

Câu 1

a) Tìm x, y, z thỏa mãn phương trình sau $9x^2 + y^2 + 2z^2 - 18x + 4z - 6y + 20 = 0$.

b) Giải phương trình $x^4 - 30x^2 + 31x - 30 = 0$

Câu 2

a) Giải phương trình $\frac{148-x}{25} + \frac{169-x}{23} + \frac{186-x}{21} + \frac{199-x}{19} = 10$

b) Chứng minh rằng $A = n^3 + 6n^2 + 8n$ chia hết cho 48 với n chẵn.

Câu 3

a) Tìm các giá trị của x để biểu thức:

$P = (x-1)(x+2)(x+3)(x+6)$ có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

b) Chứng minh rằng nếu tổng của hai số nguyên chia hết cho 3 thì tổng các lập phương của chúng chia hết cho 3.

Câu 4

Cho hình vuông ABCD, M là một điểm tùy ý trên đường chéo BD. Kẻ $ME \perp AB$, $MF \perp AD$.

a) Chứng minh $DE = CF$

b) Chứng minh ba đường thẳng DE, BF, CM đồng quy.

c) Xác định vị trí của điểm M để diện tích tứ giác AEMF lớn nhất.

Câu 5

a) Chứng minh rằng $P = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1$

b) Cho a, b, c là ba số khác 0 thỏa mãn $a + b + c = 2016$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2016}$

Chứng minh rằng trong ba số a, b, c tồn tại hai số đối nhau.

ĐÁP ÁN

Câu 1 (2 điểm).

a) Tìm x, y, z thỏa mãn phương trình sau: $9x^2 + y^2 + 2z^2 - 18x + 4z - 6y + 20 = 0$.

Ta có:

$$9x^2 + y^2 + 2z^2 - 18x + 4z - 6y + 20 = 0$$

$$(3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 3 + 3^2 + y^2 - 2 \cdot y \cdot 3 + 3^2 + 2(z^2 + 2z + 1) = 0$$

$$(3x-3)^2 + (y-3)^2 + 2(z+1)^2 = 0$$

Vì $(3x-3)^2 \geq 0; (y-3)^2 \geq 0; 2(z+1)^2 \geq 0$ với mọi x, y, z nên:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = -1 \end{cases}$$

b) Giải phương trình: $x^4 - 30x^2 + 31x - 30 = 0$

Hướng dẫn

$$x^4 - 30x^2 + 31x - 30 = 0$$

$$x^4 - (30x^2 - 30x + 30) + x = 0$$

$$(x^4 + x) - 30(x^2 - x + 1) = 0$$

$$x(x+1)(x^2 - x + 1) - 30(x^2 - x + 1) = 0$$

$$(x^2 - x + 1)(x^2 + x - 30) = 0$$

Ta có:

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ với mọi } x \text{ nên suy ra:}$$

$$x^2 + x - 30 = 0$$

$$(x-5)(x+6) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -6 \end{cases}$$

Câu 2.

a) Giải phương trình: $\frac{148-x}{25} + \frac{169-x}{23} + \frac{186-x}{21} + \frac{199-x}{19} = 10$

Hướng dẫn

$$\frac{148-x}{25} + \frac{169-x}{23} + \frac{186-x}{21} + \frac{199-x}{19} = 10$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{148-x}{25} - 1\right) + \left(\frac{169-x}{23} - 2\right) + \left(\frac{186-x}{21} - 3\right) + \left(\frac{199-x}{19} - 4\right) = 0$$

$$(123-x)\left(\frac{1}{25} + \frac{1}{23} + \frac{1}{21} + \frac{1}{19}\right) = 0$$

Vì $\left(\frac{1}{25} + \frac{1}{23} + \frac{1}{21} + \frac{1}{19}\right) > 0$ nên $123 - x = 0$, suy ra $x = 123$.

b) Chứng minh rằng: $A = n^3 + 6n^2 + 8n$ chia hết cho 48 với n chẵn.

