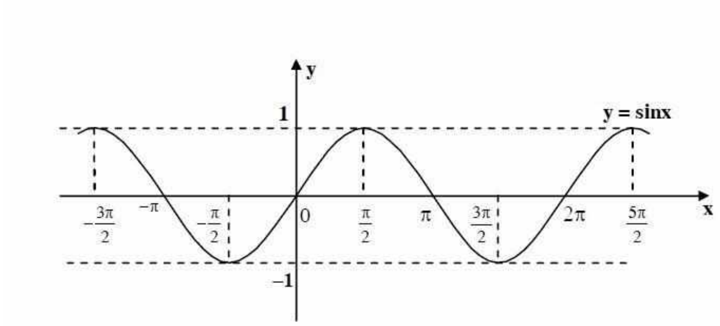
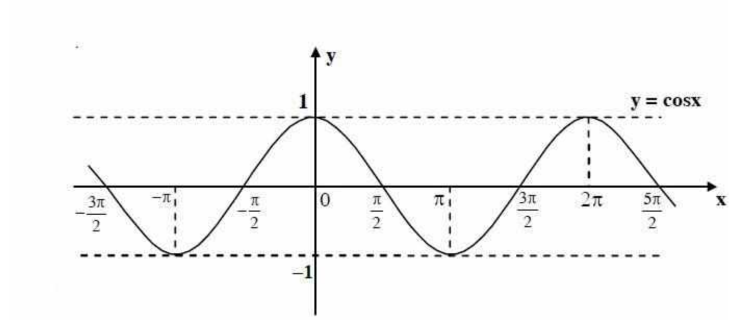
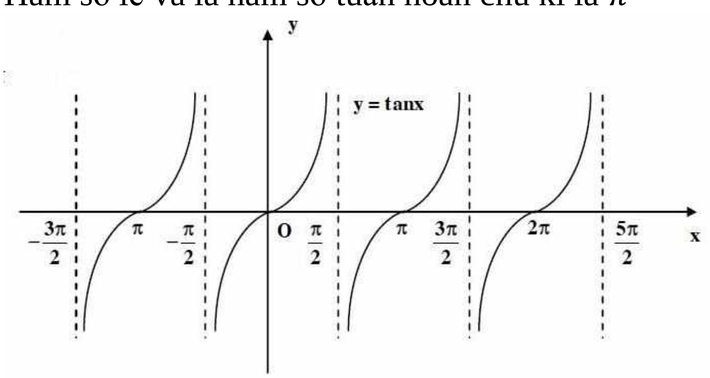
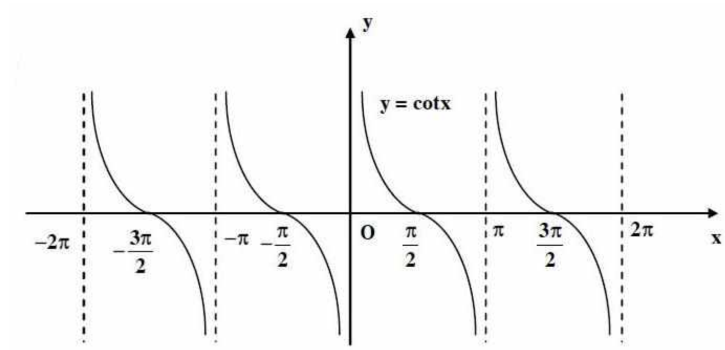
CÁC CHUYÊN ĐỀ TOÁN 11

@thptqg2025

LƯU HÀNH NỘI BỘ

A. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC – CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC – PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

<table>
<tr><th colspan="2">HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC</th></tr>
<tr><td>Hàm số $y = \sin x$
TXĐ: $D = \mathbb{R}$ và $-1 \le \sin x \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$
Hàm số lẻ và là hàm số tuần hoàn chu kì là 2π

</td>
<td>Hàm số $y = \cos x$
TXĐ: $D = \mathbb{R}$ và $-1 \le \cos x \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$
Hàm số chẵn và là hàm số tuần hoàn chu kì là 2π

</td></tr>
<tr><td>Hàm số $y = \tan x$
TXĐ: $D = \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
Hàm số lẻ và là hàm số tuần hoàn chu kì là π

</td>
<td>Hàm số $y = \cot x$
TXĐ: $D = \mathbb{R} \backslash \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
Hàm số lẻ và là hàm số tuần hoàn chu kì là π

</td></tr>
<tr><td>VD: Tập xác định của $y = \sin 3x$
TXĐ: $D = \mathbb{R}$
VD: Tập xác định của $y = \cos \sqrt{x}$
ĐK: $x \ge 0$
TXĐ: $D = [0; +\infty)$</td>
<td>VD: Tập xác định của $y = \dfrac{\cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos x - 1}$
ĐK: $\begin{cases} x - \frac{\pi}{4} \ne k\pi \\ \cos x - 1 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x \ne k2\pi \end{cases}$
TXĐ: $D = \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$</td></tr>
<tr><td>VD: Tìm GTLN và GTNN của $y = 2 + 3\cos x$
Có $-1 \le \cos x \le 1 \Leftrightarrow -3 \le 3\cos x \le 3 \Leftrightarrow$
$-1 \le 2 + 3\cos x \le 5$
$\max y = 5$ khi $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$
$\min y = -1$ khi $\cos x = -1$
$\Leftrightarrow x = \pi + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$</td>
<td>VD: Tìm GTLN và GTNN của $y = 1 + 4\cos^2 x$
Có $0 \le \cos^2 x \le 1 \Leftrightarrow 0 \le 4\cos^2 x \le 4$
$\Leftrightarrow 1 \le 1 + 4\cos^2 x \le 5$
$\max y = 5$ khi $\cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos x = \pm 1$
$\Leftrightarrow x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$
$\min y = 1$ khi $\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$
$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$</td></tr>
<tr><td>VD: Xét tính chẵn lẻ của $y = x\cos 3x$
Kí hiệu $f(x) = x\cos 3x$ và TXĐ: $D = \mathbb{R}$
$x \in D \Rightarrow -x \in D$
$f(-x) = (-x)\cos(-3x) = -x\cos 3x = -f(x)$
Do đó đây là hàm số lẻ.</td>
<td>Nhắc lại:
$f(x)$ là hàm số chẵn $\Leftrightarrow \begin{cases} x \in D \Rightarrow -x \in D \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$
$f(x)$ là hàm số lẻ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \in D \Rightarrow -x \in D \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$</td></tr>
</table>

CƠ BẢN

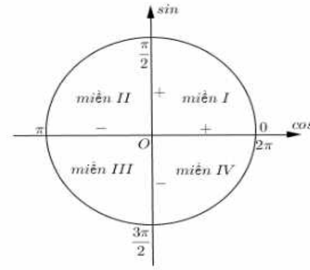
1) $-1 \le \sin x\,;\cos x \le 1$ 2) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

3) $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ 4) $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ 5) $\tan x\,.\cot x = 1$

6) $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ 7) $\dfrac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$

8) $\sin(x + k2\pi) = \sin x$ 9) $\cos(x + k2\pi) = \cos x$

10) $\tan(x + k2\pi) = \tan x$ 11) $\cot(x + k2\pi) = \cot x$



CUNG LIÊN KẾT

ĐỐI	BÙ	PHỤ
$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$ $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$ **(cos đối)**	$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ $\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$ $\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$ **(sin bù)**	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$ $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha$ **(phụ chéo)**

HƠN KÉM π	HƠN KÉM $\frac{\pi}{2}$
$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$ $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$ $\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$ $\cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha$ **(tan cot hơn kém π)**	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot\alpha$ $\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan\alpha$ **(sin lớn bằng cos nhỏ)**

CỘNG

$\sin(a \pm b) = \sin a\cos b \pm \cos a\sin b$ **(sin thì sin cos cos sin)**

$\cos(a \pm b) = \cos a\cos b \mp \sin a\sin b$ **(cos thì cos cos sin sin dấu trừ)**

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a\tan b}$$

NHÂN ĐÔI	NHÂN BA
$\sin 2a = 2\sin a\cos a$ $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$ $= 1 - 2\sin^2 a$ $\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$	$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$ **(sin3a bằng 3 sin trừ 4 sỉn)** $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$ **(cos3a bằng 4 cổ trừ 3 cô)** $\tan 3a = \dfrac{3\tan a - \tan^3 a}{1 - 3\tan^2 a}$

CÔNG THỨC HẠ BẬC

$\sin^2 a = \dfrac{1 - \cos 2a}{2}$ $\cos^2 a = \dfrac{1 + \cos 2a}{2}$	$\sin^3 a = \dfrac{3\sin a - \sin 3a}{4}$ $\cos^3 a = \dfrac{3\cos a + \cos 3a}{4}$	$\sin^4 x + \cos^4 x == 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2x$ $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \dfrac{3}{4}\sin^2 2x$

TÍCH – TỔNG	TÍNH THEO $t = tan\frac{a}{2}$
$\cos a\cos b = \dfrac{1}{2}[\cos(a + b) + \cos(a - b)]$ **(cos cộng cộng cos trừ)** $\sin a\sin b = \dfrac{1}{2}[\cos(a - b) - \cos(a + b)]$ **(cos trừ trừ cos cộng)** $\sin a\cos b = \dfrac{1}{2}[\sin(a + b) + \sin(a - b)]$ **(sin cộng cộng sin trừ)**	$\sin 2a = \dfrac{2t}{1 + t^2}$ $\cos 2a = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$ $\tan 2a = \dfrac{2t}{1 - t^2}$

