6\sqrt{6}=9$

$VT=4\sqrt{2}-6\sqrt{6}+1-4\sqrt{2}+8+6\sqrt{6}=9=VP$

$g)\ \sqrt{8-2\sqrt{15}}-\sqrt{8+2\sqrt{15}}=-2\sqrt{3}$

$VT=\sqrt{\left(5-2.\sqrt{5}.\sqrt{3}+3\right)}-\sqrt{\left(5+2.\sqrt{5}.\sqrt{3}+3\right)}=\sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2}$

$=\sqrt{5}-\sqrt{3}-\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)=\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{5}-\sqrt{3}=-2\sqrt{3}=VP$

## Dạng 4 : Giải phương trình

**Bài 5** : Giải các phương trình sau:

$a)\ 2\sqrt{2x}-5\sqrt{8x}+7\sqrt{18x}=28 \quad (1) \qquad dk: x\ge 0$

$(1)\Leftrightarrow 2\sqrt{2x}-5.2.\sqrt{2x}+7.3.\sqrt{2x}=28\Leftrightarrow 13\sqrt{2x}=28\Leftrightarrow \sqrt{2x}=\dfrac{28}{13}\Leftrightarrow 2x=\dfrac{784}{169}\Leftrightarrow x=\dfrac{392}{169}\ (tm)$

$b)\ \sqrt{4x-20}+\sqrt{x-5}-\dfrac{1}{3}\sqrt{9x-45}=4 \quad (2)$

$(2)\Leftrightarrow \sqrt{4(x-5)}+\sqrt{x-5}-\dfrac{1}{3}\sqrt{9(x-5)}=4 \qquad dk: x-5\ge 0\Leftrightarrow x\ge 5$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-5}+\sqrt{x-5}-\dfrac{1}{3}.3\sqrt{x-5}=4\Leftrightarrow 2\sqrt{x-5}=4\Leftrightarrow \sqrt{x-5}=2\Leftrightarrow x-5=4\Leftrightarrow x=9\ (tm)$

$c)\ \sqrt{\dfrac{3x-2}{x+1}}=3$ (3) đk : $\dfrac{3x-2}{x+1}\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}3x-2\ge 0\\ x+1>0\end{cases}\\ \begin{cases}3x-2\le 0\\ x+1<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge \dfrac{2}{3}\\ x>-1\end{cases}\\ \begin{cases}x\le \dfrac{2}{3}\\ x<-1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\ge \dfrac{2}{3}\\ x<-1\end{array}\right.$

Ta có $(3)\Leftrightarrow \dfrac{3x-2}{x+1}=9\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow 6x=-11\Leftrightarrow x=\dfrac{-11}{6}$ thỏa mãn

$d)\ \dfrac{\sqrt{5x-4}}{\sqrt{x+2}}=2$ (4) đk : $\begin{cases}5x-4\ge 0\\ x+2>0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge \dfrac{4}{5}\\ x>-2\end{cases}\Leftrightarrow x\ge \dfrac{4}{5}$

$(4)\Leftrightarrow \sqrt{5x-4}=2\sqrt{x+2}\Leftrightarrow 5x-4=4(x+2)\Leftrightarrow .....\Leftrightarrow x=12$ thỏa mãn

**Bài tập** : (bất đẳng thức Cauchy) : Cho 2 số a và b không âm. Chứng minh rằng $\dfrac{a+b}{2}\ge \sqrt{ab}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

**LG**

* Cách 1 :

+ vì $a\ge 0; b\ge 0\Rightarrow \sqrt{a};\sqrt{b}$ xác định.

+ ta có : $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\ge 0\Leftrightarrow a-2\sqrt{ab}+b\ge 0\Leftrightarrow a+b\ge 2\sqrt{ab}\Leftrightarrow \dfrac{a+b}{2}\ge \sqrt{ab}$

+ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b

* Cách 2 : ta có

$(a-b)^2\ge 0\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2\ge 0\Leftrightarrow a^2+b^2\ge 2ab\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2\ge 4ab$

$\Leftrightarrow (a+b)^2\ge 4ab\Leftrightarrow a+b\ge 2\sqrt{ab}\Leftrightarrow \dfrac{a+b}{2}\ge \sqrt{ab}$