Hướng dẫn

$$n^3 + 6n^2 + 8n \text{ chia hết cho 48 với } n \text{ chẵn}$$

Ta có:

$$A = n^3 + 6n^2 + 8n$$

$$A = n(n^2 + 6n + 8)$$

$$A = n(n+2)(n+4)$$

Vì n là số chẵn nên đặt $n = 2k$ ($k \in \mathbb{Z}$), khi đó:

$$A = 2k(2k+2)(2k+4)$$

$$A = 8k(k+1)(k+2)$$

$$A = 2^3 k(k+1)(k+2)$$

Vì $k(k+1)(k+2)$ là tích của 3 số tự nhiên liên tiếp nên:

- Tồn tại một số là bội của 2 nên $k(k+1)(k+2):2$ nên $A:16$

- Tồn tại một số là bội của 3 nên $k(k+1)(k+2):3$

Vậy A chia hết cho 3, 16 mà $(3,16)=1$ nên $A:3.16=48$.

Câu 3 (2 điểm).

a) Tìm các giá trị của x để biểu thức:

$$P = (x-1)(x+2)(x+3)(x+6) \text{ có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.}$$

b) Chứng minh rằng nếu tổng của hai số nguyên chia hết cho 3 thì tổng các lập phương của chúng chia hết cho 3.

Hướng dẫn

$$P = (x-1)(x+2)(x+3)(x+6)$$

$$P = (x^2 + 5x - 6)(x^2 + 5x + 6)$$

$$P = (x^2 + 5x)^2 - 36$$

$$\text{Vì } (x^2 + 5x)^2 \geq 0 \text{ nên } P = (x^2 + 5x)^2 - 36 \geq -36$$

Do đó $\text{Min } P = -36$ khi $(x^2 + 5x)^2 = 0$.

Từ đó ta tìm được $x = 0$ hoặc $x = -5$ thì $\text{min } P = -36$.

b) Gọi hai số phải tìm là a và b , ta có $a + b$ chia hết cho 3.

Ta có:

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)[(a^2 + 2ab + b^2) - 3ab]$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)[(a+b)^2 - 3ab]$$

Vì $a+b$ chia hết cho 3 nên $(a+b)^2 - 3ab$ chia hết cho 3;

Do vậy $(a+b)[(a+b)^2 - 3ab]$ chia hết cho 9.

Câu 4 (3 điểm).

Cho hình vuông ABCD, M là một điểm tùy ý trên đường chéo BD. Kẻ $ME \perp AB$, $MF \perp AD$.

a) Chứng minh: $DE = CF$

b) Chứng minh ba đường thẳng: DE, BF, CM đồng quy.

c) Xác định vị trí của điểm M để diện tích tứ giác AEMF lớn nhất.

Hướng dẫn

a) Chứng minh: $AE = FM = DF$

$$\Rightarrow \Delta AED = \Delta DFC \Rightarrow đpcm.$$

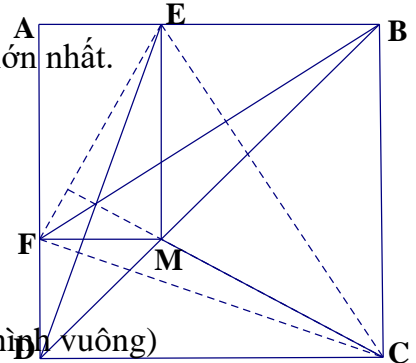
b) DE, BF, CM là ba đường cao của $\Delta EFC \Rightarrow đpcm.$

c) Có Chu vi hình chữ nhật $AEMF = 2a$ không đổi

$$\Rightarrow ME + MF = a \text{ không đổi}$$

$$\Rightarrow S_{AEMF} = ME.MF \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow ME = MF \text{ (AEMF là hình vuông)}$$

$$\Rightarrow M \text{ là trung điểm của BD.}$$



Câu 5. Chứng minh rằng: $P = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1$

Hướng dẫn

$$P = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$$

$$= \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{4.4} + \dots + \frac{1}{100.100}$$

$$< \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{99.100}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100} < 1$$

Câu 1

a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử $A = (a+1)(a+3)(a+5)(a+7)+15$

b) Cho $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$

Chứng minh rằng $a = b = c$.

Câu 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = a^4 - 2a^3 + 3a^2 - 4a + 5$.

Câu 3. Tìm số dư trong phép chia của biểu thức $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)+2016$ cho đa thức $x^2 + 10x + 21$.

Câu 4. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, các điểm D, E theo thứ tự di chuyển trên AB, AC sao cho $BD = AE$. Xác định vị trí của điểm D, E sao cho:

a) DE có độ dài nhỏ nhất.

b) Tứ giác BDEC có diện tích nhỏ nhất.