TỔNG – TÍCH	
$\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$ **(cos cộng cos bằng 2 cos cos)** $\cos a-\cos b=-2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$ **(cos trừ cos bằng trừ 2 sin sin)**	$\sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$ **(sin cộng sin bằng 2 sin cos)** $\sin a-\sin b=2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$ **(sin trừ sin bằng 2 cos sin)**
$\tan a\pm\tan b=\frac{\sin(a\pm b)}{\cos a\,.\cos b}$ **(tình mình cộng với tình ta,** **sinh ra 2 đứa con mình con ta)**	$\sin a+\cos a=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$ $\sin a-\cos a=\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$
NHỚ	
$1\pm\sin 2a=(\sin a\pm\cos a)^2$ $\sin a\,.\cos a=\frac{1}{2}\sin 2a$	$1+\cos 2a=2\cos^2 \mathrm{a}$ $1-\cos 2a=2\sin^2 \mathrm{a}$
PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN	
$\cos u=\cos v\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v+k2\pi\\u=-v+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$ **(cos đối)**	$\sin u=\sin v\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v+k2\pi\\u=\pi-v+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$**(sin bù)**
$\tan u=\tan v\Leftrightarrow u=v+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$	$\cot u=\cot v\Leftrightarrow u=v+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$
ĐẶC BIỆT	
$\sin u=0\Leftrightarrow u=k\pi$ $\sin u=1\Leftrightarrow u=\frac{\pi}{2}+k2\pi$ $\sin u=-1\Leftrightarrow u=-\frac{\pi}{2}+k2\pi$ $\sin u=\pm1\Leftrightarrow u=\frac{\pi}{2}+k\pi$	$\cos u=0\Leftrightarrow u=\frac{\pi}{2}+k\pi$ $\cos u=1\Leftrightarrow u=k2\pi$ $\cos u=-1\Leftrightarrow u=\pi+k2\pi$ $\cos u=\pm1\Leftrightarrow u=k\pi$
$-\cos(\dots)\to\cos(\pi\pm\cdots)$ $-\sin(\dots)\to\sin(\pi+\cdots)$ hoặc $\sin(-\cdots)$ $-\tan(\dots)\to\tan(-\cdots)$ $-\cot(\dots)\to\cot(-\cdots)$	$\sin(\dots)\to\cos\left(\frac{\pi}{2}-\cdots\right)$ $\cos(\dots)\to\sin\left(\frac{\pi}{2}-\cdots\right)$ $\tan(\dots)\to\cot\left(\frac{\pi}{2}-\cdots\right)$ $\cot(\dots)\to\tan\left(\frac{\pi}{2}-\cdots\right)$
VD: $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\sin x=\sin\frac{\pi}{3}$ $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+k2\pi\\x=\pi-\frac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+k2\pi\\x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$ **VD:** $\cos(x-2)=\frac{2}{5}$ $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-2=\arccos\frac{2}{5}+k2\pi\\x-2=-\arccos\frac{2}{5}+k2\pi\end{array}\right.$ $\Leftrightarrow x=2\pm\arccos\frac{2}{5}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$	**VD:** $\cos 3x-\sin 2x=0$ $\Leftrightarrow\cos 3x=\sin 2x$ $\Leftrightarrow\cos 3x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$ $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x=\frac{\pi}{2}-2x+k2\pi\\3x=-\frac{\pi}{2}+2x+k2\pi\end{array}\right.$ $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{10}+\frac{k2\pi}{5}\\x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

<table>
<tr><td colspan="3">PHƯƠNG TRÌNH CỔ ĐIỂN $asinu + bcosu = c$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Cách giải: Chia 2 vế phương trình cho $\sqrt{a^2+b^2}$, sau đó áp dụng công thức cộng.</td></tr>
<tr><td colspan="3">VD: $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2$
Chia 2 vế pt cho $\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2$
$pt \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = 1 \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{6}\sin x + \sin\frac{\pi}{6}\cos x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 1$
$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$</td></tr>
<tr><td colspan="2">PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP
Dạng $asin^2u + bsinu.cosu + c.cos^2u = d$</td><td>PHƯƠNG TRÌNH CHỨA $sinu \pm cosu$
VÀ $sinu.cosu$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Cách giải
Xét $\cos u = 0 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k\pi$
Thay $\cos u = 0$ vào pt (nhớ $\sin^2 u = 1$)
Xét $\cos u \neq 0 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k\pi$
Chia 2 vế pt cho $\cos^2 u$, giải pt theo $\tan u$.
Ghi chú
• Có thể giải bằng cách dùng công thức hạ bậc đưa về dạng $a\sin 2u + b\cos 2u = c$.</td><td>Cách giải
Đặt $t = \sin u \pm \cos u = \sqrt{2}\sin\left(u \pm \frac{\pi}{4}\right)$
với $t \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$
$\Rightarrow \sin u . \cos u = \pm\frac{t^2-1}{2}$
pt $\Rightarrow t = \cdots \Rightarrow x = \cdots$</td></tr>
<tr><td colspan="2">VD: $4\cos^2 x + 3\sin x\cos x - \sin^2 x = 3$
Xét $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$
$pt \Leftrightarrow -\sin^2 x = 3$ (vô lý)
Xét $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi$
$pt \Leftrightarrow 4 + 3\tan x - \tan^2 x = \frac{3}{\cos^2 x}$
$\Leftrightarrow 4 + 3\tan x - \tan^2 x = 3(1 + \tan^2 x)$
$\Leftrightarrow -4\tan^2 x + 3\tan x + 1 = 0$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = 1\\ \tan x = -\frac{1}{4}\end{array}\right.$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{4} + k\pi\\ x = \arctan\left(-\frac{1}{4}\right) + k\pi\end{array}\right.\ (k \in \mathbb{Z})$</td><td>VD: $\sin x + \cos x + \sin x\cos x + 1 = 0$
Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
với $t \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$
$\Rightarrow \sin x\cos x = \frac{t^2-1}{2}$
$pt \Leftrightarrow t + \frac{t^2-1}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow 2t + t^2 - 1 + 2 = 0$
$\Leftrightarrow t^2 + 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1\ (N)$
$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi\\ x + \frac{\pi}{4} = \pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) + k2\pi\end{array}\right.$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi\\ x = \pi + k2\pi\end{array}\right.\ (k \in \mathbb{Z})$</td></tr>
<tr><td colspan="3">ĐIỀU KIỆN</td></tr>
<tr><td>Phương trình chứa $\tan u$ thì
$\cos u \neq 0 \Leftrightarrow u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$</td><td>Phương trình chứa $\cot u$ thì
$\sin u \neq 0 \Leftrightarrow u \neq k\pi$</td><td>Phương trình chứa $\tan u$; $\cot u$ thì
$\begin{cases}\cos u \neq 0\\ \sin u \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow u \neq \frac{k\pi}{2}$</td></tr>
</table>

B. PHÉP ĐẾM

QUI TẮC CỘNG	QUI TẮC NHÂN	GIAI THỪA
Công việc chia làm 2 trường hợp: - Trường hợp 1: có m cách. - Trường hợp 2: có n cách. Khi đó, tổng số cách thực hiện là $m+n$.	Sự vật 1 có m cách. Ứng với 1 cách chọn trên ta có n cách chọn sự vật 2. Khi đó, tất cả số cách chọn liên tiếp 2 sự vật là mn.	$n!=1.2.3\ldots(n-1)n$ Qui ước: $0!=1$ Lưu ý: $n!=(n-1)!\,n$ $=(n-2)!\,(n-1)n=\cdots$
HOÁN VỊ	**CHỈNH HỢP**	**TỔ HỢP**
n vật sắp xếp vào n chổ, số cách xếp là: $P_n=n!$	n vật, lấy ra k vật rồi sắp xếp thứ tự, số cách xếp là: $A_n^k=\dfrac{n!}{(n-k)!}$	n vật, lấy ra k vật nhưng không sắp xếp thứ tự, số cách xếp là: $C_n^k=\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

NHỚ

Số chia hết cho 2: tận cùng là $0; 2; 4; 6; 8$ Số chia hết cho 5: tận cùng là $0; 5$ Số chia hết cho 10: tận cùng là 0 Số chia hết cho 100 khi tận cùng là $00; 25; 50; 75$	Số chia hết cho 3: tổng các chữ số chia hết cho 3. Số chia hết cho 9: tổng các chữ số chia hết cho 9. Khi gặp bài tập số tự nhiên mà trong đó có liên quan số 0 nên chia trường hợp.

$C_n^0=C_n^n=1$	$C_n^1=C_n^{n-1}=n$	$C_n^k=C_n^{n-k}$	$C_n^{k-1}+C_n^k=C_{n+1}^k$

VD: Trong một lớp có 18 bạn nam, 12 bạn nữ. Có bao nhiêu cách chọn
a. Một bạn phụ trách quỹ lớp.
b. Hai bạn, trong đó có một nam và một nữ.

Giải:

a. Có $18+12=30$ cách chọn
b. Chọn 1 nam: 18 cách.
Chọn 1 nữ: 12 cách.
Do đó có $18.12=216$ cách.

VD: Có bao nhiêu cách xếp bốn bạn A; B; C; D vào bốn chiếc ghế thành hàng ngang?

Giải:

Số cách xếp là $P_4=4!=24$ cách.

VD: Cho 6 đường thẳng song song với nhau và 8 đường thẳng khác cũng song song với nhau đồng thời cắt 6 đường thẳng đã cho. Hỏi có bao nhiêu hình bình hành được tạo nên bởi 14 đường thẳng đã cho?

Giải:

Một hình bình hành được tạo nên từ 2 đường thẳng trong 6 đường thẳng ban đầu và 2 đường thẳng trong 8 đường thẳng còn lại.
Chọn 2 đường từ 6 đường ban đầu có C_6^2 cách.
Chọn 2 đường từ 8 đường còn lại có C_8^2 cách.
Do đó, số hình bình hành là $C_6^2.C_8^2=420$.

VD: Có 5 bông hồng, 7 bông cúc, 3 bông lan. Tìm số cách
a. Chọn 3 bông từ các bông trên.
b. Chọn 3 bông hoa trong đó có đầy đủ các loại.
c. Chọn 3 bông có trong đó phải có ít nhất 2 bông cúc.

Giải:

a. Chọn 3 bông từ 15 bông, số cách là $C_{15}^5=3003$.

b. Có 5 cách chọn 1 bông hồng
Có 7 cách chọn 1 bông cúc.
Có 3 cách chọn 1 bông lan.
Do đó có $5.7.3=105$ cách chọn 3 bông hoa trong đó có đầy đủ các loại.

c. TH1: 2 bông cúc.
Có C_7^2 cách chọn 2 bông cúc từ 7 bông cúc.
Có C_8^1 cách chọn 1 bông còn lại từ 8 bông.
Do đó có $C_7^2.C_8^1=168$ cách.
TH2: 3 bông cúc.
Có $C_7^3=35$ cách chọn 3 bông cúc.
Vậy có tất cả $168+35=203$ cách chọn 3 bông trong đó có ít nhất 2 bông cúc.

VD: Từ các số 0; 1; 2; 3; 4; 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số và

a. Khác nhau. b. Là số lẻ.
c. Là số chẵn. d. Là số chia hết cho 5

Giải:

Gọi $\overline{abcd}$ là số tự nhiên thỏa đề bài ($a \neq 0$)

a. Chọn a: 5 cách.
Chọn $b; c; d$: A_5^3 cách.
Do đó có $5.A_5^3 = 300$ số

b. Chọn d: 3 cách.
Chọn a: 4 cách.
Chọn $c; d$: A_4^2 cách.
Do đó có $3.4.A_4^2 = 144$ số.

c. TH1: d là 0.
Chọn d: 1 cách.
Chọn a: 5 cách.
Chọn $b; c$: A_4^2 cách.
Do đó có $1.5.A_4^2 = 60$ số.
TH2: d là 2; 4.
Chọn d: 2 cách.
Chọn a: 4 cách.
Chọn $b; c$: A_4^2 cách.
Do đó có $2.4.A_4^2 = 96$ số.
Vậy có $60 + 96 = 156$ số.

d. TH1: d là 0.
Chọn d: 1 cách.
Chọn a: 5 cách.
Chọn $b; c$: A_4^2 cách.
Do đó có $1.5.A_4^2 = 60$ số.
TH2: d là 5.
Chọn d: 1 cách.
Chọn a: 4 cách.
Chọn $b; c$: A_4^2 cách.
Do đó có $1.4.A_4^2 = 48$ số.
Vậy có $60 + 48 = 108$ số.

VD: Tìm x biết $C_x^1 + C_x^2 + C_x^3 = \frac{7}{2}x$

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ x \geq 1 \\ x \geq 2 \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ x \geq 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \frac{x!}{1!\,(x-1)!} + \frac{x!}{2!\,(x-2)!} + \frac{x!}{3!\,(x-3)!} = \frac{7}{2}x$

$\Leftrightarrow x + \frac{x(x-1)}{2} + \frac{x(x-1)(x-2)}{6} = \frac{7}{2}x$

$\Leftrightarrow 1 + \frac{x-1}{2} + \frac{x^2-3x+2}{6} = \frac{7}{2}$

$\Leftrightarrow 6 + 3(x-1) + x^2 - 3x + 2 = 21$

$\Leftrightarrow x^2 - 16 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4\ (N) \\ x = -4\ (L) \end{array}\right.$

Vậy $x = 4$

VD: Tìm x biết $2A_x^2 + 50 = A_{2x}^2$

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ x \geq 2 \\ 2x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ x \geq 2 \end{cases}$

$pt \Leftrightarrow 2.\frac{x!}{(x-2)!} + 50 = \frac{2x!}{(2x-2)!}$

$\Leftrightarrow 2x(x-1) + 50 = 2x(2x-1)$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 2x + 50 = 4x^2 - 2x$

$\Leftrightarrow -2x^2 + 50 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5\ (N) \\ x = -5\ (L) \end{array}\right.$

Vậy $x = 5$

C. NHỊ THỨC NEWTON

NHỊ THỨC NEWTON	
$(a+b)^n=\sum_{0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^n b^n$	
NHỚ	
$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^n x^n$ $(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - \cdots + (-1)^n C_n^n x^n$	$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$
VD: Khai triển $(x-a)^5$ $(x-a)^5 = [x+(-a)]^5 = C_5^0 x^5 + C_5^1 x^4(-a) + C_5^2 x^3(-a)^2 + C_5^3 x^2(-a)^3 + C_5^4 x(-a)^4 + C_5^5(-a)^5$ $= x^5 - 5x^4 a + 10x^3 a^2 - 10x^2 a^3 + 5xa^4 - a^5$	
VD: Tìm số hạng không chứa x trong khai triển của $\left(3x-\frac{2}{x^2}\right)^{12}$ Giải: $\left(3x-\frac{2}{x^2}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k (3x)^{12-k}\left(\frac{2}{x^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k 3^{12-k}.2^k.\frac{x^{12-k}}{x^{2k}} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k 3^{12-k}.2^k.x^{12-3k}$ Ycbt$\Rightarrow 12-3k=0 \Leftrightarrow k=4$ Số hạng không chứa x là $C_{12}^4.3^{12-4}.2^4 = 51963120$	
VD: Chứng minh $C_n^0 + 5C_n^1 + 5^2 C_n^2 + \cdots + 5^n C_n^n = 6^n$ Giải: Ta có: $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^n x^n$ Thay $x=5 \Rightarrow C_n^0 + 5C_n^1 + 5^2 C_n^2 + \cdots + 5^n C_n^n = 6^n$	

D. XÁC SUẤT

XÁC SUẤT	
$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}$	**Lưu ý:** $0 \le P(A) \le 1$ $P(A) = 1 - P(\bar{A})$
VD: Lấy ngẫu nhiên một thẻ từ một hộp chứa 20 thẻ được đánh số từ 1 đến 20. Tính xác suất để thẻ được lấy ghi số a. Chẵn. b. Chia hết cho 3. c. Lẻ và chia hết cho 3. Giải: Không gian mẫu $\Omega = \{1;2;\ldots;20\} \Rightarrow n(\Omega)=20$.Kí hiệu $A;B;C$ lần lượt là biến cố trong câu a; b; c. $a.A=\{2;4;6;\ldots;20\} \Rightarrow n(A)=10 \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$ $b.B=\{3;6;9;12;15;18\} \Rightarrow n(B)=6 \Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(\Omega)}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$ $c.C=\{3;9;15\} \Rightarrow n(C)=3 \Rightarrow P(C)=\frac{n(C)}{n(\Omega)}=\frac{3}{20}$	

E. PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP

PHƯƠNG PHÁP QUI NẠP TOÁN HỌC
Có nhiều cách để chứng minh một biểu thức $P(n)$ đúng. Một trong những cách chính là qui nạp toán học: 1. Kiểm tra với $n=1$: $P(1)$ đúng hay không. 2. Giả sử với $n=k$: $P(k)$ đúng. 3. Với $n=k+1$, ta chứng minh $P(k+1)$ đúng.
VD: Chứng minh $1.2+2.5+3.8+\cdots n(3n-1)=n^2(n+1)$ với $n\in\mathbb{N}^*$với Giải: Với $n=1$: $VT=1.2=2; VP=1^2(1+1)=2\Rightarrow VT=VP$ Với $n=k$: Đặt $VT=S_k$ Giả sử $S_k=1.2+2.5+3.8+\cdots k(3k-1)=k^2(k+1)$ Với $n=k+1$: Ta chứng minh $S_{k+1}=(k+1)^2(k+2)$ Thật vậy, $S_{k+1}=S_k+(k+1)[3(k+1)-1]=k^2(k+1)+(k+1)(3k+2)$ $=(k+1)(k^2+3k+2)=(k+1)^2(k+2)$ Vậy hệ thức đúng với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

F. DÃY SỐ – CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN

DÃY SỐ	
Dãy số (u_n) là hàm số đi từ $\mathbb{N}^*$ đến $\mathbb{R}$. Có 3 cách xác định dãy số: cho số hạng tổng quát; mô tả; cho hệ thức truy hồi.	
DÃY SỐ TĂNG – DÃY SỐ GIẢM	
(u_n) là dãy số tăng $\Leftrightarrow u_{n+1}-u_n>0, \forall n\in\mathbb{N}^*$ Khi $u_n>0$, ta có thể dùng $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1, \forall n\in\mathbb{N}^*$	(u_n) là dãy số tăng $\Leftrightarrow u_{n+1}-u_n<0, \forall \text{n}\in\mathbb{N}^*$ Khi $u_n>0$, ta có thể dùng $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<1, \forall n\in\mathbb{N}^*$
VD: Xét tính tăng, giảm của dãy số cho bởi $u_n=\dfrac{2^n-1}{2^n+1}$ Giải: $u_{n+1}-u_n=\dfrac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}+1}-\dfrac{2^n-1}{2^n+1}=\dfrac{(2^{n+1}-1)(2^n+1)-(2^{n+1}+1)(2^n-1)}{(2^{n+1}-1)(2^n+1)}$ $=\dfrac{2^{2n+1}+2^{n+1}-2^n-1-2^{2n+1}+2^{n+1}-2^n+1}{(2^{n+1}-1)(2^n+1)}=\dfrac{2^{n+1}-2^n+2^{n+1}-2^n}{(2^{n+1}-1)(2^n+1)}$ $=\dfrac{2.2^{n+1}-2.2^n}{(2^{n+1}-1)(2^n+1)}=\dfrac{2.2^n}{(2^{n+1}-1)(2^n+1)}>0$ $\Rightarrow u_{n+1}>u_n$. Vậy (u_n) là dãy số tăng.	
DÃY SỐ BỊ CHẶN	
• (u_n) bị chặn trên $\Leftrightarrow \exists M: u_n<M, \forall n\in\mathbb{N}^*$ • (u_n) bị chặn dưới $\Leftrightarrow \exists m: u_n>m, \forall n\in\mathbb{N}^*$ • (u_n) bị chặn $\Leftrightarrow (u_n)$ vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới $\Leftrightarrow \exists M: \lvert u_n\rvert<M, \forall n\in\mathbb{N}^*$	
VD: Chứng minh dãy số cho bởi $u_n=\dfrac{1}{n^2-6n+11}$ bị chặn. Giải: $n^2-6n+11=(n-3)^2+2\geq 2\Rightarrow 0<\dfrac{1}{n^2-6n+11}\leq\dfrac{1}{2}\Rightarrow 0<u_n\leq\dfrac{1}{2}$ Do đó (u_n) bị chặn.	

CẤP SỐ CỘNG	**CẤP SỐ NHÂN**
Dãy (u_n) được gọi là CSC nếu thỏa $u_n = u_{n-1} + d$ với d không đổi là công sai. Ta có: 1) $u_n = u_1 + (n-1)d$ 2) (u_n) là CSC $\Leftrightarrow 2u_n = u_{n-1} + u_{n+1}$ 3) $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$ $= \frac{n}{2}[u_1 + (n-1)d]$	Dãy (u_n) được gọi là CSN nếu thỏa $u_n = u_{n-1}.q$ với q không đổi là công bội. Ta có: 1) $u_n = u_1.q^{n-1}$ 2) (u_n) là CSN $\Leftrightarrow u_n^2 = u_{n-1}.u_{n+1}$ 3) $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_1.\frac{1-q^n}{1-q}$ khi $q \neq 1$ 4) $S_n = n.u_1$ khi $q = 1$
VD: Cho dãy số (u_n) với $u_n = 9 - 5n$ a. Viết 5 số hạng đầu của dãy. b. Chứng minh (u_n) là cấp số cộng. Chỉ rõ u_1 và d. c. Tính tổng của 100 số hạng đầu. Giải: a. $4; -1; -6; -11; -16$ b. Có $u_{n+1} - u_n = 9 - 5(n+1) - 9 + 5n = -5$ Do đó $u_{n+1} = u_n - 5$. Suy ra (u_n) là cấp số cộng với $u_1 = 4; d = -5$. c. $S_{100} = \frac{100}{2}[4 + (100-1)(-5)] = -24350$ **VD:** Tìm u_1 và d của CSC (u_n) biết $\begin{cases} u_1 + 2u_5 = 0 \\ S_4 = 14 \end{cases}$ Giải: $\begin{cases} u_1 + 2u_5 = 0 \\ S_4 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2(u_1 + 4d) = 0 \\ \frac{4}{2}[u_1 + 3d] = 14 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 3u_1 + 8d = 0 \\ u_1 + 3d = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -56 \\ d = 21 \end{cases}$	**VD:** Cho dãy số (u_n) với $u_n = (-3)^{2n-1}$ a. Chứng minh (u_n) là cấp số nhân. b. Lập công thức truy hồi của dãy số. c. Hỏi số -19683 là số hạng thứ mấy của dãy số? Giải: a. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(-3)^{2(n+1)-1}}{(-3)^{2n-1}} = \frac{(-3)^{2n+1}}{(-3)^{2n-1}} = (-3)^2$ $= 9$ $\Rightarrow u_{n+1} = 9u_n$. Do đó (u_n) là cấp số nhân với $u_1 = -3; q = 9$. b. $u_n = u_1.q^{n-1} = -3.9^{n-1}$ c. Giả sử -19683 là số hạng thứ n của dãy số. Khi đó $-19683 = -3.9^{n-1} \Leftrightarrow 9^{n-1} = 6561 \Leftrightarrow 9^{n-1} = 9^4 \Leftrightarrow n - 1 = 4 \Leftrightarrow n = 5$. **VD:** Tìm u_1 và q của CSN (u_n) biết $\begin{cases} u_5 - u_1 = 15 \\ u_4 - u_2 = 6 \end{cases}$ Giải: $\begin{cases} u_5 - u_1 = 15 \\ u_4 - u_2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.q^4 - u_1 = 15 \\ u_1.q^3 - u_1.q = 6 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} u_1(q^4 - 1) = 15 \\ u_1.q(q^2 - 1) = 6 \end{cases}$ $\Rightarrow \frac{q^4 - 1}{q(q^2 - 1)} = \frac{15}{6} \Rightarrow \frac{q^2 + 1}{q} = \frac{5}{2}$ $\Rightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} q = 2 \Rightarrow u_1 = 1 \\ q = \frac{1}{2} \Rightarrow u_1 = -16 \end{array}\right.$

G. GIỚI HẠN DÃY SỐ

NHỚ

$\lim\frac{1}{n}=0;\lim\frac{1}{n^k}=0$ với k nguyên dương. $\lim n^k=+\infty$ với k nguyên dương.	$\lim q^n=\begin{cases}0 \text{ khi } \lvert q\rvert<1\\+\infty \text{ khi } q>1\end{cases}$ $\lim C=C$ với C là hằng số.

TÍNH CHẤT (áp dụng khi tồn tại $\lim u_n;\lim v_n$)	**TÍNH CHẤT**
1) $\lim(u_n+v_n)=\lim u_n+\lim v_n$ 2) $\lim(u_n.v_n)=\lim u_n.\lim v_n$ 3) $\lim\left(\frac{u_n}{v_n}\right)=\frac{\lim u_n}{\lim v_n}$ khi $\lim v_n\neq 0$ 4) Khi $u_n\geq 0,\forall n\in\mathbb{N}^*$ thì $\lim\sqrt{u_n}=\sqrt{\lim u_n}$	1) $\left.\begin{matrix}\lim u_n=a\\\lim v_n=\pm\infty\end{matrix}\right\}\Rightarrow\lim\frac{u_n}{v_n}=0$ 2) $\left.\begin{matrix}\lim u_n=a>0\\\lim v_n=0\\v_n>0.\forall n\in\mathbb{N}^*\end{matrix}\right\}\Rightarrow\lim\frac{u_n}{v_n}=\pm\infty$ 3) $\left.\begin{matrix}\lim u_n=+\infty\\\lim v_n=a>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\lim(u_n.v_n)=+\infty$

PHƯƠNG PHÁP TÍNH GIỚI HẠN DÃY SỐ

- Nếu biểu thức có dạng phân thức mà mẫu và tử đều chứa luỹ thừa của n, ta chia tử và mẫu cho n^k với k là số mũ cao nhất.
- Nếu biểu thức đã cho có chứa n dưới dấu căn thì có thể nhân tử và mẫu với cùng một biểu thức liên hợp.

VD: $\lim\frac{4n^2-n-1}{3+2n^2}=\lim\frac{4-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n^2}+2}=2$

VD: $\lim\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-1}\right)=\lim\frac{\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-1}\right)\left(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-1}\right)}{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-1}}$

$=\lim\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-1}}=\lim\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}=\lim\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}=\frac{1}{2}$

VD: $\lim\frac{3^n-4^n+1}{2.4^n+2^n}=\lim\frac{4^n\left[\left(\frac{3}{4}\right)^n-1+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]}{4^n\left[2+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}=\lim\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n-1+\left(\frac{1}{4}\right)^n}{2+\left(\frac{1}{2}\right)^n}=-\frac{1}{2}$

TỔNG CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

Khi $|q|<1$ ta có $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n=\frac{u_1}{1-q}$

VD: Tính tổng $S=2-\sqrt{2}+1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}-\cdots$

Giải:

$2;-\sqrt{2};1;-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{2};\ldots$ là một cấp số nhân với công bội $q=-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

Ta có $|q|<1$ nên $S=\frac{u_1}{1-q}=\frac{2}{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=4-2\sqrt{2}$

H. GIỚI HẠN HÀM SỐ

NHỚ	
1) $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$; $\lim\limits_{x\to x_0} C = C$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} C = C$ 2) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{C}{x} = 0$ với C là hằng số.	3) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k = +\infty$ với k nguyên dương. 4) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = \begin{cases} +\infty \text{ khi } k \text{ chẵn} \\ -\infty \text{ khi } k \text{ lẽ} \end{cases}$

TÍNH CHẤT (dùng khi tồn tại $\lim\limits_{x\to x_0} f$; $\lim\limits_{x\to x_0} g$)	
1) $\lim\limits_{x\to x_0}(f \pm g) = \lim\limits_{x\to x_0} f \pm \lim\limits_{x\to x_0} g$ 2) $\lim\limits_{x\to x_0}(f.g) = \lim\limits_{x\to x_0} f . \lim\limits_{x\to x_0} g$	3) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f}{\lim\limits_{x\to x_0} g}$ khi $\lim\limits_{x\to x_0} g \neq 0$ 4) Khi $f \geq 0$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f} = \sqrt{\lim\limits_{x\to x_0} f}$

TÍNH CHẤT		
$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0} f = L \\ \lim\limits_{x\to x_0} g = \pm\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(f.g) = \pm\infty$ (bằng $+\infty$ hay $-\infty$ ta phải xem dấu của L và coi $\lim\limits_{x\to x_0} g = +\infty$ hay $\lim\limits_{x\to x_0} g = -\infty$)	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0} f = L \\ \lim\limits_{x\to x_0} g = \pm\infty\end{array}\right\}$ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f}{g} = 0$	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0} f = L \\ \lim\limits_{x\to x_0} g = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f}{g} = \pm\infty$ (bằng $+\infty$ hay $-\infty$ ta phải xem dấu của L và coi $g > 0$ hay $g < 0$)

GIỚI HẠN BÊN TRÁI – GIỚI HẠN BÊN PHẢI	
Giới hạn bên trái, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f$ tức $\lim\limits_{x\to x_0} f$ khi $x < x_0$ Giới hạn bên phải, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f$ tức $\lim\limits_{x\to x_0} f$ khi $x > x_0$	$\lim\limits_{x\to x_0} f = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f = \lim\limits_{x\to x_0^+} f = L$

SƠ ĐỒ HOOCNE (đầu rơi, nhân ngang, cộng chéo)

Ví dụ: $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 4x - 4$

x	-2	3	4	-4
2	-2	-1	2	0

Khi đó: $f(x) = (x-2)(-2x^2 - x + 2)$

PHƯƠNG PHÁP TÍNH GIỚI HẠN HÀM SỐ		
Dạng $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f}{g}$ (dạng $\dfrac{0}{0}$) • Dùng lược đồ Hoocne. • Nếu $f; g$ chứa biến trong căn, ta nhân tử mẫu cho biểu thức liên hợp.	Dạng $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f}{g}$ (dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$) • Chia tử, mẫu cho x^n với n là số mũ cao nhất. • Nếu $f; g$ chứa biến trong căn, ta đưa x^k ra ngoài dấu căn (với k là số mũ cao nhất trong căn), rồi chia tử và mẫu cho luỹ thừa của x.	Dạng $\lim\limits_{x\to x_0}(f - g)$ (dạng $\infty - \infty$) Dạng $\lim\limits_{x\to x_0}(f.g)$ (dạng $0.\infty$) • Nhân và chia với biểu thức liên hợp hoặc qui đồng mẫu.

VD: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x^2 - 6x + 5} = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x^2 - 3x + 2)}{(x-1)(x-5)} = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 5} = 0$

VD: $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2} = \lim\limits_{x\to2}\dfrac{x + 2 - 4}{(x-2)\left(\sqrt{x+2} + 2\right)} = \lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{\sqrt{x+2} + 2} = \dfrac{1}{4}$

VD: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3+3x-4}{-x^3-x^2-4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3\left(2+\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x^3}\right)}{x^3\left(-1-\frac{1}{x}-\frac{4}{x^3}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x^3}}{-1-\frac{1}{x}-\frac{4}{x^3}}=-2$

VD: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x+3}}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}}{1-\frac{1}{x}}=1$

VD: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x^2-x)-x^2}{\sqrt{x^2-x}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x}{-x\sqrt{1-\frac{1}{x}}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1}=\dfrac{1}{2}$

VD: $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3+x^2-x+1)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\left(-1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)=+\infty$

(do $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty;\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)=-1$)

VD: $\lim\limits_{x\to3^-}\frac{2x-1}{x-3}=-\infty$ (do $\begin{cases}\lim\limits_{x\to3^-}(2x-1)=5>0\\ \lim\limits_{x\to3^-}(x-3)=0\\ x\to3^-\Rightarrow x<3\Rightarrow x-3<0\end{cases}$)

I. HÀM SỐ LIÊN TỤC

HÀM SỐ LIÊN TỤC BÊN TRÁI	HÀM SỐ LIÊN TỤC BÊN PHẢI
f liên tục trái tại $x_0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f=f(x_0)$	f liên tục phải tại $x_0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^+}f=f(x_0)$

HÀM SỐ LIÊN TỤC

f liên tục tại $x_0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0}f=f(x_0)\text{ (áp dụng cho các hàm số có dấu }=;\neq)\\ \lim\limits_{x\to x_0^-}f=\lim\limits_{x\to x_0^+}f=f(x_0)\text{ (áp dụng cho các hàm số có dấu }=;>;\geq;<;\leq)\end{array}\right.$

VD: Xét tính liên tục của $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+3}{x-1}\text{ khi }x\neq-1\\ 2\text{ khi }x=-1\end{cases}$ tại $x=-1$

Giải:

TXĐ: $D=\mathbb{R}$ và $x=-1\in D$

$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\frac{x+3}{x-1}=-1;\ f(-1)=2\Rightarrow\lim\limits_{x\to-1}f(x)\neq f(-1)\Rightarrow$ hàm số không liên tục tại $x=-1$

VD: Tìm m để $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x-3}{x-3}\text{ khi }x<3\\ m\text{ khi }x\geq3\end{cases}$ *liên tục* tại $x=3$

Giải:

TXĐ: $D=\mathbb{R}$ và $x=3\in D$

$\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=m$

$\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{x^2-2x-3}{x-3}=\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{(x-3)(x+1)}{x-3}=\lim\limits_{x\to3^-}(x+1)=4$

$f(3)=m$

$ycbt\Rightarrow\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=f(3)\Rightarrow m=4$

CHỨNG MINH PHƯƠNG TRÌNH $f = 0$ CÓ ÍT NHẤT 1 NGHIỆM TRONG KHOẢNG $(a;b)$
$\left.\begin{matrix} f \text{ liên tục trên } [a;b] \\ f(a).f(b) < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ phương trình $f = 0$ có ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(a;b)$.
VD: Chứng minh phương trình $x^5 - 3x - 7 = 0$ luôn có nghiệm. Giải: Xét $f(x) = x^5 - 3x - 7$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ $f(0) = -7 < 0$ và $f(2) = 19 > 0$ nên $f(0).f(2) < 0$ Do đó phương trình luôn có nghiệm.

J. ĐẠO HÀM

ĐẠO HÀM TẠI MỘT ĐIỂM	BẢNG ĐẠO HÀM	
$f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ (ở đây $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$) Hoặc $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$	$C' = 0$ $x' = 1$ $(x^n)' = nx^{n-1}$ $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$ $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$ $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	Thay x bởi u, nhân thêm u' $(u^n)' = nu^{n-1}.u'$ $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$ $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ $(\sin u)' = u'\cos u$ $(\cos u)' = -u'\sin u$ $(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$ $(\cot u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
ĐẠO HÀM BÊN TRÁI – ĐẠO HÀM BÊN PHẢI		
Đạo hàm bên trái $f'(x_0^-) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ $(x < x_0)$ Đạo hàm bên phải $f'(x_0^+) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ $(x > x_0)$		
QUI TẮC ĐẠO HÀM		
$(u \pm v)' = u' \pm v'$ $\quad$ $(u.v)' = u'.v + v'.u$ $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'.v - v'.u}{v^2}$ $\quad$ $k.u' = k.u'$		

VD: Bằng định nghĩa, tính đạo hàm của $f(x) = \sqrt{2x-1}$ tại $x_0 = 5$

Giải:

$$f'(5) = \lim_{x \to 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{2x-1} - 3}{x - 5} = \lim_{x \to 5} \frac{2x - 1 - 9}{(x-5)\left(\sqrt{2x-1} + 3\right)} = \lim_{x \to 5} \frac{2}{\sqrt{2x-1} + 3} = \frac{1}{3}$$

VD: $y = x^3 - 5x^2 + 10x + 2$

$y' = 3x^2 - 10x + 10$

VD: $y = (2x-5)^{10}$

$y' = 10(2x-5)^9(2x-5)' = 20(2x-5)^9$

VD: $y = \sin(x^2 + 3x - 2)$

$y' = (x^2 - 3x + 2)'.\cos(x^2 - 3x + 2) = (2x - 3)\cos(x^2 - 3x + 2)$

VD: $y = \sin^3 2x$

$y' = 3\sin^2 2x\,.(\sin 2x)' = 3\sin^2 2x\,.(2x)'\cos 2x = 6\sin^2 2x\cos 2x$

VD: $y=(x-2)\sqrt{x^2+1}$

$y'=(x-2)'\sqrt{x^2+1}+(x-2)\left(\sqrt{x^2+1}\right)'$

$=\sqrt{x^2+1}+\dfrac{(x-2)(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{2(x^2+1)+2x(x-2)}{2\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{2x^2-2x+1}{\sqrt{x^2+1}}$

VD: $y=\dfrac{-x^2+2x+3}{x^3-2}$

$y'=\dfrac{(-x^2+2x+3)'(x^3-2)-(x^3-2)'(-x^2+2x+3)}{(x^3-2)^2}$

$=\dfrac{(-2x+2)(x^3-2)-3x^2(-x^2+2x+3)}{(x^3-2)^2}=\dfrac{-2x^4+4x+2x^3-4+3x^4-6x^3-9x^2}{(x^3-2)^2}$

$=\dfrac{x^4-4x^3-9x^2+4x-4}{(x^3-2)^2}$

VD: $y=\sin 3x+\cos\dfrac{x}{5}+\tan\sqrt{x}$

$y'=(3x)'\cos 3x-\left(\dfrac{x}{5}\right)'\sin\dfrac{x}{5}+\left(\sqrt{x}\right)'.\dfrac{1}{\cos^2\sqrt{x}}=3\cos 3x-\dfrac{1}{5}\sin\dfrac{x}{5}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$

K. PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN

<table>
<tr><td colspan="2">PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN TẠI $M(x_0;y_0)$ DẠNG: $(d): y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0$</td></tr>
<tr><td>$y'(x_0)\ \underset{\text{Thay vào } y'}{\overset{\text{Giải } y'(x_0)=k}{\rightleftarrows}}\ x_0\ \underset{\text{Giải pt } y=y_0}{\overset{\text{Thay vào } y}{\rightleftarrows}}\ y_0$</td><td>Nhớ:
Tiếp tuyến $(d)//(\Delta): y=ax+b\Rightarrow f'(x_0)=a$
Tiếp tuyến $(d)\perp(\Delta): y=ax+b\Rightarrow f'(x_0)=-\dfrac{1}{a}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến qua $A(x_A;y_A)$.
• Giả sử tiếp điểm là $M(x_0;y_0)$. Phương trình tiếp tuyến là $(d): y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0$
• $A\in(d)\Rightarrow y_A=y'(x_0)(x_A-x_0)+y_0$ (pt ẩn x_0) $\Rightarrow x_0=\cdots$</td></tr>
<tr><td>VD: $(C): y=x^3-3x^2+2$. Lập pttt tại $M(1;0)$
Giải:
$y'=3x^2-6x$
$x_0=1; y_0=0; y'(x_0)=-3$
Pttt d là $y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0\Rightarrow y=-3x+3$</td><td>VD: $(C): y=2x^2-4x$. Lập pttt có hệ số góc là 4.
Giải:
$y'=4x-4$
$y'(x_0)=4\Rightarrow 4x_0-4=4\Rightarrow x_0=2\Rightarrow y_0=0$
Pttt d là $y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0\Rightarrow y=4x-16$</td></tr>
<tr><td colspan="2">VD: $(C): y=x^3-3x^2+2$. Lập pttt qua $A(0;3)$
Giải:
$y'=3x^2-6x$
Pttt d là $y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0\Rightarrow y=(3x_0^2-6x_0)(x-x_0)+x_0^3-3x_0^2+2$
Có $A\in d\Rightarrow 3=(3x_0^2-6x_0)(0-x_0)+x_0^3-3x_0^2+2\Leftrightarrow -2x_0^3+3x_0^2-1=0\Leftrightarrow x_0=-\frac{1}{2}\vee x_0=1$
$x_0=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow y_0=\dfrac{9}{8}; y'(x_0)=\dfrac{15}{4}\Rightarrow d: y=\dfrac{15}{4}x+3$
$x_0=1\Rightarrow y_0=0; y'(x_0)=-3\Rightarrow d: y=-3x+3$</td></tr>
</table>

L. VI PHÂN

VI PHÂN	**NHỚ**
$df = f'dx$ Ví dụ: $d(x^2 + 2x + 3) = (2x + 2)dx$	$d(u \pm v) = du \pm dv$ $\quad d(u.v) = du.dv$ $d(k.u) = kdu$ với k là hằng số. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{udv - vdu}{v^2}$
DÙNG VI PHÂN TÍNH GIÁ TRỊ GẦN ĐÚNG	
$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0).\Delta x$	

M. PHÉP BIẾN HÌNH

ĐẠI CƯƠNG VỀ PHÉP BIẾN HÌNH (PBH)	
PBH F: $\underset{tạo\ ảnh}{M} \longmapsto \underset{ảnh}{M'}$ (biến M thành duy nhất một điểm M'), kí hiệu $M' = F(M)$ • Hình $H' = F(H) \Leftrightarrow H' = \{M' = F(M) \mid M \in H\}$ • $O = F(O) \Leftrightarrow O$ là điểm bất động. • PBH mà mọi điểm trong mặt phẳng đều biến thành chính nó được gọi là phép đồng nhất. Kí hiệu e. • $M \overset{F}{\longmapsto} M' \overset{G}{\longmapsto} M'' \Rightarrow G \circ F: M \longmapsto M''$ (tích hai PBH bằng cách thực hiện liên tiếp PBH F rồi G)	
PHÉP DỜI HÌNH (PDH)	
PBH F là PDH và $A' = F(A); B' = F(B)$ thì $A'B' = AB$ (bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì) PDH biến $\begin{cases} \text{3 điểm thẳng hàng } \longrightarrow \text{ 3 điểm thẳng hàng (bảo toàn thứ tự)} \\ \text{đường thẳng } \longrightarrow \text{ đường thẳng;đoạn thẳng } \longrightarrow \text{ đoạn thẳng bằng nó;tia } \longrightarrow \text{ tia} \\ \text{tam giác } \longrightarrow \text{ tam giác bằng nó;góc } \longrightarrow \text{ góc bằng nó;đường tròn } \longrightarrow \text{ đường tròn bằng nó} \end{cases}$	
PHÉP TỊNH TIẾN (PTT) theo $\vec{u}$, kí hiệu $T_{\vec{u}}$	**PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM (ĐXT) I, kí hiệu Đ$_I$**
$T_{\vec{u}}: M \longmapsto M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	Đ$_I: M \longmapsto M' \Leftrightarrow I$ là trung điểm MM'
PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC (ĐXTR) d, kí hiệu Đ$_d$	**PHÉP QUAY (PQ) tâm I góc α, kí hiệu $Q_{(I;\alpha)}$**
Đ$_d: M \longmapsto M' \Leftrightarrow M; M'$ đối xứng nhau qua d	$Q_{(I;\alpha)}: M \longmapsto M' \Leftrightarrow \begin{cases} IM' = IM \\ (\widehat{IM; IM'}) = \alpha \end{cases}$
PHÉP VỊ TỰ (PVT) tâm I tỉ số k, kí hiệu $V_{(I;k)}$	
$V_{(I;k)}: M \longmapsto M' \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$	
PHÉP ĐỒNG DẠNG (PĐD)	
PĐD tỉ số k $(k > 0)$ là PBH sao cho với hai điểm $A; B$ bất kì và ảnh $A'; B'$ của nó ta có $A'B' = kAB$ PĐD biến $\begin{cases} \text{3 điểm thẳng hàng } \longrightarrow \text{ 3 điểm thẳng hàng (bảo toàn thứ tự)} \\ \text{đường thẳng } \longrightarrow \text{ đường thẳng;đoạn thẳng } \longrightarrow \text{ đoạn thẳng tỉ lệ } k \text{ lần với nó;tia } \longrightarrow \text{ tia} \\ \text{tam giác } \longrightarrow \text{ tam giác đồng dạng tỉ số } k\text{;góc } \longrightarrow \text{ góc bằng nó} \\ \text{đường tròn bán kính } R \longrightarrow \text{ đường tròn bán kính } kR \end{cases}$	

BIỂU THỨC TỌA ĐỘ

Giả sử $M(x;y); M'(x';y')$.

- PTT theo $\vec{u}=(a;b)$ là $\begin{cases} x'-x=a \\ y'-y=b \end{cases}$
- Phép đối xứng tâm $I(a;b)$ là $\begin{cases} x'=2a-x \\ y'=2b-y \end{cases}$
- Phép đối xứng trục d khi $\begin{cases} d\equiv Ox \text{ là } \begin{cases} x'=x \\ y'=-y \end{cases} \\ d\equiv Oy \text{ là } \begin{cases} x'=-x \\ y'=y \end{cases} \\ d \text{ là phân giác thứ nhất } \begin{cases} x'=-x \\ y'=-y \end{cases} \end{cases}$
- Phép quay tâm $I(a;b)$, góc α là $\begin{cases} x'=x\cos\alpha-y\sin\alpha \\ y'=x\sin\alpha+y\cos\alpha \end{cases}$

Đặc biệt: Tâm quay là $O(0;0)$ thì

$\alpha=90^0$: $\begin{cases} x'=-y \\ y'=x \end{cases}$ $\alpha=-90^0$: $\begin{cases} x'=y \\ y'=-x \end{cases}$ $\alpha=180^0$: $\begin{cases} x'=-x \\ y'=-y \end{cases}$

- Phép vị tự tâm $I(a;b)$, tỉ số k là $\begin{cases} x'=kx+(1-k)a \\ y'=ky+(1-k)b \end{cases}$

VD: Tìm ảnh của $M(1;-2)$ qua PTT theo $\vec{u}=(2;3)$ Giải: $M'(x';y')$ thỏa $T_{\vec{u}}: M\longmapsto M'$. $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}\Leftrightarrow\begin{cases} x'-1=2 \\ y'-(-2)=3 \end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases} x'=3 \\ y'=1 \end{cases}\Leftrightarrow M'(3;1)$	**VD:** Tìm ảnh của $M(2;5)$ qua phép ĐXT với tâm $I(1;0)$ Giải: $M'(x';y')$ thỏa Đ$_I: M\longmapsto M'$ I là trung điểm MM' $\Leftrightarrow\begin{cases} x'=2.1-2=0 \\ y'=2.0-5=-5 \end{cases}$ $\Leftrightarrow M'(0;-5)$	**VD:** Tìm ảnh của $M(4;1)$ qua PQ tâm O góc 90^0 Giải: $M'(x';y')$ thỏa $Q_{(O;90^0)}: M\longmapsto M'$ Khi đó $\begin{cases} x'=-1 \\ y'=4 \end{cases}\Leftrightarrow M'(-1;4)$
VD: Tìm ảnh của $M(3;-5)$ qua PVT tâm $I(2;5)$, tỉ số $k=2$ Giải: $M'(x';y')$ thỏa $V_{(I;2)}: M\longmapsto M'$ $\overrightarrow{IM'}=2\overrightarrow{IM}$ $\Leftrightarrow\begin{cases} x'-2=2(3-2) \\ y'-5=2(-5-5) \end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases} x'=4 \\ y'=-15 \end{cases}\Leftrightarrow M'(4;-15)$	**VD:** Tìm tạo ảnh của $M'(-1;5)$ qua PTT theo $\vec{u}=(2;3)$ Giải: $M(x;y)$ thỏa $T_{\vec{u}}: M\longmapsto M'$. $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}\Leftrightarrow\begin{cases} -1-x=2 \\ 5-y=3 \end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}\Leftrightarrow M(-3;2)$	**VD:** Tìm tâm I biết Đ$_I: M\longmapsto M'$ với $M(3;5); M'(-3;1)$ Giải: I là trung điểm MM' $\Leftrightarrow\begin{cases} 2x_I=3+(-3) \\ 2y_I=5+1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases} x_I=0 \\ y_I=3 \end{cases}\Leftrightarrow I(0;3)$

ẢNH CỦA ĐƯỜNG THẲNG d QUA PTT; PHÉP ĐXT; PQ; PVT
Giả sử $F: d \longrightarrow d'$ (F ở đây là $T_{\vec{u}}; Đ_I; Q_{(I;\alpha)}; V_{(I;k)}$). Lấy $M(x;y) \in d$. Giả sử $F: M \longmapsto M'$ với $M'(x';y')$ Viết biểu thức tọa độ tương ứng với PBH đề cho $\Rightarrow \begin{cases} x = \cdots \\ y = \cdots \end{cases}$ Ta có $M \in d \Rightarrow \cdots$ (thay $x; y$ vào đường thẳng d) ta được đường thẳng d'.
VD: Tìm ảnh của $d: 3x - 5y + 3 = 0$ theo PTT theo $\vec{u} = (-2;3)$ Giải: Giả sử $T_{\vec{u}}: d \longrightarrow d'$. Lấy $M(x;y) \in d$. Giả sử $T_{\vec{u}}: M \longmapsto M'$ với $M'(x';y')$ Khi đó $\begin{cases} x' - x = -2 \\ y' - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' + 2 \\ y = y' - 3 \end{cases}$ $M \in d \Leftrightarrow 3x - 5y + 3 = 0 \Leftrightarrow 3(x'+2) - 5(y'-3) + 3 = 0 \Leftrightarrow 3x' - 5y' + 24 = 0$ Vậy $d': 3x - 5y + 24 = 0$ **VD:** Tìm ảnh của $d: 3x + 2y - 6 = 0$ qua PVT tâm O tỉ số $k = -2$ Giải: Giả sử $V_{(O;-2)}: d \longrightarrow d'$. Lấy $M(x;y) \in d$. Giả sử $V_{(O;-2)}: M \longmapsto M'$ với $M'(x';y')$ $\overrightarrow{OM'} = -2\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -2x \\ y' = -2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{x'}{2} \\ y = -\dfrac{y'}{2} \end{cases}$ $M \in d \Leftrightarrow 3x + 2y - 6 = 0 \Leftrightarrow 3\left(-\dfrac{x'}{2}\right) + 2\left(-\dfrac{y'}{2}\right) - 6 = 0 \Leftrightarrow -3x' - 2y' - 12 = 0$ Vậy $d': -3x - 2y - 12 = 0$

ẢNH CỦA ĐƯỜNG TRÒN

Giả sử $F: (C) \longrightarrow (C')$ (F ở đây là $T_{\vec{u}}; Đ_I; Q_{(I;\alpha)}; V_{(I;k)}$)

Xác định tâm I của đường tròn (C). Tìm ảnh I' của I qua PBH F.

Ta có: $(C'): \begin{cases} \text{tâm } I' \\ \text{bán kính } R' = R \end{cases}$ (riêng phép vị tự thì $R' = |k|R$). Từ đó ta có phương trình (C').

VD: Tìm ảnh của $(C): x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$ qua phép ĐXT với tâm $A(1; 2)$.

Giải:

Giả sử $Đ_A: (C) \longrightarrow (C')$ với $(C): \begin{cases} \text{tâm } I(-1; 3) \\ \text{bán kính } R = 2 \end{cases}$

$Đ_A: I \mapsto I' \Leftrightarrow A$ là trung điểm $II' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2.1 - (-1) = 3 \\ y' = 2.2 - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow I'(3; 1)$

Ta có: $(C'): \begin{cases} \text{tâm } I'(3; 1) \\ \text{bán kính } R' = R = 2 \end{cases} \Rightarrow (C'): (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$

VD: Tìm ảnh của $(C): (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 9$ qua PVT tâm O, tỉ số $k = -2$

Giải:

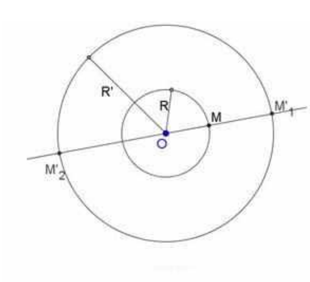
Giả sử $V_{(O;-2)}: (C) \longrightarrow (C')$ với $(C): \begin{cases} \text{tâm } I(3; -1) \\ \text{bán kính } R = 3 \end{cases}$

$V_{(O;-2)}: I \mapsto I' \Leftrightarrow \overrightarrow{OI'} = -2\overrightarrow{OI} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{I'} - 0 = -2(3 - 0) \\ y_{I'} - 0 = -2(-1 - 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{I'} = -6 \\ y_{I'} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow I'(-6; 2)$

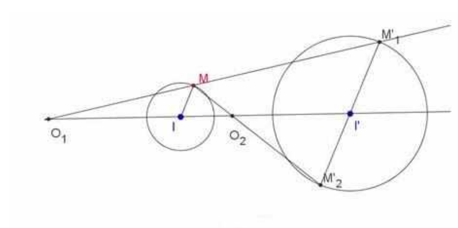
Ta có: $(C'): \begin{cases} \text{tâm } I'(-6; 2) \\ \text{bán kính } R' = |-2|R = 6 \end{cases} \Rightarrow (C'): (x + 6)^2 + (y - 2)^2 = 36$

TÂM VỊ TỰ CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

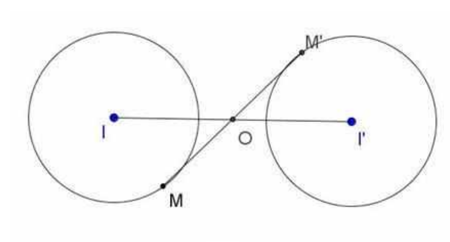
TH1: Nếu $I \equiv I'$ thì PVT tâm $O \equiv I$, tỉ số $\frac{R'}{R}$ và PVT tâm $O \equiv I$, tỉ số $-\frac{R'}{R}$.



TH2: Nếu $I \neq I'$ và $R \neq R'$ thì PVT tâm O_1 (tâm vị tự ngoài), tỉ số $\frac{R'}{R}$ và PVT tâm O_2 (tâm vị tự trong), tỉ số $-\frac{R'}{R}$.



TH3: Nếu $I \neq I'$ và $R = R'$ thì PVT tâm O, tỉ số $k = -\frac{R}{R} = -1$.



VD: Cho $A(2; 1); B(8; 4)$. Tìm tọa độ tâm vị tự của hai đường tròn $(A; 2)$ và $(B; 4)$.

Giải:

Có $A \neq B$ và $R \neq R'$ nên có 2 PVT tỉ số là ± 2 biến $(A; 2)$ thành $(B; 4)$.

Tâm vị tự ngoài O_1 thỏa $\overrightarrow{O_1B} = 2\overrightarrow{O_1A} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 - x_{O_1} = 2(2 - x_{O_1}) \\ 4 - y_{O_1} = 2(1 - y_{O_1}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{O_1} = -4 \\ y_{O_1} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow O_1(-4; -2)$

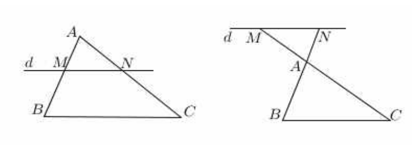
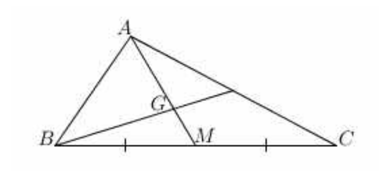
Tâm vị tự trong O_2 thỏa $\overrightarrow{O_2B} = 2\overrightarrow{O_2A} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 - x_{O_2} = -2(2 - x_{O_2}) \\ 4 - y_{O_2} = -2(1 - y_{O_2}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{O_2} = 4 \\ y_{O_2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow O_2(4; 2)$

Vậy 2 tâm vị tự là $O_1(-4; -2); O_2(4; 2)$.

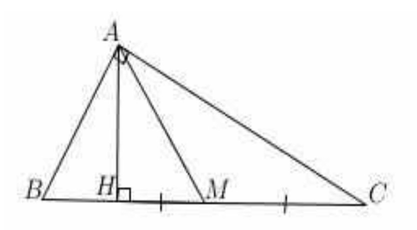
N. HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

NHỚ

- Trọng tâm: giao điểm 3 đường trung tuyến.
- Trực tâm: giao điểm 3 đường cao.
- Tâm đường tròn ngoại tiếp: giao điểm 3 đường trung trực.
- Tâm đường tròn nội tiếp: giao điểm 3 đường phân giác.

