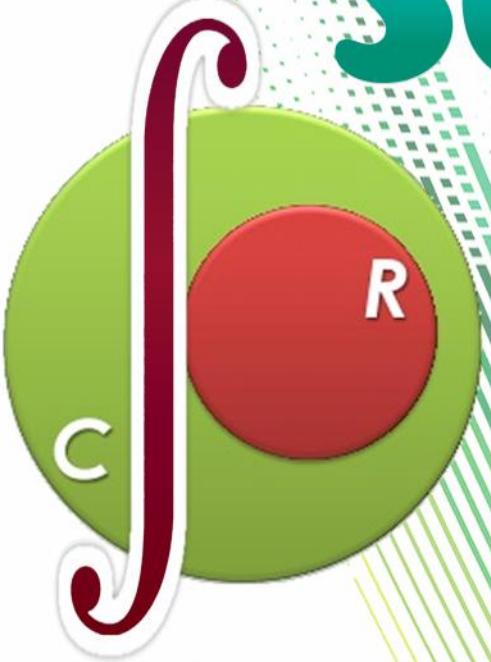
Tập thể giáo viên Toán học Bắc Trung Nam

Tuyển tập chuyên đề

TÍCH PHÂN & SỐ PHỨC

VẬN DỤNG CAO

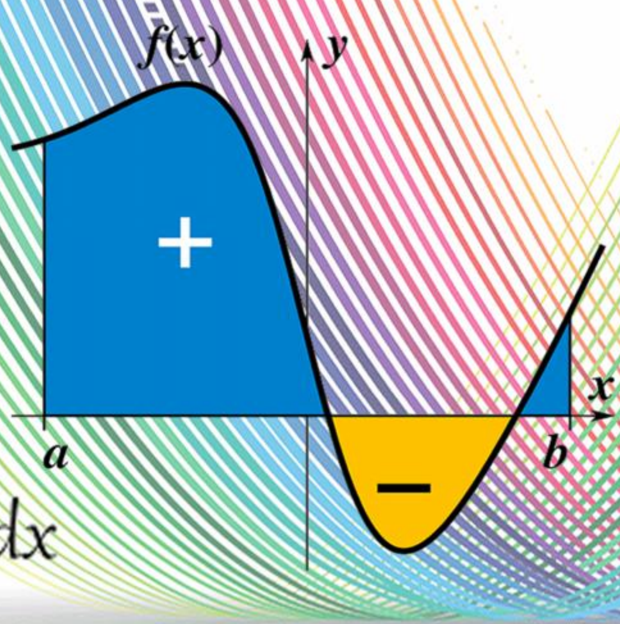


$$i^2 = -1$$

$$\int \ln x \, \frac{1}{x^2}\, dx$$

u' $\int v\, dx$

$$\ln x \, \frac{-1}{x} - \int \frac{1}{x}\left(\frac{-1}{x}\right) dx$$



TOÁN HỌC BẮC – TRUNG – NAM

Lời nói đầu

Kỳ thi THPT Quốc gia từ năm 2016 – 2017, bài thi môn Toán chuyển từ thi tự luận sang hình thức thi trắc nghiệm nên trong cách dạy, cách kiểm tra đánh giá, cách ra đề cũng thay đổi. Sự thay đổi đó nằm trong toàn bộ chương trình môn Toán nói chung và trong phần tích phân nói riêng. Trong phần tích phân nếu cho bài như phần tự luận thì học sinh có thể dùng máy tính cầm tay để cho kết quả dễ dàng. Do đó việc ra đề theo hình thức trắc nghiệm và hạn chế việc dùng máy tính cầm tay được ưu tiên trong toán THPT.

Trong đề thi THPTQG 2017, ta thấy xuất hiện một bài toán lạ về tích phân. Nó cũng rất thú vị khi giúp ta đi sâu tìm thêm về ứng dụng của tích phân. Trong tài liệu này xin giới thiệu với các bạn các bài toán liên quan đến so sánh các giá trị của hàm số $y=f(x)$ khi biết đồ thị của hàm số $y=f'(x)$. Phương pháp chung cho các bài toán như thế này, một cách tự nhiên ta thấy rằng để so sánh được các giá trị của hàm số thì sử dụng bảng biến thiên là đơn giản nhất, vì khi đó ta nhìn thấy được hàm số đồng biến hay nghịch biến. Ngoài ra ta kết hợp thêm phần diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi các đường liên quan. Với mục đích giúp các em học sinh trung học phổ thông nói chung, các bạn học sinh đam mê Toán nói riêng có thêm tài liệu để tham khảo và chuẩn bị đầy đủ kiến thức cho kỳ thi THPT Quốc gia, nhóm giáo viên Toán học Bắc Trung Nam chúng tôi sưu tầm và biên soạn cuốn sách "***Chuyên đề Tích phân và Số phức vận dụng cao***" này gồm 10 chuyên đề:

Chuyên đề 1. CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN TÍNH GIÁ TRỊ CỦA TÍCH PHÂN KHI BIẾT MỘT HAY NHIỀU TÍCH PHÂN VỚI ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC.

Chuyên đề 2. CÁC BÀI TOÁN ƯỚC LƯỢNG GIÁ TRỊ CỦA MỘT HÀM SỐ KHI CHO TRƯỚC CÁC TÍCH PHÂN LIÊN QUAN.

Chuyên đề 3. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TRONG GIẢI CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN SO SÁNH GIÁ TRỊ CỦA HÀM SỐ.

Chuyên đề 4. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TRONG BÀI TOÁN TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG VỚI DỮ KIỆN TOÁN THỰC TẾ.

Chuyên đề 5. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TRONG BÀI TOÁN TÍNH THỂ TÍCH VẬT THỂ VỚI DỮ KIỆN TOÁN THỰC TẾ.

Chuyên đề 6. ỨNG DỤNG NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN TRONG CÁC BÀI TOÁN THỰC TIỄN KHÁC.

Chuyên đề 7. BẤT ĐẲNG THỨC TÍCH PHÂN VÀ MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN.

Chuyên đề 8. SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP HÌNH HỌC GIẢI BÀI TOÁN SỐ PHỨC.

Chuyên đề 9. PHƯƠNG PHÁP ĐẠI SỐ, LƯỢNG GIÁC TRONG GIẢI BÀI TOÁN MAX – MIN SỐ PHỨC.

Chuyên đề 10. CÁC BÀI TOÁN SỐ PHỨC KHÁC Ở MỨC ĐỘ VẬN DỤNG CAO.

Chân thành gửi lời cảm ơn quý thầy cô đã dành thời gian và tâm huyết của mình cho cuốn sách này:

1. Hoàng Minh Quân, THPT Ngọc Tảo, Hà Nội (Chủ biên)
2. Nguyễn Duy Chiến, THPT Phan Bội Châu, Bình Định
3. Trần Quốc Nghĩa, THPT Dĩ An, Bình Dương
4. Lê Thanh Bình, THPT Nguyễn Huệ, Nam Định
5. Hoàng Tiến Đông, THPT Phúc Thọ, Hà Nội
6. Đinh Văn Vang-THPT C Hải Hậu, Nam Định
7. Đặng Thanh Quang, THPT Trần Kỳ Phong, Quảng Ngãi
8. Phạm Văn Ninh, THPT Nguyễn Bính, Nam Định
9. Trần Văn Luật, THPT Thanh Thủy, Phú Thọ
10. Nguyễn Hồng Nhung, THPT Chuyên Tiền Giang, Tiền Giang
11. Mai Ngọc Thi, THPT Hùng Vương, Bình Phước
12. Nguyễn Cao Thiện, THPT Hà Huy Tập, Hà Tĩnh
13. Nguyễn Đức Thắng, GV Toán tự do, Hà Nội
14. Hà Vĩ Đức, THPT Tây Thạnh, TP. Hồ Chí Minh
15. Lý Công Hiếu, GV tự do, Huyện Quốc Oai, Hà Nội
16. Trần Dũng, GV tự do, Quận Phú Nhuận, TP. Hồ Chí Minh
17. Nguyễn Đỗ Chiến, GV toán, Hệ thông giáo dục Beta Education, Hà Nội
18. Nguyễn Thị Hương, THPT Yên Mô A, Ninh Bình
19. Ninh Công Tuấn, THPT TRần Khai Nguyên, Q5, TP. Hồ Chí Minh
20. Nguyễn Minh Nhựt, GV tự do, Q. Ninh Kiều, Cần Thơ
21. Bùi Quý Minh, GV Tự do, Hải Phòng
22. Dương Công Tạo, THPT Nam Kì Khởi Nghĩa, Tiền Giang
23. Lê Quang Vũ, THPT Thọ Xuân 5, Thanh Hóa
24. Vũ Ngọc Thành, THPT Mường So, Phong Thổ, Lai Châu
25. Phạm Đức Quốc, THPT Tứ Kỳ, Hải Dương
26. Nguyễn Tấn Linh, SV Đại Học Sài Gòn, TP. Hồ Chí Minh
27. Lê Đăng Khoa, THPT Gia Định, TP. Hồ Chí Minh
28. Nguyễn Văn Lưu, THPT Gia Viễn A, Ninh Bình
29. Đoàn Trí Dũng, TP. Hà Nội.

Mặc dù tập thể tác giả đã rất nghiêm túc và dành nhiều tâm huyết trong quá trình biên soạn, tổng hợp nhưng do khối lượng kiến thức và dữ liệu khá lớn nên chắc chắn với lần đầu tiên ra mắt sẽ không tránh khỏi những thiếu sót, khuyến khuyết. Chúng tôi mong được nhận sự góp ý của quý thầy cô giáo, các em học sinh và bạn đọc xa gần để cuốn sách được hoàn thiện hơn.

Mọi đóng góp xin gửi về

Email: hoangquan9@gmail.com hoặc toanhocbactrungnam@gmail.com

TẬP THỂ TÁC GIẢ

Chuyên đề 1 CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN TÍNH GIÁ TRỊ CỦA TÍCH PHÂN KHI BIẾT MỘT HAY NHIỀU TÍCH PHÂN VỚI ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa

Cho f là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$. Giả sử F là một nguyên hàm của f trên $[a;b]$. Hiệu số $F(b)-F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b (hay tích phân xác định trên đoạn $[a;b]$ của hàm số $f(x)$, kí hiệu là $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Ta dùng kí hiệu $F(x)\big|_a^b = F(b)-F(a)$ để chỉ hiệu số $F(b)-F(a)$.

Vậy $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\big|_a^b = F(b)-F(a)$.

Nhận xét: Tích phân của hàm số f từ a đến b có thể kí hiệu bởi $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ hay $\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t$. Tích phân đó chỉ phụ thuộc vào f và các cận a, b mà không phụ thuộc vào cách ghi biến số.

Ý nghĩa hình học của tích phân: Nếu hàm số f liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$ thì tích phân $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x=a, x=b$. Vậy $S=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

2. Tính chất của tích phân

1. $\int\limits_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$
2. $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\mathrm{d}x$
3. $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x \ (a<b<c)$
4. $\int\limits_a^b k.f(x)\mathrm{d}x = k.\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \ (k\in\mathbb{R})$
5. $\int\limits_a^b [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Lưu ý:

1) $f(x)$ là hàm số chẵn và liên tục trên đoạn $[-a;a]$, $a>0$ thì $\int\limits_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^a f(x)\mathrm{d}x$

2) $f(x)$ là hàm số lẻ và liên tục trên đoạn $[-a;a]$, $a>0$ thì $\int\limits_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 0$

3) $f(x)$ là hàm số liên tục, tuần hoàn với chu kì T thì

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\mathrm{d}x, \forall a \in R$$

B. BÀI TẬP

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn $f(0)=0$

và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$. Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Bằng công thức tích phân từng phần ta có

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x f(x)\mathrm{d}x = \left[-\cos x f(x)\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f'(x)\mathrm{d}x$. Suy ra $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f'(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$.

Hơn nữa ta tính được $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2}\mathrm{d}x = \left[\frac{2x+\sin 2x}{4}\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$.

Do đó

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x - 2.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f'(x)\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f'(x)-\cos x\right]^2 \mathrm{d}x = 0$.

Suy ra $f'(x)=\cos x$, do đó $f(x)=\sin x + C$. Vì $f(0)=0$ nên $C=0$.

Ta được $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x = 1$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn, $f(1)=0$,

$\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 (x+1)e^x f(x)\mathrm{d}x = \frac{e^2-1}{4}$. Tính tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Bằng công thức tích phân từng phần ta có

$\int_0^1 (x+1)e^x f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}\left(xe^x\right) = \left(xe^x f(x)\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 xe^x f'(x)\mathrm{d}x = -\int_0^1 xe^x f'(x)\mathrm{d}x$.

Suy ra $\int_0^1 xe^x f'(x)\mathrm{d}x = -\frac{e^2-1}{4}$.

Hơn nữa ta tính được $\int_0^1 \left(xe^x\right)^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 e^{2x}\mathrm{d}x = \frac{e^2-1}{4}$.

Do đó $\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x + 2\int_0^1 xe^x f'(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 \left(xe^x\right)^2 \mathrm{d}x = 0$

$\Leftrightarrow \int_0^1 \left[f'(x) + xe^x\right]^2 \mathrm{d}x = 0$. Suy ra $f'(x) = -xe^x$, do đó $f(x) = -(x-1)e^x + C$.

Vì $f(1)=0$ nên $C=0$.

Ta được $\int_0^1 f(x)dx=-\int_0^1 (x-1)e^x dx=e-2$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=1$, $\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x=\frac{1}{30}$,

$\int_0^1 (2x-1)f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{30}$. Tính tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Bằng công thức tích phân từng phần ta có

$$\int_0^1 (2x-1)f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}\left(x^2-x\right)=\left(\left(x^2-x\right)f(x)\right)\Big|_0^1-\int_0^1\left(x^2-x\right)f'(x)\mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^1\left(x^2-x\right)f'(x)\mathrm{d}x.$$

Suy ra $\int_0^1\left(x^2-x\right)f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{30}$.

Hơn nữa ta tính được $\int_0^1\left(x^2-x\right)^2\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x^4-2x^3+x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{30}$.

Do đó $\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x-2\int_0^1\left(x^2-x\right)f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^1\left(x^2-x\right)^2\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow\int_0^1\left[f'(x)-\left(x^2-x\right)\right]^2\mathrm{d}x=0$.

Suy ra $f'(x)=x^2-x$, do đó $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+C$. Vì $f(0)=1$ nên $C=1$.

Ta được $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+1\right)\mathrm{d}x=\frac{11}{12}$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{1}{9}$

và $\int_0^1 x^3f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{36}$. Tính tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Bằng công thức tích phân từng phần ta có

$$\int_0^1 4x^3f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}\left(x^4\right)=\left(x^4f(x)\right)\Big|_0^1-\int_0^1x^4f'(x)\mathrm{d}x=-\int_0^1x^4f'(x)\mathrm{d}x.$$

Suy ra $\int_0^1x^4f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{9}$. Hơn nữa ta tính được $\int_0^1\left(x^4\right)^2\mathrm{d}x=\int_0^1x^8\mathrm{d}x=\frac{1}{9}$.

Do đó $\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x-2\int_0^1x^4f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^1\left(x^4\right)^2\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow\int_0^1\left[f'(x)-x^4\right]^2\mathrm{d}x=0$.

Suy ra $f'(x)=x^4$, do đó $f(x)=\frac{x^5}{5}+C$. Vì $f(1)=0$ nên $C=-\frac{1}{5}$.

Ta được $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x^5-1}{5}\mathrm{d}x=-\frac{1}{6}$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;e]$ thỏa mãn $f(e)=0$, $\int_1^e [f'(x)]^2 dx = e-2$ và $\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx = 2-e$. Tích phân $\int_1^e f(x)dx$ bằng

Lời giải

Bằng công thức tích phân từng phần ta có

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx = \int_0^1 f(x) d(\ln x) = (\ln x f(x))\Big|_1^e - \int_0^1 \ln x f'(x) dx = -\int_1^e \ln x f'(x) dx.$$

$$\Rightarrow \int_1^e \ln x f'(x) dx = e-2$$

Suy ra $\int_1^e (\ln x)^2 dx = \left[x(\ln x)^2\right]\Big|_1^e - 2\int_1^e \ln x dx = e-2$.

Do đó $\int_1^e [f'(x)]^2 dx - 2\int_1^e \ln x f'(x) dx + \int_1^e (\ln x)^2 dx = 0 \Leftrightarrow \int_1^e [f'(x) - \ln x]^2 dx = 0$.

Suy ra $f'(x) = \ln x$, do đó $f(x) = x\ln x - x + C$. Vì $f(e)=0$ nên $C=0$.

Ta được $\int_1^e f(x)dx = \int_1^e (x-1)\ln x dx = \frac{3-e^2}{4}$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$,

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + x\cos x) f(x) dx = -\frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8}$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x)]^2 dx = \frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi}{8}$. Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

Lời giải

Bằng công thức tích phân từng phần ta có

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + x\cos x) f(x) dx = [(x\sin x) f(x)]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\sin x) f'(x) dx.$$

Suy ra $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\sin x) f'(x) dx = \frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi}{8}$.

Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\sin x)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 \sin^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2(1-\cos 2x)}{2} dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2(1-\cos 2x)}{2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2}{2} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi}{8}.$$

Do đó

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x)]^2 dx - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\sin x) f'(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\sin x)^2 dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x) - x\sin x]^2 dx = 0.$$

Suy ra $f'(x) = x\sin x$, do đó $f(x) = \sin x - x\cos x + C$. Vì $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ nên $C = -1$.

Ta được $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - x\cos x - 1)\,dx = 2-\pi$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int\limits_0^1 [f'(x)]^2\,dx = \frac{3}{2} - 2\ln 2$ và $\int\limits_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2}\,dx = 2\ln 2 - \frac{3}{2}$. Tính tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$.

Lời giải

Bằng công thức tích phân từng phần ta có

$$\int\limits_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2}\,dx = \int\limits_0^1 f(x)\,d\left(1-\frac{1}{x+1}\right) = \left[\left(1-\frac{1}{x+1}\right)f(x)\right]\Bigg|_0^1 - \int\limits_0^1 \left(1-\frac{1}{x+1}\right)f'(x)\,dx.$$

Suy ra $\int\limits_0^1 \left(1-\frac{1}{x+1}\right)f'(x)\,dx = \frac{3}{2} - 2\ln 2$.

Lại có $\int\limits_0^1 \left(1-\frac{1}{x+1}\right)^2 dx = \int\limits_0^1 \left(1 - 2\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}\right)dx = \left[x - 2\ln|x+1| - \frac{1}{(x+1)}\right]\Bigg|_0^1 = \frac{3}{2} - 2\ln 2$.

Do đó

$$\int\limits_0^1 [f'(x)]^2\,dx - 2\int\limits_0^1 \left(1-\frac{1}{x+1}\right)f'(x)\,dx + \int\limits_0^1 \left(1-\frac{1}{x+1}\right)^2 dx = 0 \Leftrightarrow \int\limits_0^3 \left[f'(x) + \frac{1}{x+1} - 1\right]^2 dx = 0.$$

Suy ra $f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1}$, do đó $f(x) = x - \ln(x+1) + C$. Vì $f(1)=0$ nên $C = \ln 2 - 1$.

Ta được $\int\limits_0^1 f(x)\,dx = \int\limits_0^1 [x - \ln(x+1) + \ln 2 - 1]\,dx = \frac{1}{2} - \ln 2$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int\limits_0^1 [f'(x)]^2\,dx = \frac{1}{11}$ và $\int\limits_0^1 x^4 f(x)\,dx = -\frac{1}{55}$. Tính tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$.

Lời giải

Bằng công thức tích phân từng phần ta có

$\int\limits_0^1 x^4 f(x)\,dx = \left[\frac{x^5}{5}f(x)\right]\Bigg|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{x^5}{5}f'(x)\,dx$. Suy ra $\int\limits_0^1 x^5 f'(x)\,dx = \frac{1}{11}$.

Lại có: $\int\limits_0^1 (x^5)^2\,dx = \frac{1}{11}$.

Do đó $\int\limits_0^1 [f'(x)]^2\,dx - 2\int\limits_0^1 x^5 f'(x)\,dx + \int\limits_0^1 (x^5)^2\,dx = 0$

$\Leftrightarrow \int\limits_0^1 [f'(x) - x^5]^2\,dx = 0$. Suy ra $f'(x) = x^5$, do đó $f(x) = \frac{1}{6}x^6 + C$.

Vì $f(1)=0$ nên $C = -\frac{1}{6}$.

Ta được $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^6-1}{6}\mathrm{d}x = \frac{-1}{7}$.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(4-x)=f(x)$. Biết $\int_1^3 xf(x)\mathrm{d}x = 5$. Tính $I=\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Đặt $t=4-x$. Ta có $\int_1^3 xf(x)\mathrm{d}x = \int_1^3 xf(4-x)\mathrm{d}x = \int_1^3 (4-t)f(t)\mathrm{d}t = 4\int_1^3 f(t)\mathrm{d}t - \int_1^3 t.f(t)\mathrm{d}t$

$\Rightarrow 5 = 4\int_1^3 f(t)\mathrm{d}t - 5 \Rightarrow \int_1^3 f(t)\mathrm{d}t = \frac{5}{2}$.

Câu 10. Biết $\int_0^1 \frac{x^3+2x^2+3}{x+2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}+b\ln\frac{3}{2}$ $(a,b>0)$. Tìm các giá trị của k để $\int_8^{ab}\mathrm{d}x < \lim_{x\to+\infty}\frac{(k^2+1)x+2017}{x+2018}$.

Lời giải

Ta có: $\int_0^1 \frac{x^3+2x^2+3}{x+2}\mathrm{d}x = \int_0^1\left(x^2+\frac{3}{x+2}\right)\mathrm{d}x = \left.\frac{1}{3}x^3+3\ln|x+2|\right|_0^1 = \frac{1}{3}+3\ln\frac{3}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow \int_8^{ab}\mathrm{d}x = \int_8^9 \mathrm{d}x = 1$

Mà $\int_8^{ab}\mathrm{d}x < \lim_{x\to+\infty}\frac{(k^2+1)x+2017}{x+2018} \Rightarrow 1 < \lim_{x\to+\infty}\frac{(k^2+1)x+2017}{x+2018}$

Mặt khác ta có $\lim_{x\to+\infty}\frac{(k^2+1)x+2017}{x+2018} = k^2+1$.

Vậy để $\int_8^{ab}\mathrm{d}x < \lim_{x\to+\infty}\frac{(k^2+1)x+2017}{x+2018}$ thì $1<k^2+1 \Rightarrow k^2>0 \Rightarrow k\neq 0$.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm lẻ và liên tục trên $[-4;4]$ biết $\int_{-2}^0 f(-x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int_1^2 f(-2x)\mathrm{d}x = 4$. Tính $I=\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Xét tích phân $\int_{-2}^0 f(-x)\mathrm{d}x = 2$.

Đặt $-x=t \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$.

Đổi cận: khi $x=-2$ thì $t=2$; khi $x=0$ thì $t=0$

Do đó $\int_{-2}^0 f(-x)\mathrm{d}x = -\int_2^0 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^2 f(t)\mathrm{d}t \Rightarrow \int_0^2 f(t)\mathrm{d}t = 2 \Rightarrow \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 2$.

Do hàm số $y=f(x)$ là hàm số lẻ nên $f(-2x)=-f(2x)$.

Do đó $\int_1^2 f(-2x)\,dx = -\int_1^2 f(2x)\,dx \Rightarrow \int_1^2 f(2x)\,dx = -4$.

Xét $\int_1^2 f(2x)\,dx$.

Đặt $2x = t \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt$.

Đổi cận: khi $x = 1$ thì $t = 2$; khi $x = 2$ thì $t = 4$

Do đó $\int_1^2 f(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int_2^4 f(t)\,dt = -4$

$\Rightarrow \int_2^4 f(t)\,dt = -8 \Rightarrow \int_2^4 f(x)\,dx = -8$.

Do $I = \int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^4 f(x)\,dx = 2 - 8 = -6$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ xá định trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2(x) - 2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]dx = \frac{2-\pi}{2}$.

Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$.

Lời giải

Ta có:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1 - \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)\right]dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 - \sin 2x)\,dx$$

$$= \left(x + \frac{1}{2}\cos 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi - 2}{2}.$$

Do đó:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2(x) - 2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)dx = \frac{2-\pi}{2} + \frac{\pi-2}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2(x) - 2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x) - \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]^2 dx = 0$$

Suy ra $f(x) - \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$, hay $f(x) = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Vậy: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)dx = -\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x.f(x)\mathrm{d}x = f(0) = 1$. Tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x.f'(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u=f(x) \Rightarrow \mathrm{d}u = f'(x)\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \sin x\mathrm{d}x \Rightarrow v=-\cos x \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x.f(x)\mathrm{d}x = \left(-\cos x.f(x)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x.f'(x)\mathrm{d}x .$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x.f'(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x.f(x)\mathrm{d}x + \cos x.f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1-1=0.$$

Câu 14. Cho số thực $a>0$. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục và luôn dương trên đoạn $[0;a]$ thỏa mãn $f(x).f(a-x)=1$. Tính tích phân $I=\int_0^a \frac{1}{1+f(x)}\mathrm{d}x$?

Lời giải

Đặt $t=a-x \Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$.

Thay vào ta được $I=\int_0^a \frac{1}{1+f(x)}\mathrm{d}x = \int_0^a \frac{1}{1+f(a-t)}\mathrm{d}t = \int_0^a \frac{1}{1+f(a-x)}\mathrm{d}x$.

Suy ra $0=\int_0^a \left[\frac{f(a-x)-f(x)}{(1+f(x))(1+f(a-x))}\right]\mathrm{d}x$

Do hàm số $f(x)$ liên tục và luôn dương trên đoạn $[0;a]$. Suy ra $f(a-x)=f(x)$.

Mà $f(x).f(a-x)=1 \Rightarrow f(x)=1$.

Vậy $I=\int_0^a \frac{1}{2}\mathrm{d}x = \frac{a}{2}$.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, luôn dương trên $[0;3]$ và thỏa mãn $I=\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=4$. Tính giá trị của tích phân $K=\int_0^3 \left(e^{1+\ln(f(x))}+4\right)\mathrm{d}x$

Lời giải

Ta có $K=\int_0^3\left(\mathrm{e}^{1+\ln(f(x))}+4\right)\mathrm{d}x = \int_0^3 \mathrm{e}^{1+\ln(f(x))}\mathrm{d}x + \int_0^3 4\mathrm{d}x = \mathrm{e}.\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^3 4\mathrm{d}x = 4\mathrm{e}+4x\Big|_0^3 = 4\mathrm{e}+12$.

Vậy $K=4\mathrm{e}+12$.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_0^{2018} f(x)\mathrm{d}x=2$. Tính tích phân $\int_0^{\sqrt{\mathrm{e}^{2018}-1}} \frac{x}{x^2+1} f\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Đặt $I = \int\limits_0^{\sqrt{e^{2018}-1}} \frac{x}{x^2+1} f\left(\ln\left(x^2+1\right)\right) dx$.