*******************************************************

**Ngày soạn:**……………………..
**Ngày dạy**: ……………………..

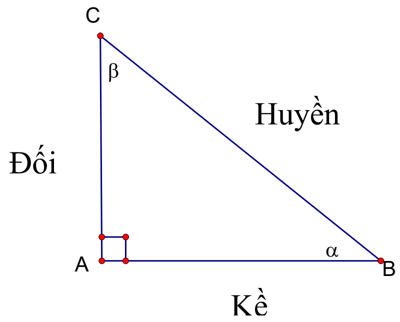
# TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

## A. Kiến thức cơ bản

1. Định nghĩa : Cho $\angle ABC = \alpha \ (0^0 < \alpha < 90^0)$ ta định nghĩa các tỉ số giữa các cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC vuông tại A như sau:

$\sin\alpha = \dfrac{AC}{BC};\qquad \cos\alpha = \dfrac{AB}{BC}$

$tg\alpha = \dfrac{AC}{AB};\qquad \cot g\alpha = \dfrac{AB}{AC}$




* Nhận xét : từ định nghĩa ta thấy : + tỉ số lượng giác của 1 góc nhọn luôn dương

+ 0 < sin, cos < 1 + $\cot g\alpha = \dfrac{1}{tg\alpha}; tg\alpha.\cot g\alpha = 1$

2. Tỉ số lượng giác của 2 góc phụ nhau.

- Định lý : nếu 2 góc phụ nhau thì sin góc này bằng cosin góc kia, tg góc này bằng cotg góc kia. Tức: nếu $\alpha + \beta = 90^0$ thì ta có :

$$\begin{cases} \sin\alpha = \cos\beta; & \cos\alpha = \sin\beta \\ tg\alpha = \cot g\beta; & \cot g\alpha = tg\beta \end{cases}$$

3. Bảng các tỉ số lượng giác của các góc đặc biệt:

| $\alpha$ / Tỉ số lượng giác | $30^0$ | $45^0$ | $60^0$ |
|---|---|---|---|
| Sin | $\dfrac{1}{2}$ | $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ | $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ |
| Cos | $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ | $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ | $\dfrac{1}{2}$ |
| tg | $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ |
| Cotg | $\sqrt{3}$ | 1 | $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ |

* Nhận xét :

- Dựa vào bảng trên ta thấy:

với $0^0 < \alpha_1; \alpha_2 < 90^0$ và $\alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha_1 < \sin\alpha_2; & tg\alpha_1 < tg\alpha_2 \\ \cos\alpha_1 > \cos\alpha_2; & \cot g\alpha_1 > \cot g\alpha_2 \end{cases}$.

Tức là :

+ góc lớn hơn thì có sin lớn hơn, nhưng lại có cosin nhỏ hơn.
+ góc lớn hơn thì có tg lớn hơn, nhưng lại có cotg nhỏ hơn.
Hay ta có thể phát biểu : $0^0 < \alpha < 90^0$ thì :
+ sin và tg đồng biến với góc $\alpha$ .
+ cosin và cotg nghịch biến với góc $\alpha$ .
4. Các hệ thức cơ bản:

$(1)\ tg = \dfrac{\sin}{\cos};$ $\qquad (3)\ tg.\cot g = 1;$

$(2)\ cotg = \dfrac{\cos}{\sin};$ $\qquad (4)\ \sin^2 + \cos^2 = 1$

**B. Bài tập áp dụng**

**Bài 1** : Cho biết sin = 0,6. Tính cos, tg và cotg?

+ ta có: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-0,6^2} = 0,8$

+ $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{0,6}{0,8} = \dfrac{3}{4};$ $\qquad cotg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{0,8}{0,6} = \dfrac{4}{3}$

**Bài 2**:

**1**. Chứng minh rằng:

$a)\ tg^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha};\ \ b)\ cotg^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\sin^2\alpha};\ \ c)\ \cos^4\alpha - \sin^4\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

**2**. Áp dụng: tính sin, cos, cotg, biết tg = 2

**LG**

1. a) ta có:

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Leftrightarrow tg^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow tg^2\alpha + 1 = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1$$

$$\Leftrightarrow tg^2\alpha + 1 = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

b) $VT = \cot g^2\alpha + 1 = \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} + 1 = \dfrac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \dfrac{1}{\sin^2\alpha} = VP$

c)

$$VT = \cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right).\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$= \cos^2\alpha - \left(1 - \cos^2\alpha\right) = \cos^2\alpha - 1 + \cos^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = VP$$

2. Ta có: