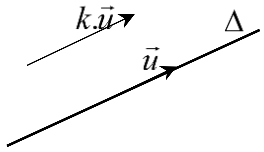
CHUYÊN ĐỀ: PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

I. HỆ THỐNG KIẾN THỨC LIÊN QUAN

1. Vectơ chỉ phương của đường thẳng

Cho đường thẳng Δ. Vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$ gọi là véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ nếu giá của nó song song hoặc trùng với Δ.

Chú ý:



* Nếu $\vec{u}$ là VTCP của Δ thì $k.\vec{u}$ $(k \neq 0)$ cũng là VTCP của Δ.

* Nếu đường thẳng Δ đi qua hai điểm A, B thì $\overrightarrow{AB}$ là một VTCP.

* Ta chứng minh được nếu hai véc tơ không cùng phương $\vec{a}, \vec{b}$ có giá cùng vuông góc với đường thẳng Δ thì $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ là một véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ.

2. Phương trình tham số của đường thẳng

Cho đường thẳng Δ đi qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và có VTCP $\vec{u} = (a; b; c)$. Khi đó phương trình đường thẳng Δ có dạng: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ (1).

(1) được gọi là phương trình tham số của đường thẳng Δ, t được gọi là tham số.

Chú ý: Cho đường thẳng Δ có phương trình (1)

- $\vec{u} = (a; b; c)$ là một VTCP của Δ.
- Điểm $M \in \Delta$, suy ra $M(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)$.

3. Phương trình chính tắc

Cho đường thẳng Δ đi qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và có VTCP $\vec{u} = (a; b; c)$ với $abc \neq 0$. Khi đó phương trình đường thẳng Δ có dạng: $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$ (2).

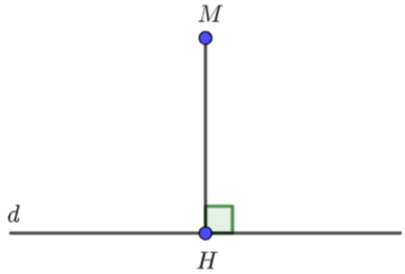
(2) được gọi là phương trình chính tắc của đường thẳng Δ.

4. Hình chiếu của điểm trên đường thẳng

Định nghĩa 1: Trong không gian, cho điểm M và đường thẳng d.

- Nếu $M \in d$ thì hình chiếu của M trên đường thẳng d là chính nó.

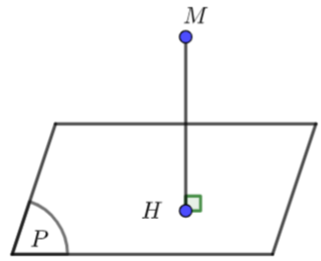
- Nếu $M \notin d$ thì hình chiếu của M trên đường thẳng d là điểm $H \in d$ sao cho $MH \perp d$



Định nghĩa 2: Trong không gian, cho điểm M và mặt phẳng (P).

- Nếu $M \in (P)$ thì hình chiếu của M trên mặt phẳng (P) là chính nó.

- Nếu $M \notin (P)$ thì hình chiếu của M trên mặt phẳng (P) là điểm $H \in (P)$ sao cho $MH \perp (P)$.

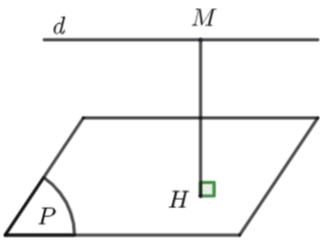


-

5. Khoảng cách

a) Khoảng cách từ giữa đường thẳng và mặt phẳng song song

Cho đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) song song với nhau. Khoảng cách giữa đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) bằng khoảng cách từ một điểm bất kì trên đường thẳng (d) đến mặt phẳng (P).

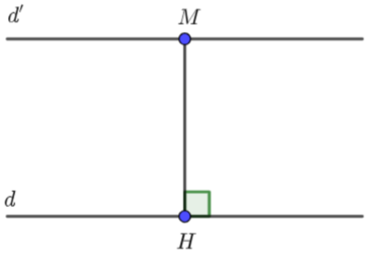


b) Khoảng cách từ điểm đến đường thẳng

Khoảng cách từ điểm M đến một đường thẳng d qua điểm $M_\circ$ có véctơ chỉ phương $\vec{u}_d$ được xác định bởi công thức $\boxed{d(M,d) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{M_\circ M}, \vec{u}_d\right]\right|}{\left|\vec{u}_d\right|}}$.

c) Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song

Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song là khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia.



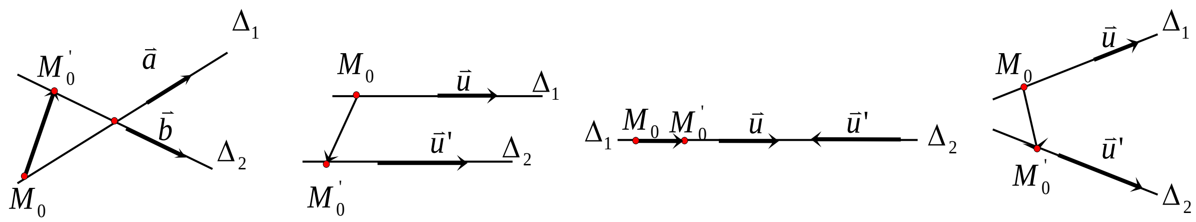
d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau: d đi qua điểm M và có véctơ chỉ phương $\vec{u}$ và d' đi qua điểm M' và có véctơ chỉ phương $\vec{u}'$ là

$$\boxed{d(d,d') = \frac{\left|[\vec{u},\vec{u}'].\overrightarrow{MM'}\right|}{\left|[\vec{u},\vec{u}']\right|}}.$$

6. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường thẳng, đường thẳng và mặt phẳng, đường thẳng và mặt cầu.

a) Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng:



Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ đi qua $M_1(x_0;y_0;z_0)$ có VTCP $\overrightarrow{u_1} = (a;b;c)$ và $d_2: \frac{x-x_0'}{a'} = \frac{y-y_0'}{b'} = \frac{z-z_0'}{c'}$ đi qua $M_2(x_0';y_0';z_0')$ có VTCP $\overrightarrow{u_2} = (a';b';c')$.

Để xét vị trí tương đối của d_1 và d_2, ta sử dụng hai phương pháp sau:

Phương pháp hình học:

• $d_1 \equiv d_2 \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right] = \left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{M_1M_2}\right] = \vec{0}$ hoặc $\begin{cases} \overrightarrow{u_1} \parallel \overrightarrow{u_2} \\ M_1 \in d_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \\ M_1 \in d_2 \end{cases}$.

• $d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]=\vec{0} \\ \left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{M_1M_2}\right]\neq\vec{0} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} \overrightarrow{u_1} \parallel \overrightarrow{u_2} \\ M_1 \notin d_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3} \\ M_1 \notin d_2 \end{cases}$.

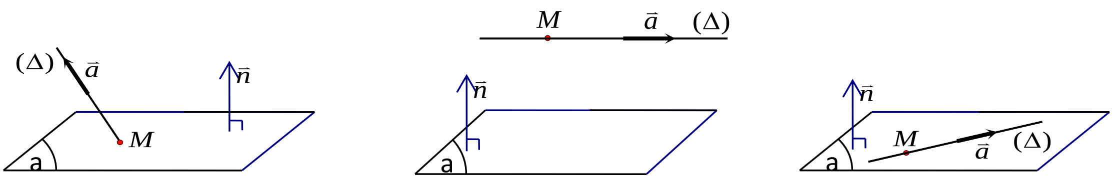
• d_1 cắt $d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]\neq\vec{0} \\ \left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2}=0 \end{cases}$.

• d_1 chéo $d_2 \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2}\neq 0$.

Phương pháp đại số:

Dựa vào số nghiệm của hệ phương trình các đường thẳng. $\begin{cases} x_\circ + a_1 t = x'_\circ + a'_1 t' \\ y_\circ + a_2 t = y'_\circ + a'_2 t' \\ z_\circ + a_3 t = z'_\circ + a'_3 t' \end{cases}$.

b) Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng



Trong không gian $Oxyz$, cho

Mặt phẳng $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ có VTPT $\overrightarrow{n_\alpha}=(A;B;C)$ và đường thẳng

$$d:\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases} \text{ đi qua } M(x_0;y_0;z_0)\text{, có VTCP } \overrightarrow{u_d}=(a;b;c).$$

Để xét vị trí tương đối của d và (α), ta sử dụng hai phương pháp sau:

Phương pháp hình học:

•Nếu $\begin{cases} \overrightarrow{u_d} \perp \overrightarrow{n_\alpha} \\ M(x_0;y_0;z_0)\in(\alpha) \end{cases}$ thì $d \subset (\alpha)$.

•Nếu $\begin{cases} \overrightarrow{u_d} \perp \overrightarrow{n_\alpha} \\ M(x_0;y_0;z_0)\notin(\alpha) \end{cases}$ thì $d \parallel (\alpha)$.

•Nếu $\overrightarrow{u_d}$ không cùng phương với $\overrightarrow{n_\alpha}$ thì d cắt (α).

• $d \perp (\alpha) \Leftrightarrow \overrightarrow{u_d}$ và $\overrightarrow{n_\alpha}$ cùng phương $\overrightarrow{u_d}=k.\overrightarrow{n_\alpha}$ với $k\neq 0$.

Phương pháp đại số:

Xét hệ phương trình $\begin{cases} x = x_o + at & (1) \\ y = y_o + bt & (2) \\ z = z_o + ct & (3) \\ Ax + By + Cz + D = 0 & (4) \end{cases}$.

Thay (1), (2), (3) vào (4), ta được

$$A(x_o + at) + B(y_o + bt) + C(z_o + ct) + D = 0$$

$$\Leftrightarrow (Aa + Bb + Cc)t = -(D + Ax_0 + By_0 + Cz_0). \qquad (*)$$

Phương trình $(*)$ là phương trình bậc nhất, ẩn t. Ta có

•Nếu phương trình $(*)$ vô nghiệm t thì $d \parallel (\alpha)$.

•Nếu phương trình $(*)$ có nghiệm t duy nhất thì d cắt (α).

•Nếu phương trình $(*)$ có vô số nghiệm t thì $d \subset (\alpha)$.

Chú ý: Để tìm điểm chung của đường thẳng và mặt phẳng ta giải phương trình bậc nhất theo t, sau đó thay giá trị của t vào phương trình tham số của d để tìm $(x; y; z)$.

c) Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt cầu

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng và mặt cầu $d: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$

và $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

Để xét vị trí tương đối của d và (α), ta sử dụng hai phương pháp sau:

Phương pháp hình học:

•**Bước 1**. Tính khoảng cách từ tâm I của (S) đến d.

•**Bước 2**. + Nếu $d[I,d] > R$ thì d không cắt (S).

+ Nếu $d[I,d] = R$ thì d tiếp xúc (S).

+ Nếu $d[I,d] < R$ thì d cắt (S).

Phương pháp đại số:

• Bước 1. Thay x, y, z từ phương trình tham số của d vào phương trình (S), khi đó ta được phương trình bậc hai theo t.

• Bước 2. + Nếu phương trình bậc hai vô nghiệm t thì d không cắt (S).

+ Nếu phương trình bậc hai có một nghiệm t thì d tiếp xúc (S).