ĐỊNH LÍ TALES	**TRỌNG TÂM TAM GIÁC**
 $MN//BC \Leftrightarrow \dfrac{AM}{BC} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$	 $AG = \dfrac{2}{3}AM$ $AG = 2GM$

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG



sin = đối/huyền cos = kề/huyền tan = đối/kề cot = kề/đối

(Sin đi học - Cứ khóc hoài - Thôi đừng khóc - Có kẹo đây)

$BC^2 = AB^2 + AC^2$ $AB^2 = BH.BC; AC^2 = CH.BC$

$AH^2 = BH.CH$ $AH.BC = AB.AC$

$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$ $BC = 2AM$

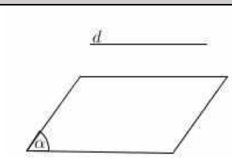
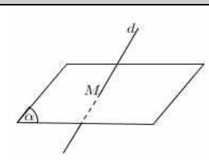
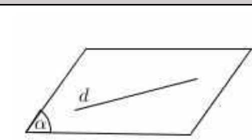
DIỆN TÍCH

Tam giác đều	Đường cao $= \dfrac{\text{cạnh}.\sqrt{3}}{2}$
Tam giác vuông cân	Cạnh huyền $=$ cạnh góc vuông$.\sqrt{2}$
Hình vuông	Đường chéo $=$ cạnh$.\sqrt{2}$

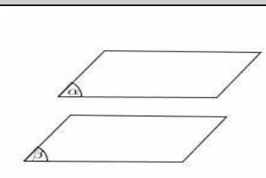
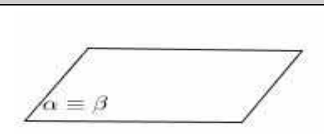
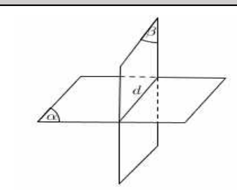
CÁCH XÁC ĐINH MỘT MẶT PHẲNG

- 3 điểm không thẳng hàng.
- 2 đường thẳng cắt nhau.
- 1 đường thẳng và 1 điểm không thuộc đường thẳng.
- 2 đường thẳng song song.

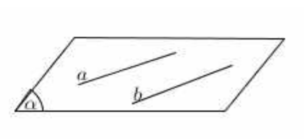
VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

 $d \parallel (\alpha) \Leftrightarrow d \cap (\alpha) = \emptyset$	 d cắt $(\alpha) \Leftrightarrow d \cap (\alpha) = M$	 $d \subset (\alpha) \Leftrightarrow d \cap (\alpha) = d$

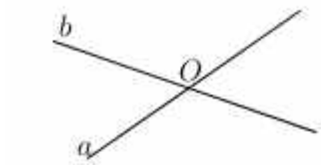
VỊ. TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI MẶT PHẲNG

 $(\alpha) \parallel (\beta) \Leftrightarrow (\alpha) \cap (\beta) = \emptyset$	 $(\alpha) \equiv (\beta) \Leftrightarrow (\alpha) \cap (\beta) = (\alpha)$	 (α) cắt $(\beta) \Leftrightarrow (\alpha) \cap (\beta) = d$

VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

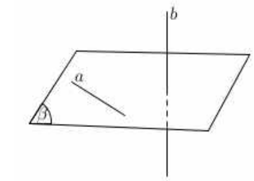


$$a \parallel b \Leftrightarrow \begin{cases} a \subset (\alpha) \\ b \subset (\beta) \\ a \cap b = \emptyset \end{cases}$$



a cắt b $\Leftrightarrow a \cap b = O$

$a \equiv b \Leftrightarrow a \cap b = a$



$a; b$ chéo nhau $\Leftrightarrow a; b$ không đồng phẳng.

CÁCH XÁC ĐỊNH GIAO TUYẾN GIỮA HAI MẶT PHẲNG

Cách 1: Tìm hai điểm chung của hai mặt phẳng.

$$\begin{cases} M \in a; a \subset (\alpha) \\ M \in b; b \subset (\beta) \end{cases} \Rightarrow M \in (\alpha) \cap (\beta)$$

Chú ý: Để tìm điểm chung của hai mặt phẳng ta thường tìm hai đường thẳng đồng phẳng lần lượt nằm trong hai mặt phẳng. Giao điểm, nếu có, của hai đường thẳng này chính là điểm chung cần tìm.

Cách 2: Tìm một điểm chung của hai mặt phẳng và phương giao tuyến (tức tìm trong hai mặt phẳng hai đường thẳng song song với nhau).

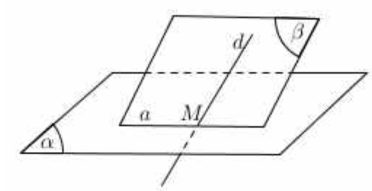
$$\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (\beta) \\ a \parallel b \\ a \subset (\alpha); b \subset (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (\beta) = Mx$$

với $Mx \parallel a \parallel b$

CÁCH XÁC ĐỊNH GIAO ĐIỂM GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Để tìm giao điểm của d và (α), ta tìm trong (α) một đường thẳng a cắt d tại M. Khi đó: $M = d \cap (\alpha)$.

$$\begin{cases} M \in d \\ M \in (\alpha) \end{cases} \Rightarrow M = d \cap (\alpha)$$



Chú ý: Nếu a chưa có sẵn thì ta chọn (β) qua d và lấy $a = (\alpha) \cap (\beta)$.

THIẾT DIỆN

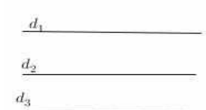
Thiết diện của mặt phẳng (α) với hình chóp là đa giác giới hạn bởi các giao tuyến của (α) với các mặt của hình chóp. Như vậy, để tìm thiết diện ta lần lượt đi tìm giao tuyến của (α) với các mặt của hình chóp.

CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG ĐƯỜNG THẲNG

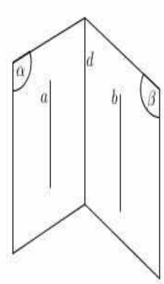
Cách 1: Chứng minh hai đường thẳng đồng phẳng rồi áp dụng phương pháp chứng minh song song trong hình học phẳng (đường trung bình; định lí Tales…)

Cách 2: Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

$$\begin{cases} d_1 \parallel d_3 \\ d_2 \parallel d_3 \end{cases} \Rightarrow d_1 \parallel d_2$$



Cách 3: Hai mặt phẳng cắt nhau theo giao tuyến d và lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của nó sẽ có 3 trường hợp:

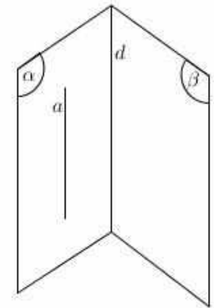


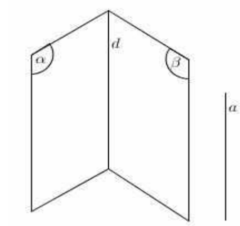
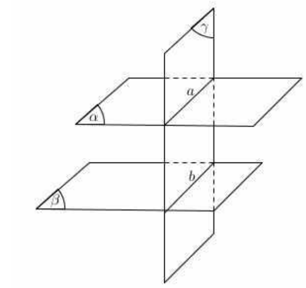
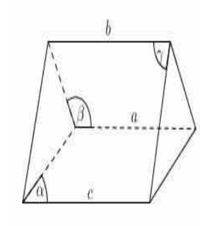
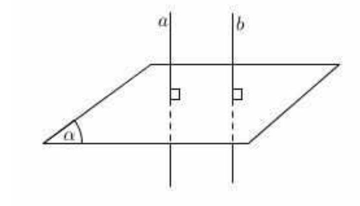
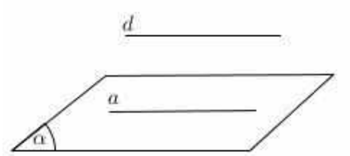
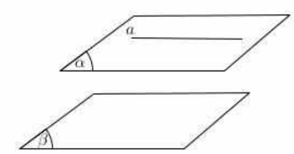
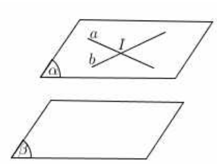
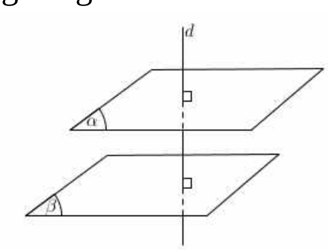
$$\begin{cases} (\alpha) \cap (\beta) = d \\ a \parallel b \\ a \subset (\alpha) \\ b \subset (\beta) \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} d \parallel a \parallel b \\ d \equiv a \\ d \equiv b \end{array} \right.$$

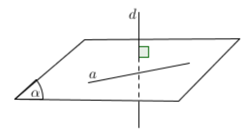
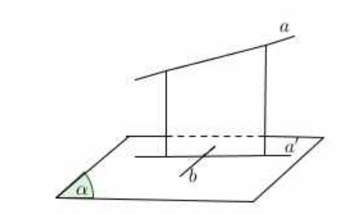
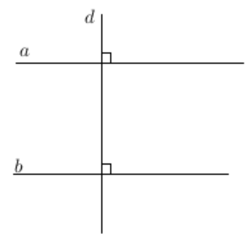
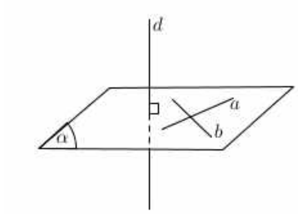
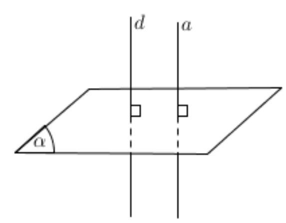
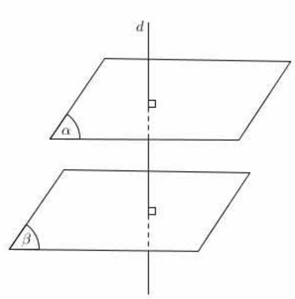
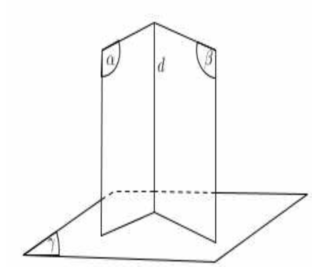
Như vậy, trong trường hợp này ta chỉ cần chỉ ra d không trùng với a hoặc b thì sẽ suy ra được $d \parallel a$ hoặc $d \parallel b$.

