

CHUYÊN ĐỀ HÌNH HỌC KHÔNG GIAN BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI

Bài 1. Xét các hình chóp n – giác $S.A_1A_2...A_n$ (n là số tự nhiên tùy ý lớn hơn 2) thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

a/ Đáy $A_1A_2...A_n$ có tất cả các cạnh đều bằng 1.

b/ $SA_1A_2 = SA_2A_3 = \dots = SA_nA_1 = 60^\circ$

Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất độ dài đường cao SH của hình chóp nêu trên.

Hướng dẫn giải

Chứng minh nếu hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ tồn tại thì khi đó hình chóp là đều:

Chứng minh rằng các cạnh bên bằng nhau

Đặt : $SA_1 = x_1$; $SA_2 = x_2$; ; $SA_n = x_n$.

Dùng định lý cosin trong các tam giác SA_1A_2 ; SA_2A_3 ; ...; SA_nA_1 ta có:

$$x_2^2 = 1 + x_1^2 - 2x_1 \cos 60^\circ = 1 + x_1^2 - x_1$$

$$x_3^2 = 1 + x_2^2 - 2x_2 \cos 60^\circ = 1 + x_2^2 - x_2$$

.....

$$x_n^2 = 1 + x_{n-1}^2 - 2x_{n-1} \cos 60^\circ = 1 + x_{n-1}^2 - x_{n-1}$$

$$x_1^2 = 1 + x_n^2 - 2x_n \cos 60^\circ = 1 + x_n^2 - x_n$$

Đặt $f(x) = x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$, ta có hệ:
$$\begin{cases} x_2^2 = f(x_1) \\ x_3^2 = f(x_2) \\ \dots \\ x_n^2 = f(x_{n-1}) \\ x_1^2 = f(x_n) \end{cases}$$
 với $x_1, x_2, \dots, x_n \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty\right)$

Trên $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty\right)$ $f(x)$ đồng biến.

Do đó: $x_1 \neq x_2$ thì vô lý.

Thật vậy: nếu $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_2^2 < x_3^2 \Rightarrow x_2 < x_3 \Rightarrow \dots \Rightarrow x_n < x_1$. Ta có $x_1 < x_1$ (vô lý)

Tương tự nếu $x_1 > x_2$ cũng suy ra điều vô lý: $x_1 > x_1$. Vậy $x_1 = x_2$.

Do $x_1 = x_2$ ta được $x_1^2 = x_1^2 - x_1 + 1 \Leftrightarrow x_1 = 1$. Từ đó ta được: $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$.

Chứng minh đáy $A_1A_2\dots A_n$ là đa giác đều. Từ $SA_1 = SA_2 = \dots = SA_n = 1$ suy ra hình vuông góc H của S lên đáy cách đều các đỉnh của đáy. Đa giác $A_1A_2\dots A_n$ có các cạnh bằng nhau và nội tiếp trong một đường tròn nên là đa giác đều.

a) Tìm SH lớn nhất, nhỏ nhất.

b) Chứng minh $n < 6$. Ta có các mặt bên của hình chóp là các tam giác đều cạnh 1.

Ngoài ra: $60^\circ = \angle A_1SA_2 < \angle A_1HA_2$; $60^\circ = \angle A_2SA_3 < \angle A_2HA_3$; ...; $60^\circ = \angle A_nSA_1 < \angle A_nHA_1$.

Do đó: $n \cdot 60^\circ < 360^\circ \Leftrightarrow n < 6$ ($n > 2$).

• Tính SH và tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của SH :

Xét tam giác vuông SHA_1 : $SH^2 = SA_1^2 - HA_1^2$; $SA_1 = 1$; $HA_1 = \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{n}}$.

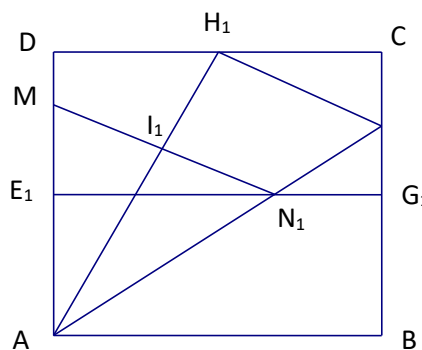
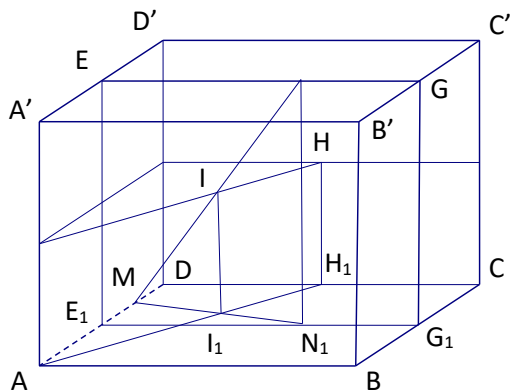
$$SH^2 = 1 - \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\pi}{n}} = 1 - \frac{1}{4} \left(1 + \cot^2 \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{4} \left(3 - \cot^2 \frac{\pi}{4} \right), \quad SH = \frac{1}{2} \sqrt{3 - \cot^2 \frac{\pi}{4}} \quad n = 3; 4; 5.$$

$$n = 3: SH = \sqrt{\frac{2}{3}}; \quad n = 4: SH = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad n = 5: SH = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}}}.$$

• Do đó giá trị lớn nhất của SH là $\sqrt{\frac{2}{3}}$, giá trị nhỏ nhất của SH là $\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}}}$.

Bài 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi E, G, K lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'D', B'C'$ và AA' . H là tâm của hình vuông $DCDC'$. M, N là hai điểm lần lượt ở trên hai đường thẳng AD và EG sao cho MN vuông góc với KH và cắt KH . Tính độ dài đoạn MN theo a .

Hướng dẫn giải



Xác định đoạn MN

Gọi E_1, N_1, G_1, H_1 là hình chiếu vuông góc của E, N, G, H trên mặt phẳng $(ABCD)$.

Do $KH \perp MN$ (gt) và $KH \perp NN_1$ suy ra $KH \perp MN_1$, suy ra $AH_1 \perp MN_1$ tại I_1 .

Mà theo giả thiết MN cắt KH tại I suy ra $II_1 \parallel NN_1$ mà I là trung điểm của đoạn MN nên I_1 phải là trung điểm của MN_1 .

Từ đó suy ra cách dựng hai điểm M, N .

Tính độ dài MN

Đặt $\alpha = \angle DAH_1 \Rightarrow \angle H_1AN_1 = \angle E_1N_1M = \alpha$.

Xét tam giác vuông DAH , ta có: $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow AN_1 = \frac{AE_1}{\cos 2\alpha} = \frac{5}{6}a$.

Xét tam giác vuông AIN_1 , ta có: $IN_1 = AN_1 \cdot \sin \alpha = \frac{5}{6}a \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{5}}{6} \Rightarrow MN_1 = \frac{a\sqrt{5}}{3}$.

(Cách khác: Gọi P là trung điểm của CG_1 , suy ra được N_1 ở trên AP , suy ra $E_1N_1 = \frac{2}{3}a$.)

$MN_1 = \frac{E_1N_1}{\cos \alpha} = \frac{a\sqrt{5}}{3} \Rightarrow MN^2 = NN_1^2 + MN_1^2 = a^2 + \frac{5}{9}a^2 = \frac{14}{9}a^2 \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{14}}{3}$.

Cách khác: Dùng phương pháp tọa độ trong không gian....

Bài 3. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy $a = 12,54$ (cm), các cạnh bên nghiêng với đáy một góc $\alpha = 72^\circ$. Tính thể tích và diện tích xung quanh của hình chóp $S.ABCD$.

Hướng dẫn giải

Chiều cao của hình chóp: $SH = \frac{a\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} 72^\circ \approx 27,29018628$

Thể tích của hình chóp: $V = \frac{1}{3}a^2h \approx 1430,475152$ (cm³)

Trung đoạn của hình chóp

$d = \sqrt{SH^2 + \frac{a^2}{4}} \approx 28,00119939$

Diện tích xung quanh của hình chóp: $S_{xq} = \frac{1}{2} \cdot 4a \cdot d \approx 702,2700807$ (cm²)

Bài 4. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy $a = 12,54$ (cm), $a = 12,54$ (cm), các cạnh bên nghiêng với đáy một góc $\alpha = 72^\circ$.

a) Tính thể tích hình cầu (S_1) nội tiếp hình chóp $S.ABCD$.

b) Tính diện tích của hình tròn thiết diện của hình cầu (S_1) cắt bởi mặt phẳng đi qua các tiếp điểm của mặt cầu (S_2) với các mặt bên của hình chóp $S.ABCD$.

Hướng dẫn giải

$$SH = 27.29018628; IH = \frac{SH \cdot MH}{MH + MS} = 4.992806526 = R \text{ (bán kính mặt cầu nội tiếp)}$$

$$\text{Thể tích hình chóp } (S_1): V = \frac{4}{3} \pi R^3 \approx 521.342129 (cm^3)$$

