

# CHƯƠNG 5

# ĐẠO HÀM

<b>BÀI 1. ĐỊNH NGHĨA – QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM</b>	<b>2</b>
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT	1
B. DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP	2
<input checked="" type="checkbox"/> DẠNG 1. TÍNH ĐẠO HÀM BẰNG ĐỊNH NGHĨA	2
<input checked="" type="checkbox"/> DẠNG 2. CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM VÀ BẢNG ĐẠO HÀM	3
<input checked="" type="checkbox"/> DẠNG 3. BÀI TOÁN CHỨNG MINH, GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH	16
<input checked="" type="checkbox"/> DẠNG 4. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC	20
<input checked="" type="checkbox"/> DẠNG 5. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC, GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ĐẠO HÀM	26
C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN	27
D. LỜI GIẢI BÀI TẬP RÈN LUYỆN	32
<b>BÀI 2. PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN</b>	<b>41</b>
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT	41
B. DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP	41
<input checked="" type="checkbox"/> DẠNG 1. VIẾT PTTT KHI BIẾT TIẾP ĐIỂM (TẠI ĐIỂM $M$ ) HOẶC BIẾT HOÀNH ĐỘ, TUNG ĐỘ	41
<input checked="" type="checkbox"/> DẠNG 2. VIẾT PTTT KHI BIẾT HỆ SỐ GÓC HOẶC SONG SONG, VUÔNG GÓC VỚI MỘT ĐƯỜNG THẲNG	48
<input checked="" type="checkbox"/> DẠNG 3. BÀI TOÁN VỀ XÁC ĐỊNH HỆ SỐ GÓC NHỎ NHẤT, LỚN NHẤT CỦA TIẾP TUYẾN	54
<input checked="" type="checkbox"/> DẠNG 4. VIẾT PTTT KHI BIẾT ĐIỂM MÀ TIẾP TUYẾN ĐI QUA	57
<input checked="" type="checkbox"/> DẠNG 5. TÌM THAM SỐ $m$ ĐỂ TỪ 1 ĐIỂM TA KỂ ĐƯỢC ĐÚNG MỘT TIẾP TUYẾN ĐẾN ĐỒ THỊ HÀM SỐ	62
TỔNG HỢP KIẾN THỨC CẦN NHỚ VỀ TIẾP TUYẾN	64
C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN	65
D. LỜI GIẢI BÀI TẬP RÈN LUYỆN	71
<b>BÀI 3. ĐẠO HÀM CẤP CAO VÀ VI PHÂN</b>	<b>92</b>
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT	92
B. DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP	92
<input checked="" type="checkbox"/> DẠNG 1. TÍNH ĐẠO HÀM CẤP CAO CỦA MỘT HÀM SỐ	92
<input checked="" type="checkbox"/> DẠNG 2. TÌM VI PHÂN CỦA MỘT HÀM SỐ	94
<b>BÀI 4. ÔN TẬP CHƯƠNG V</b>	<b>96</b>

## BÀI 1. ĐỊNH NGHĨA – QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

### A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

**1. Định nghĩa đạo hàm:** Cho hàm số  $y = f(x)$  các định trên khoảng  $(a;b)$  và  $x_0 \in (a;b)$ .

Giới hạn hữu hạn nếu có của tỉ số  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  khi  $x \rightarrow x_0$  được gọi là đạo hàm của hàm số đã cho tại

$x_0$ , kí hiệu  $f'(x_0)$  hay  $y'(x_0)$ . Như vậy, ta có:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

**2. Quan hệ giữa sự tồn tại của đạo hàm và tính liên tục của hàm số**

**Định lí 1.** Nếu hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm tại  $x_0$  thì nó liên tục tại điểm đó.

**3. Ý nghĩa của đạo hàm**

a) **Ý nghĩa hình học:** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  tại điểm  $M(x_0; f(x_0))$  có dạng:  $y = k(x - x_0) + f(x_0)$  với  $k = f'(x_0)$  là hệ số góc của tiếp tuyến.

b) **Ý nghĩa vật lý:**

– Vận tốc tức thời:  $v(t) = s'(t)$ .

– Gia tốc tức thời:  $a(t) = v'(t)$ .

– Cường độ dòng điện tức thời:  $I(t) = Q'(t)$ .

**4. Đạo hàm trên khoảng:** Hàm số  $y = f(x)$  được gọi là có đạo hàm trên khoảng  $(a;b)$  nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm  $x$  trên khoảng đó.

### B. DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

#### DẠNG 1. TÍNH ĐẠO HÀM BẰNG ĐỊNH NGHĨA

##### PHƯƠNG PHÁP:

♦ Cần nhớ công thức:  $f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

♦ Phương pháp tính giới hạn của hàm số

#### VI DỤ MINH HỌA

**Ví dụ 1.** Cho hàm số  $f(x) = 2x^2 + x + 1$ . Tính  $f'(2)$ ?

**Lời giải**

Ta có  $f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + x + 1 - 11}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(2x + 5)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (2x + 5) = 9$ .