Đặt $t = \ln\left(x^2+1\right) \Rightarrow dt = \frac{2x}{x^2+1} dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = \sqrt{e^{2018}-1} \Rightarrow t = 2018$.

Vậy $I = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2018} f(t)dt = \frac{1}{2}.\int\limits_0^{2018} f(x)dx = 1$.

Câu 17. Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $f(1) = 1$ và $\int\limits_0^1 f(t)dt = \frac{1}{3}$, tính $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x.f'(\sin x)dx$

Lời giải

Đặt $\sin x = t \Rightarrow f(\sin x) = f(t) \Rightarrow \cos x.f'(\sin x)dx = f'(t)dt$

Đổi cận: khi $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$.

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x.f'(\sin x)dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x.\cos x.f'(\sin x)dx = 2\int\limits_0^1 t.f'(t)dt$$

Đặt: $\begin{cases} u = t \\ dv = f'(t)dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = f(t) \end{cases}$.

$$I = 2\left[\left(t.f(t)\right)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 f(t)dt\right] = 2\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}.$$

Câu 18. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_0^1 f(x)dx = 4$, $\int\limits_0^3 f(x)dx = 6$. Tính $I = \int\limits_{-1}^1 f\left(|2x+1|\right)dx$.

Lời giải

Đặt $u = 2x+1 \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$.

$x = -1 \Rightarrow u = -1$.

$x = 1 \Rightarrow u = 3$.

Nên $I = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^3 f\left(|u|\right)du = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{-1}^0 f\left(|u|\right)du + \int\limits_0^3 f\left(|u|\right)du\right) = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{-1}^0 f(-u)du + \int\limits_0^3 f(u)du\right)$.

Xét $\int\limits_0^1 f(x)dx = 4$. Đặt $x = -u \Rightarrow dx = -du$.

Khi $x = 0$ thì $u = 0$. Khi $x = 1$ thì $u = -1$.

Nên $4 = \int\limits_0^1 f(x)dx = -\int\limits_0^{-1} f(-u)du = \int\limits_{-1}^0 f(-u)du$.

Ta có $\int\limits_0^3 f(x)dx = 6 \Rightarrow \int\limits_0^3 f(u)du = 6$.

Nên $I=\frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0} f(-u)\,\mathrm{d}u+\int_{0}^{3} f(u)\,\mathrm{d}u\right)=\frac{1}{2}(4+6)=5$.

Câu 19. Cho $\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x=2$ và $\int_{-1}^{2} g(x)\mathrm{d}x=-1$. Tính $I=\int_{-1}^{2}\left[x+2f(x)-3g(x)\right]\mathrm{d}x$

Lời giải

Ta có: $I=\int_{-1}^{2}\left[x+2f(x)-3g(x)\right]\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2} x\mathrm{d}x+2\int_{-1}^{2} \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x-3\int_{-1}^{2} \mathrm{g}(x)\mathrm{d}x=\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{2}+4+3=\frac{17}{2}$.

Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, biết $\int_{0}^{2} x.f\left(x^2\right)\mathrm{d}x=2$. Tính $I=\int_{0}^{4} f(x)\mathrm{d}x$

Lời giải

Xét tích phân $\int_{0}^{2} x.f\left(x^2\right)\mathrm{d}x=2$

Đặt $x^2=t\Rightarrow x\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{2}$.

Đổi cận: Khi $x=0$ thì $t=0$; khi $x=2$ thì $t=4$.

Do đó $\int_{0}^{2} x.f\left(x^2\right)\mathrm{d}x=2\Leftrightarrow\frac{1}{2}\int_{0}^{4} f(t)\mathrm{d}t=2\Leftrightarrow\int_{0}^{4} f(t)\mathrm{d}t=4\Rightarrow\int_{0}^{4} f(x)\mathrm{d}x=4$

Vậy $I=4$.

Câu 21. Cho f, g là hai hàm liên tục trên $[1;3]$ thỏa: $\int_{1}^{3}\left[f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x=10$.

$\int_{1}^{3}\left[2f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=6$. Tính $\int_{1}^{3}\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x$.

Lời giải

Ta có $\int_{1}^{3}\left[f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x=10\Leftrightarrow\int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x+3\int_{1}^{3} g(x)\mathrm{d}x=10$.

Tương tự $\int_{1}^{3}\left[2f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=6\Leftrightarrow 2\int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{3} g(x)\mathrm{d}x=6$.

Xét hệ phương trình $\begin{cases}u+3v=10\\2u-v=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=4\\v=2\end{cases}$, trong đó $u=\int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$, $v=\int_{1}^{3} g(x)\mathrm{d}x$.

Khi đó $\int_{1}^{3}\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=\int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{3} g(x)\mathrm{d}x=4+2=6$.

Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2)=-2$, $\int_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x=1$.

Tính tích phân $I=\int_{0}^{4} f'\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Đặt $\sqrt{x}=t\Rightarrow \mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x\in[0;4]\Rightarrow t\in[0;2]$.

$I=2\int\limits_0^2 t.f'(t)\mathrm{d}t$.

Sử dụng phương pháp tính tích phân từng phần ta được:

$I=2\left[tf(t)\Big|_0^2-\int\limits_0^2 f(t).\mathrm{d}t\right]=-10.$

Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Đồng thời thỏa mãn $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)\mathrm{d}x=3\pi$, $\int\limits_0^{\pi}(\sin x-x)f'(\frac{x}{2})\mathrm{d}x=6\pi$ và $f(\frac{\pi}{2})=0$. Tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(f''(x))^3\mathrm{d}x$

Lời giải

$$6\pi=\int\limits_0^{\pi}(\sin x-x)2f'(\frac{x}{2})\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x-2x)f'(x)\mathrm{d}x$$

$$=(\sin 2x-2x)f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x-2x)''f(x)\mathrm{d}x$$

$$=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2x)f(x)\mathrm{d}x=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xf(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xf(x)\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{4}$$

Cách 1:

Ta có $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f^2(x)\mathrm{d}x=3\pi$, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xf(x)\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{4}$, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 xf^2(x)\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{16}$

Do đó $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f^2(x)\mathrm{d}x-8\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\mathrm{d}(x)+16\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)-4\sin^2 x\right]\mathrm{d}x=0$.

Vậy $f(x)=4\sin^2 x$.

Cách 2: Sử dụng bất đẳng thức $\frac{9\pi^2}{16}=\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xf(x)\mathrm{d}x\right)^2\le\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\mathrm{d}x.\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{9\pi^2}{16}$.

Dấu "=" xảy ra khi $f(x)=k\sin^2 x$ mà $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xf(x)\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{16}\Leftrightarrow\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}k\sin^4 x\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{16}$

nên $f(x)=4\sin^2 x$.

Vậy $f(x)=4\sin^2 x=2-2\cos 2x$ nên $f''(x)=8\cos 2x$ nên

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(f''(x))^3\mathrm{d}x=512\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2x)^3\mathrm{d}x=0.$$

Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;8]$ thỏa mãn:

$\int\limits_1^2\left[f(x^3)\right]^2\mathrm{d}x+2\int\limits_1^2 f(x^3)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\int\limits_1^8 f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_1^2(x^2-1)^2\mathrm{d}x$. Tính tích phân $\int\limits_1^2\left[f'(x)\right]^3\mathrm{d}x$

Lời giải

Đặt $x=t^3 \Rightarrow \mathrm{d}x=3t^2.\mathrm{d}t$.

Với $x=1 \Rightarrow t=1$; $x=8 \Rightarrow t=2$.

Ta được: $\frac{2}{3}\int_1^8 f(x)\mathrm{d}x = 2\int_1^2 t^2 f(t^3)\mathrm{d}t = 2\int_1^2 x^2 f(x^3)\mathrm{d}x$.

Thay vào giả thiết ta được:

$$\int_1^2 \left[f(x^3)\right]^2\mathrm{d}x + 2\int_1^2 f(x^3)\mathrm{d}x = 2\int_1^2 x^2 f(x^3)\mathrm{d}x - \int_1^2 (x^2-1)^2\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \int_1^2 \left[f(x^3)\right]^2\mathrm{d}x + 2\int_1^2 f(x^3)\mathrm{d}x - 2\int_1^2 x^2 f(x^3)\mathrm{d}x + \int_1^2 (1-x^2)^2\mathrm{d}x = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_1^2 \left(\left[f(x^3)\right]^2 + 2f(x^3).(1-x^2) + (1-x^2)^2\right)\mathrm{d}x = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_1^2 \left(f(x^3)+(1-x^2)\right)^2\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \left(f(x^3)+(1-x^2)\right)^2 = 0 \Leftrightarrow f(x^3)=x^2-1 \Rightarrow f(x)=\sqrt[3]{x^2}-1$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{2}{3}.\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

Do đó : $\int_1^2 \left[f'(x)\right]^3\mathrm{d}x = \frac{8}{27}\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \frac{8}{27}.(\ln x)\Big|_1^2 = \frac{8.\ln 2}{27}$.

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_{-5}^1 f(x)\mathrm{d}x = 9$. Tính tích phân $\int_0^2 \left[f(1-3x)+9\right]\mathrm{d}x$.

Lời giải

Đặt $t=1-3x \Rightarrow \mathrm{d}t=-3\mathrm{d}x$.

Với $x=0 \Rightarrow t=1$ và $x=2 \Rightarrow t=-5$.

Ta có $\int_0^2 \left[f(1-3x)+9\right]\mathrm{d}x = \int_0^2 f(1-3x)\mathrm{d}x + \int_0^2 9\mathrm{d}x = \int_1^{-5}\left[f(t)\right]\frac{\mathrm{d}t}{-3} + 9x\Big|_0^2 = \frac{1}{3}\int_{-5}^1\left[f(x)\right]\mathrm{d}x + 18$

$= \frac{1}{3}.9+18=21$.

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương, liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=1$ và $3\int_0^1 \left[f'(x)\left[f(x)\right]^2+\frac{1}{9}\right]\mathrm{d}x \le 2\int_0^1 \sqrt{f'(x)}f(x)\mathrm{d}x$. Tính tích phân $\int_0^1 \left[f(x)\right]^3\mathrm{d}x$:

Lời giải

Từ giả thiết suy ra:

$$\int_0^1 \left[\left(3\sqrt{f'(x)}f(x)\right)^2 - 2.3\sqrt{f'(x)}f(x)+1\right]\mathrm{d}x \le 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left[3\sqrt{f'(x)}f(x)-1\right]^2\mathrm{d}x \le 0.$$

Suy ra $3\sqrt{f'(x)}f(x)-1=0 \Leftrightarrow \sqrt{f'(x)}f(x)=\frac{1}{3} \Leftrightarrow f'(x).f^2(x)=\frac{1}{9}$.

Vì $\left[f^3(x)\right]'=3.f^2(x)f'(x)$ nên suy ra $\left[f^3(x)\right]'=\frac{1}{3} \Rightarrow f^3(x)=\frac{1}{3}x+C$.

Vì $f(0)=1$ nên $f^3(0)=1 \Rightarrow C=1$.

Vậy $\Rightarrow f^3(x)=\frac{1}{3}x+1$.

Suy ra $\int_0^1 [f(x)]^3\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{1}{3}x+1\right)\mathrm{d}x=\frac{7}{6}$.

Câu 27. Cho a là hằng số thực và hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_1^2 f(x-a)\,\mathrm{d}x=2017$. Tính giá trị của tích phân $I=\int_{1-a}^{2-a} f(x)\,\mathrm{d}x$

Lời giải

Xét $\int_1^2 f(x-a)\,\mathrm{d}x=2017$.

Đặt $t=x-a \Rightarrow \mathrm{d}t=\mathrm{d}x$

Đổi cận:

+ $x=1 \Rightarrow t=1-a$

+ $x=2 \Rightarrow t=2-a$

Khi đó $\int_1^2 f(x-a)\,\mathrm{d}x=\int_{1-a}^{2-a} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{1-a}^{2-a} f(x)\,\mathrm{d}x=2017$.

Câu 28. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;5]$ và $f(5)=10$, $\int_0^5 xf'(x)\,\mathrm{d}x=30$. Tính $\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u=x \Rightarrow \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v=f'(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow v=f(x) \end{cases}$

$\int_0^5 x.f'(x)\,\mathrm{d}x=\left(x.f(x)\right)\Big|_0^5-\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow 30=5f(5)-\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x=5f(5)-30=20$.

Câu 29. Kí hiệu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết $F(3)=3$ và $\int_{-1}^2 F(x+1)\,\mathrm{d}x=1$. Tính $I=\int_0^3 xf(x)\,\mathrm{d}x$

Lời giải

Đặt $t=x+1 \Rightarrow \mathrm{d}t=\mathrm{d}x$. Đổi cận: $\begin{cases} x=-1 \Rightarrow t=0 \\ x=2 \Rightarrow t=3 \end{cases}$

Khi đó $1=\int_{-1}^2 F(x+1)\,\mathrm{d}x=\int_0^3 F(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^3 F(x)\,\mathrm{d}x$

Xét tích phân $I=\int_0^3 xf(x)\mathrm{d}x$ Đặt $\begin{cases} u=x \\ \mathrm{d}v=f(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=F(x) \end{cases}$.

Suy ra $I=\int_0^3 xf(x)\mathrm{d}x = xF(x)\Big|_0^3 - \int_0^3 F(x)\mathrm{d}x = 3F(3)-1=8$.

Câu 30. Cho $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x.f(\cos^2 x)\mathrm{d}x=1$ và $\int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x\ln x}\mathrm{d}x=1$. Tính tích phân $I=\int_{\frac{1}{4}}^{2} \frac{f(2x)}{x}\mathrm{d}x$

Lời giải

● Xét $A=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x.f(\cos^2 x)\mathrm{d}x=1$.

Đặt $t=\cos^2 x \Rightarrow \mathrm{d}t=-2\sin x\cos x\mathrm{d}x=-2\cos^2 x\tan x\mathrm{d}x=-2t.\tan x\mathrm{d}x \Rightarrow \tan x\mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{d}t}{2t}$

Đổi cận: $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=\frac{\pi}{4} \Rightarrow t=\frac{1}{2} \end{cases}$

Khi đó $A=-\int_1^{\frac{1}{2}} f(t)\frac{\mathrm{d}t}{2t}=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=1 \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=2$

● Xét $B=\int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x\ln x}\mathrm{d}x=1$.

Đặt $t=\ln^2 x \Rightarrow \mathrm{d}t=\frac{2\ln x}{x}\mathrm{d}x=\frac{2\ln^2 x}{x\ln x}\mathrm{d}x=\frac{2t}{x\ln x}\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}=\frac{\mathrm{d}t}{2t}$

Đổi cận: $\begin{cases} x=e \Rightarrow t=1 \\ x=e^2 \Rightarrow t=4 \end{cases}$

Khi đó $B=\int_1^4 f(t)\frac{\mathrm{d}t}{2t}=\frac{1}{2}\int_1^4\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=1 \Rightarrow \int_1^4\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=2$

● Xét $I=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(2x)}{x}\mathrm{d}x$

Đặt $t=2x \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{2} \\ x=\frac{t}{2} \end{cases}$.

Đổi cận: $\begin{cases} x=\frac{1}{4} \Rightarrow t=\frac{1}{2} \\ x=2 \Rightarrow t=4 \end{cases}$

Khi đó $I=\int_{\frac{1}{2}}^{4}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t+\int_1^4\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=2+2=4$.

Câu 31. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $\int\limits_1^2 xf(x)\mathrm{d}x=1$ và $f(1)=4f(2)$. Tính $\int\limits_1^2 x^2 f'(x)\mathrm{d}x$

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u=f(x) \\ \mathrm{d}v=x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x \\ v=\dfrac{1}{2}x^2 \end{cases}$.

Khi đó $1=\int\limits_1^2 xf(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}x^2f(x)\Big|_1^2-\dfrac{1}{2}\int\limits_1^2 x^2f'(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow 1=\dfrac{1}{2}.\left[4f(2)-f(1)\right]-\dfrac{1}{2}\int\limits_1^2 x^2f'(x)\mathrm{d}x$.

Theo giả thiết $f(1)=4f(2)$ nên $1=\dfrac{1}{2}.0-\dfrac{1}{2}\int\limits_1^2 x^2f'(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_1^2 x^2f'(x)\mathrm{d}x=-2$.

Câu 32. Cho $f(x)$, $g(x)$ là các hàm số có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $\int\limits_0^1 g(x).f'(x)\mathrm{d}x=-1$, $\int\limits_0^1 g'(x).f(x)\mathrm{d}x=2$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1\left[f(x).g(x)\right]'\mathrm{d}x$.

Lời giải

Ta có $\left[f(x).g(x)\right]'=f'(x).g(x)+g'(x).f(x)$.

Và đặt $I_1=\int\limits_0^1 g(x).f'(x)\mathrm{d}x=-1;\ I_2=\int\limits_0^1 g'(x).f(x)\mathrm{d}x=2$

Khi đó $I=\int\limits_0^1\left[f(x).g(x)\right]'\mathrm{d}x=I_1+I_2=-1+2=1.$.

Câu 33. Cho biết $\int\limits_0^{\sqrt{2}} xf(x^2)\mathrm{d}x=4$, $\int\limits_2^3 f(z)\mathrm{d}z=2$, $\int\limits_9^{16}\dfrac{f(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t=3$. Tính $I=\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

$\int_0^{\sqrt{2}} xf(x^2)\mathrm{d}x=4 \xrightarrow{t=x^2} \int\limits_0^2 f(t)\mathrm{d}t=8 \Rightarrow \int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=8$.

$\int_2^3 f(z)\mathrm{d}z=2 \Rightarrow \int_2^3 f(\mathrm{x})\mathrm{d}\mathrm{x}=2$.

$\int_9^{16}\dfrac{f(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t=3 \xrightarrow{x=\sqrt{t}} \int\limits_3^4 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{3}{2}$.

Vậy $I=8+2+\dfrac{3}{2}=\dfrac{23}{2}$.

Câu 34. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn: $\int_0^1 x\left(f'(x)-2\right)\mathrm{d}x=f(1)$. Tính giá trị của $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u=x \\ \mathrm{d}v=\left[f'(x)-2\right]\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\mathrm{d}x \\ v=f(x)-2x \end{cases}$

$$\int_0^1 x\left(f'(x)-2\right)\mathrm{d}x = f(1) \Leftrightarrow x\left(f(x)-2x\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 (f(x)-2x)\mathrm{d}x = f(1)$$

Vậy $I=-1$.

Câu 35. **[THPT Nguyễn Khuyến Tp HCM 2017]** Cho biết $\int\limits_{-1}^{5} f(x)\mathrm{d}x = 15$. Tính giá trị của $P=\int\limits_0^2 [f(5-3x)+7]\mathrm{d}x$.

Lời giải

Để tính P ta đặt $t=5-3x \Rightarrow \mathrm{d}x = -\dfrac{\mathrm{d}t}{3}$

$x=0 \Rightarrow t=5$

$x=2 \Rightarrow t=-1$

$$P=\int\limits_5^{-1}[f(t)+7](-\frac{\mathrm{d}t}{3}) = \frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{5}[f(t)+7]\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\left(\int\limits_{-1}^{5} f(t)\mathrm{d}t + 7\int\limits_{-1}^{5}\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{3}.15+\frac{1}{3}.7.(6)=19.$$

Câu 36. **[THPT Lạng Giang số 1-2017]** Giả sử $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 3$ và $\int\limits_0^5 f(z)\mathrm{d}z = 9$.

Tính tổng $\int\limits_1^3 f(t)\mathrm{d}t + \int\limits_3^5 f(t)\mathrm{d}t$.

Lời giải

Ta có $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 3 \Rightarrow \int\limits_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 3$; $\int\limits_0^5 f(z)\mathrm{d}z = 9 \Rightarrow \int\limits_0^5 f(t)\mathrm{d}t = 9$

$$9=\int\limits_0^5 f(t)\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 f(t)\mathrm{d}t + \int\limits_1^3 f(t)\mathrm{d}t + \int\limits_3^5 f(t)\mathrm{d}t = 3 + \int\limits_1^3 f(t)\mathrm{d}t + \int\limits_3^5 f(t)\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \int\limits_1^3 f(t)\mathrm{d}t + \int\limits_3^5 f(t)\mathrm{d}t = 6.$$

Câu 37. **[Sở GD&ĐT Hà Nội 2017]** Cho $y=f(x)$ là hàm số chẵn, có đạo hàm trên đoạn $[-6;6]$. Biết rằng $\int\limits_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 8$ và. $\int\limits_1^3 f(-2x)\mathrm{d}x = 3$. Tính $I=\int\limits_{-1}^{6} f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Vì $y=f(x)$ là hàm số chẵn nên $\int\limits_{-1}^{2} f(-x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 8$, $\int\limits_1^3 f(-2x)\mathrm{d}x = \int\limits_1^3 f(2x)\mathrm{d}x = 3$.

Xét tích phân $K=\int\limits_1^3 f(2x)\mathrm{d}x = 3$

Đặt $u=2x \Rightarrow \mathrm{d}u = 2\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=1 \Rightarrow u=2$, $x=3 \Rightarrow u=6$.

$K=\frac{1}{2}\int_2^6 f(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_2^6 f(x)\mathrm{d}x=3\Rightarrow\int_2^6 f(x)\mathrm{d}x=6$

Vậy. $I=\int_{-1}^6 f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_2^6 f(x)\mathrm{d}x=8+6=14$.

Câu 38. **[Chuyên Quang Trung-Bình Phước 2017]** Cho f, g là hai hàm liên tục trên $[1;3]$ thỏa: $\int_1^3[f(x)+3g(x)]\mathrm{d}x=10$, $\int_1^3[2f(x)-g(x)]\mathrm{d}x=6$. Tính $\int_1^3[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x$.

Lời giải

□ Ta có $\int_1^3[f(x)+3g(x)]\mathrm{d}x=10\Leftrightarrow\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x+3\int_1^3 g(x)\mathrm{d}x=10$.

□ Tương tự $\int_1^3[2f(x)-g(x)]\mathrm{d}x=6\Leftrightarrow 2\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x-\int_1^3 g(x)\mathrm{d}x=6$.

□ Xét hệ phương trình $\begin{cases}u+3v=10\\2u-v=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=4\\v=2\end{cases}$, trong đó $u=\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$, $v=\int_1^3 g(x)\mathrm{d}x$.

Khi đó $\int_1^3[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^3 g(x)\mathrm{d}x=4+2=6$.

Câu 39. **[Chuyên Đại học Vinh–2018]** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $(f'(x))^2+f(x).f''(x)=15x^4+12x,\ \forall x\in R$ và $f(0)=f'(0)=1$. Tính giá trị của $f^2(1)$.

Lời giải

$\int\left[(f'(x))^2+f(x).f'(x)\right]\mathrm{d}x=\int(15x^4+12x)\mathrm{d}x$ (1)

Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\\mathrm{d}v=f''(x)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\v=f'(x)\end{cases}$

(1)$\Leftrightarrow$ $\int\left[(f'(x))^2\right]\mathrm{d}x+f(x).f'(x)-\int\left[(f'(x))^2\right]\mathrm{d}x=3x^5+6x^2+C$

$f(x).f'(x)=3x^5+6x^2+C$

Ta có $f(0).\mathrm{f}'(0)=C\Rightarrow C=1$

Ta có $\int_0^1 f(x).f'(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(3x^5+6x^2+1)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int_0^1 f(x).\mathrm{d}f(x)=\left.\left(\frac{x^6}{2}+2x^3+x\right)\right|_0^1=\frac{7}{2}$.

Suy ra $\left.\frac{f^2(x)}{2}\right|_0^1=\frac{7}{2}\Leftrightarrow f^2(1)-f^2(0)=7\Rightarrow f^2(1)=8$.

Câu 40. **[Sở GD&ĐT Phú Thọ 2018]** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{2}{x^2-1}$, $f(-2)+f(2)=0$ và $f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2$. Tính $f(-3)+f(0)+f(4)$.

Lời giải

Ta có $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int \frac{2}{x^2-1}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\begin{cases}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C_1 \text{ khi } x<-1\\ \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C_2 \text{ khi } -1<x<1\\ \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C_3 \text{ khi } x>1\end{cases}$.

Khi đó $\begin{cases}f(-2)+f(2)=0\\ f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\ln 3+C_1+\ln\frac{1}{3}+C_3=0\\ \ln 3+C_2+\ln\frac{1}{3}+C_2=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1+C_3=0\\ C_2=1\end{cases}$

Do đó $f(-3)+f(0)+f(4)=\ln 2+C_1+C_2+\ln\frac{3}{5}+C_3=\ln\frac{6}{5}+1$.

Câu 41. **[PTNK ĐHQG HCM 2018]** Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1;4]$ và thỏa mãn hệ thức $\begin{cases}f(1)+g(1)=4\\ g(x)=-x.f'(x);f(x)=-x.g'(x)\end{cases}$. Tính $I=\int_1^4[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x$.

Lời giải

Cách 1:

Ta có $f(x)+g(x)=-x[f'(x)+g'(x)]$

$\Leftrightarrow \frac{f'(x)+g'(x)}{f(x)+g(x)}=-\frac{1}{x}\Leftrightarrow\int\frac{f'(x)+g'(x)}{f(x)+g(x)}\mathrm{d}x=-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x\Rightarrow\ln|f(x)+g(x)|=-\ln|x|+C$

Theo giả thiết ta có $C-\ln|1|=\ln|f(1)+g(1)|\Rightarrow C=\ln 4$.

Suy ra $\left[\begin{array}{l}f(x)+g(x)=\frac{4}{x}\\ f(x)+g(x)=-\frac{4}{x}\end{array}\right.$, vì $f(1)+g(1)=4$ nên $f(x)+g(x)=\frac{4}{x}$

$\Rightarrow I=\int_1^4[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=8\ln 2$.

Cách 2:

Ta có $f(x)+g(x)=-x[f'(x)+g'(x)]\Rightarrow\int[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=-\int x[f'(x)+g'(x)]\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow\int[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=-x[f(x)+g(x)]+\int[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow -x[f(x)+g(x)]=C\Rightarrow f(x)+g(x)=-\frac{C}{x}$. Vì $f(1)+g(1)=-C\Rightarrow C=-4$

Do đó $f(x)+g(x)=\frac{4}{x}$. Vậy $I=\int_1^4[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=8\ln 2$.

Câu 42. **[ĐTK Bộ GD&ĐT 2018]** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7$ và $\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$.

Lời giải

Bằng công thức tích phân từng phần ta có

$$\int_0^1 x^2 f(x) dx = \left[\frac{x^3}{3} f(x)\right]\Bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{3} f'(x) dx.$$

Suy ra $\int_0^1 \frac{x^3}{3} f'(x) dx = -\frac{1}{3}$.

Mặt khác $\int_0^1 \frac{x^6}{9} dx = \frac{1}{63}$.

Do đó $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx + 2.21 \int_0^1 \frac{x^3}{3} f'(x) dx + 21^2 \int_0^1 \frac{x^6}{9} dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 [f'(x) + 7x^3]^2 dx = 0$.

Suy ra $f'(x) = -7x^3$, do đó $f(x) = -\frac{7}{4}x^4 + C$.

$f(1) = 0 \Rightarrow C = \frac{7}{4} . \Rightarrow f(x) = -\frac{7}{4}x^4 + \frac{7}{4}$

Ta được $\int_0^1 f(x) dx = -\frac{7}{4} \int_0^1 (x^4 - 1) dx = \frac{7}{5}$.

Câu 43. **[HSG Phú Thọ 2018]** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thoả mãn $f(x) = 6x^2 f(x^3) + \frac{3}{\sqrt{3x+1}}$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$

Lời giải

$$I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left[6x^2 f(x^3) + \frac{3}{\sqrt{3x+1}}\right] dx = 2\int_0^1 f(x^3) dx^3 + \int_0^1 \frac{d(3x+1)}{\sqrt{3x+1}}$$

$$\Rightarrow I = 2\int_0^1 f(t) dt + 2\sqrt{3x+1}\Big|_0^1 = 2\int_0^1 f(x) dx + 2$$

Vậy $\int_0^1 f(x) dx = -2$.

Câu 44. **[THTT-12-2017]** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(\tan x) = \cos^4 x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int_0^1 f(x) dx$.

Lời giải

Đặt $t = \tan x$.

Ta có $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + t^2$

$\Rightarrow \cos^4 x = \dfrac{1}{\left(1+t^2\right)^2} \Rightarrow f(t) = \dfrac{1}{\left(1+t^2\right)^2}$

$I = \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \dfrac{1}{\left(1+x^2\right)^2}\mathrm{d}x$.

Đặt $x = \tan u \Rightarrow \mathrm{d}x = (1+\tan u)\mathrm{d}u$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow u = 0$; $x = 1 \Rightarrow u = \dfrac{\pi}{4}$.

$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{1}{\left(1+\tan^2 u\right)^2}\mathrm{d}(\tan u) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{\cos^2 u}\right)^2}.\dfrac{1}{\cos^2 u}\mathrm{d}u = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 u\mathrm{d}u = \left(\dfrac{1}{2}u + \dfrac{1}{4}\sin 2u\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \dfrac{2+\pi}{8}$.

Câu 45. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;3]$ thỏa mãn $f(3) = 0$, $\int\limits_0^3 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x = \dfrac{7}{6}$ và $\int\limits_0^3 \dfrac{f(x)}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x = -\dfrac{7}{3}$. Tính tích phân $\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Bằng công thức tích phân từng phần ta có

$\int\limits_0^3 \dfrac{f(x)}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x = \int\limits_0^3 2f(x)\mathrm{d}\left(\sqrt{x+1}-1\right) = \left[2\left(\sqrt{x+1}-1\right)f(x)\right]\Big|_0^3 - 2\int\limits_0^3 \left(\sqrt{x+1}-1\right)f'(x)\mathrm{d}x$.

Suy ra $\int\limits_0^3 \left(\sqrt{x+1}-1\right)f'(x)\mathrm{d}x = \dfrac{7}{6}$.

Lại có $\int\limits_0^3 \left(\sqrt{x+1}-1\right)^2 \mathrm{d}x = \int\limits_0^3 \left(x+2-2\sqrt{x+1}\right)\mathrm{d}x = \dfrac{7}{6}$.

Do đó

$\int\limits_0^3 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x - 2.\int\limits_0^3 \left(\sqrt{x+1}-1\right)f'(x)\mathrm{d}x + \int\limits_0^3 \left(\sqrt{x+1}-1\right)^2 \mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \int\limits_0^3 \left[f'(x) - \sqrt{x+1}+1\right]^2 \mathrm{d}x = 0$.

Suy ra $f'(x) = \sqrt{x+1}-1$, do đó $f(x) = \dfrac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} - x + C$. Vì $f(3) = 0$ nên $C = -\dfrac{7}{3}$.

Ta được $\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^3 \left[\dfrac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} - x - \dfrac{7}{3}\right]\mathrm{d}x = -\dfrac{97}{30}$.

Chuyên đề 2 — CÁC BÀI TOÁN ƯỚC LƯỢNG GIÁ TRỊ CỦA HÀM SỐ KHI CHO TRƯỚC CÁC TÍCH PHÂN LIÊN QUAN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Tính chất nguyên hàm, tích phân thường sử dụng

1. $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x)+C$ 2. $\int u\mathrm{d}v = uv-\int v\mathrm{d}u$ 3. $\int f(u(x))u'(x)\mathrm{d}x=\int f(u)\mathrm{d}u$

4. $\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=0 \Leftrightarrow f(x)=0$.

Tổng quát: $f(x)\ge 0\forall x\in[a;b], \int\limits_a^b f(x)dx=0 \Leftrightarrow f(x)=0, \forall x\in[a;b]$

2. Nhị thức Niuton

$(x+y)^n=C_n^0x^n+C_n^1x^{n-1}y+...+C_n^kx^{n-k}y^k+...+C_n^ny^n$

Lưu ý:

B. BÀI TẬP

Bài 1. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{2}{2x-1}$, $f(0)=1$ và $f(1)=2$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(3)$

Lời giải

Ta có $\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{2}{2x-1}\mathrm{d}x=\ln|2x-1|+C$. Hàm số gián đoạn tại điểm $x=\frac{1}{2}$

Nếu $x>\frac{1}{2}\Rightarrow f(x)=\ln(2x-1)+C$ mà $f(1)=2\Rightarrow C=2$. Vậy $f(x)=\ln(2x-1)+2$ khi $x>\frac{1}{2}$

Nếu $x<\frac{1}{2}\Rightarrow f(x)=\ln(1-2x)+C$ mà $f(0)=1\Rightarrow C=1$. Vậy $f(x)=\ln(1-2x)+1$ khi $x<\frac{1}{2}$

Do đó $f(-1)+f(3)=\ln 3+1+\ln 5+2=\ln 15+3$.

Bài 2. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ và thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x^2-1}$. Biết rằng $f(-3)+f(3)=0$. Tính $T=f(2)+f(0)+f(-4)$.

Lời giải

Ta có:

$$f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[\int\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x-\int\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$$

Do đó: $f(-3)+f(3)=0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\ln 2+C\right)+\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}+C\right)=0 \Leftrightarrow C=0$.

Như vậy: $f(x)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$.

$f(2)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2-1}{2+1}\right|=-\frac{1}{2}\ln 3$; $f(0)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{0-1}{0+1}\right|=0$; $f(-4)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{-4-1}{-4+1}\right|=\frac{1}{2}(\ln 5-\ln 3)$.

Từ đó: $T=f(2)+f(0)+f(-4)=-\frac{1}{2}\ln 3+0+\frac{1}{2}(\ln 5-\ln 3)=\frac{1}{2}\ln 5-\ln 3$.

Bài 3. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{2}{x^2-1}$, $f(-2)+f(2)=0$ và $f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2$. Tính $f(-3)+f(0)+f(4)$.

Lời giải

Ta có $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{2}{x^2-1}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\begin{cases}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C_1 \text{ khi } x<-1\\ \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C_2 \text{ khi } -1<x<1\\ \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C_3 \text{ khi } x>1\end{cases}$.

Khi đó $\begin{cases}f(-2)+f(2)=0\\ f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\ln 3+C_1+\ln\frac{1}{3}+C_3=0\\ \ln 3+C_2+\ln\frac{1}{3}+C_2=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1+C_3=0\\ C_2=1\end{cases}$

Do đó $f(-3)+f(0)+f(4)=\ln 2+C_1+C_2+\ln\frac{3}{5}+C_3=\ln\frac{6}{5}+1$.

Bài 4. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x-1}$, $f(0)=2017$, $f(2)=2018$.

Tính $S=f(3)-f(-1)$.

Lời giải

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x=\ln(|x-1|)+C$.

Theo giả thiết $f(0)=2017$, $f(2)=2018$ nên $\begin{cases}f(x)=\ln(|x-1|)+2017 & \text{khi } x<1\\ f(x)=\ln(|x-1|)+2018 & \text{khi } x>1\end{cases}$.

Do đó $S=f(3)-f(-1)=\ln 2+2018-\ln 2-2017=1$.

Bài 5. Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn điều kiện $f(1)=1$, $f(x)=f'(x)\sqrt{3x+1}$ với mọi $x>0$. Tính $f(2018)$.

Lời giải

Ta có:

$f(x)=f'(x)\sqrt{3x+1}\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{3x+1}}\Leftrightarrow\int\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x+1}}\Leftrightarrow\ln f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C$

$\Leftrightarrow f(x)=\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C}$.

Mặt khác ta lại có $f(1)=1$ nên $1=\mathrm{e}^{\frac{4}{3}+C}\Rightarrow C=-\frac{4}{3}$.

Vậy $f(x)=e^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}-\frac{4}{3}} \Rightarrow f(2018)=e^{\frac{2}{3}\sqrt{6055}-\frac{4}{3}}$.

Bài 6. Cho hàm số $f(x)\neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x)=(2x+1)f^2(x)$ và $f(1)=-\frac{1}{2}$. Tính tổng $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2018)$.

Lời giải

Ta có :

$$f'(x)=(2x+1)f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)}=2x+1 \Leftrightarrow \int\frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=\int(2x+1)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int\frac{\mathrm{d}(f(x))}{f^2(x)}=x^2+x+C$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)}=x^2+x+C \Leftrightarrow f(x)=-\frac{1}{x^2+x+C}.$$

Mặt khác theo giả thiết ta lại có $f(1)=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow f(1)=-\frac{1}{C+2}=-\frac{1}{2} \Rightarrow C=0$.

Vậy $f(x)=-\frac{1}{x^2+x}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}$.

Khi đó $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2018)$

$$=\frac{1}{2}-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2018}-\frac{1}{2017}+\frac{1}{2019}-\frac{1}{2018}=\frac{1}{2019}-1=-\frac{2018}{2019}.$$

Bài 7. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)-2018f(x)=2018.x^{2017}.e^{2018x}$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2018$. Tính giá trị $f(1)$.

Lời giải

Ta có:

$$f'(x)-2018f(x)=2018.x^{2017}.e^{2018x} \Leftrightarrow \frac{f'(x)-2018.f(x)}{e^{2018x}}=2018.x^{2017}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1\frac{f'(x)-2018.f(x)}{e^{2018x}}dx=\int_0^1 2018.x^{2017}dx \quad (1)$$

Xét tích phân $I=\int_0^1\frac{f'(x)-2018.f(x)}{e^{2018x}}dx=\int_0^1 f'(x).e^{-2018x}dx-\int_0^1 2018.f(x).e^{-2018x}dx$

Xét $I_1=\int_0^1 2018.f(x).e^{-2018x}dx$. Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\ dv=2018.e^{-2018x}dx\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}du=f'(x)dx\\ v=-e^{-2018x}\end{cases}$.

Do đó $I_1=f(x).(-e^{-2018x})\Big|_0^1+\int_0^1 f'(x).e^{-2018x}dx \Rightarrow I=f(1).e^{-2018x}-2018$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow f(1).e^{-2018x}-2018=x^{2018}\Big|_0^1 \Rightarrow f(1)=2019.e^{2018}$.

Bài 8. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục, dương trên $\mathbb{R}$; thỏa mãn $f(0)=1$ và $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{x}{x^2+1}$.

Tính $f(\sqrt{2018})$.

Lời giải

Ta có $\int\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int\frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int\frac{\mathrm{d}(f(x))}{f(x)}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{x^2+1} \Leftrightarrow \ln(f(x))=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$.

Mặt khác $f(0)=1 \Leftrightarrow C=0$. Do đó $f(x)=\sqrt{x^2+1}$. Vậy $f(\sqrt{2018})=\sqrt{2019}$.

Bài 9. Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa $2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x^2}$. Tính $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$

Lời giải

Ta có: $\int\limits_0^1 \left[2f(x)+3f(1-x)\right] dx = \int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx \Leftrightarrow A+B=C$.

Tính: $C=\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$.

Đặt $x=\sin t$ suy ra $dx=\cos t\, dt$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0$; $x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$.

Vậy: $C=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt = \left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$.

Tính: $B=\int\limits_0^1 3f(1-x)\, dx$.

Đặt $t=1-x\Rightarrow dt=-dx$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=-1$; $x=1\Rightarrow t=0$.

Vậy: $B=\int\limits_0^1 3f(t)\, dt = \int\limits_0^1 3f(x)\, dx$.

Do đó: $\int\limits_0^1 \left[2f(x)+3f(x)\right] dx = \frac{\pi}{4} \Rightarrow 5\int\limits_0^1 f(x)\, dx = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \int\limits_0^1 f(x)\, dx = \frac{\pi}{20}$.

Bài 10. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f^2(x)-2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right] dx = \frac{2-\pi}{2}$.

Tính tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, dx$.

Lời giải

Ta có:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right) dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1-\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\right] dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin 2x)\, dx = \left(x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi-2}{2}.$$

Do đó: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f^2(x)-2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right] dx + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right) dx = \frac{2-\pi}{2}+\frac{\pi-2}{2}=0$

$$\Leftrightarrow \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f^2(x)-2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right] dx = 0 \Leftrightarrow \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f(x)-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]^2 dx = 0$$

Suy ra $f(x)-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$, hay $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

Bởi vậy: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) dx = -\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$.

Bài 11. Cho hàm số $f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, thỏa mãn $f(0)=\sqrt{3}$ và $f(x).f'(x)=\cos x.\sqrt{1+f^2(x)}$, $\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x)$ trên đoạn $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$.

Lời giải

Từ giả thiết $f(x).f'(x)=\cos x.\sqrt{1+f^2(x)}$ $\Rightarrow \dfrac{f(x).f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\cos x \Rightarrow \int\dfrac{f(x).f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}\mathrm{d}x=\sin x+C$

Đặt $t=\sqrt{1+f^2(x)} \Rightarrow t^2=1+f^2(x)$ $\Rightarrow t\mathrm{d}t=f(x)f'(x)\mathrm{d}x$.

Thay vào ta được $\int \mathrm{d}t=\sin x+C \Rightarrow t=\sin x+C \Rightarrow \sqrt{1+f^2(x)}=\sin x+C$.

Do $f(0)=\sqrt{3} \Rightarrow C=2$.

Vậy $\sqrt{1+f^2(x)}=\sin x+2 \Rightarrow f^2(x)=\sin^2 x+4\sin x+3$.

$\Rightarrow f(x)=\sqrt{\sin^2 x+4\sin x+3}$, vì hàm số $f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Ta có $\dfrac{\pi}{6}\le x\le\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{2}\le \sin x\le 1$, Do hàm số $g(t)=t^2+4t+3$ đồng biến trên $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

Suy ra $\max\limits_{\left[\frac{1}{2};1\right]} g(t)=g(1)=8$, $\min\limits_{\left[\frac{1}{2};1\right]} g(t)=g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{21}{4}$.

Vậy $\max\limits_{\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]} f(x)=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2\sqrt{2}$, $\min\limits_{\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]} f(x)=g\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$.

Bài 12. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1;4]$ và thỏa mãn hệ thức $\begin{cases} f(1)+g(1)=4 \\ g(x)=-x.f'(x);\quad f(x)=-x.g'(x)\end{cases}$.Tính $I=\int\limits_1^4\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x$

Lời giải

Ta có $f(x)+g(x)=-x\left[f'(x)+g'(x)\right]$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)+g(x)}{f'(x)+g'(x)}=-\frac{1}{x} \Leftrightarrow \int\frac{f(x)+g(x)}{f'(x)+g'(x)}\mathrm{d}x=-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x \Rightarrow \ln\left|f(x)+g(x)\right|=-\ln|x|+C$$

Theo giả thiết ta có $C-\ln|1|=\ln\left|f(1)+g(1)\right| \Rightarrow C=\ln 4$.

Khi đó $\left[\begin{array}{l} f(x)+g(x)=\dfrac{4}{x} \\ f(x)+g(x)=-\dfrac{4}{x}\end{array}\right.$, vì $f(1)+g(1)=4$ nên $f(x)+g(x)=\dfrac{4}{x}$.

Vậy $I=\int\limits_1^4\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=8\ln 2$.

Bài 13. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa $f(x)$mãn $f(1)=1$,

$\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx = 9$ và $\int_0^1 x^3 f(x) dx = \frac{1}{2}$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$

Lời giải

Ta có: $\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx = 9 \quad (1)$

- Tính $\int_0^1 x^3 f(x) dx = \frac{1}{2}$. Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = x^3.dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = \frac{x^4}{4} \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \int_0^1 x^3 f(x) dx = \left(\frac{x^4}{4}.f(x)\right)\Bigg|_0^1 - \frac{1}{4}\int_0^1 x^4.f'(x)dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\int_0^1 x^4.f'(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^4.f'(x)dx = -1 \Rightarrow 18\int_0^1 x^4.f'(x)dx = -18 \quad (2)$$

Mặt khác $\int_0^1 x^8 dx = \frac{x^9}{9}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{9} \Rightarrow 81\int_0^1 x^8 dx = 9 \quad (3)$

Cộng vế với vế các đẳng thức (1), (2) và (3) ta được:

$$\int_0^1 \left[\left[f'(x)\right]^2 + 18x^4.f'(x) + 81x^8\right]dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left[f'(x) + 9x^4\right]dx = 0 \Leftrightarrow \pi.\int_0^1 \left[f'(x) + 9x^4\right]dx = 0$$

$$\Rightarrow f'(x) + 9x^4 = 0 \Rightarrow f'(x) = -9x^4 \Rightarrow f(x) = \int f'(x).dx = -\frac{9}{5}x^4 + C.$$

Mà $f(1) = 1 \Rightarrow C = \frac{14}{5} \Rightarrow f(x) = -\frac{9}{5}x^5 + \frac{14}{5}$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(-\frac{9}{5}x^5 + \frac{14}{5}\right)dx = \left(-\frac{3}{10}x^6 + \frac{14}{5}x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{5}{2}.$$

Bài 14. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $\int_1^2 (x-1)^2 f(x)dx = -\frac{1}{3}$, $f(2) = 0$ và $\int_1^2 \left[f'(x)\right]^2 dx = 7$. Tính $f\left(\frac{3}{2}\right)$.

Lời giải

Đặt $u = f(x) \Rightarrow du = f'(x)dx$, $dv = (x-1)^2 dx \Rightarrow v = \frac{(x-1)^3}{3}$

Ta có $-\frac{1}{3} = \int_1^2 (x-1)^2 f(x)dx = \frac{(x-1)^3}{3}.f(x)\Bigg|_1^2 - \int_1^2 \frac{(x-1)^3}{3}f'(x)dx$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}\int_1^2 (x-1)^3 f'(x)dx \Leftrightarrow \int_1^2 (x-1)^3 f'(x)dx = 1 \Rightarrow -\int_1^2 2.7(x-1)^3 f'(x)dx = -14$$

Tính được $\int_1^2 49(x-1)^6 dx = 7 \Rightarrow \int_1^2 \left[f'(x)\right]^2 dx - \int_1^2 2.7(x-1)^3 f'(x)dx + \int_1^2 49(x-1)^6 dx = 0$

$$\Rightarrow \int_1^2 \left[7(x-1)^3 - f'(x)\right]^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) = 7(x-1)^3 \Rightarrow f(x) = \frac{7(x-1)^4}{4} + C.$$

Do $f(2)=0 \Rightarrow f(x)=\dfrac{7(x-1)^4}{4}-\dfrac{7}{4}$. Vậy $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{-105}{64}$.

Bài 15. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $(f'(x))^2+f(x).f''(x)=15x^4+12x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=f'(0)=1$ Tính $f^2(1)$.

Lời giải

Ta có:

$(f'(x))^2+f(x).f''(x)=15x^4+12x \Leftrightarrow [f'(x).f(x)]'=15x^4+12x$

$\Leftrightarrow f'(x).f(x)=3x^5+6x^2+C_1$

Do $f(0)=f'(0)=1$ nên ta có $C_1=1$. Do đó:

$$f'(x).f(x)=3x^5+6x^2+1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}f^2(x)\right)'=3x^5+6x^2+1 \Leftrightarrow f^2(x)=x^6+4x^3+2x+C_2.$$

Mà $f(0)=1$ nên ta có $C_2=1$.

Vậy $f^2(x)=x^6+4x^3+2x+1$ suy ra $f^2(1)=8$.

Bài 16. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(0)+f(1)=0$. Biết $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}$, $\int_0^1 f'(x)\cos(\pi x)\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}$. Tính $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u=\cos(\pi x) \\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=-\pi\sin(\pi x)\mathrm{d}x \\ v=f(x) \end{cases}$.

Khi đó

$$\int_0^1 f'(x)\cos(\pi x)\mathrm{d}x=\cos(\pi x)f(x)\Big|_0^1+\pi\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x$$

$$=-(f(1)+f(0))+\pi\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x.=\pi\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x \Rightarrow \int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$$

Ta có $\int_0^1[f(x)-k\sin(\pi x)]^2\mathrm{d}x=\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x-2k\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x+k^2\int_0^1\sin^2(\pi x)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}-k+\frac{k^2}{2}=0 \Leftrightarrow k=1.$$

Do đó $\int_0^1[f(x)-\sin(\pi x)]^2\mathrm{d}x=0 \Rightarrow f(x)=\sin(\pi x)$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\pi$.

Bài 17. Cho $f(0)=\dfrac{1}{2}$ và $\int_0^3[f'(x)+f'(3-x)].dx=5$. Tính $f(3)$.

Lời giải

$\Leftrightarrow \int_0^3 [f'(x)\mathrm{d}x - \int_0^3 f'(3-x)\mathrm{d}(3-x) = 5 \Leftrightarrow f(x)\Big|_0^3 - f(3-x)\Big|_0^3 = 5$

$\Leftrightarrow f(3) - f(0) - f(0) + f(3) = 5 \Leftrightarrow 2f(3) = 6 \Leftrightarrow f(3) = 3.$

Vậy $f(3) = 3$.

Bài 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $[1,2]$ thỏa mãn $\int_1^2 f'(x)dx = 10$ và $\int_1^2 \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln 2$ Biết rằng $f(x) > 0$, $\forall x \in [1,2]$. Tính $f(2)$.

Lời giải

Ta có $\int_1^2 f'(x)dx = f(x)\Big|_1^2 = f(2) - f(1)$, $\int_1^2 f'(x)dx = 10 \Leftrightarrow f(2) - f(1) = 10 \quad (1)$.

$\int_1^2 \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln 2 \Leftrightarrow \ln f(x)\Big|_1^2 = \ln 2 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{f(2)}{f(1)}\right) = \ln 2$ (Vì $f(x) > 0$, $\forall x \in [1,2]$)

$\Leftrightarrow f(1) = \frac{1}{2}f(2) \quad (2)$.

Từ (1) và (2) ta có $f(2) = 20$.

Bài 19. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{(x^2+1)^2}{x^3}$, $f(-1) = 1$ và $f(1) = -4$. Tính giá trị của biểu thức $f(-2) + f(2)$.

Lời giải

Ta có $f'(x) = \frac{(x^2+1)^2}{x^3} = x + \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x}$ nên

$f(x) = \int \frac{(x^2+1)^2}{x^3}\mathrm{d}x = \int\left(x + \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2} + 2\ln|x| + C$

$= \begin{cases} = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2} + 2\ln x + C \; khi \; x > 0 \\ = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2} + 2\ln(-x) + C \; khi \; x < 0 \end{cases}.$

• Trên khoảng $(0;+\infty)$, ta có $f(1) = -4 \Rightarrow C = -4$.

Do đó $f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2} + 2\ln x - 4$. Suy ra $f(2) = 2 - \frac{1}{8} + 2\ln 2 - 4$.

• Trên khoảng $(-\infty;0)$, ta có $f(-1) = 1 \Rightarrow C = 1$

Do đó $f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2} + 2\ln(-x) + 1$. Suy ra $f(-2) = 2 - \frac{1}{8} + 2\ln 2 + 1$.

Vậy $f(-2) + f(2) = \frac{3}{4} + 4\ln 2$.

Bài 20. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x(x-1)}$; $f(-1) + f(2) = 0$ và $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$. Tính giá trị biểu thức: $f(-2) + f\left(\frac{1}{4}\right) + f(3)$.

Lời giải

Ta có $f(x)=\int\frac{1}{x(x-1)}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\ln|x-1|-\ln|x|+C$.

Như vậy $f(x)=\begin{cases}\ln(1-x)-\ln(-x)+C_1,\ \forall x\in(-\infty;0)\\ \ln(1-x)-\ln x+C_2,\ \forall x\in(0;1)\\ \ln(x-1)-\ln x+C_3,\ \forall x\in(1;+\infty)\end{cases}$.

Trên khoảng $(-\infty;0)$, ta có $f(-1)=\ln 2+C_1$.

Trên khoảng $(0;1)$, ta có $f\left(\frac{1}{2}\right)=2\Leftrightarrow \ln\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{2}+C_2=2\Leftrightarrow C_2=2$.

Do đó: $f(x)=\ln(1-x)-\ln x+2$. Suy ra: $f\left(\frac{1}{4}\right)=\ln\frac{3}{4}-\ln\frac{1}{4}+2$.

Trên khoảng $(1;+\infty)$, ta có $f(2)=-\ln 2+C_3$.

Lại có: $f(-1)+f(2)=0\Leftrightarrow \ln 2+C_1-\ln 2+C_3=0\Leftrightarrow C_1+C_3=0$.

Khi đó: $f(-2)+f\left(\frac{1}{4}\right)+f(3)=(\ln 3-\ln 2+C_1)+\left(\ln\frac{3}{4}-\ln\frac{1}{4}+C_2\right)+(\ln 2-\ln 3+C_3)$

$=\ln 3+C_1+C_2+C_3=\ln 3+2$. Vậy $f(-2)+f\left(\frac{1}{4}\right)+f(3)=\ln 3+2$.

Bài 21. Cho $f^6(x).f'(x)=12x+13$, $f(0)=2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[0;1]$.

Lời giải

Ta có $f^6(x).f'(x)=12x+13\Rightarrow\int_0^t f^6(x).f'(x)\mathrm{d}x=\int_0^t(12x+3)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\frac{1}{7}f^7(t)=6t^2+3t+C$ hay $f^7(x)=42x^2+21x+7C$. Do $f(0)=2$ nên

$7C=2\Leftrightarrow C=\frac{2}{7}$. Do đó $f(x)=\sqrt[7]{42x^2+21x+2}$.

$\max\limits_{[0;1]}f(x)=f(1)$, $\min\limits_{[0;1]}f(x)=f(0)$ hay $\max\limits_{[0;1]}f(x)=\sqrt[7]{65}$ và $\min\limits_{[0;1]}f(x)=\sqrt[7]{2}$.

Bài 22. Cho $f(x)\geq$ với $\forall x\in\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $f(x).f'(x)=2x\sqrt{f^2(x)+1}$, $f(0)=0$. Tính giá trị lớn nhất M, giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=f(x)$ trên [1;3].

Lời giải

Đặt $I=\int_0^t f(x).f'(x)\mathrm{d}x=\int_0^t 2x\sqrt{f^2(x)+1}\,\mathrm{d}x$.

* Ta tính $I=\int_0^t f(x).f'(x)\mathrm{d}x=\int_0^t f(x).\mathrm{d}(f(x))=\frac{1}{2}f^2(x)\Big|_0^t=\frac{1}{2}f^2(t)$ (1).

* Ta tính $I=\int_0^t 2x\sqrt{f^2(x)+1}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $u=\sqrt{f^2(x)+1}\Rightarrow \mathrm{d}u=\frac{f'(x).f(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}}\mathrm{d}x=2x\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}v=2x\mathrm{d}x$ chọn $v=x^2$.

$$I=\int_0^t 2x\sqrt{f^2(x)+1}\mathrm{d}x=\left[x^2\sqrt{f^2(x)+1}\right]_0^t-\int_0^t 2x^3\mathrm{d}x=t^2\sqrt{f^2(t)+1}-\frac{t^4}{2}\quad(2).$$

* Từ (1) và (2) ta có $\frac{1}{2}f^2(t)=t^2\sqrt{f^2(t)+1}-\frac{t^4}{2}\Leftrightarrow f^2(t)-2t^2\sqrt{f^2(t)+1}+t^4=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{f^2(t)+1}=t^2+1\\ \sqrt{f^2(t)+1}=t^2-1\end{array}\right..$$

Do $f(t)\geq 0$ với $\forall t\in\mathbb{R}$ nên $\sqrt{f^2(t)+1}\geq 1$ với $\forall t\in\mathbb{R}$. Vậy $\sqrt{f^2(t)+1}=t^2+1$ hay $f(x)=\sqrt{x^4+2x^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{2(x^2+1)2x}{2\sqrt{x^4+2x^2}}>0$ với $[1;3]$

Vậy $\underset{[1;3]}{Max}\,f(x)=f(3)$ hay $\underset{[1;3]}{Max}\,f(x)=3\sqrt{11}$, $\underset{[1;3]}{Min}\,f(x)=\sqrt{3}$.

Bài 23. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1)=\frac{1}{2}$ và $f'(x)+f^2(x)(2x+1)=0$. Tính tổng $S=\sum_{k=1}^{2018}f(k)$.

Lời giải

Ta có $-\frac{f'(x)}{f^2(x)}=2x+1\Rightarrow\int_1^t\frac{-f'(x)}{f^2(x)}\,\mathrm{d}x=\int_1^t(2x+1)\,\mathrm{d}x\Leftrightarrow\left.\frac{1}{f(t)}\right|_1^t=\left.(x^2+x)\right|_1^t$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{f(t)}-\frac{1}{f(1)}=t^2+t-2\Leftrightarrow f(t)=\frac{1}{t^2+t}\text{ hay } f(x)=\frac{1}{x^2+x}.$$

Khi đó $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$.

$$S=\sum_{k=1}^{2018}f(k)=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)...+\left(\frac{1}{2018}-\frac{1}{2019}\right)=1-\frac{1}{2019}=\frac{2018}{2019}.$$

Bài 24. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$,

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f'(x)\right]^2dx=\frac{\pi^3}{48}+\frac{\pi}{8}$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+x\cos x)f(x)dx=-\frac{\pi^3}{48}-\frac{\pi}{8}$. Tính $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải

Bằng công thức tích phân từng phần ta có:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+x\cos x)f(x)dx=\left[(x\sin x)f(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x\sin x)f'(x)dx.$$

Suy ra $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x\sin x)f'(x)dx=\frac{\pi^3}{48}+\frac{\pi}{8}$.

Hơn nữa ta tính được $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x\sin x)^2dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^2 x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2(1-\cos 2x)}{2}dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2(1-\cos 2x)}{2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2}{2}dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2\cos 2x}{2}dx=\frac{\pi^3}{48}+\frac{\pi}{8}.$$

Do đó $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f'(x)\right]^2 dx-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x\sin x)f'(x)\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x\sin x)^2 dx=0 \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f'(x)-x\sin x\right]^2 dx=0$

Suy ra $f'(x)=x\sin x$, do đó $f(x)=\sin x-x\cos x+C$. Vì $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ nên $C=-1$.

Vậy $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$.

Bài 25. Cho hàm số $f(x)$ xác định trong khoảng $(0;+\infty)$ đồng thời $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{(x+1).f(x)}}$.

Biết $f(x)>0$ với $\forall x\in(0;+\infty)$ và $f(0)=1$. Tính giá trị $f(3)$.

Lời giải

Ta có $f'(x).\sqrt{f(x)}=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}} \Rightarrow \int_0^t f'(x).\sqrt{f(x)}\,\mathrm{d}x=\int_0^t \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}f^{\frac{3}{2}}(x)\Big|_0^t=\frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x+1}\Big|_0^t \Leftrightarrow \frac{2}{3}f^{\frac{3}{2}}(x)\Big|_0^t=\frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x+1}\Big|_0^t$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}f^{\frac{3}{2}}(t)-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}(t-1)\sqrt{t+1}+\frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{3}f^{\frac{3}{2}}(t)-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}(t-1)\sqrt{t+1}+\frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow f^{\frac{3}{2}}(t)=(t-1)\sqrt{t+1}+3 \Leftrightarrow f(t)=\sqrt[3]{\left[(t-1)\sqrt{t+1}+6\right]^2}.$$

Vậy $f(3)=\sqrt[3]{100}$.

Bài 26. Cho hàm số $y=f(x)$ có $f'(x)$ liên tục trên nửa khoảng $[0;+\infty)$ thỏa mãn $3f(x)+f'(x)=\sqrt{1+3.\mathrm{e}^{-2x}}$. Tính giá trị biểu thức $A=\mathrm{e}^3 f(1)-f(0)$.

Lời giải

Ta có $3f(x)+f'(x)=\sqrt{1+3.\mathrm{e}^{-2x}}=\dfrac{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+3}}{\mathrm{e}^x} \Leftrightarrow \left[\mathrm{e}^{3x}f(x)\right]'=\mathrm{e}^{2x}\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+3}$.

Lấy tích phân từ 0 đến 1 hai vế ta được

$$\int_0^1\left[\mathrm{e}^{3x}f(x)\right]'\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{e}^{2x}\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+3}\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \left[\mathrm{e}^{3x}f(x)\right]\Big|_0^1=\frac{1}{3}\left(\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+3}\right)^3\Big|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{e}^3 f(1)-f(0)=\frac{(\mathrm{e}^2+3)\sqrt{\mathrm{e}^2+3}-8}{3}.$$

Vậy $A=\dfrac{(\mathrm{e}^2+3)\sqrt{\mathrm{e}^2+3}-8}{3}$

Bài 27. Cho hàm số $f(x)=\int_1^{\sqrt{x}}(4t^3-8t)\mathrm{d}t$. Gọi m,M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;6]$. Tính $M-m$.

Lời giải

$f(x)=\int_1^{\sqrt{x}}(4t^3-8t)dt=(t^4-4t^2)\Big|_1^{\sqrt{x}}=x^2-4x+3$ với $x\ge 0$.

$f'(x)=2x-4$, $f'(x)=0\Leftrightarrow x=2\in[1;6]$.

$f(0)=3$; $f(2)=-1$; $f(6)=15$. Suy ra $M=15, m=-1\Rightarrow M-m=16$.

Bài 28. Tìm hàm số $f(x)=a\sin\pi x+b$ thỏa mãn: $f(1)=2$ và $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=4$

Lời giải

Ta có: $f(1)=2\Leftrightarrow a\sin\pi x+b=2\Leftrightarrow b=2$

$$\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=4\Leftrightarrow\int\limits_0^1(a\sin\pi x+2)\mathrm{d}x=4\Leftrightarrow\left(\frac{-a\cos\pi x}{\pi}+2x\right)=4\Leftrightarrow a=\pi.$$

Vậy $f(x)=\pi\sin\pi x+2$.

Bài 29. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f'(x)+2f(x)=0$. Tính $f(-1)$, biết rằng $f(1)=1$.

Lời giải

Ta có $f'(x)+2f(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=-2f(x)\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)}{f(x)}=-2$ (do $f(x)>0$).

Lấy tích phân hai vế, ta được $\int\limits_{-1}^1\dfrac{f'(x)}{f(x)}dx=-2\int\limits_{-1}^1 dx\Leftrightarrow\ln\left[f(x)\right]\Big|_{-1}^1=2x\Big|_{-1}^1$

$$\Leftrightarrow\ln\left[f(1)\right]-\ln\left[f(-1)\right]=-4\Leftrightarrow\ln 1-\ln\left[f(-1)\right]=-4$$

$$\Leftrightarrow\ln\left[f(-1)\right]=4\Leftrightarrow f(-1)=\mathrm{e}^4.$$

Bài 30. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên đoạn $[1;4]$, $f(1)=1$ và $\int\limits_1^4 f'(x)\mathrm{d}x=2$. Tính $f(4)$.

Lời giải

Ta có $\int\limits_1^4 f'(x)dx=2\Leftrightarrow f(x)\Big|_1^4=2\Leftrightarrow f(4)-f(1)=2$ mà $f(1)=1\Rightarrow f(4)=3$.

Bài 31. Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và có $f(3)=\dfrac{4}{9}$, $f'(x)=\sqrt{(x+1)f(x)}$. Tính $f(8)$.

Lời giải

Ta có: $f'(x)=\sqrt{(x+1)f(x)}\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}=\sqrt{x+1}\Rightarrow\int\limits_3^8\dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}x=\int\limits_3^8\sqrt{x+1}\mathrm{d}x$

$$\Leftrightarrow\sqrt{f(x)}\Big|_3^8=\frac{1}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3\Big|_3^8\Leftrightarrow\sqrt{f(8)}-\sqrt{f(3)}=\frac{19}{3}\Leftrightarrow f(8)=7^2=49.$$

Bài 32. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $\int\limits_0^{x^2} f'(t)\mathrm{d}t=x.\cos\pi x$. Tính $f(4)$.

Lời giải

Ta có $\int\limits_0^{x^2} f'(t)\mathrm{d}t=F(x^2)-F(0)=x.\cos\pi x$.

Lấy đạo hàm hai vế ta có: $2x.f(x^2)=\cos\pi x-\pi x.\sin\pi x$.

$$\Rightarrow 4.f(4)=\cos 2\pi-2\pi.\sin 2\pi=1\ \Rightarrow f(4)=\frac{1}{4}.$$

Bài 33. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int\limits_0^{f(x)} t^2\mathrm{d}t=x.\cos\pi x$. Tính $f(4)$.

Lời giải

Ta có: $\int_0^{f(x)} t^2 dt = x.\cos\pi x \Leftrightarrow \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^{f(x)} = x.\cos\pi x \Leftrightarrow f^3(x) = 3x.\cos\pi x$

$\Leftrightarrow f^3(4) = 12.\cos 4\pi = 12 \Leftrightarrow f(4) = \sqrt[3]{12}$.

Bài 34. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên đoạn $[1;2]$ và thỏa mãn $f(x) > 0$ khi $x \in [1;2]$. Biết $\int_1^2 f'(x)dx = 10$ và $\int_1^2 \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln 2$. Tính $f(2)$.

Lời giải

Ta có: $\int_1^2 f'(x)dx = f(x)\Big|_1^2 = 10 \Leftrightarrow f(2) - f(1) = 10$ (1).

Ta có: $\int_1^2 \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln(f(x))\Big|_1^2 = \ln 2 \Leftrightarrow \ln(f(2)) - \ln(f(1)) = \ln 2 \Leftrightarrow \frac{f(2)}{f(1)} = 2$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow f(2) = 20$.

Bài 35. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên đoạn $[1;\ln 3]$ và thỏa mãn $f(1) = e^2$ và $\int_1^{\ln 3} f'(x)dx = 9 - e^2$. Tính $I = f(\ln 3)$.

Lời giải

Ta có: $\int_1^{\ln 3} f'(x)dx = 9 - e^2 \Leftrightarrow f(\ln 3) - f(1) = 9 - e^2 \Leftrightarrow f(\ln 3) = 9$.

Bài 36. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và thỏa mãn $f'(x) = (x^3 + 3x^2 + 6x)^{2017}.f(x), f(-2) = e^2$.

Tính $f(0)$?

Lời giải

$$f'(x) = (x^3 + 3x^2 + 6x)^{2017}.f(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = (x^3 + 3x^2 + 6x)^{2017}$$

$$\Rightarrow \int_{-2}^0 \frac{f'(x)}{f(x)} = \int_{-2}^0 (x^3 + 3x^2 + 6x + 4)^{2017} dx$$

Ta có: $I = \int_{-2}^0 (x^3 + 3x^2 + 6x + 4)^{2017} dx = \int_{-2}^0 \left((x+1)^3 + 3(x+1)\right)^{2017} dx$

Đặt $t = x + 1 \Rightarrow dx = dt$, đổi cận $x = -2 \Rightarrow t = -1, x = 0 \Rightarrow t = 1$.

$\Rightarrow I = \int_{-1}^1 (t^3 + 3t)^{2017}$. Xét hàm số $f(t) = (t^3 + 3t)^{2017}$ là hàm số lẻ nên $I = 0$.

$$\Rightarrow \int_{-2}^0 \frac{f'(x)}{f(x)} = 0 \ \ln|f(x)|\Big|_{-2}^0 = 0 \Leftrightarrow \ln|f(0)| = \ln|f(-2)| \Rightarrow f(0) = e^2.$$

Bài 37. Cho hàm số $f(x) = \int_{e^x}^{e^{2x}} t\ln t\,dt$. Xác định hoành độ điểm cực đại của đồ thị hàm số $f(x)$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Gọi $F(t)$ là một nguyên hàm của $g(t) = t\ln t$ với $t > 0$. Khi đó

$$f(x) = \int_{e^x}^{e^{2x}} t\ln t\,dt = F(t)\Big|_{e^x}^{e^{2x}} = F(e^{2x}) - F(e^x)$$

$$f'(x) = (e^{2x})' F'(e^{2x}) + e^x F'(e^x) = 2e^{2x} f(e^{2x}) - e^x f(e^x) = 4xe^{4x} - xe^{2x} = xe^{2x}(4e^{2x} - 1).$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 4e^{2x}-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\ln 2 \end{array}\right. .$$

Bảng biến thiên của hàm số

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

Vậy hoành độ điểm cực đại của đồ thị hàm số là $x=-\ln 2$.

Bài 38. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;+\infty)$ và $\int\limits_0^{x^2} f(t)\mathrm{d}t = x\sin(\pi x)$. Tính $f(4)$.

Lời giải

Gọi $F(t)$ là một nguyên hàm của $f(t)$.

$$g(x)=\int\limits_0^{x^2} f(t)\mathrm{d}t = F(t)\Big|_0^{x^2} = F(x^2)-F(0)=x\sin(\pi x).$$

$$g'(x)=2xF'(x^2)=\sin(\pi x)+\pi x\cos\pi x \Leftrightarrow 2xf(x^2)=\sin(\pi x)+\pi x\cos\pi x$$

Chọn $x=2$ ta được $4f(4)=\sin 2\pi+2\pi\cos 2\pi = 2\pi \Rightarrow f(4)=\dfrac{\pi}{2}$.

Vậy $f(4)=\dfrac{\pi}{2}$.

Bài 39. Lấy tích phân hai vế, ta được Cho hàm số $f(x)=\ln\dfrac{1}{(3-x)^3}$. Giải bất phương trình sau:

$$f'(x) > \frac{6\pi\int_0^{\pi}\sin^2\frac{t}{2}dt}{x+2}.$$

Lời giải

Ta có $f(x)=-3\ln(3-x); f'(x)=-3.\dfrac{1}{3-x}.(3-x)' = \dfrac{3}{3-x}$.

$$\frac{6}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\sin^2\frac{t}{2}dt = \frac{6}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{1-\cos t}{2}dt = \frac{3}{\pi}(t-\sin t)\Big|_0^{\pi} = 3$$

Khi đó $f'(x) > \dfrac{6\pi\int_0^{\pi}\sin^2\frac{t}{2}dt}{x+2} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{3-x} > \dfrac{3}{x+2} \\ x<3; x\neq 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x-1}{(x-3)(x+2)} < 0 \\ x<3; x\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-2 \\ \dfrac{1}{2}<x<3 \end{array}\right. .$$

Vậy nghiệm bất phương trình: $\left[\begin{array}{l} x<-2 \\ \dfrac{1}{2}<x<3 \end{array}\right.$.

Bài 40. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{2}C_{2n}^1+\dfrac{1}{4}C_{2n}^3+\dfrac{1}{6}C_{2n}^5+...+\dfrac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1}=\dfrac{2^{2n}-1}{2n+1}, \forall n\in\mathbb{N}^*$

Lời giải

* Nhận xét : Số hạng tổng quát của tổng vế trái là $\frac{1}{k+1}C_{2n}^{k}$ với k nguyên dương lẻ và không xuất hiện $\frac{1}{k+1}C_{2n}^{k}$ với k chẵn. Do đó ta phải sử dụng $(1+x)^{2x}$ và $(1-x)^{2n}$ sử dụng phương pháp tích phân hai vế.

Ta có $(1+x)^{2n}=C_{2n}^{0}+C_{2n}^{1}x+C_{2n}^{2}x^{2}+...+C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1}+C_{2n}^{2n}x^{2n}$.

$(1-x)^{2n}=C_{2n}^{0}-C_{2n}^{1}x+C_{2n}^{2}x^{2}-...-C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1}+C_{2n}^{2n}x^{2n}$

Suy ra $(1+x)^{2n}-(1-x)^{2n}=2\left(C_{2n}^{1}x+C_{2n}^{3}x^{3}+C_{2n}^{5}x^{5}+...+C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1}\right)$

Do đó $\int\limits_0^1\frac{(1+x)^{2n}-(1-x)^{2n}}{2}dx=\int\limits_0^1\left(C_{2n}^{1}x+C_{2n}^{3}x^{3}+C_{2n}^{5}x^{5}+...+C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1}\right)dx \quad (*)$

Mà $\int\limits_0^1\frac{(1+x)^{2n}-(1-x)^{2n}}{2}dx=\left.\frac{(1+x)^{2n+1}+(1-x)^{2n+1}}{2(2n+1)}\right|_0^1=\frac{2^{2n}-1}{2n+1} \quad (1)$

và $\int\limits_0^1\left(C_{2n}^{1}x+C_{2n}^{3}x^{3}+C_{2n}^{5}x^{5}+...+C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1}\right)dx=\left.C_{2n}^{1}\frac{x^2}{2}+C_{2n}^{3}\frac{x^4}{4}+C_{2n}^{5}\frac{x^6}{6}+...+C_{2n}^{2n-1}\frac{x^{2n}}{2n}\right|_0^1$

$=\frac{1}{2}C_{2n}^{1}+\frac{1}{4}C_{2n}^{3}+\frac{1}{6}C_{2n}^{5}+...+\frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1} \quad (2)$.

Thay (1) và (2) vào (*) ta có $\frac{1}{2}C_{2n}^{1}+\frac{1}{4}C_{2n}^{3}+\frac{1}{6}C_{2n}^{5}+...+\frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1}=\frac{2^{2n}-1}{2n+1}$ (đpcm)

Bài 41. Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $\frac{1}{2}C_n^1-\frac{1}{3}C_n^3+\frac{1}{4}C_n^4-\frac{1}{5}C_n^5...+\frac{(-1)^n}{n+1}C_n^n=\frac{2018}{2019}$.

Lời giải

Nhận xét:

* Số hạn tổng quát của tổng vế trái là $\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}C_k^n$ ($k\ge 0$ và $k\in\mathbb{N}$). Số đi chung với C_n^k là phân số nên có thể sử dụng tích phân là phù hợp.

* Số hạng tổng quát của tổng vế trái là $\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}C_k^n$ có mẫu là phân số $\frac{1}{k+1}$. Do $k+1$ lớn hơn k một đơn vị nên có khả năng ban đầu C_n^k đi chung với x^k tức là $x^kC_n^k$.

* Dấu của các số hạng thay đổi từ dấu $+$ sang dấu $-$ do đó ta khai triển nhị thức $(1-x)^n$. Vì chưa khớp dấu của đề nên nhân hai vế cho -1.

Ta có: $-\int\limits_0^1(1-x)^n=\int\limits_0^1\left(-C_n^0+C_n^1x-C_n^3x^2+C_n^3x^3-...+(-1)^{n-1}C_n^nx^n\right)\text{dx}$

$\Leftrightarrow -\left.\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right|_1^0=\left.\left(-C_n^0x+\frac{1}{2}C_n^1x^2-\frac{1}{3}C_n^2x^3+\frac{1}{4}C_n^3x^4+...+\frac{(-1)^{n-1}n}{n+1}C_n^nx^{n+1}\right)\right|_0^1$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{n+1}=-1+\frac{1}{2}C_n^1-\frac{1}{3}C_n^2+\frac{1}{4}C_n^3-...+\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}C_n^n$

$\Leftrightarrow \frac{n}{n+1}=\frac{1}{2}C_n^1-\frac{1}{3}C_n^2+\frac{1}{4}C_n^3-...+\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}C_n^n \Leftrightarrow \frac{2018}{2019}=\frac{n}{n+1}\Leftrightarrow n=2018$.

Bài 42. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta luôn có:

$\frac{1}{2}C_n^0-\frac{1}{3}C_n^1+\frac{1}{4}C_n^2-\frac{1}{5}C_n^3...+\frac{(-1)^n}{n+2}C_n^n=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Lời giải

Nhận xét:

* Số hạng tổng quát của vế trái là $\frac{(-1)^k}{k+2}C_n^k$ ($k\geq 0$, $k\in\mathbb{N}$). Số đi chung với C_n^k là phân số nên có thể sử dụng phương pháp tích phân.

* Số hạng tổng quát của vế trái là $\frac{(-1)^k}{k+2}C_n^k$ có mẫu số là phân số $\frac{(-1)^k}{k+2}$ là $k+2$ lớn hơn chỉ số chập k đúng 2 đơn vị$\Rightarrow$có khả năng ban đầu C_n^k đi chung với x^{k+1}, tức là $x^{k+1}C_n^k$ $(*)$.

* Dấu của các số đổi dấu từ $+$ sang $-$.

Ta xét $(1-x)^n=C_n^0-C_n^1x+C_n^2x^2-C_n^3x^3+...+(-1)^n C_n^n x^n$.

Tới đây ta nhận thấy số hạng vế phải chưa giống như ta đoán ở $(*)$, do đó ta nhân hai vế cho x ta được $x(1-x)^n=C_n^0x-C_n^1x^2+C_n^2x^3-C_n^3x^4+...+(-1)^n C_n^n x^{n+1}$.

Khi đó $\int_0^1 x(1-x)^n\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left(C_n^0x-C_n^1x^2+C_n^2x^3-C_n^3x^4+...+(-1)^n C_n^n x^{n+1}\right)\mathrm{d}x$.

Xét $\int_0^1 x(1-x)^n\,\mathrm{d}x$. Đặt $t=1-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$

$$\int_0^1 x(1-x)^n\,\mathrm{d}x=\int_0^1(1-t)t^n\mathrm{d}t=\left.\left(\frac{1}{n+1}t^{n+1}-\frac{1}{n+2}t^{n+2}\right)\right|_0^1=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}.$$

Mặt khác $\int_0^1\left(C_n^0x-C_n^1x^2+C_n^2x^3-C_n^3x^4+...+(-1)^n C_n^n x^{n+1}\right)\mathrm{d}x$

$$=\left.\left(\frac{1}{2}C_n^0x^2-\frac{1}{3}C_n^1x^3+\frac{1}{4}C_n^2x^4-\frac{1}{5}C_n^3x^5+...+\frac{(-1)^n}{n+1}C_n^nx^{n+1}\right)\right|_0^1$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}C_n^1+\frac{1}{4}C_n^2-\frac{1}{5}C_n^3+...+\frac{(-1)^n}{n+1}C_n^n.$$

Vậy $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}C_n^1+\frac{1}{4}C_n^2-\frac{1}{5}C_n^3+...+\frac{(-1)^n}{n+1}C_n^n=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Bài 43. Tính tổng $S=1-\frac{1}{3}C_n^1+\frac{1}{5}C_n^2-\frac{1}{7}C_n^3...+\frac{(-1)^n}{2n+1}C_n^n$ với n nguyên dương.

Lời giải

Ta có $(1-x^2)^n=C_n^0-C_n^1x^2+C_n^3-...(-1)^n C_n^n x^{2n}\Rightarrow$

$\int_0^1(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left(C_n^0-C_n^1x^2+C_n^3-...(-1)^n C_n^nx^{2n}\right)\mathrm{d}x$

* Ta có $\int_0^1\left(C_n^0-C_n^1x^2+C_n^3-...(-1)^n C_n^nx^{2n}\right)\mathrm{d}x$

$$=\left.\left(C_n^0x-\frac{1}{3}C_n^1x^3+\frac{1}{5}C_n^2x^5-\frac{1}{7}C_n^3x^6+...\frac{(-1)^n}{2n+1}C_n^nx^{2n+1}\right)\right|_0^1=C_n^0-\frac{1}{3}C_n^1+\frac{1}{5}C_n^2-\frac{1}{7}C_n^3+...\frac{(-1)^n}{2n+1}C_n^n$$

Ta tính $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n \,dx$.

Đặt $\begin{cases} u = (1-x^2)^n \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -2nx(1-x^2)^{n-1}\,dx \\ v = x \end{cases}$.

$\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx = x(1-x^2)^n\Big|_0^1 + \int_0^1 2nx^2(1-x^2)^{n-1}\,dx = -2n\int_0^1 (1-x^2-1)(1-x^2)^{n-1}\,dx =$

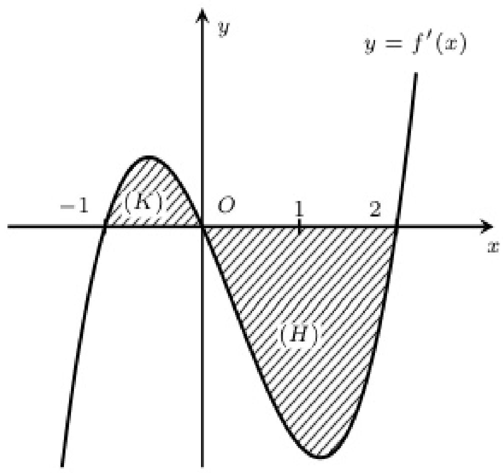
$-2n\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx + 2n\int_0^1 (1-x^2)^{n-1}\,dx = 2n.I_n + 2n.I_{n-1}$. Do đó $I_n = -2n.I_n + 2n.I_{n-1}$

$\Leftrightarrow I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1} \Leftrightarrow I_n = \frac{2}{3}.\frac{4}{7}.\frac{8}{9}....\frac{2n}{2n+1} I_o = \frac{2}{3}.\frac{4}{7}.\frac{8}{9}....\frac{2n}{2n+1}$.

Vậy $S = \frac{2}{3}.\frac{4}{7}.\frac{8}{9}....\frac{2n}{2n+1}$.

Chuyên đề 3 ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TRONG GIẢI CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN SO SÁNH GIÁ TRỊ CỦA HÀM SỐ

Câu 1. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f'\left(x\right)$ được cho như hình vẽ bên. Diện tích các hình phẳng $\left(K\right)$, $\left(H\right)$ lần lượt là $\frac{5}{12},\frac{8}{3}$. Biết $f\left(-1\right)=\frac{19}{12}$, tính $f\left(2\right)$.



A. $f\left(2\right)=\frac{11}{6}$ **B.** $f\left(2\right)=-\frac{2}{3}$ **C.** $f\left(2\right)=3$ **D.** $f\left(2\right)=0$

Lời giải

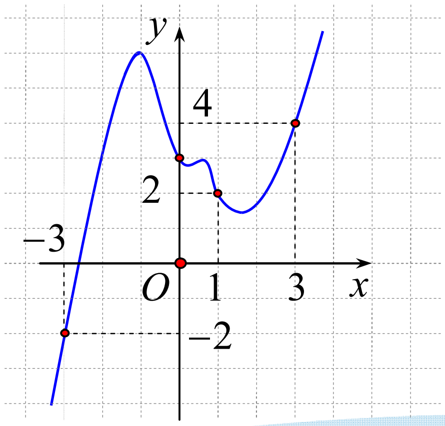
Chọn B

$S_K=\int\limits_{-1}^{0}f'\left(x\right)dx\Leftrightarrow f\left(0\right)-f\left(-1\right)=\frac{5}{12}\Leftrightarrow f\left(0\right)=\frac{5}{12}+\frac{19}{12}=2$.

$S_H=-\int\limits_{0}^{2}f'\left(x\right)dx\Leftrightarrow -f\left(2\right)+f\left(0\right)=\frac{8}{3}\Leftrightarrow f\left(2\right)=-\frac{8}{3}+2=-\frac{2}{3}$.

$S=\int\limits_{-1}^{0}f'\left(x\right)dx-\int\limits_{0}^{2}f'\left(x\right)dx\Leftrightarrow\frac{5}{12}+\frac{8}{13}=f\left(0\right)-f\left(-1\right)-f\left(2\right)+f\left(0\right)$

Câu 2. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ dưới.



Đặt $g(x)=2f(x)-(x+1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng** ?

A. $\underset{[-3;3]}{Min}\, g(x)=g(1)$.

B. $\underset{[-3;3]}{Max}\, g(x)=g(1)$.

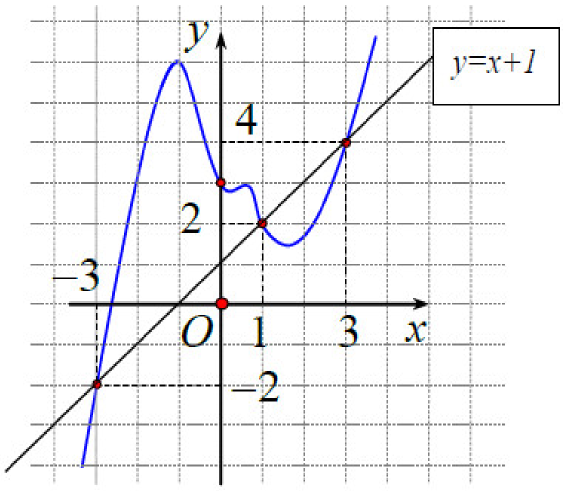
C. $\underset{[-3;3]}{Max}\, g(x)=g(3)$.

D. Không tồn tại giá trị nhỏ nhất của $g(x)$ trên $[-3;3]$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $g'(x)=2f'(x)-2(x+1)$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x+1 (1)$.



Vẽ đồ thị đường thẳng $y=x+1$ trên cùng hệ trục tọa độ với đồ thị hàm số $y=f'(x)$.

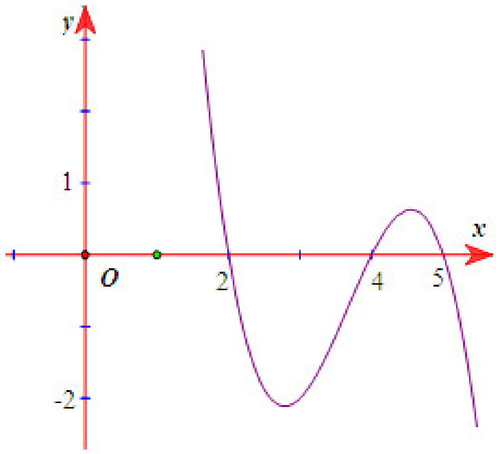
Quan sát đồ thị ta thấy đường thẳng $y=x+1$ cắt đồ thị hàm số $y=f'(x)$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $-3;1;3$. Do đó $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	-3		1		3
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$g(x)$	$g(-3)$	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	$g(3)$

Vậy $\underset{[-3;3]}{Max}\, g(x)=g(1)$.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $S=f(2)-f(5)$, khi đó khẳng định nào là **đúng?**



A. $S \le 6$. **B.** $S \ge 5$. **C.** $S < 5$. **D.** $S > 6$.

Lời giải

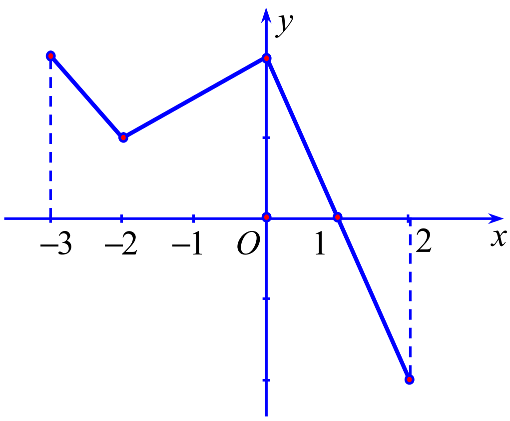
Chọn C

Dựa vào đồ thị ta có $S_1 = \int_2^4 -f'(x)dx = f(2) - f(4) < 4$,

$$S_2 = \int_4^5 f'(x)dx = f(5) - f(4) < 1.$$

$f(2) - f(5) = S_1 - S_2 < S_1 + S_2 = 5$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị là hình vẽ bên dưới.



Xét hàm số $g(x) = \int_{-2}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ trên đoạn $[-3;\, 2]$. Tìm giá trị lớn nhất trong các giá trị $g(-3)$, $g(-2)$, $g(0)$, $g(1)$.

A. $g(-3)$. **B.** $g(-2)$. **C.** $g(0)$. **D.** $g(1)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x) = f(x)$.

Bảng biến thiên:

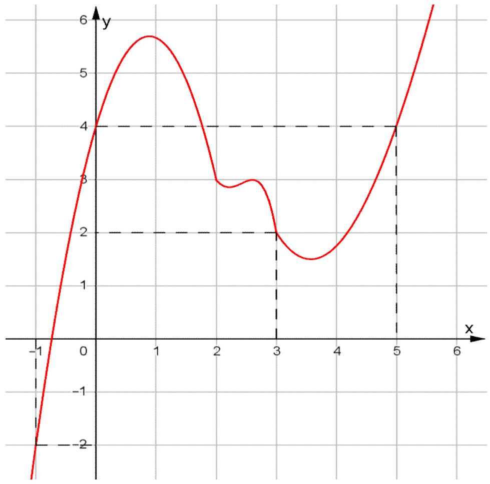
x	-3		1		2
y'		$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta kết luận $\max\limits_{x\in[-3;2]} g(x) = g(1)$.

Vậy giá trị lớn nhất trong các giá trị $g(-3)$, $g(-2)$, $g(0)$, $g(1)$ là $g(1)$.

Tiếp theo ta sẽ xét các Bài toán phức tạp hơn...

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $g(x) = 2f(x) - (x-1)^2$.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $g(-1) < g(3) < g(5)$.

B. $g(-1) < g(5) < g(3)$.

C. $g(5) < g(-1) < g(3)$.

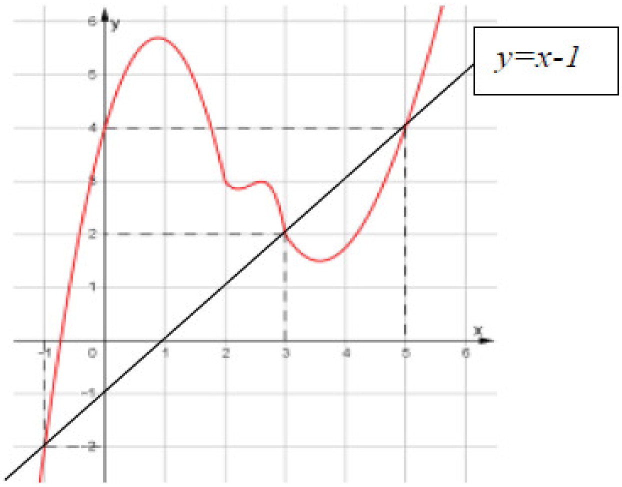
D. $g(3) < g(5) < g(-1)$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $g'(x) = 2\left[f'(x) - (x-1)\right]$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x - 1$.

Vẽ đường thẳng $y = x - 1$ trên cùng hệ trục tọa độ với đồ thị hàm số $y = f'(x)$.



Dựa vào đồ thị ta có các nghiệm sau: $\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \\ x=5 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		3		5		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$g(-1)$	$\nearrow$	$g(3)$	$\searrow$	$g(5)$	$\nearrow$	

Ngoài ra dựa vào đồ thị ta có $\int\limits_{-1}^{3}\left[f'(x)-(x-1)\right]\mathrm{d}x > \int\limits_{3}^{5}\left[(x-1)-f'(x)\right]\mathrm{d}x$

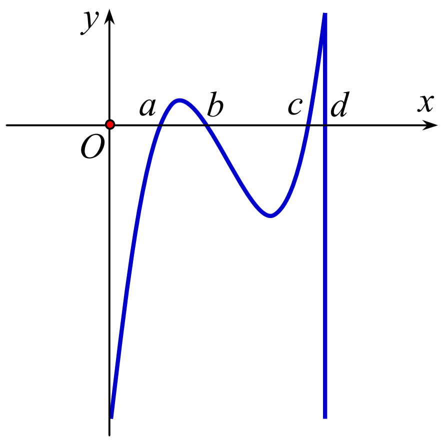
$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{3} g'(x)\mathrm{d}x > -\frac{1}{2}\int\limits_{3}^{5} g'(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow g(x)\Big|_{-1}^{3} > -g(x)\Big|_{3}^{5}$

$\Leftrightarrow g(3)-g(-1) > g(3)-g(5) \Leftrightarrow g(5) > g(-1)$.

Vậy $g(3) > g(5) > g(-1)$.

+ Nhận xét: ta cũng thấy rằng việc nhận định vùng diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $y=x-1$ và các đường thẳng $x=-1$; $x=3; x=5$ có vẽ hơi chủ quan. Nhưng đa số ý tưởng để giải các bài toán như trên là so sánh các miền diện tích và bảng biến thiên của các hàm $g(x)$.

Câu 6. **(TRƯỜNG THPT CHUYÊN LAM SƠN)** Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn $0<a<b<c<d$ và hàm số $y=f(x)$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $[0;d]$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?



A. $M+m=f(0)+f(c)$. **B.** $M+m=f(d)+f(c)$.

C. $M+m=f(b)+f(a)$. **D.** $M+m=f(0)+f(a)$.

Lời giải

Chọn A

Gợi ý: Sử dụng bảng biến thiên ta tìm được:

$\max\limits_{[0;d]}\left[f(x)\right]=\max\left\{f(0),f(b),f(d)\right\};\min\limits_{[0;d]}\left[f(x)\right]=\min\left\{f(a),f(c)\right\}$.

Quan sát đồ thị, dùng phương pháp tích phân để tính diện tích ta có:

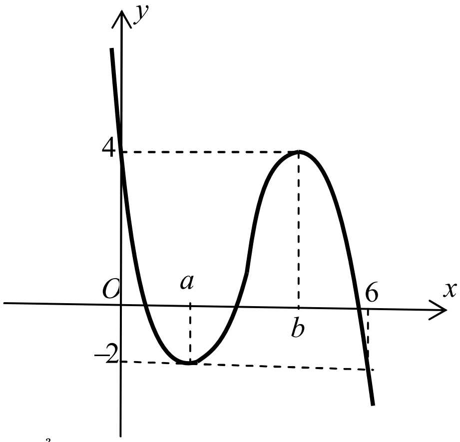
$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x<\int_b^c -f'(x)\mathrm{d}x \Rightarrow f(c)<f(a).$$

Tương tự: $\int_0^a -f'(x)\mathrm{d}x>\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x \Rightarrow f(0)>f(b)$

và $\int_b^c -f'(x)\mathrm{d}x>\int_c^d f'(x)\mathrm{d}x \Rightarrow f(b)>f(d)$.

Vậy $\max\limits_{[0;d]}\left[f(x)\right]=f(0);\min\limits_{[0;d]}\left[f(x)\right]=f(c)$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $S=f(0)+f(6)-f(a)-f(b)$.



Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $S\ge 25+2a-4b$. **B.** $S\le 26+2a-4b$. **C.** $S<25+2a-4b$. **D.** $S>26+2a-4b$.

Lời giải

Chọn C.

Xét hai đường thẳng $y=-2; y=4$

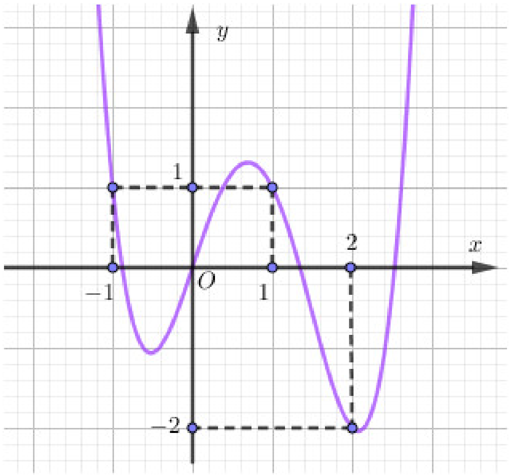
Ta có $S=f(0)+f(6)-f(a)-f(b)=\int_b^6 f'(x)\mathrm{d}x-\int_0^a f'(x)\mathrm{d}x$;

Ta lại có: $\int_b^6 f'(x)\mathrm{d}x<\int_b^6 4\mathrm{d}x=4x\Big|_b^6=24-4b$

và $\int_0^a f'(x)\mathrm{d}x>\int_0^a -2\mathrm{d}x=-2x\Big|_0^a=-2a$

Suy ra $S=f(0)+f(6)-f(a)-f(b)=\int_b^6 f'(x)\mathrm{d}x-\int_0^a f'(x)\mathrm{d}x<25+2a-4b$.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.



Xét hàm số $y = f(x) + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2018$ và các phát biểu

i) Hàm số có hai điểm cực trị trên $[-1;2]$

ii) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ trên $(-1;2)$ là $g(0)$

iii) $g(0) < g(1)$.

iv) Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)$ trên $[-1;1]$ là $g(-1)$

Số phát biểu sai là

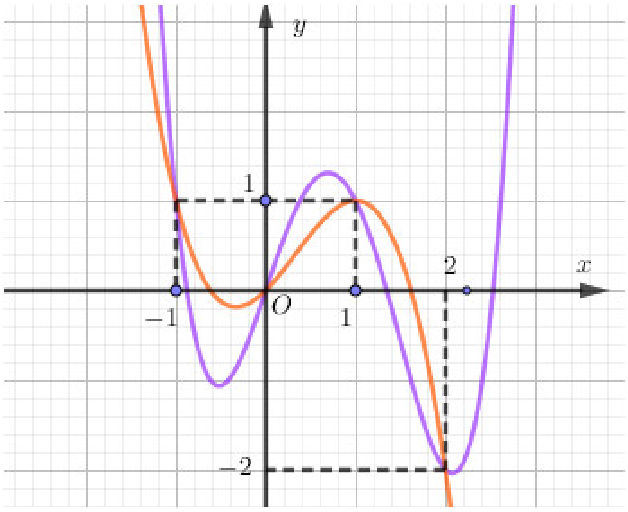
A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $g'(x) = f'(x) + x^3 + x^2 - x$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -x^3 - x^2 + x$.

Dựng đồ thị hàm số $y = -x^3 - x^2 + x$ trên hệ trục toạ độ có chứa đồ thị $f'(x)$.



Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $f'(x) = -x^3 - x^2 + x$ có bốn nghiệm là: $x \in \{-1;0;1;2\}$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số g' như sau

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

x	-1		0		1		2
g'	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
g	$g(-1)$	$\searrow$	$g(0)$	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	$g(2)$

- Hàm số có hai điểm cực trị trên $[-1;2]$
- Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ trên $(-1;2)$ là $g(0)$
- $g(0)<g(1)$.

Hơn nữa ta lại có

$$-\int_{-1}^{0} g'(x)dx > \int_{0}^{1} g'(x)dx \Leftrightarrow g(-1)-g(0)>g(1)-g(0) \Leftrightarrow g(-1)>g(1)$$

- Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)$ trên $[-1;1]$ là $g(-1)$.

Vậy cả bốn mệnh đề đều đúng.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $y=f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại các điểm a,b,c,d (hình vẽ).

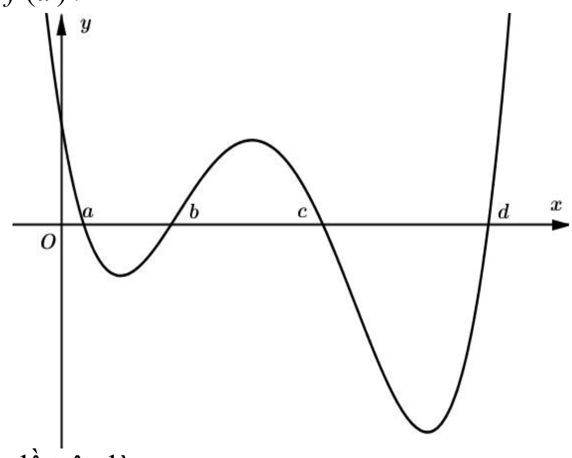
Xét các mệnh đề sau:

(I) $f(a)<f(b)$;

(II) $f(c)>f(d)$.

(III) $f(a)+f(c)>f(b)+f(d)$;

(IV) $f(a)>f(b)$ và $f(c)<f(d)$.



Số mệnh đề **sai** trong 4 mệnh đề trên là

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị $f'(x)$ suy ra hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(a;b),(c;d)$.

Do đó $f(a)>f(b)$, $f(c)>f(b)$ và $f(c)>f(d)$.

Nên mệnh đề (I), (IV) sai, mệnh đề (II) đúng và $2f(b)<f(a)+f(c)$.

Cũng từ đồ thị $f'(x)$ suy ra

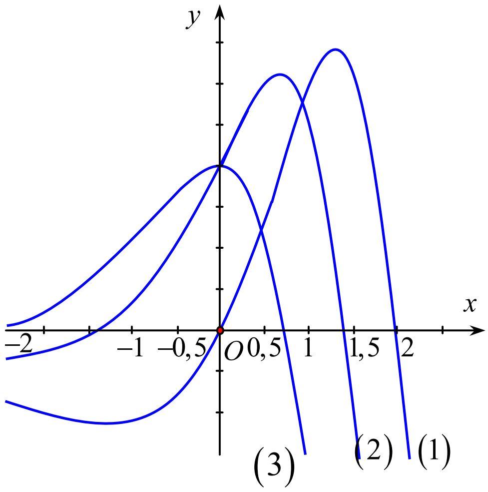
$$\int_{b}^{c}|f'(x)|dx<\int_{c}^{d}|f'(x)|dx \Leftrightarrow \int_{b}^{c} f'(x)dx<-\int_{c}^{d} f'(x)dx \Leftrightarrow f(x)\Big|_{b}^{c}<-f(x)\Big|_{c}^{d}$$

$\Leftrightarrow f(c)-f(b)<f(c)-f(d) \Rightarrow f(b)>f(d)$.

Nên $f(a)+f(c)>2f(b)>f(b)+f(d)$.

Vậy mệnh đề (II) đúng.

Câu 10. Cho 3 hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)=f'(x)$, $y=h(x)=g'(x)$ có đồ thị là 3 đường cong trong hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $g(-1) > h(-1) > f(-1)$. **B.** $h(-1) > g(-1) > f(-1)$.
C. $h(-1) > f(-1) > g(-1)$. **D.** $f(-1) > g(-1) > h(-1)$.

Lời giải

Chọn B

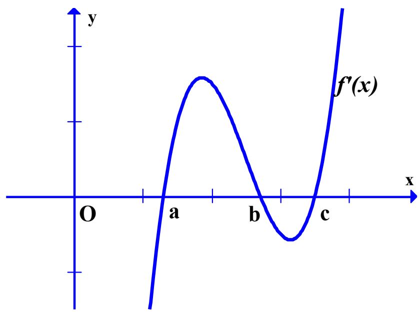
+ Nếu (1) là đồ thị hàm số $y = h(x) = g'(x)$ thì $g'(x) > 0\ \forall x \in (0;2) \Rightarrow g(x)$ đồng biến trên $(0;2)$, trong hai đồ thị còn lại không có đồ thị nào thoả mãn là đồ thị hàm số $y = g(x) = f'(x)$.

+ Nếu (2) là đồ thị hàm số $y = h(x) = g'(x)$ thì $g'(x) > 0, \forall x \in (-1,5;1,5)$
$\Rightarrow g(x)$ đồng biến trên $(-1,5;1,5)$, (1) là đồ thị hàm số $y = g(x) = f'(x)$ thì $f'(x) > 0, \forall x \in (0;2)$
$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $(0;2)$, nhưng (3) không thoả mãn là đồ thị hàm số $y = f(x)$.

+ Nếu (3) là đồ thị hàm số $y = h(x) = g'(x)$ thì $g'(x) > 0, \forall x \in (-\infty;1)$
$\Rightarrow g(x)$ đồng biến trên $(-\infty;1)$, vậy (2) là đồ thị hàm số $y = g(x) = f'(x)$ và (1) là đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Dựa vào đồ thị ta có $h(-1) > g(-1) > f(-1)$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như trong hình vẽ bên. Hỏi phương trình $f(x) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm biết $f(a) > 0$?



A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

Ta có

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$f(b)$	$\searrow$	$f(c)$	$\nearrow$	$+\infty$

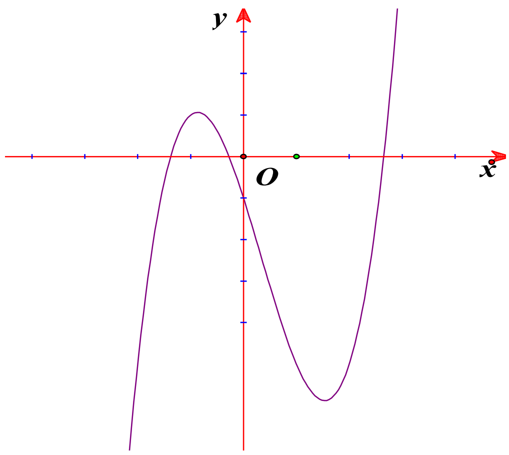
Mặt khác

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x > \int_b^c f'(x)\mathrm{d}x \Rightarrow f(x)\Big|_a^b > -f(x)\Big|_b^c$$

$$\Leftrightarrow f(b)-f(a) > -f(c)+f(b) \Leftrightarrow f(a) < f(c)$$

Mà $f(a) > 0$ nên phương trình vô nghiệm.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ



Biết $f(a).f(b) < 0$ hỏi đồ thị của hàm $y = f(x)$ cắt trục hoành tại ít nhất bao nhiêu điểm ?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C.

Từ đồ thị đã cho ta có BBT sau :

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$f(b)$	$\searrow$	$f(c)$	$\nearrow$	

Vì $\begin{cases} f(a).f(b) < 0 \\ f(a) < f(b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(a) < 0 \\ f(b) > 0 \end{cases}$.

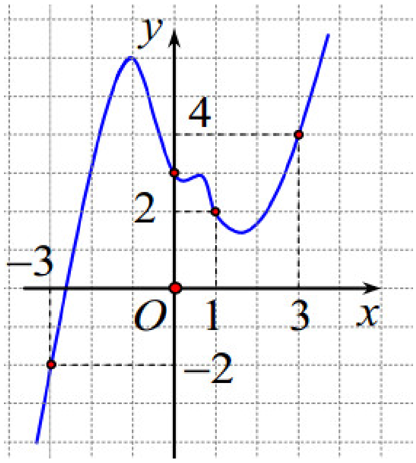
Ta có $\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x < \int_b^c -f'(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \int_a^c f'(x)\mathrm{d}x < 0 \Rightarrow f(c) < f(a) \Rightarrow f(c) < 0$.

Ta lại có $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và $f(a).f(b) < 0 \Rightarrow$ phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(a;b)$, nghĩa là đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại ít nhất một điểm có hoành độ thuộc khoảng $(a;b)$.

Tương tự $f(x)$ liên tục trên $[b;c]$ và $f(b).f(c)<0 \Rightarrow$ phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(b;c)$, nghĩa là đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại ít nhất một điểm có hoành độ thuộc khoảng $(b;c)$.

và $(a;b)\cap(b;c)=\varnothing$, do đó đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại ít nhất hai điểm.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-3;\ 3]$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Biết $f(1)=6$ và $g(x)=f(x)-\dfrac{(x+1)^2}{2}$. Kết luận nào sau đây là đúng?



A. Phương trình $g(x)=0$ có đúng hai nghiệm thuộc $[-3;3]$.

B. Phương trình $g(x)=0$ có đúng một nghiệm thuộc $[-3;3]$.

C. Phương trình $g(x)=0$ không có nghiệm thuộc $[-3;3]$.

D. Phương trình $g(x)=0$ có đúng ba nghiệm thuộc $[-3;3]$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $g'(x)=f'(x)-(x+1)$.

Ta thấy đường thẳng $y=x+1$ là đường thẳng đi qua các điểm $(-3;-2),(1;2),(3;4)$.

Do $f(1)=6 \Rightarrow g(1)=4$.

Từ hình vẽ ta thấy:

$\int\limits_{-3}^{1} f'(x)\,\mathrm{d}x>6 \Rightarrow f(1)-f(-3)>6 \Rightarrow f(-3)<0 \Rightarrow g(-3)=f(-3)-2<0$.

$\int\limits_{1}^{3} f'(x)\,\mathrm{d}x>2 \Rightarrow f(3)-f(1)>6 \Rightarrow f(3)>8 \Rightarrow g(3)=f(3)-8>0$.

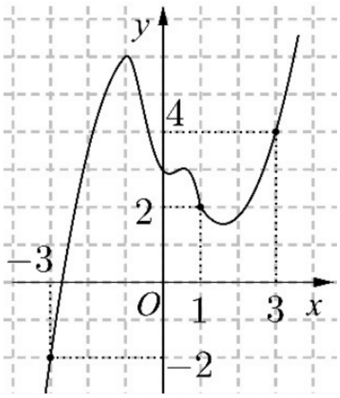
Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $y=x+1$ cùng với các kết quả trên ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-3		1		3	$+\infty$
$g'(x)$			$+$	0	$-$		
$g(x)$		$g(-3)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$g(3)$	

Từ bảng biến thiên ta có phương trình $g(x)=0$ có đúng một nghiệm thuộc $[-3;3]$.

A. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

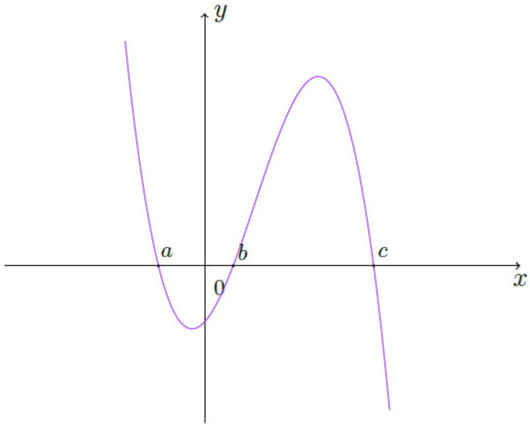
Câu 1. **(THPTQG 2017)** Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x)=2f(x)-(x+1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $g(-3)>g(3)>g(1)$. **B.** $g(1)>g(-3)>g(3)$.

C. $g(3)>g(-3)>g(1)$. **D.** $g(1)>g(3)>g(-3)$.

Câu 2. **(THPT Đồng Quan, Hà Nội – 2017).**
Hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ $a<b<c$ như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



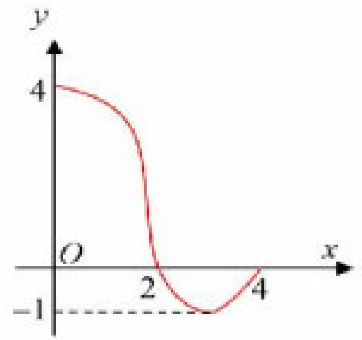
A. $f(c)>f(a)>f(b)$. **B.** $f(b)>f(a)>f(c)$.

C. $f(a)>f(b)>f(c)$. **D.** $f(c)>f(b)>f(a)$.

Câu 3. **(Chuyên Đại học Vinh, lần 4 – 2017).** Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(1), f(x)=f'(x)\sqrt{3x+1}$, với mọi $x>0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

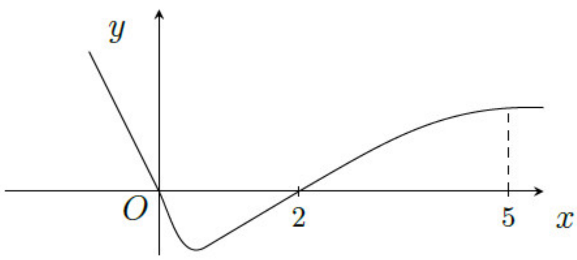
A. $1<f(5)<2$. **B.** $4<f(5)<5$. **C.** $3<f(5)<4$. **D.** $2<f(5)<3$.

Câu 4. **(THPT Phan Bội Châu – Đắk Lắk – Lần 2 – 2017).**
Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ trên đoạn $[0;4]$ với $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[0;4]$, có đạo hàm trên khoảng $(0;4)$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?



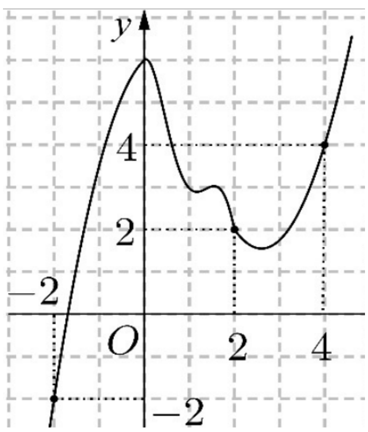
A. $f(4)=f(2)<f(0)$. **B.** $f(0)<f(4)=f(2)$.
C. $f(0)<f(4)<f(2)$. **D.** $f(4)<f(0)<f(2)$.

Câu 5. **(Chuyên Đại học Vinh, lần 4 – 2017).**
Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình bên. Biết rằng $f(0)+f(3)=f(2)+f(5)$. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0;5]$ lần lượt là



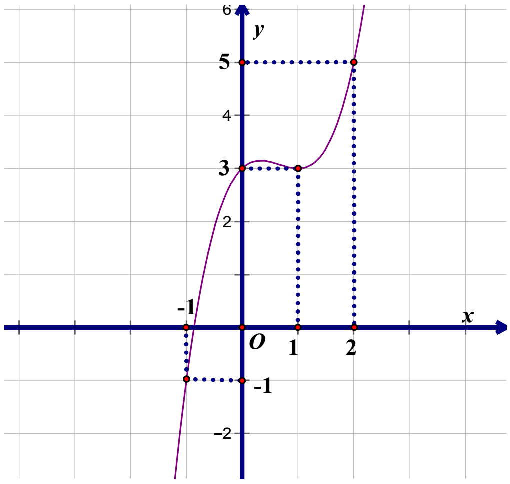
A. $f(0),f(5)$. **B.** $f(2),f(0)$. **C.** $f(1),f(5)$. **D.** $f(2),f(5)$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Đặt $h(x)=2f(x)-x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?



A. $h(4)=h(-2)>h(2)$ **B.** $h(4)=h(-2)<h(2)$
C. $h(2)>h(4)>h(-2)$ **D.** $h(2)>h(-2)>h(4)$

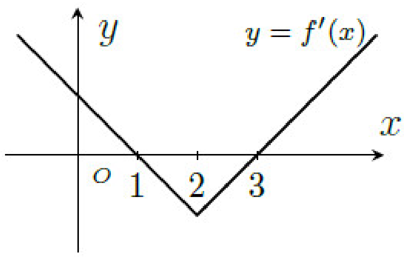
Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên R. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình 2 dưới đây.



Lập hàm số $g\left(x\right)=f\left(x\right)-x^2-x$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

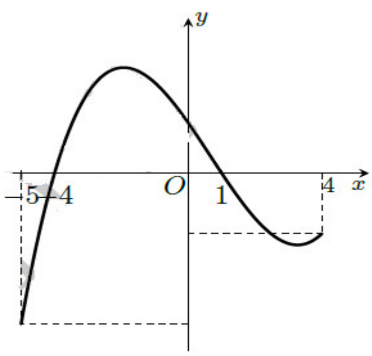
A. $g\left(-1\right)>g\left(1\right)$.   B. $g\left(-1\right)=g\left(1\right)$.   C. $g\left(1\right)=g\left(2\right)$.   D. $g\left(1\right)>g\left(2\right)$.

Câu 8. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị của hàm số $y=f'\left(x\right)$ có dạng như hình vẽ bên. Số nào lớn nhất trong các số sau $f\left(0\right)$, $f\left(1\right)$, $f\left(2\right)$, $f\left(3\right)$?



A. $f\left(1\right)$.   B. $f\left(2\right)$.   C. $f\left(3\right)$.   D. $f\left(0\right)$.

Câu 9. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'\left(x\right)$ cũng liên tục trên $\mathbb{R}$. Hình bên là đồ thị của hàm số $f'\left(x\right)$ trên đoạn $\left[-5;4\right]$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?



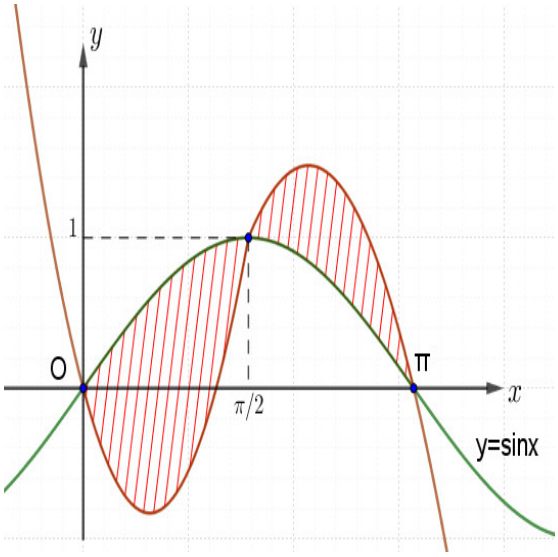
A. $\min\limits_{x\in\left[-5;4\right]} f\left(x\right)=f\left(-5\right)$.   B. $\min\limits_{x\in\left[-5;4\right]} f\left(x\right)=f\left(-4\right)$.

C. $\min\limits_{x\in\left[-5;4\right]} f\left(x\right)=f\left(1\right)$.   D. $\min\limits_{x\in\left[-5;4\right]} f\left(x\right)=f\left(4\right)$

Câu 10. Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{-1;1\right\}$ và thỏa mãn $f'\left(x\right)=\dfrac{1}{x^2-1}$. Biết rằng $f\left(-3\right)+f\left(3\right)=0$ và $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2$. Tính $T=f\left(-2\right)+f\left(0\right)+f\left(4\right)$.

A. $T = 1 + \ln\frac{9}{5}$. **B.** $T = 1 + \ln\frac{6}{5}$. **C.** $T = 1 + \frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}$. **D.** $T = 1 + \frac{1}{2}\ln\frac{6}{5}$.

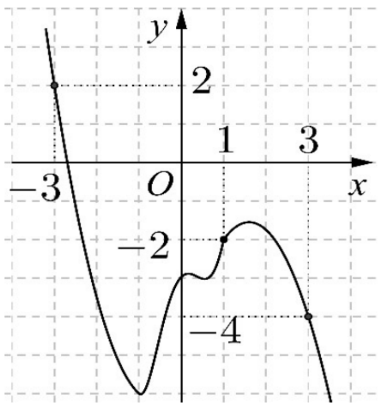
Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Đặt $g(x) = f(x) + \cos x$ .Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $g(0) < g(\pi) < g\left(\frac{\pi}{2}\right)$. **B.** $g\left(\frac{\pi}{2}\right) < g(0) < g(\pi)$.

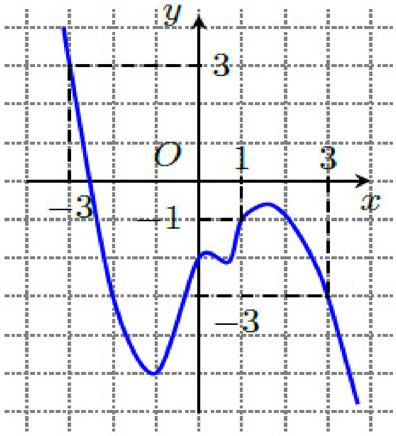
C. $g(\pi) < g(0) < g\left(\frac{\pi}{2}\right)$. **D.** $g(\pi) > g(0) > g\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = 2f(x) + (x+1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?



A. $g(1) < g(3) < g(-3)$ **B.** $g(1) < g(-3) < g(3)$
C. $g(3) = g(-3) < g(1)$ **D.** $g(3) = g(-3) > g(1)$

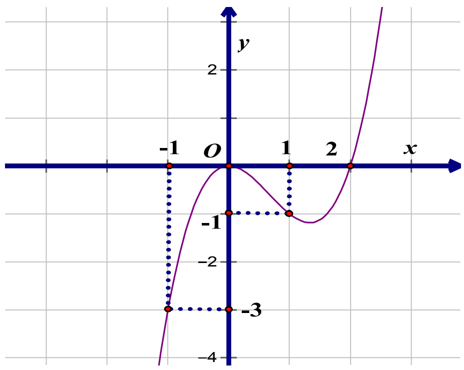
Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = 2f(x) + x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $g(3) < g(-3) < g(1)$. **B.** $g(1) < g(3) < g(-3)$.

C. $g(1) < g(-3) < g(3)$. **D.** $g(-3) < g(3) < g(1)$.

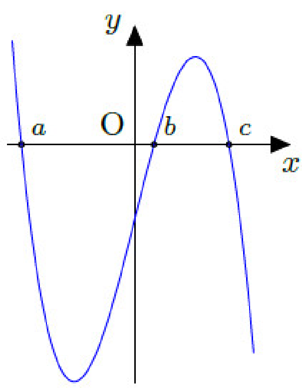
Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Xét hàm số $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2} + 2x$. Tìm số lớn nhất trong ba số $g(-1), g(1), g(2)$?



A. $g(-1)$. **B.** $g(1)$.

C. $g(2)$. **D.** Không so sánh được.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y' = f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ $a < b < c$ như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



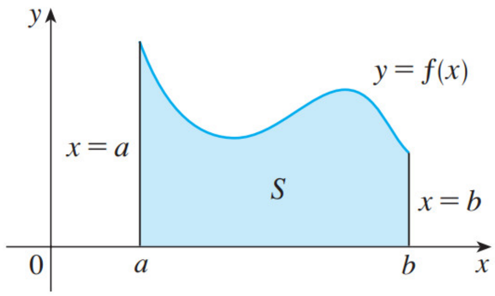
A. $(f(b) - f(a))(f(b) - f(c)) < 0$. **B.** $f(c) > f(b) > f(a)$.

C. $f(c) + f(a) - 2f(b) > 0$. **D.** $f(a) > f(b) > f(c)$.

Chuyên đề 4 ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TRONG BÀI TOÁN DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG VỚI DỮ KIỆN TOÁN THỰC TẾ

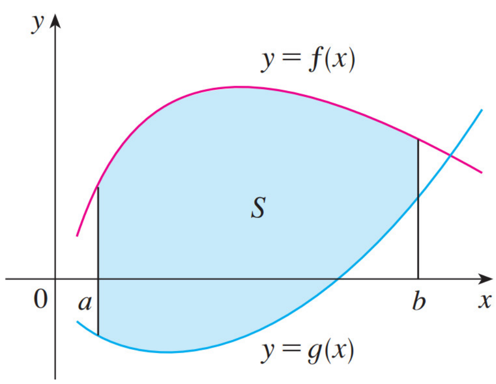
A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định lí: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $[a;b]$. Khi đó diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a,\ x=b$ là $S=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x.$



2. Bài toán 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó diện tích S của hình phẳng (D) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$; trục hoành Ox $(y=0)$ và hai đường thẳng $x=a;\ x=b$ là $S=\int\limits_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$.

3. Bài toán 2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y=f(x)$; $y=g(x)$ và hai đường đường thẳng $x=a;\ x=b$ là $S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x.$



Lưu ý:

1) Để phá bỏ dấu giá trị tuyệt đối ta thường làm như sau:

✓ Giải phương trình $f(x)=g(x)$ tìm nghiệm $x_1,x_2,...,x_n\in(a;b)$ $(x_1<x_2<...<x_n)$.

✓ Tính $S=\int_{a}^{x_1}\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x+\int_{x_1}^{x_2}\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x+\ \ldots+\int_{x_n}^{b}\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x$

$$=\left|\int_{a}^{x_1}\left(f(x)-g(x)\right)\mathrm{d}x\right|+\ldots+\left|\int_{x_n}^{b}\left(f(x)-g(x)\right)\mathrm{d}x\right|.$$

Ngoài cách trên, ta có thể dựa vào đồ thị để bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

2) Trong nhiều trường hợp, bài toán yêu cầu tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y=f(x)$; $y=g(x)$.

Khi đó, ta có công thức tính như sau $S=\int_{x_1}^{x_n}\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x$.

Trong đó x_1 và x_n tương ứng là nghiệm nhỏ nhất, lớn nhất của phương trình $f(x)=g(x)$.

B. BÀI TẬP

1. NHỮNG BÀI TOÁN THỰC TẾ SỬ DỤNG ĐỒ THỊ HÀM PARABOL

Phương pháp

Bước 1. Chọn hệ trục tọa độ, xác định parabol.

Bước 2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn đồ thị hàm số $y=f(x)$ và các đường được cho trong bài toán.

Bước 3. Tùy theo thực tế mỗi bài, tính diện tích theo yêu cầu.

Chú ý: Mấu chốt của vấn đề tính diện tích parabol nằm ở khâu chọn hệ trục tọa độ phù hợp. Nên chọn hệ trục sao cho đỉnh parabol luôn nằm trùng với gốc O hoặc nằm trên trục Oy. Khi đó hàm số parabol luôn có dạng $y=ax^2+b$.

DẠNG 1

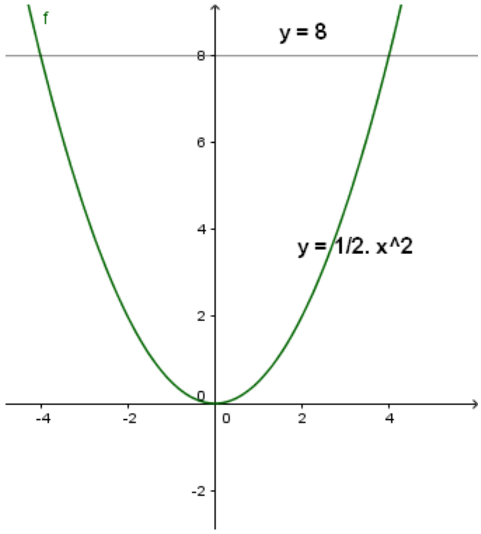
CÁC BÀI TOÁN TÍNH DIỆN TÍCH PARABOL ĐƠN THUẦN

Câu 1. Vòm cửa lớn của một trung tâm văn hóa có dạng hình parabol. Người ta dự định lắp cửa kính cho vòm cửa này. Hãy tính diện tích mặt kính cần lắp vào biết rằng vòm cửa cao $8m$ và rộng $8m$.

Hướng dẫn giải

Định hướng: *Ở bài toán này, bản chất chỉ là việc xác định được đồ thị hàm parabol thõa mãn với vòm cửa, sau đó tính diện tích.*

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.



Vòm cửa là đồ thị của hàm số parabol có dạng: $y = ax^2 + b$. (P)

Theo đề ra:

$(4;8) \in (P)$ nên $8 = 16a + b$. (1)

$(0;0) \in (P)$ nên $0 = 0a + b$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra parabol có dạng $y = \frac{1}{2}x^2$.

Khi đó, vòm cửa được giới hạn bởi các đường $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = 8$.

Hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình:

$$\frac{1}{2}x^2 = 8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -4 \end{array}\right.$$

Diện tích vòm cửa là

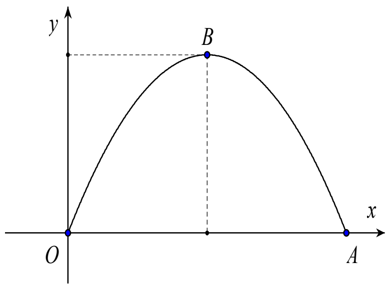
$$S = \int_{-4}^{4}\left(8 - \frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x = \left.\left(8x - \frac{1}{6}x^3\right)\right|_{-4}^{4} = \frac{128}{3}.$$

Câu 2. Bác Năm làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là 2,25 mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thuê mỗi mét vuông là 1500000 đồng. Tính số tiền bác Năm phải trả.

Hướng dẫn giải

Định hướng: *Bài toán trên hoàn toàn tương tự ví dụ 1. Bản chất của bài toán là tính diện tích phần hình phẳng và đồ thị hàm số parabol.*

Cách 1:



- Gắn parabol (P) và hệ trục tọa độ sao cho (P) đi qua $O(0;0)$
- Gọi phương trình của parbol là (P): (P): $y = ax^2 + bx + c$

Theo đề ra, (P) đi qua ba điểm $O(0;0)$, $A(3;0)$, $B(1,5;2,25)$.

Từ đó, suy ra (P): $y = -x^2 + 3x$

- Diện tích phần Bác Năm xây dựng: $S = \int_0^3 \left|-x^2 + 3x\right| dx = \frac{9}{2}$
- Vậy số tiền bác Năm phải trả là: $\frac{9}{2}.1500000 = 6750000$ (đồng).

Cách 2:

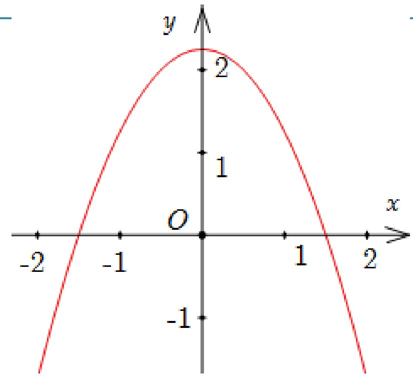
Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Đỉnh $I(0;2,25)\in Oy$, (P) đi qua A(1,5;0)

Gọi phương trình của parbol là (P): $(P):\ y=ax^2+b$

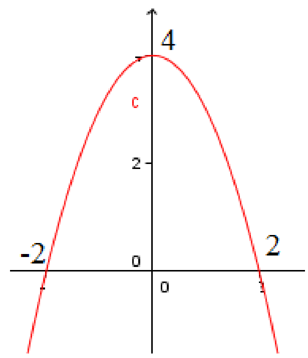
Dễ dàng tìm được $y=-x^2+2,25$.

Từ đây ta tính diện tích hình phẳng như bình thường.



Bài tập tương tự

Câu 1. Một người làm một cái cổng cổ xưa có dạng Parabol như hình vẽ. Hãy tính diện tích của cái cổng?



Hướng dẫn giải

Phương trình parabol (P) có đỉnh $I(0;4)$ và qua điểm $(0;2)$ là

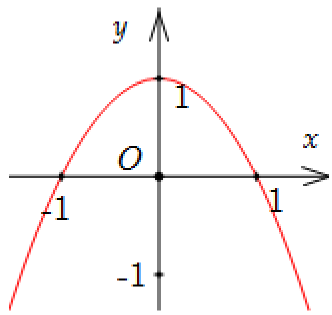
$y=-x^2+4$

Diện tích cái cổng chính bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

$$\begin{cases} y=-x^2+4 \\ y=0 \\ x=-2 \\ x=2 \end{cases}$$

Từ đó ta có $S=\int\limits_{-2}^{2}\left|-x^2+4\right|\mathrm{d}x=\left|\int\limits_{-2}^{2}\left(-x^2+4\right)\mathrm{d}x\right|=\dfrac{32}{3}(đvdt)$

Câu 2. Gọi S là diện tích Ban - Công của một ngôi nhà có hình dạng như hình vẽ (S được giới hạn bởi parabol (P) và trục Ox). Khi đó.



Lời giải

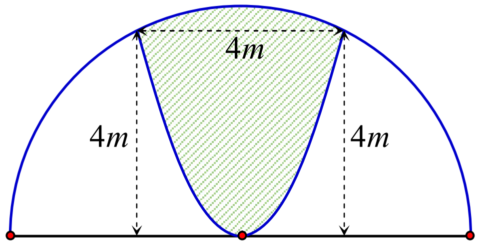
Tìm phương trình parabol (P) qua ba điểm: đỉnh $A(0;1)$, $B(-1;0)$ và $C(1;0)$ giao điểm với trục Ox ta được $(P): y=-x^2+1$.

Diện tích $S=\int\limits_{-1}^{1}(-x^2+1)\mathrm{d}x=\left(-\dfrac{x^3}{3}+x\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\dfrac{4}{3}$.

DẠNG 2

CÁC BÀI TOÁN TÍNH DIỆN TÍCH XÁC ĐỊNH BỞI 2 HÀM SỐ $y=f(x); y=g(x)$

Câu 1. Một khuôn viên dạng nửa hình tròn có đường kính bằng $4\sqrt{5}$ (m). Trên đó người thiết kế hai phần để trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm nửa hình tròn và hai đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa đường tròn (phần tô màu), cách nhau một khoảng bằng 4 (m), phần còn lại của khuôn viên (phần không tô màu) dành để trồng cỏ Nhật Bản. Biết các kích thước cho như hình vẽ và kinh phí để trồng cỏ Nhật Bản là 100.000 đồng/m^2. Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cỏ Nhật Bản trên phần đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn)

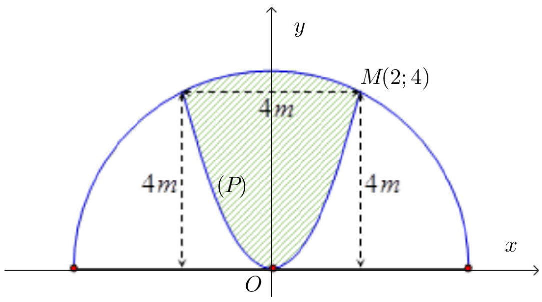


Hướng dẫn giải

Định hướng: *Bản chất của bài toán là tính diện tích phần không tô màu, (được giới hạn bởi nửa đường tròn, đồ thị hàm parabol). Ta chuyển bài toán về tính diện tích hình phẳng bởi hai đồ thị hàm số $f(x), g(x)$ và trục Ox bằng việc chọn hệ trục tọa độ phù hợp.*

Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó phương trình nửa đường tròn là

$$y=\sqrt{R^2-x^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2-x^2}=\sqrt{20-x^2}.$$



Phương trình parabol (P) có đỉnh là gốc O sẽ có dạng $y=ax^2$. Mặt khác (P) qua điểm $M(2;4)$ do đó: $4=a(-2)^2 \Rightarrow a=1$.

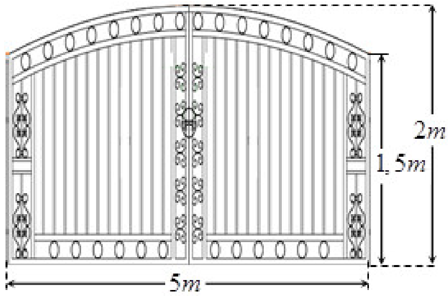
Phần diện tích của hình phẳng giới hạn bởi (P) và nửa đường tròn.(phần tô màu)

Ta có công thức $S_1=\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{20-x^2}-x^2\right)dx \cong 11,94m^2$.

Vậy phần diện tích trồng cỏ là $S_{trongco}=\dfrac{1}{2}S_{hinhtron}-S_1 \approx 19,47592654$

Vậy số tiền cần có là $S_{trongxo}\times 100000 \approx 1.948.000$ (đồng).đồng.

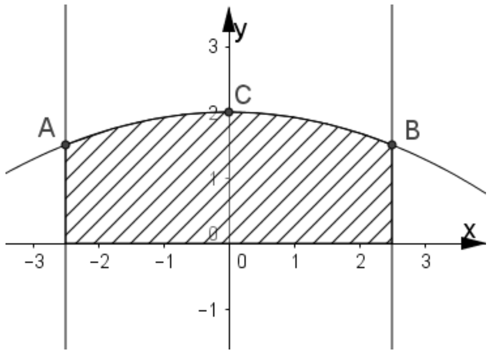
Câu 2. Ông An muốn làm cửa rào sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ bên, biết đường cong phía trên là một Parabol. Giá $1\left(m^2\right)$ của rào sắt là 700.000 đồng. Hỏi ông An phải trả bao nhiêu tiền để làm cái cửa sắt như vậy (***làm tròn đến hàng nghìn***).



Hướng dẫn giải

Định hướng: *Bài toán quy về tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol* $y=f\left(x\right)$ *hai đường thẳng* $x=a;\ x=b$ *và trục* Ox.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Trong đó $A\left(-2,5;1,5\right)$, $B\left(2,5;1,5\right)$, $C\left(0;2\right)$.

Giả sử đường cong phía trên là một Parabol có dạng $y=ax^2+b$, với $a;b;c\in\mathbb{R}$.

Do Parabol đi qua các điểm $B\left(2,5;1,5\right)$, $C\left(0;2\right)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}a\left(2,5\right)^2+b=1,5\\ b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{2}{25}\\ b=2\end{cases}.$$

Khi đó phương trình Parabol là $y=-\dfrac{2}{25}x^2+2$.

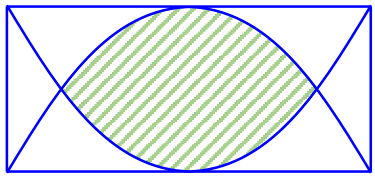
Diện tích S của cửa rào sắt là diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-\dfrac{2}{25}x^2+2$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-2,5$, $x=2,5$.

Ta có $S=\displaystyle\int_{-2,5}^{2,5}\left(-\frac{2}{25}x^2+2\right)\mathrm{d}x=\left.\left(-\frac{2}{25}\frac{x^3}{3}+2x\right)\right|_{-2,5}^{2,5}=\frac{55}{6}$.

Vậy ông An phải trả số tiền để làm cái cửa sắt là

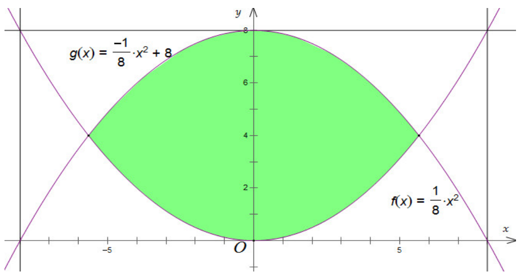
$$S\times 700000=\frac{55}{6}\times 700000\approx 6.417.000\ \textbf{(đồng)}.$$

Câu 3. Một mảnh vườn toán học có dạng hình chữ nhật, chiều dài là 16m và chiều rộng là $8\,m$. Các nhà Toán học dùng hai đường parabol, mỗi parabol có đỉnh là trung điểm của một cạnh dài và đi qua 2 mút của cạnh dài đối diện; phần mảnh vườn nằm ở miền trong của cả hai parabol ***(phần gạch sọc như hình vẽ minh họa)*** được trồng hoa Hồng. Biết chi phí để trồng hoa Hồng là 45.000 đồng/1m^2. Hỏi các nhà Toán học phải chi bao nhiêu tiền để trồng hoa trên phần mảnh vườn đó? ***(Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn)***.



Hướng dẫn giải

Định hướng: *Bài toán quy về tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai hàm số* $y = f(x)$, $y = g(x)$. Vì hai đồ thị hàm số trên đối xứng, nên ta cũng có thể chuyển bài toán về dạng tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = 4$. Lời giải dưới đây được trình bày theo cách thứ nhất.



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Hàm số có đồ thị $y = f(x)$ có dạng $y = ax^2$.

Vì $O(0;0)$ và $M(8;8)$ thuộc (P) nên ta có: $y = \dfrac{1}{8}x^2$.

Tương tự ta tìm được đồ thị hàm số $y = g(x) = -\dfrac{1}{8}x^2 + 8$.

Diện tích phần trồng hoa là diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$.

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là nghiệm của phương trình:

$\dfrac{1}{8}x^2 = -\dfrac{1}{8}x^2 + 8$

$\Leftrightarrow x^2 = 32 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{32}$.

Diện tích phần trồng hoa là :

$$S=\int_{-\sqrt{32}}^{\sqrt{32}}\left|-\frac{1}{8}x^2+8-\frac{1}{8}x^2\right|\mathrm{d}x=\int_{-\sqrt{32}}^{\sqrt{32}}\left|-\frac{1}{4}x^2+8\right|\mathrm{d}x$$

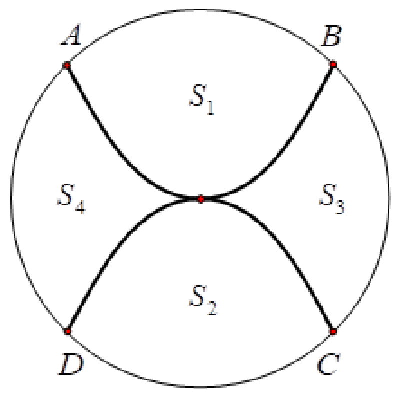
$$=\int_{-\sqrt{32}}^{\sqrt{32}}\left(-\frac{1}{4}x^2+8\right)\mathrm{d}x=\left(-\frac{x^3}{12}+8x\right)\Bigg|_{-\sqrt{32}}^{\sqrt{32}}=\frac{96\sqrt{32}-\left(\sqrt{32}\right)^3}{6}\quad\left(m^2\right).$$

Số tiền để trồng hoa là :

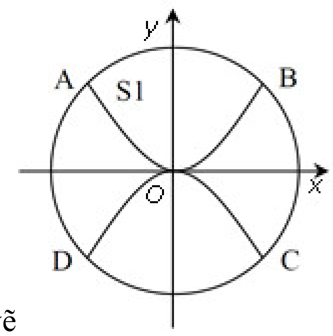
$$\frac{96\sqrt{32}-\left(\sqrt{32}\right)^3}{6}.45000\approx 2715290\ \text{(đồng)}.$$

Bài tập tương tự.

Câu 1. Sân trường có một bồn hoa hình tròn tâm O. Một nhóm học sinh lớp 12 được giao thiết kế bồn hoa, nhóm này định chia bồn hoa thành bốn phần, bởi hai đường parabol có cùng đỉnh O và đối xứng nhau qua O. Hai đường parabol này cắt đường tròn tại bốn điểm A, B, C, D tạo thành một hình vuông có cạnh bằng $4\,\text{m}$ (*như hình vẽ*). Phần diện tích S_1, S_2 dùng để trồng hoa, phần diện tích S_3, S_4 dùng để trồng cỏ (*Diện tích làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai*). Biết kinh phí trồng hoa là 150.000 đồng /1m^2, kinh phí để trồng cỏ là 100.000 đồng/1m^2. Hỏi nhà trường cần bao nhiêu tiền để trồng bồn hoa đó? (*Số tiền làm tròn đến hàng chục nghìn*)



Hướng dẫn giải



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ

Parabol có hàm số dạng $y=ax^2+bx+c$ có đỉnh là gốc tọa độ và đi qua điểm $B(2;2)$ nên có phương trình $y=\frac{1}{2}x^2$.

Đường tròn bồn hoa có tâm là gốc tọa độ và bán kính $OB=2\sqrt{2}$ nên có phương trình là $x^2+y^2=8$. Do ta chỉ xét nhánh trên của đường tròn nên ta chọn hàm số nhánh trên là $y=\sqrt{8-x^2}$.

Vậy diện tích phần $S_1=\int\limits_{-2}^{2}\left(\sqrt{8-x^2}-\frac{1}{2}x^2\right)dx$

Do đó, diện tích trồng hoa sẽ là $S_1+S_2=2\int\limits_{-2}^{2}\left(\sqrt{8-x^2}-\frac{1}{2}x^2\right)dx\approx 15,233...$

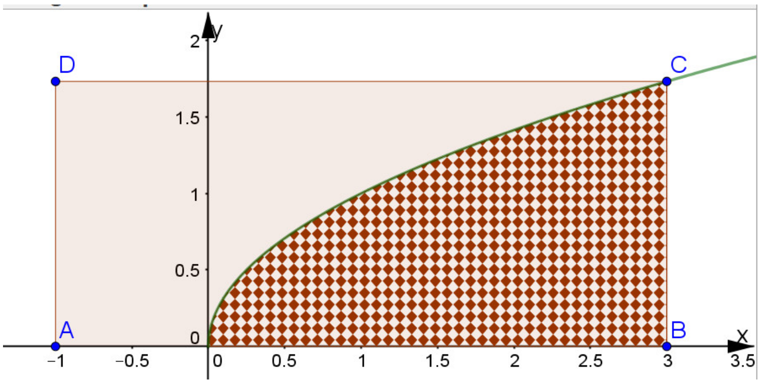
Vậy tổng số tiền để trồng bồn hoa là:

$15,233\times 150.000+\left(\pi\left(2\sqrt{2}\right)^2-15,233\right)\times 100.000\approx 3.274.924$ đồng.

Làm tròn đến hàng chục nghìn nên ta có kết quả là $3.270.000$ đồng.

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ, cho hình chữ nhật (H) có một cạnh nằm trên trục hoành, và có hai đỉnh trên một đường chéo là $A(-1;0)$ và $C\left(a;\sqrt{a}\right)$, với $a>0$. Biết rằng đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$ chia hình (H) thành hai phần có diện tích bằng nhau, tìm a.

Hướng dẫn giải



Gọi $ABCD$ là hình chữ nhật với AB nằm trên trục Ox, $A(-1;0)$ và $C\left(a;\sqrt{a}\right)$

Nhận thấy đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 0 và đi qua $C\left(a;\sqrt{a}\right)$. Do đó nó chia hình chữ nhật $ABCD$ ra làm 2 phần là có diện tích lần lượt là S_1,S_2. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$ và trục Ox, $x=0$, $x=a$ và S_2 là diện tích phần còn lại. Ta lần lượt tính S_1,S_2.

Tính diện tích $S_1=\int\limits_0^a\sqrt{x}dx$.

Đặt $t=\sqrt{x}\Rightarrow t^2=x\Rightarrow 2tdt=dx$; Khi $x=0\Rightarrow t=0; x=a\Rightarrow t=\sqrt{a}$.

Do đó $S_1=\int\limits_0^{\sqrt{a}}2t^2dt=\left(\frac{2t^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{a}}=\frac{2a\sqrt{a}}{3}$.

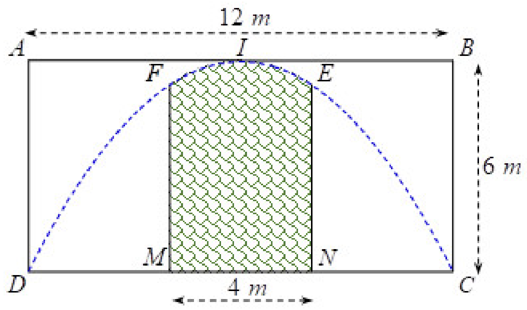
Hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a+1; AD = \sqrt{a}$ nên

$$S_2 = S_{ABCD} - S_1 = \sqrt{a}\left(a+1\right) - \frac{2a\sqrt{a}}{3} = \frac{1}{3}a\sqrt{a} + \sqrt{a}$$

Do đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ chia hình (H) thành hai phần có diện tích bằng nhau nên :

$S_1 = S_2 \Leftrightarrow \dfrac{2a\sqrt{a}}{3} = \dfrac{1}{3}a\sqrt{a} + \sqrt{a} \Leftrightarrow a\sqrt{a} = 3\sqrt{a} \Leftrightarrow a = 3$ (**Do** $a > 0$).

Câu 3. Một công ty quảng cáo X muốn làm một bức tranh trang trí hình $MNEIF$ ở chính giữa của một bức tường hình chữ nhật $ABCD$ có chiều cao $BC = 6\ m$, chiều dài $CD = 12\ m$ (*hình vẽ bên*). Cho biết $MNEF$ là hình chữ nhật có $MN = 4\ m$; cung EIF có hình dạng là một phần của cung parabol có đỉnh I là trung điểm của cạnh AB và đi qua hai điểm C, D. Kinh phí làm bức tranh là 900.000 đồng/m^2.



Hỏi công ty X cần bao nhiêu tiền để làm bức tranh đó?

Hướng dẫn giải

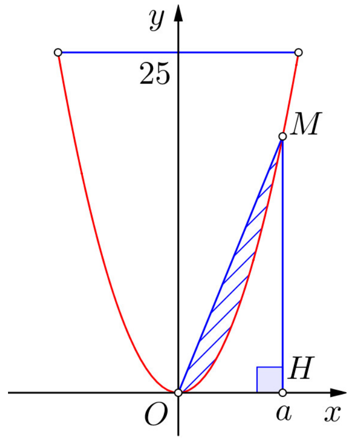
- Nếu chọn hệ trục tọa độ có gốc là trung điểm *O* của *MN*, trục hoành trùng với đường thẳng *MN* thì parabol có phương trình là $y = -\frac{1}{6}x^2 + 6$.

- Khi đó diện tích của khung tranh là $S = \int_{-2}^{2}\left(-\frac{1}{6}x^2 + 6\right)dx = \frac{208}{9}\ m^2$

- Suy ra số tiền là: $\frac{208}{9} \times 900.000 = 20.800.000$ đồng.

Câu 4. Ông B có một khu vườn giới hạn bởi một đường parabol và một đường thẳng. Nếu đặt trong hệ tọa độ Oxy như hình vẽ bên thì parabol có phương trình $y = x^2$ và đường thẳng là $y = 25$. Ông B dự định dùng một mảnh vườn nhỏ được chia từ khu vườn bởi một đường thẳng đi qua O và điểm M trên parabol để trồng một loại hoa. Hãy giúp ông B xác định điểm M bằng cách tính độ dài OM để diện tích mảnh vườn nhỏ bằng $\frac{9}{2}$.

Hướng dẫn giải



Gọi điểm H có hoành độ a, $(a>0)$ là hình chiếu vuông góc của điểm M trên trục Ox.

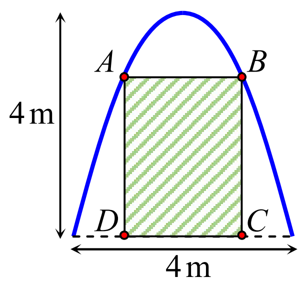
Khi đó ta có pt đường thẳng OM có dạng $y=\tan\alpha.x$, (với $\alpha=\widehat{MOH}$) $\Rightarrow \tan\alpha=\dfrac{MH}{OH}=\dfrac{a^2}{a}=a\Rightarrow y=ax$.

Vậy diện tích mảnh vườn cần tính là:

$$S=\int_0^a\left(ax-x^2\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\frac{ax^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\right|_0^a=\frac{a^3}{6}\Leftrightarrow\frac{a^3}{6}=\frac{9}{2}\Leftrightarrow a=3.$$

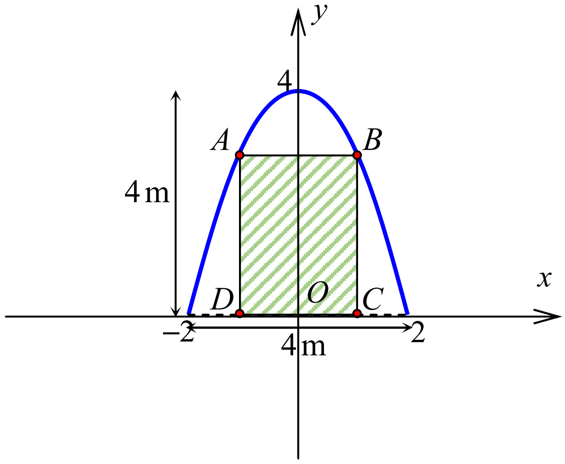
Suy ra $OM=\sqrt{3^2+9^2}=3\sqrt{10}$.

Câu 5. Trong đợt hội trại “Khi tôi 18” được tổ chức tại trường THPT X, Đoàn trường có thực hiện một dự án ảnh trưng bày trên một pano có dạng parabol như hình vẽ. Biết rằng Đoàn trường sẽ yêu cầu các lớp gửi hình dự thi và dán lên khu vực hình chữ nhật $ABCD$, phần còn lại sẽ được trang trí hoa văn cho phù hợp. Chi phí dán hoa văn là 200.000 đồng cho một m^2 bảng. Hỏi chi phí thấp nhất cho việc hoàn tất hoa văn trên pano sẽ là bao nhiêu (làm tròn đến hàng nghìn)?



Hướng dẫn giải

Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ, khi đó phương trình đường parabol có dạng: $y=ax^2+b$.



Parabol cắt trục tung tại điểm $(0;4)$ và cắt trục hoành tại $(2;0)$ nên:

$$\begin{cases} b=4 \\ a.2^2+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=4 \end{cases}.$$

Do đó, phương trình parabol là $y=-x^2+4$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường parabol và trục hoành là:

$$S_1=\int_{-2}^{2}\left(-x^2+4\right)\mathrm{d}x=\left.\left(-\frac{x^3}{3}+4x\right)\right|_{-2}^{2}=\frac{32}{3}.$$

Gọi $C(t;0) \Rightarrow B\left(t;4-t^2\right)$ với $0<t<2$.

Ta có $CD=2t$ và $BC=4-t^2$. Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là

$S_2=CD.BC=2t.\left(4-t^2\right)=-2t^3+8t$.

Diện tích phần trang trí hoa văn là:

$$S=S_1-S_2=\frac{32}{3}-\left(-2t^3+8t\right)=2t^3-8t+\frac{32}{3}.$$

Xét hàm số $f(t)=2t^3-8t+\dfrac{32}{3}$ với $0<t<2$. Ta có $f'(t)=6t^2-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\in(0;2) \\ t=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\notin(0;2) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{2}{\sqrt{3}}$		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{96-32\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$	

Như vậy, diện tích phần trang trí nhỏ nhất là bằng $\frac{96-32\sqrt{3}}{9}\text{m}^2$, khi đó chi phí thấp nhất cho việc hoàn tất hoa văn trên pano sẽ là: $\frac{96-32\sqrt{3}}{9}.200000 \approx 902000$ đồng.

2. NHỮNG BÀI TOÁN THỰC TẾ SỬ DỤNG ĐỒ THỊ HÀM ELIP

Phương pháp

Bước 1. Chọn hệ trục tọa độ, xác định Elip.

Bước 2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn đồ thị hàm số $f(x)$ và các đường được cho trong bài toán.

Bước 3. Tùy theo thực tế mỗi bài, tính diện tích theo yêu cầu.

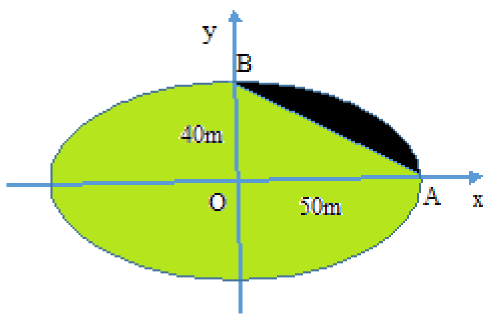
Chú ý Mấu chốt của vấn đề tính diện tích Elip.nằm ở khâu chọn hệ trục tọa độ phù hợp. Nên chọn hệ trục sao cho tâm Elip luôn nằm trùng với gốc O. Khi đó hàm số elip luôn có dạng

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Câu 1. Anh Toàn có một cái ao hình elip với độ dài trục lớn và độ dài trục bé lần lượt là $100m$ và $80m$. Anh chia ao ra hai phần theo một đường thẳng từ một đỉnh của trục lớn đến một đỉnh của trục bé (*Bề rộng không đáng kể*). Phần rộng hơn anh nuôi cá lấy thịt, phần nhỏ anh nuôi cá giống. Biết lãi nuôi cá lấy thịt và lãi nuôi cá giống trong 1 năm lần lượt là 20.000 đồng/m^2 và 40.000 đồng/m^2. Hỏi trong 1 năm anh Toàn có bao nhiêu tiền lãi từ nuôi cá trong ao đã nói trên (*Lấy làm tròn đến hàng nghìn*).

Hướng dẫn giải

Định hướng: *Bản chất của bài toán là tính diện tích phần tô màu,đen (được giới hạn bởi elip, đồ thị đường thẳng). Ta chuyển bài toán về tính diện tích hình phẳng bởi hai đồ thị hàm số* $f(x), g(x)$ *và trục* Ox *bằng việc chọn hệ trục tọa độ phù hợp*



Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó phương trình elip là $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Phương trình Elip sẽ có tâm Elip trùng với gốc tọa độ.(do Elip có tính đối xứng nên ta xét góc phần tư thứ nhất của Elip khi đó phương trình ở góc phần tư thứ nhất của Elip là

$$y=\frac{1}{a}\sqrt{a^2-(bx)^2}=\frac{1}{50}\sqrt{50^2-(40x)^2}$$

Từ đó ta sẽ tìm được diện tích của $\frac{1}{4}$ .ao là:

$$S_1=\int_0^{50}\frac{1}{50}\sqrt{50^2-(40x)^2}dx=500\pi\left(m^2\right)$$

Sau khi tìm được diện tích toàn bộ phần ao ta sẽ tính được diện tích phần nuôi cá.

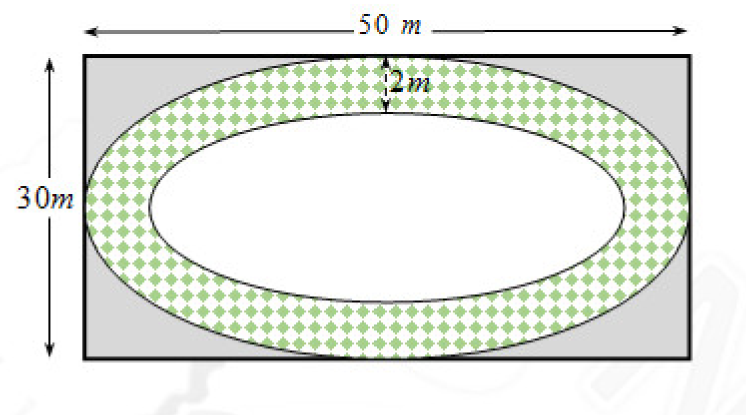
Diện tích toàn bộ ao là $S=\pi.40.50=2000\pi\left(m^2\right)$

Diện tích phần nuôi cá giống là $S_1=\frac{S}{4}-S_{\Delta OAB}=500\pi-1000\left(m^2\right)$

Diện tích phần nuôi cá thịt là $S_2=S-S_1=1500\pi+1000\left(m^2\right)$

Tiền lãi từ nuôi cá là $40000.S_1+20000.S_2\approx137080000$

Câu 2. Một sân chơi dành cho trẻ em hình chữ nhật có chiều dài $50m$ và chiều rộng là $30m$ người ta làm một con đường nằm trong sân (*như hình vẽ*). Biết rằng viền ngoài và viền trong của con đường là hai đường elip và chiều rộng của mặt đường là $2m$. Kinh phí để làm mỗi m^2 làm đường 500.000 đồng. Tính tổng số tiền làm con đường đó. (*Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn*).



Hướng dẫn giải

Định hướng: *Bài toán quy về tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai elip đồng tâm (tâm trùng với gốc tọa độ)* $y=f_1(x)$ *và* $y=f_2(x)$.

Gọi S là diện tích của elip $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ta có $S=\pi ab$.

Chứng minh $S=\int_{-a}^{a} b\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}+\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)=\pi ab$

Xét hệ trục tọa độ Oxy sao cho trục hoành và trục tung lần lượt là các trục đối xứng của hình chữ nhật trong đó trục hoành dọc theo chiều dài của hình chữ nhật.

Gọi (E_1) là elip lớn, (E_2) là elip nhỏ ta có:

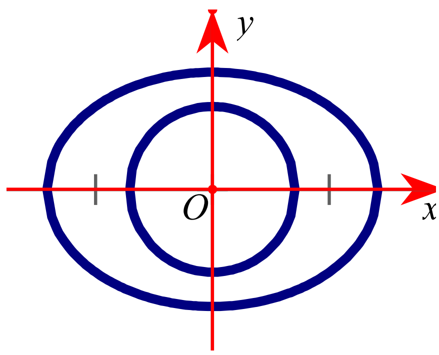
$(E_1): \frac{x^2}{25^2}+\frac{y^2}{15^2}=1 \Rightarrow$ Diện tích của nó là $S_1=\pi.25.15=375\pi.$

$(E_2): \frac{x^2}{23^2}+\frac{y^2}{13^2}=1 \Rightarrow$ Diện tích của nó là $S_2=\pi.23.13=299\pi.$

Diện tích con đường là $375\pi-299\pi=76\pi.$

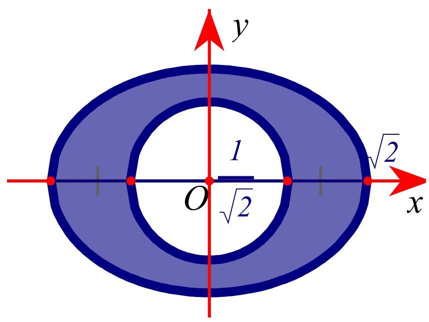
Do đó số tiền đầu tư là $76\pi*500.000\approx 119320000$.

Câu 3. Người ta cần trồng hoa tại phần đất nằm phía ngoài đường tròn tâm gốc toạ độ, bán kính bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}$ và phía trong của Elip có độ dài trục lớn bằng $2\sqrt{2}$ và trục nhỏ bằng 2 (*như hình vẽ*). Trong mỗi một đơn vị diện tích cần bón $\frac{100}{\left(2\sqrt{2}-1\right)\pi}$ kg phân hữu cơ. Hỏi cần sử dụng bao nhiêu kg phân hữu cơ để bón cho hoa?



Hướng dẫn giải

Diện tích hình phẳng giới hạn giữa elip và đường tròn chính là diện tích hình elip trừ diện tích hình tròn.



• Phương trình elip có trục lớn $2a=2\sqrt{2}$, trục nhỏ $2b=2$ là $(E): \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{1}=1$.

Áp dụng công thức diện tích $S_{elip} = \pi ab$ ta được $S_{eip} = \pi\sqrt{2}$.

• Phương trình đường tròn (C) tâm $O(0;0)$ bán kính $R = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ là $(C): x^2 + y^2 = \dfrac{1}{2}$.

Áp dụng công thức diện tích $S_{hinh\ tròn} = \pi R^2 = \dfrac{\pi}{2}$.

* Vậy diện tích hình phẳng $S = S_{elip} - S_{hinh\ tròn} = \pi\sqrt{2} - \dfrac{\pi}{2}$.

Do đó khối lượng phân cần bón $\left(\pi\sqrt{2} - \dfrac{\pi}{2}\right).\dfrac{100}{\left(2\sqrt{2}-1\right)\pi} = 50$.