$$SM \approx 28,00119939$$

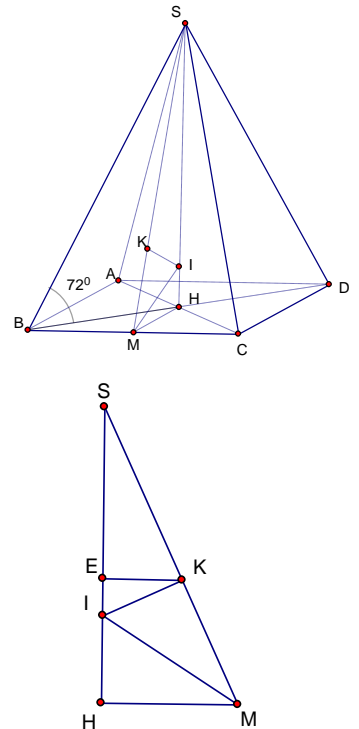
$$MH = 6,27; IK = IH$$

Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng đi qua các tiếp điểm của (S_1) với các mặt bên của hình chóp:

$$d = EI = \frac{IH^2}{SH - IH} = 4.866027997$$

$$\text{Bán kính đường tròn giao tuyến: } r = EK = \sqrt{R^2 - d^2} \approx 1,117984141$$

$$\text{Diện tích hình tròn giao tuyến: } S \approx 74,38733486 (cm^2)$$



Bài 5. Một thùng hình trụ có đường kính đáy (bên trong) bằng $12,24 (cm)$ đựng nước cao lên $4,56 (cm)$ so với mặt trong của đáy. Một viên bi hình cầu được thả vào trong thùng thì mực nước dâng lên sát với điểm cao nhất của viên bi (nghĩa là mặt nước là tiếp diện của mặt cầu). Hãy tính bán kính của viên bi.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có phương trình: } \pi R^2 h + \frac{4}{3} \pi x^3 = \pi R^2 \cdot 2x \Leftrightarrow 4x^3 - 6R^2 x + 3R^2 h = 0 \quad (0 < x < R)$$

Với R, x, h lần lượt là bán kính đáy của hình trụ, hình cầu và chiều cao ban đầu của cột nước.

$$\text{Bấm máy giải phương trình: } 4x^3 - 224,7264x + 512,376192 = 0 (0 < x \leq 6,12)$$

$$\text{Ta có: } x_1 \approx 2,588826692; \quad x_2 \approx 5,857864771$$

$$(AB): 5x - 3y + 8 = 0; \quad (AC): 3x - 8y + 42 = 0;$$

$$(BC): 2x + 5y - 3 = 0$$

B. Xét hai độ dài khác nhau a, b . Tìm điều kiện của a, b để tồn tại tứ diện (T) có một cạnh bằng a và các cạnh còn lại đều bằng b . Với tứ diện (T) này, hãy xác định mặt phẳng (α) sao cho thiết diện của mặt phẳng (α) và tứ diện (T) là một hình vuông (V). Tính diện tích của hình vuông (V) theo a và b .

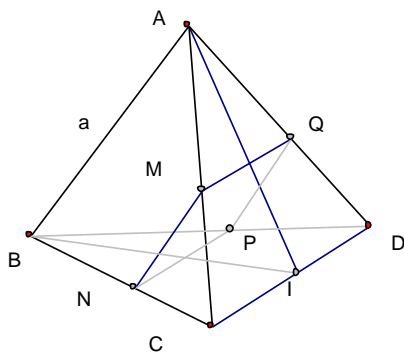
Điều kiện độ dài a, b :

+ Giả sử tứ diện (T) tồn tại. Gọi AB là cạnh bằng a , các cạnh AC, AD, BC, BD, CD đều cùng bằng b .
Gọi I là trung điểm cạnh CD . Tam giác AIB là tam giác cân:

$$AB = a; AI = BI = \frac{b\sqrt{3}}{2}. \text{ Từ } AB < AI + BI \text{ Suy ra: } 0 < a < b\sqrt{3}$$

+ Ngược lại với: $0 < a < b\sqrt{3}$. Dựng tam giác đều BCD cạnh b với chiều cao BI .

Dựng tam giác cân AIB có $AB = a$, nằm trong mặt phẳng chứa BI và vuông góc với mặt phẳng (BCD) . Ta có: $A \notin \text{mp}(BCD)$. Tứ diện $ABCD$ thỏa điều kiện bài toán.



Xác định mặt phẳng (α) :

+ Giả sử thiết diện $MNPQ$ là hình vuông. Các mặt của tứ diện (T) lần lượt chứa các đoạn giao tuyến MN, NP, PQ, QM được gọi tên là mặt (I) , mặt (II) , mặt (III) , mặt (IV) .

Do $MN \parallel PQ; MQ \parallel NP$ nên cạnh chung của mặt (I) và mặt (III) ; cạnh chung của mặt (II) và mặt (IV) nằm trên hai đường thẳng song song với mp (α) .

Ngoài ra hai đường thẳng này vuông góc với nhau, vì MN vuông góc MQ .

+ Do a khác b nên tứ diện (T) chỉ có một cặp cạnh đối vuông góc, đó là AB và CD .