Cách 4: Hai mặt phẳng cắt nhau theo giao tuyến d, đường thẳng a nằm trong (α) và song song với mặt phẳng còn lại thì sẽ song song với giao tuyến.

$$\left. \begin{array}{c} (\alpha) \cap (\beta) = d \\ a \subset (\alpha) \\ a \parallel (\beta) \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel d$$

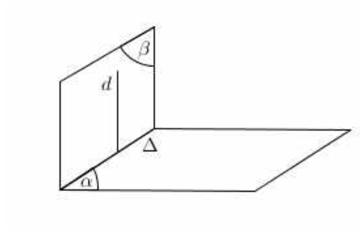


Cách 5: Hai mặt phẳng cắt nhau theo giao tuyến d, đường thẳng a song song với cả hai mặt phẳng thì sẽ song song với giao tuyến. $\left.\begin{matrix}(\alpha)\cap(\beta)=d\\ a \parallel (\alpha)\\ a\parallel(\beta)\end{matrix}\right\}\Rightarrow a\parallel d$ 	**Cách 6:** Hai mặt phẳng song song bị cắt bởi mặt phẳng thứ 3 thì hai giao tuyến đó song song. $\left.\begin{matrix}(\alpha)\parallel(\beta)\\ (\alpha)\cap(\gamma)=a\\ (\beta)\cap(\gamma)=b\end{matrix}\right\}\Rightarrow a\parallel b$ 
Cách 7: Ba mặt phẳng cắt nhau theo 3 giao tuyến phân biệt, thì 3 giao tuyến ấy song song hoặc đồng quy. $\left.\begin{matrix}(\alpha)\cap(\beta)=a\\ (\beta)\cap(\gamma)=b\\ (\gamma)\cap(\alpha)=c\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left[\begin{matrix}a\parallel b\parallel c\\ a;b;c \text{ đồng quy}\end{matrix}\right.$ Như vậy, ta chỉ cần chứng minh $a;b;c$ không đồng quy thì sẽ suy ra được $a\parallel b\parallel c$. 	**Cách 8:** Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.  $\left.\begin{matrix}a\perp(\alpha)\\ b\perp(\beta)\\ a\neq b\end{matrix}\right\}\Rightarrow a\parallel b$
CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG	
Cách 1: Chứng minh đường thẳng d không nằm trong (α) và song song với đường thẳng a nằm trong (α). $\left.\begin{matrix}d\parallel a\\ a\subset(\alpha)\\ d\not\subset(\alpha)\end{matrix}\right\}\Rightarrow d\parallel(\alpha)$ 	**Cách 2:** Hai mặt phẳng song song với nhau, mọi đường thẳng nằm trong mặt này sẽ song song với mặt kia. $\begin{cases}(\alpha)\parallel(\beta)\\ a\subset(\alpha)\end{cases}\Rightarrow a\parallel(\beta)$ 
CHỨNG MINH HAI MẶT PHẲNG SONG SONG	
Cách 1: Chứng minh trong mặt phẳng thứ nhất chứa hai đường thẳng cắt nhau và song song mặt phẳng thứ hai, khi đó hai mặt phẳng song song với nhau. $\left.\begin{matrix}a;b\subset(\alpha)\\ a\cap b=I\\ a\parallel(\beta);b\parallel(\beta)\end{matrix}\right\}\Rightarrow(\alpha)\parallel(\beta)$ 	**Cách 2:** Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau. $\begin{cases}d\perp(\alpha)\\ d\perp(\beta)\end{cases}\Rightarrow(\alpha)\parallel(\beta)$ 

<table>
<tr><th colspan="2">CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC</th></tr>
<tr>
<td>Cách 1: Hai đường thẳng vuông góc nếu như góc giữa chúng bằng 90°.
$\cos(\widehat{a;b}) = \frac{\overrightarrow{u_a}.\overrightarrow{u_b}}{|\overrightarrow{u_a}|.|\overrightarrow{u_b}|} = \cdots = 0$
$\Rightarrow (a;b) = \widehat{90^0} \Rightarrow a \perp b$</td>
<td>Cách 2: Một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng thì sẽ vuông góc với mọi đường nằm trong mặt phẳng.
$\begin{cases} d \perp (\alpha) \\ a \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow d \perp a$
</td>
</tr>
<tr>
<td>Cách 3: Đường thẳng d không vuông góc (α) và đường thẳng a nằm trong (α). Khi đó, điều kiện cần và đủ để d vuông a là d vuông với hình chiếu a' của a trên (α)
$\left.\begin{array}{c} d \text{ không vuông góc } (\alpha) \\ a \subset (\alpha) \\ d' \text{là hình chiếu của } d \text{ trên } (\alpha) \\ a \perp d \end{array}\right\} \Leftrightarrow a \perp d'$
</td>
<td>Cách 4: Hai đường thẳng song song, một đường vuông góc với đường này thì vuông góc với đường kia.
$\begin{cases} a \parallel b \\ d \perp a \end{cases} \Rightarrow d \perp b$
</td>
</tr>
<tr><th colspan="2">CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC MẶT PHẲNG</th></tr>
<tr>
<td>Cách 1: Một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng khi chỉ khi đường thẳng ấy vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau chứa trong mặt phẳng.

$\begin{cases} d \perp a; d \perp b \\ a; b \subset (\alpha) \\ a; b \text{ cắt nhau} \end{cases} \Rightarrow d \perp (\alpha)$</td>
<td>Cách 2: Hai đường thẳng song song đường này vuông góc với mặt phẳng thì đường kia cũng vuông góc mặt phẳng.
$\begin{cases} d \parallel a \\ a \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow d \perp (\alpha)$
</td>
</tr>
<tr>
<td>Cách 3: Một đường thẳng vuông góc với một trong hai mặt phẳng song song thì vuông góc với mặt còn lại.
$\left.\begin{array}{c} d \perp (\alpha) \\ (\alpha) \parallel (\beta) \end{array}\right\} \Rightarrow d \perp (\beta)$
</td>
<td>Cách 4: Hai mặt phẳng cắt nhau cùng vuông góc mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến vuông góc với mặt phẳng thứ ba.
$\left.\begin{array}{c} d = (\alpha) \cap (\beta) \\ (\alpha) \perp (\gamma) \\ (\beta) \perp (\gamma) \end{array}\right\} \Rightarrow d \perp (\gamma)$
</td>
</tr>
</table>

Cách 5: Hai mặt phẳng vuông góc, một đường nằm trong mặt này vuông với giao tuyến thì vuông với mặt kia.

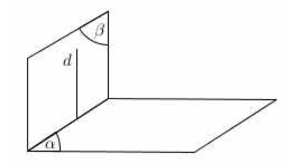
$$\left.\begin{matrix}(\alpha)\perp(\beta)\\ \Delta=(\alpha)\cap(\beta)\\ d\subset(\beta)\\ d\perp\Delta\end{matrix}\right\}\Rightarrow d\perp(\alpha)$$



CHỨNG MINH HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

Hai mặt phẳng vuông góc với nhau khi và chỉ khi mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

$$\begin{cases}d\perp(\alpha)\\ d\subset(\beta)\end{cases}\Rightarrow(\alpha)\perp(\beta)$$

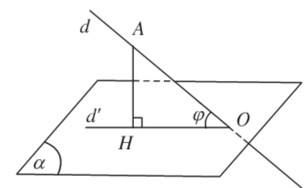


GÓC

Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

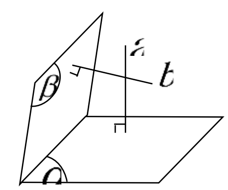
- Tìm giao điểm O của d và (α).
- Chọn điểm $A\in d$, dựng $AH\perp(\alpha)$ $\big(H\in(\alpha)\big)$.
- Suy ra, hình chiếu vuông góc của AO trên (α) là MO.

Do đó, $\left(\widehat{d;(\alpha)}\right)=\widehat{AOH}$.



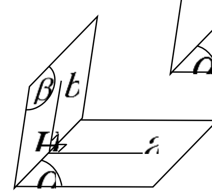
Góc giữa hai mặt phẳng

Cách 1: Tìm hai đường thẳng $a;b$ sao cho $\begin{cases}a\perp(\alpha)\\ b\perp(\beta)\end{cases}$. Khi đó, $\left(\widehat{(\alpha);(\beta)}\right)=\widehat{(a;b)}$



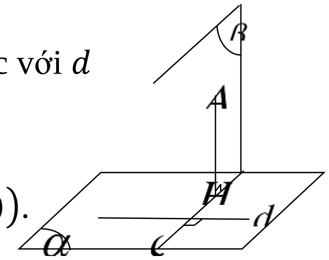
Cách 2:

- Xác định $c=(\alpha)\cap(\beta)$.
- Từ $H\in c$, lần lượt dựng $\begin{cases}a\perp c; a\subset(\alpha)\\ b\perp c; b\subset(\beta)\end{cases}$. Khi đó, $\left(\widehat{(\alpha);(\beta)}\right)=\widehat{(a;b)}$



KHOẢNG CÁCH

Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

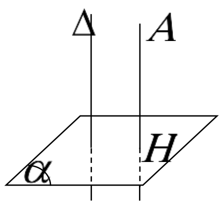


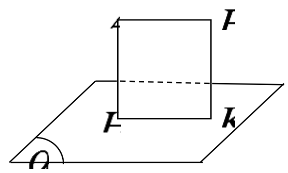
- Chọn trong (α) một đường thẳng d rồi dựng mặt phẳng (β) qua A vuông góc với d
- Xác định $c = (\alpha) \cap (\beta)$.
- Dựng $AH \perp c$ tại H. Đường thẳng AH là đường thẳng qua A vuông góc (α).
- Khi đó, độ dài đoạn thẳng AH là khoảng cách từ A đến (α). Kí hiệu $d\left(A;(\alpha)\right)$.

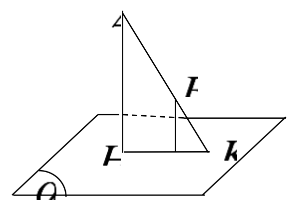
Chú ý:

1) Nếu đã có sẵn đường thẳng $\Delta \perp (\alpha)$, khi đó chỉ cần dựng đường thẳng $Ax \parallel \Delta$ thì $Ax \perp (\alpha)$.

2) Nếu $AB \parallel (\alpha)$ thì $d\left(A;(\alpha)\right) = d\left(B;(\alpha)\right)$. Nếu AB cắt (α) tại I thì $\dfrac{d\left(A;(\alpha)\right)}{d\left(B;(\alpha)\right)} = \dfrac{IA}{IB}$.

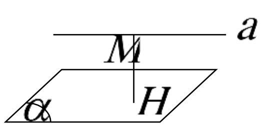






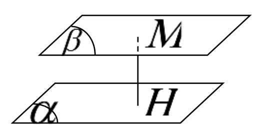
Khoảng cách từ đường thẳng $\boldsymbol{a}$ đến mặt phẳng $(\boldsymbol{\alpha})$ song song với $\boldsymbol{a}$ là

$d\left(a;(\alpha)\right) = d\left(M;(\alpha)\right)$ với $M \in a$.



Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song $(\boldsymbol{\alpha})$ và $(\boldsymbol{\beta})$ là

$d\left((\alpha);(\beta)\right) = d\left(M;(\beta)\right)$ với $M \in (\alpha)$.

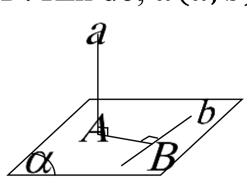


Đoạn vuông góc chung – khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Cách 1: (áp dụng cho trường hợp $a \perp b$)

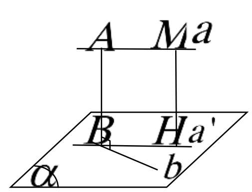
Dựng (α) chứa b, vuông góc với a tại A.

Dựng $AB \perp b$ tại B. Khi đó, $d(a;b) = AB$



Cách 2: Dựng mặt phẳng chứa b, song song với a.

Khi đó, $d(a;b) = AB = MH = d\left(a;(\alpha)\right)$



MỤC LỤC