**Ví dụ 2.** Cho hàm số  $y = x^3 - 2x + 1$ . Tính  $y'(2)$ ?

**Lời giải**

Ta có  $y'(2) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{y(x) - y(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x + 1 - 0}{x - 1}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x - 1) = 1$$

**Ví dụ 3.** Cho hàm số  $f(x) = \sqrt{2x + 1}$ . Tính  $f'(1)$ ?

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{3}}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 2}{(x - 1)(\sqrt{2x+1} + \sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

**Ví dụ 4.** Cho hàm số  $y = \frac{2x-1}{x+3}$ . Tính  $y'(3)$ ?

**Lời giải**

$$\text{Ta có } y'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{y(x) - y(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{2x-1}{x+3} - \frac{5}{6}}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{7x - 21}{6(x+3)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{7}{6(x+3)} = \frac{7}{36}.$$

**☑ BÀI TẬP ÁP DỤNG**

**Bài 1.** Tính đạo hàm của các hàm số sau tại các điểm được chỉ ra:

1. Cho  $f(x) = x^3 + x - 2$ . Tính  $f'(-2)$ ? **ĐS:**  $f'(-2) = 13$

2. Cho  $y = \sqrt{3-2x}$ . Tính  $y'(-3)$ ? **ĐS:**  $y'(-3) = -\frac{1}{3}$

3. Cho  $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ . Tính  $f'(2)$ ? **ĐS:**  $f'(2) = -3$

**☑ LỜI GIẢI**

1. Ta có  $f'(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + x - 2 - (-12)}{x + 2}$   
 $= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x^2 - 2x + 5)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 2x + 5) = 13.$

2. Ta có  $y'(-3) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{y(x) - y(-3)}{x - (-3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{3-2x} - 3}{x + 3}$   
 $= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{-6 - 2x}{(x+3)(\sqrt{3-2x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{-2}{\sqrt{3-2x} + 3} = -\frac{1}{3}.$

3. Ta có  $f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2x+1}{x-1} - 5}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3x + 6}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3}{2(x-1)} = -3.$

**☑ DẠNG 2. CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM VÀ BẢNG ĐẠO HÀM**

**♦ Quy tắc tính đạo hàm**

- ①  $(u + v - w)' = u' + v' - w'$
- ②  $(u \cdot v)' = u'v + v'u$
- ③  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
- ④  $(k \cdot u)' = k \cdot u' \quad (k \in \mathbb{R})$

**♦ Bảng đạo hàm**

Hàm sơ cấp	Hàm hợp
♦ $(C)' = 0 \quad (C \in \mathbb{R})$	♦ $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
♦ $(x^n)' = n \cdot x^{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	

<p>♦ <math>(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x &gt; 0)</math></p> <p>♦ <math>\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad (x \neq 0)</math></p>	<p>♦ <math>(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \quad (u &gt; 0)</math></p> <p>♦ <math>\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2} \quad (u \neq 0)</math></p>
<p><b>o Công thức nhanh</b></p> <p>♦ <math>\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}</math></p> <p>♦ <math>\left(\frac{ax^2+bx+c}{dx+e}\right)' = \frac{ad^2 + 2aex + (be-cd)}{(dx+e)^2}</math></p> <p>♦ <math>\left(\frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} a_1 &amp; b_1 \\ a_2 &amp; b_2 \end{vmatrix} x^2 + 2 \begin{vmatrix} a_1 &amp; c_1 \\ a_2 &amp; c_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 &amp; c_1 \\ b_2 &amp; c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a &amp; x^2 + b &amp; x + c \\ 2 &amp; 2 &amp; 2 \end{vmatrix}}</math> (Tích huyền trừ tích sắc)</p>	

**Loại 1. Làm quen nhóm công thức**  $(x^n)' = n.x^{n-1}$  và  $(u.v)' = u'v + v'u$

**1. Ví dụ minh họa**

**Ví dụ 1.** Tìm đạo hàm của hàm số  $y = x^4 - 2x^2 + 1$ .

**Lời giải**

$$y' = 4x^3 - 2 \cdot 2x = 4x^3 - 4x$$

**Ví dụ 2.** Tìm đạo hàm của hàm số  $y = 5x^2(3x-1)$ .

**Lời giải**

$$y' = [5x^2(3x-1)]' = (5x^2)' \cdot (3x-1) + 5x^2 \cdot (3x-1)' = 10x \cdot (3x-1) + 5x^2 \cdot 3 = 45x^2 - 10x$$

**2. Bài tập áp dụng**

**Bài 1.** Tính đạo hàm của các hàm số sau

1.  $y = -2x^4 + 4x^2 - 3x + 1$ .

**ĐS:**  $-8x^3 + 8x - 3$ .

2.  $y = x^3 - 3x^2 + x - 1$ .

**ĐS:**  $3x^2 - 6x + 1$ .

3.  $y = \frac{1}{2}x^5 + x^4 - x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x - 5$ .

**ĐS:**  $\frac{5}{2}x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 3x + 4$ .

4.  $y = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}x + x^2 - \frac{1}{2}x^4$ .