Câu 5

a) Tìm tất cả các tam giác vuông có số đo các cạnh là các số nguyên dương và số đo diện tích bằng số đo chu vi.

b) Chứng minh rằng nếu a, b, c là số đo ba cạnh của một tam giác vuông, với a là độ dài cạnh huyền thì các số $x = 9a + 4b + 8c$; $y = 4a + b + 4c$; $z = 8a + 4b + 7c$ cũng là số đo ba cạnh của một tam giác vuông khác.

Câu 6

a) Tìm các số x, y nguyên dương biết $6x + 5y + 18 = 2xy$

b) Tìm các số nguyên x, y biết $5x - 3y = 2xy - 11$

ĐÁP ÁN

Câu 1

a) $A = (a+1)(a+3)(a+5)(a+7)+15$

$$A = (a+1)(a+7)(a+3)(a+5)+15$$

$$A = (a^2 + 8a + 7)(a^2 + 8a + 15) + 15$$

Đặt $a^2 + 8a + 7 = t$, ta có:

$$A = t(t+8)+15$$

$$A = t^2 + 8t + 15$$

$$A = (t+3)(t+5)$$

Do đó

$$A = (a^2 + 8a + 7 + 3)(a^2 + 8a + 7 + 5)$$

$$A = (a^2 + 8a + 10)(a^2 + 8a + 12)$$

$$A = (a^2 + 8a + 10)(a+2)(a+6).$$

b) Ta có:

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$$

$$a^2 + b^2 - 2ab + b^2 + c^2 - 2bc + c^2 + a^2 + 2ac = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 - 4ab - 4ac - 4bc$$

$$(a^2 + b^2 - 2ac) + (b^2 + c^2 - 2bc) + (a^2 + c^2 - 2ac) = 0$$

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2 = 0$$

Vì $(a-b)^2 \geq 0$; $(b-c)^2 \geq 0$; $(a-c)^2 \geq 0$; với mọi a, b, c

nên (*) xảy ra khi và chỉ khi $(a-b)^2 = 0; (b-c)^2 = 0$ và $(a-c)^2 = 0$

Vậy $a = b = c$.

Câu 2

Ta có:

$$A = a^4 - 2a^3 + 3a^2 - 4a + 5$$

$$A = a^4 + 2a^2 - 2a^3 - 4a + a^2 + 2 + 3$$

$$A = a^2(a^2 + 2) - 2a(a^2 + 2) + (a^2 + 2) + 3$$

$$A = (a^2 + 2)(a^2 - 2a + 1) + 3$$

$$A = (a^2 + 2)(a - 1)^2 + 3$$

Vì $(a^2 + 2)(a - 1)^2 \geq 0$ với mọi a nên $A \geq 3$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $A = 3 \Leftrightarrow a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$.

Câu 3 (2 điểm).

Tìm số dư trong phép chia của biểu thức $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8) + 2016$ cho đa thức $x^2 + 10x + 21$.

Hướng dẫn

$$P(x) = (x+2)(x+4)(x+6)(x+8) + 2016 = (x^2 + 10x + 16)(x^2 + 10x + 24) + 2016$$

Đặt $t = x^2 + 10x + 21$ ($t \neq -3; t \neq -7$), biểu thức $P(x)$ được viết lại:

$$P(x) = (t - 5)(t + 3) + 2016 = t^2 - 2t + 2001$$

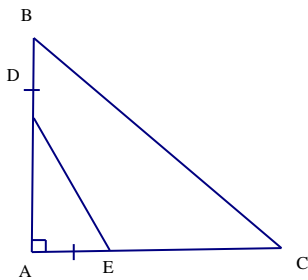
Do đó $t^2 - 2t + 2001$ cho ta số dư là 2001.

Câu 4 (3 điểm).

Cho tam giác ABC vuông cân tại A, các điểm D, E theo thứ tự di chuyển trên AB, AC sao cho $BD = AE$. Xác định vị trí của điểm D, E sao cho:

- DE có độ dài nhỏ nhất.
- Tứ giác BDEC có diện tích nhỏ nhất.

Hướng dẫn



- Đặt $AB = AC = a, DB = AE = x$ ($0 < x < a$)

Ta có:

$$AD^2 + AE^2 = DE^2$$

$$(a - x)^2 + x^2 = DE^2$$

$$\Rightarrow DE^2 = a^2 - 2ax + x^2 + x^2$$

$$\Rightarrow DE^2 = a^2 - 2ax + 2x^2$$