**ĐS:**  $-\frac{1}{3} + 2x - 2x^3$ .

**Bài 2.** Tính đạo hàm của các hàm số sau

1.  $y = \frac{1}{5}mx^5 - 2x^4 + \frac{1}{3}x^3 + m^2 - 1$ .

**ĐS:**  $mx^4 - 8x^3 + x^2$ .

2.  $y = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x^3 + m - 1$ .

**ĐS:**  $x^2 - x + x$ .

3.  $y = 3x^3 + 2(m-1)x^2 + x + m^2 - 1$ .

**ĐS:**  $9x^2 + 4(m-1)x + 1$ .

**Bài 3.** Tính đạo hàm của các hàm số sau

1.  $y = (x^2 + x)(3 - x^2)$ .

**ĐS:**  $-4x^3 - 3x^2 + 6x + 3$ .

2.  $y = (2x-1)^2(2x+1)^2$ .

**ĐS:**  $16x^2 + 4$ .

3.  $y = x(2x-1)(3x+2)$ .

**ĐS:**  $18x^2 + 2x - 2$ .

### 3. Lời giải

**Bài 1.** 1.  $y' = -2.4x^3 + 4.2x - 3 = -8x^3 + 8x - 3.$

2.  $y' = 3x^2 - 3.2x + 1 = 3x^2 - 6x + 1.$

3.  $y' = \frac{1}{2}.5x^4 + 4x^3 - 3x^2 - \frac{3}{2}.2x + 4 = \frac{5}{2}x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 3x + 4.$

4.  $y' = -\frac{1}{3} + 2x - \frac{1}{2}.4x^3 = -\frac{1}{3} + 2x - 2x^3.$

**Bài 2.** 1.  $y' = \frac{1}{5}.5mx^4 - 2.4x^3 + \frac{1}{3}.3x^2 = mx^4 - 8x^3 + x^2.$

2.  $y' = \frac{1}{4}.4x^3 - \frac{1}{3}.3x^2 + \frac{1}{2}.2x = x^3 - x^2 + x.$

3.  $y' = 3.3x^2 + 2.2(m-1)x + 1 = 9x^2 + 4(m-1)x + 1.$

**Bài 3.** 1.  $y' = [(x^2 + x)(3 - x^2)]' = (x^2 + x)'(3 - x^2) + (x^2 + x).(3 - x^2)'$

$= (2x + 1)(3 - x^2) + (x^2 + x)(-2x) = -4x^3 - 3x^2 + 6x + 3$

2.  $y' = [(2x-1)^2(2x+1)^2]' = [ (2x-1) ]' (2x+1)^2 + (2x-1)^2 [ (2x+1) ]'$   
 $= 2.(2x+1)^2 + (2x-1)^2.2 = 16x^2 + 4.$

3.  $y' = [x(2x-1)(3x+2)]' = x'.[(2x-1)(3x+2)] + x.[(2x-1)(3x+2)]'$   
 $= 1.[(2x-1)(3x+2)] + x.[(2x-1)'.(3x+2) + (2x-1).(3x+2)']$   
 $= 1.[6x^2 + x - 2] + x.[2.(3x+2) + (2x-1).3]$   
 $= 6x^2 + x - 2 + x[12x + 1] = 6x^2 + x - 2 + 12x^2 = 18x^2 + 2x - 2.$

### Loại 2. Làm quen nhóm công thức $(u^n)' = n.u^{n-1}.u'$

#### 1. Ví dụ minh họa

**Ví dụ 1.** Tìm đạo hàm của hàm số  $y = (x^7 + x)^2.$

**Lời giải**

$y' = 2(x^7 + x).(7x^6 + 1) = 2(7x^{13} + 8x^7 + x) = 14x^{13} + 16x^7 + 2x.$

**Ví dụ 2.** Tìm đạo hàm của hàm số  $y = (x^2 - 2x + 3)(2x + 1)^3$

**Lời giải**

$y' = [(x^2 - 2x + 3)(2x + 1)^3]' = (x^2 - 2x + 3)'.(2x + 1)^3 + (x^2 - 2x + 3).[ (2x + 1)^3 ]'$   
 $= (2x - 2).(2x + 1)^3 + (x^2 - 2x + 3).[ 3(2x + 1)^2.2 ] = (2x - 2).(2x + 1)^3 + 6(x^2 - 2x + 3)(2x + 1)^2.$

#### 2. Bài tập áp dụng

**Bài 1.** Tìm đạo hàm của hàm số sau

1.  $y = (2x^3 - 3x^2 - 6x + 1)^2.$

**ĐS:**  $25x^5 - 60x^4 - 60x^3 + 120x^2 + 60x - 12$

2.  $y = (x^7 + 3x^4 + 2)^{10}.$

**ĐS:**  $10(x^7 + 3x^4 + 2)^9.(7x^6 + 12x^3)$

3.  $y = (x^4 - 2x^2 + x - 1)^2.$

**ĐS:**  $8x^7 - 24x^5 + 10x^4 + 8x^3 - 12x^2 + 10x - 2$