+ *Chứng minh công thức diện tích elip:* $S_{elip} = \pi ab$ với $(E): \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, (y \geq 0) \\ y = -\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, (y < 0) \end{array}\right.$$

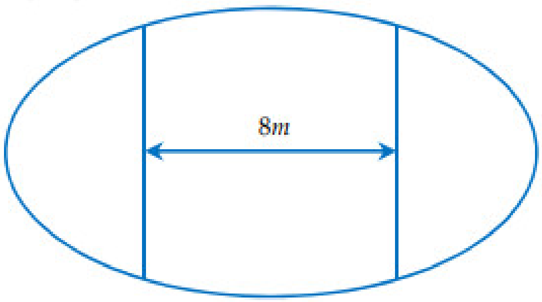
Do tính đối xứng nên $S_{elip} = 4\dfrac{b}{a}\underbrace{\int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x}_{I}$.

Đặt $x = a\sin u \Rightarrow dx = a\cos u du$; đổi cận $\begin{cases} x = a \Rightarrow \sin u = 1 \Rightarrow u = \dfrac{\pi}{2} \\ x = 0 \Rightarrow \sin u = 0 \Rightarrow u = 0 \end{cases}$.

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 u}.a\cos u du = a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 u}.\cos u du = a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du = \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2u) du$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[u + \frac{1}{2}\sin 2u\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2\pi}{4}.$$ Vậy $S_{elip} = \pi ab$.

Câu 4. Ông An có một mảnh vườn hình elip có độ dài trục lớn bằng 16 m và độ dài trục bé bằng 10m. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng 8m và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng (như hình vẽ). Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng / 1 m^2. Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó (*số tiền được làm tròn đến hàng nghìn*).



Hướng dẫn giải

Xét hệ trục tọa độ Oxy đặt vào tâm khu vườn, khi đó phương trình đường elip tâm O là

$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{25}=1$. Khi đó diện tích mảnh vườn cần tìm được chia làm 2 qua trục lớn, gọi diện tích 1 phần là S .

Khi đó diện tích S của mảnh vườn bằng 2 lần diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, đồ thị $y=f\left(x\right)$ và hai đường thẳng $x=-4;x=4$

$$\Rightarrow S=2\int_{-3}^{3}\sqrt{36-x^2}\,dx \Rightarrow S=\int_{-4}^{4}\sqrt{25-\frac{25x^2}{64}}dx=38,2644591$$

Do đó số tiền cần dùng là $100000.2.38,2644591\approx 7653000$ đồng.

3. NHỮNG BÀI TOÁN THỰC TẾ SỬ DỤNG ĐƯỜNG TRÒN

Phương pháp

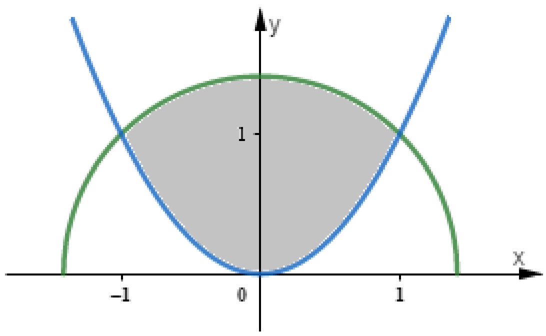
Bước 1. Xác định Phương trình của đường tròn : $\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2=R^2$. Diện tích toàn phần của đường tròn : $S=\pi R^2$.

Bước 2. Trọn hệ trục tọa độ để đặt đường tròn và phác họa phần mặt phẳng cần tính diện tích được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và đường tròn.

Bước 3. Ta sử dụng công thức tính diện tích $\int_u^v\left(f\left(x\right)-g\left(x\right)\right)dx$ để tính diện tích phần cần tính.

Bước 4. Tùy thuộc vào câu hỏi để kết luận và đưa ra kết quả bài toán.

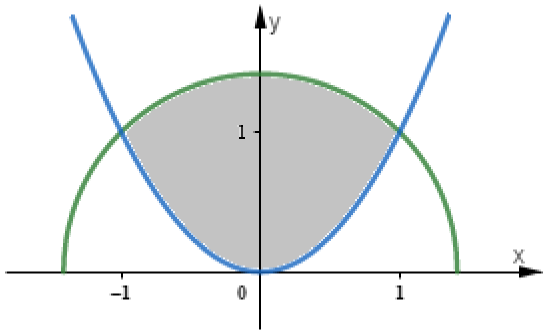
Câu 1. Một bồn hoa tại "Hội hoa xuân" được thiết kế như hình vẽ bên dưới. Bồn hoa được giới hạn bởi hai nhanh đường cong gồm một parabol và một đường tròn. Nếu xét trên hệ trục dưới đây thì ta có phương trình hai đường lần lượt là $y=x^2$ và $y=\sqrt{2-x^2}$. Diện tích bồn hoa bằng



A. $\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A.



Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 = \sqrt{2-x^2} \Leftrightarrow x^4 = 2 - x^2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$.

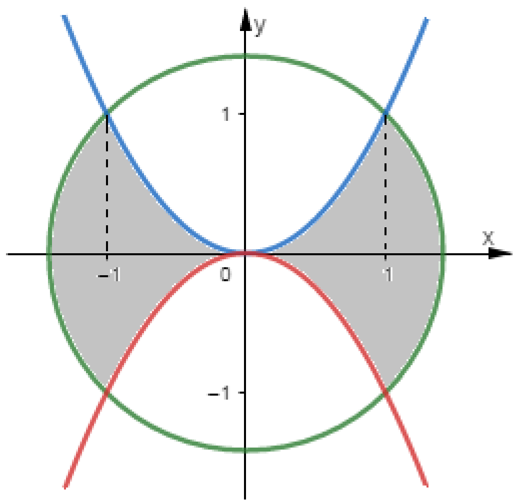
Diện tích hình phẳng cần tìm bằng $S = \int\limits_{-1}^{1} \left(\sqrt{2-x^2} - x^2 \right) \mathrm{d}x = A - \int\limits_{-1}^{1} x^2 \mathrm{d}x = A - \frac{2}{3}$.

Đặt $x = \sqrt{2}\sin t \Rightarrow \mathrm{d}x = \sqrt{2}\cos t \mathrm{d}t$. Đổi cận: $x = -1 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{4}$; $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$

Ta có: $A = 2\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t \mathrm{d}x = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t)\,\mathrm{d}x = \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2} + 1$.

Vậy $S = \frac{\pi}{2} + 1 - \frac{2}{3} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}$.

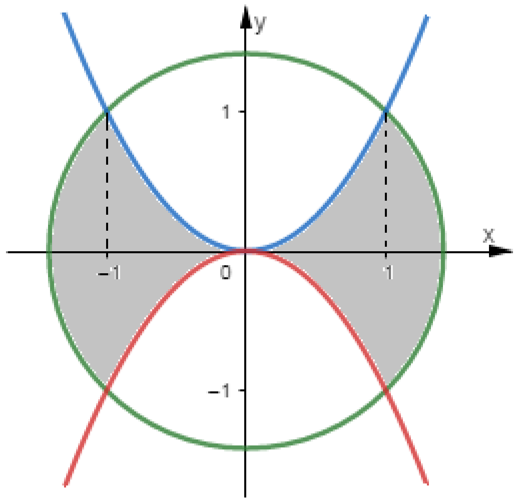
Câu 2. Một logo quảng cáo hình tròn được sơn hai màu. Hãy tính diện tích phần được sơn màu như hình vẽ. Biết rằng logo được thiết kế lớn là hình tròn có bán kính 2m có hai phần được giới hạn bởi 2 parabol giống nhau và tiếp xúc đỉnh như hình vẽ, mỗi parabol cắt đường tròn tại 2 điểm cách nhau 2m.



A. $\pi + \frac{2}{3}$. **B.** $2\pi - \frac{2}{3}$. **C.** $\pi - \frac{2}{3}$. **D.** $2\pi + \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn C.



Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ. khi đó ta có phương trình đường tròn là $x^2+y^2=2$ và parabol phía trên là $y=x^2$ (do đi qua các điểm $(1;1)$ và $(-1;1)$)

Diện tích hình phẳng cần tìm bằng:

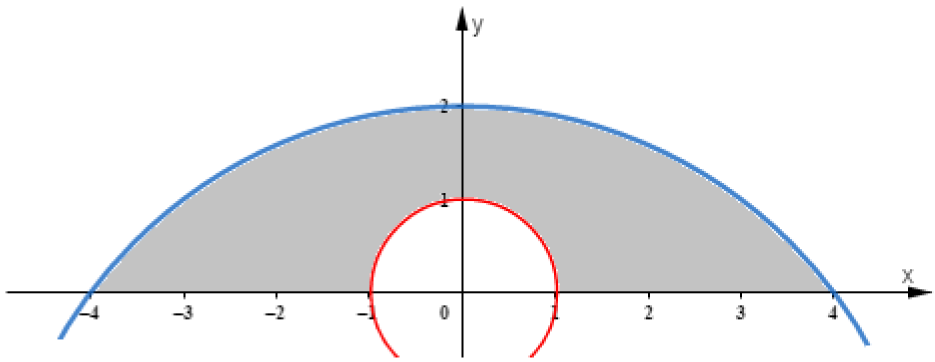
$$S=\pi\left(\sqrt{2}\right)^2-2\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{2-x^2}-x^2\right)\mathrm{d}x=2\pi-2A+2\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x=2\pi+\frac{4}{3}-2A.$$

Đặt $x=\sqrt{2}\sin t\Rightarrow \mathrm{d}x=\sqrt{2}\cos t\mathrm{d}t$. Đổi cận: $x=-1\Rightarrow t=-\frac{\pi}{4}$; $x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$

Ta có: $A=2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 t\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(1+\cos 2t\right)\mathrm{d}x=\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2}+1$.

Vậy $S=2\pi+\frac{4}{3}-2\left(\frac{\pi}{2}+1\right)=\pi-\frac{2}{3}$.

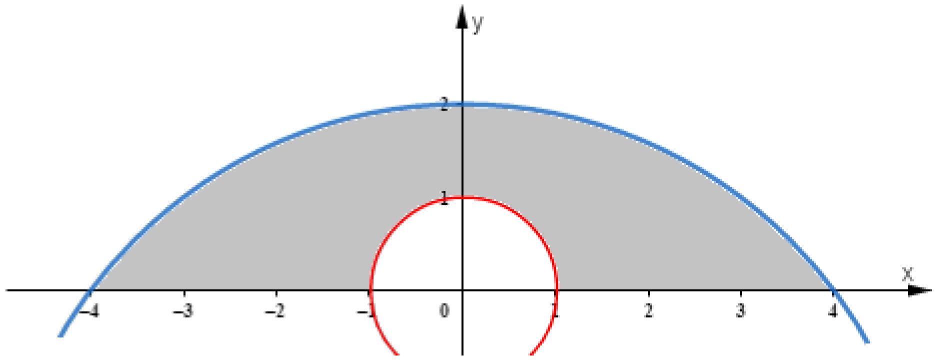
Câu 3. Một cổng chào được thiết kế gồm hai cung tròn có bán kính lần lượt là 1 và 5 có tâm cách nhau 3m. Phần chân cổng là đường thẳng đi qua tâm cung tròn nhỏ và vuông góc với đoạn nối tâm của hai cung tròn (tham khảo hình vẽ). Tính diện tích phần bề mặt của cổng.



A. $9,61$. **B.** $9,63$. **C.** $19,22$. **D.** $18,22$.

Lời giải

Chọn A.



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ ta có hai đường tròn chứa hai cung tròn có phương trình lần lượt là $x^2+(y+3)^2=25$ và $x^2+y^2=1$.

Giải hệ $\begin{cases} y=0 \\ x^2+(y+3)^2=25 \end{cases}$ ta có $x=\pm 4$.

Nửa đường tròn nhỏ bên trong có diện tích $\frac{\pi}{2}$.

Nửa đường tròn trên của (C_1) có phương trình $y=-3+\sqrt{25-x^2}$

Diện tích hình phẳng cần tìm bằng $S=\int\limits_{-4}^{4}\left(-3+\sqrt{25-x^2}\right)\mathrm{d}x-\frac{\pi}{2}$.

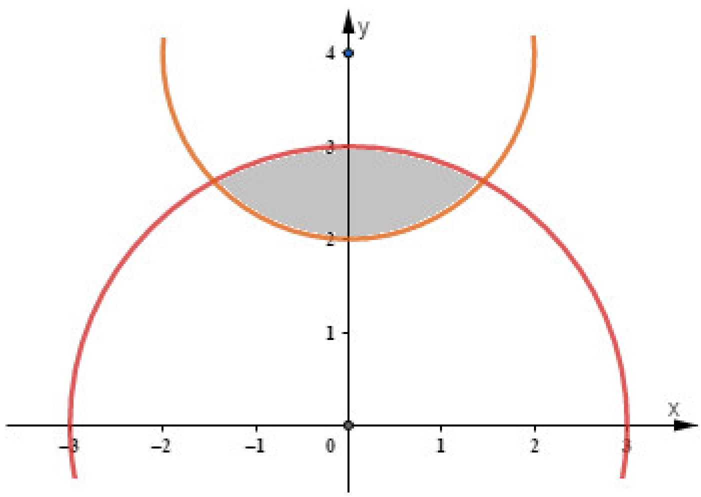
Dùng máy tính để tìm kết quả ta có $S\approx 9,61$.

Câu 4. Một khoảng đất được trồng cỏ có dạng hình tròn bán kinh $3\mathrm{m}$. Một chú bò được cột một sợi dây dài ở một cái cọc cách tâm khoảng đất trồng cỏ một đoạn $4\mathrm{m}$, biết rằng chú bò vươn người hết cỡ cách cọc khoảng $2\mathrm{m}$. Hỏi diện tích cỏ bị chú bò ăn mất là bao nhiêu?(làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

A. $3,98$. **B.** $3,9$. **C.** $1,99$. **D.** $1,94$.

Lời giải

Chọn C.



Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ, ta có phương trình hai đường tròn lần lượt là $(C_1): x^2+y^2=9$ và $(C_2): x^2+(y-4)^2=4$.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ x^2+(y-4)^2=4 \end{cases}$ ta có $x=\pm\dfrac{3\sqrt{15}}{8}$.

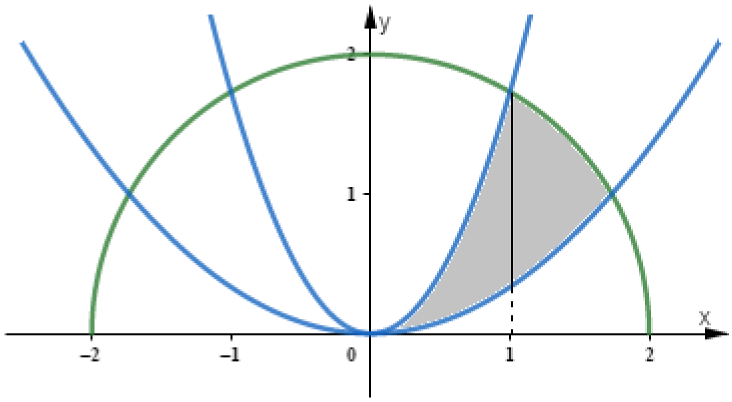
Nửa đường tròn phía trên của (C_1) có phương trình $y=\sqrt{9-x^2}$.

Nửa đường tròn phía dưới của (C_2) có phương trình $y=4-\sqrt{4-x^2}$.

Diện tích hình phẳng cần tìm bằng $S=\int\limits_{-\frac{3\sqrt{15}}{8}}^{\frac{3\sqrt{15}}{8}}\left(\sqrt{9-x^2}-4+\sqrt{4-x^2}\right)\mathrm{d}x$.

Dùng máy tính để tìm kết quả ta có: $S\approx 1,99$.

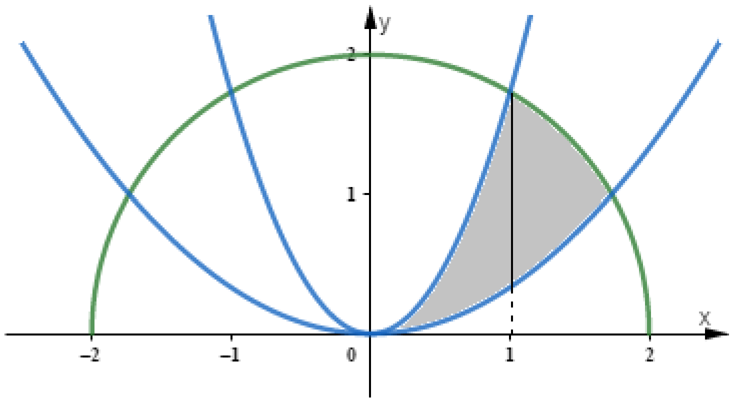
Câu 5. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi hai parabol $y=\dfrac{x^2}{3}$; $y=\sqrt{3}x^2$, cung tròn có phương trình $y=\sqrt{4-x^2}$ (với $0\le x\le 2$) (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng



A. $\dfrac{\pi}{6}$. **B.** $\dfrac{\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{8}{9}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{8}{9}+\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn B.



Xét các phương trình hoành độ giao điểm với $0\le x\le 2$

$\dfrac{x^2}{3}=\sqrt{4-x^2}\Leftrightarrow \dfrac{x^4}{9}=4-x^2\Rightarrow x^2=3\Rightarrow x=\sqrt{3}$.

$x^2\sqrt{3}=\sqrt{4-x^2}\Leftrightarrow 3x^4=4-x^2\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=1$.

Diện tích hình phẳng cần tìm bằng

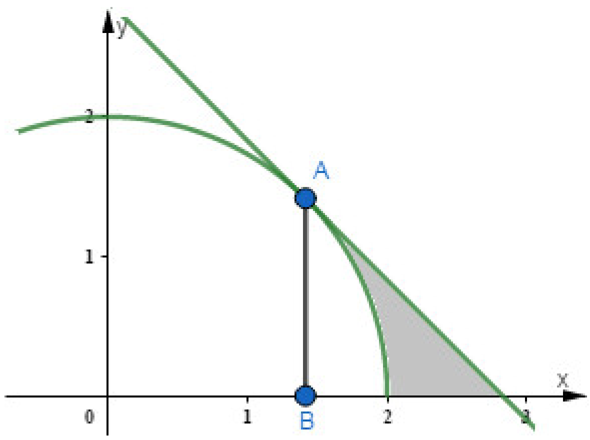
$$S=\int_0^1\left(x^2\sqrt{3}-\frac{x^2}{3}\right)dx+\int_1^{\sqrt{3}}\left(\sqrt{4-x^2}-\frac{x^2}{3}\right)dx=\left.\left(\frac{x^3\sqrt{3}}{3}-\frac{x^3}{9}\right)\right|_0^1+\int_1^{\sqrt{3}}\left(\sqrt{4-x^2}\right)dx-\int_1^{\sqrt{3}}\frac{x^2}{3}dx$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{9}+\int_1^{\sqrt{3}}\left(\sqrt{4-x^2}\right)dx-\left(\frac{3\sqrt{3}}{9}-\frac{1}{9}\right)=\int_1^{\sqrt{3}}\left(\sqrt{4-x^2}\right)dx.$$

Đặt $x=2\sin t\Rightarrow dx=2\cos t dt$. Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{6}$; $x=\sqrt{3}\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{3}$

Ta có: $S=4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 t dx=4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\dfrac{1+\cos 2t}{2}\right)dx=2\left.\left(t+\dfrac{\sin 2t}{2}\right)\right|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=2\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}-\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)=\dfrac{\pi}{3}$.

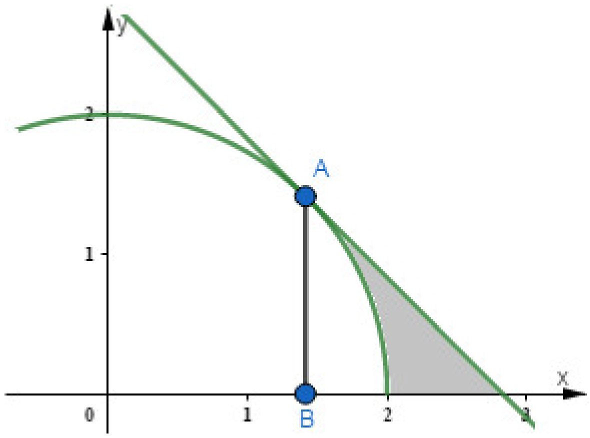
Câu 6. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $y=-x+2\sqrt{2}$; cung tròn có phương trình $y=\sqrt{4-x^2}$ (với $\sqrt{2}\le x\le 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng



A. $2-\dfrac{\pi}{3}$. **B.** $2-\dfrac{\pi}{4}$. **C.** $2+\dfrac{\pi}{2}$. **D.** $2-\dfrac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn D.



Dựa vào hình vẽ ta thấy đường thẳng chính là tiếp tuyến của cung tròn tại điểm có hoành độ bằng $\sqrt{2}$.

Diện tích hình phẳng cần tìm bằng $S=\dfrac{\sqrt{2}.\sqrt{2}}{2}-\int\limits_{\sqrt{2}}^{2}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x=1-A$.

Đặt $x=2\sin t\Rightarrow \mathrm{d}x=2\cos t\mathrm{d}t$. Đổi cận: $x=\sqrt{2}\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{4}$; $x=2\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2}$

Ta có: $A=4\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}x=4\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1+\cos 2t}{2}\right)\mathrm{d}x=2\left(t+\dfrac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=2\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}-1$.

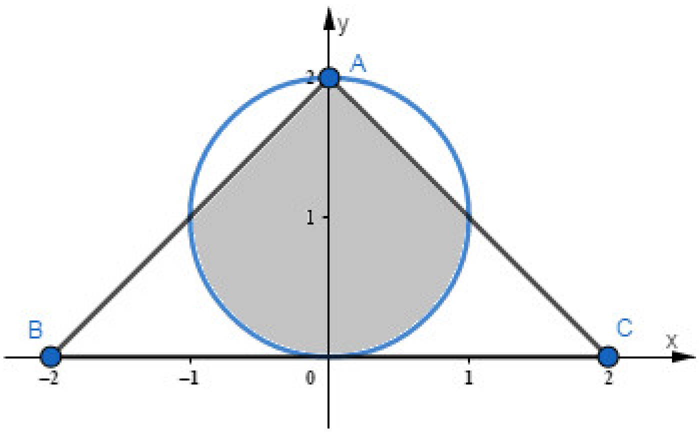
Vậy $S=1-\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)=2-\dfrac{\pi}{2}$.

Câu 7. Cho tam giác vuông cân ABC tại A có $BC=4$. Gọi H là chân đường cao hạ từ A, dựng đường tròn đường kính AH. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường tròn nằm trong tam giác

A. $1-\dfrac{\pi}{2}$. **B.** $1+\dfrac{\pi}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\pi}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn B.



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ ta có đường tròn có phương trình $x^2+(y-1)^2=1$; cạnh AC nằm trên đường thẳng có phương trình $y=-x+2$.

Do tính đối xứng của hình vẽ ta chỉ cần tính 2 lần phần diện tích bên phải trục tung.

Nửa đường tròn dưới có phương trình $y=1-\sqrt{1-x^2}$.

Phương trình hoành độ giao điểm $1-\sqrt{1-x^2}=-x+2 \Leftrightarrow x=1$

Diện tích hình phẳng cần tìm bằng

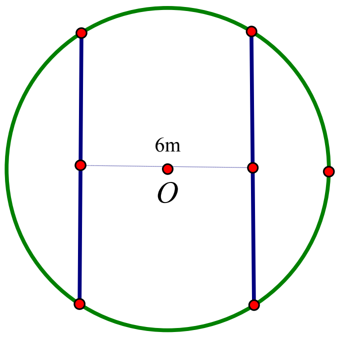
$$S=2\int_0^1\left(-x+2-1+\sqrt{1-x^2}\right)\mathrm{d}x=\left(-x^2+2x\right)\Big|_0^1+2\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=1+2A$$

Đặt $x=\sin t \Rightarrow \mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0$; $x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$

Ta có: $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$.

Vậy $S=1+\frac{\pi}{2}$.

Câu 8. Một mảnh vườn hình tròn tâm O bán kính $6m$. Người ta cần trồng cây trên dải đất rộng $6m$ nhận O làm tâm đối xứng, biết kinh phí trồng cây là 70000 đồng$/m^2$. Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cây trên dải đất đó (*số tiền được làm tròn đến hàng đơn vị*)



Hướng dẫn giải

Xét hệ trục tọa độ oxy đặt vào tâm khu vườn, khi đó phương trình đường tròn tâm O là $x^2+y^2=36$. Khi đó phần nửa cung tròn phía trên trục Ox có phương trình

$y=\sqrt{36-x^2}=f(x)$

Khi đó diện tích S của mảnh đất bằng 2 lần diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, đồ thị $y=f(x)$ và hai đường thẳng $x=-3; x=3$

$$\Rightarrow S=2\int_{-3}^{3}\sqrt{36-x^2}\mathrm{d}x=18\sqrt{3}+12\pi$$

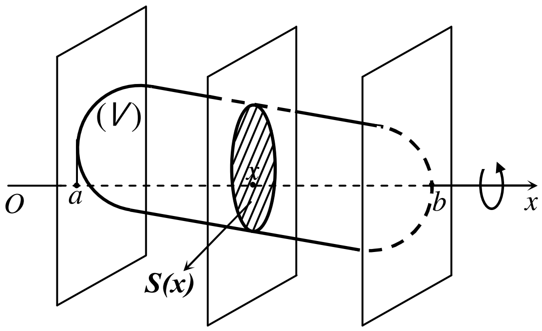
Do đó số tiền cần dùng là $70000.S=4821322$ đồng.

Chuyên đề 5 ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TRONG BÀI TOÁN TÍNH THỂ TÍCH VẬT THỂ VỚI DỮ KIỆN TOÁN THỰC TẾ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Thể tích vật thể

Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b; $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x, $(a \le x \le b)$. Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$.

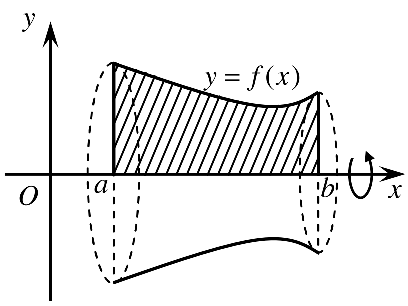


$$\boxed{V = \int_a^b S(x)dx}$$

Khi đó, thể tích của vật thể B được xác định: $V = \int_a^b S(x)dx$

2. Thể tích khối tròn xoay

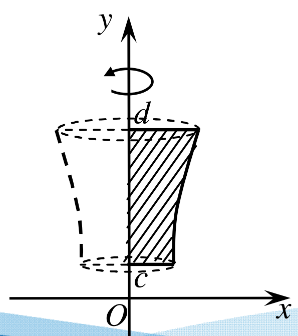
Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox:



$$\begin{cases} (C): y = f(x) \\ (Ox): y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases} \qquad \boxed{V_x = \pi\int_a^b [f(x)]^2\, dx}$$

Lưu ý:

- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, trục hoành và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ quanh trục Oy:



$$\begin{cases} (C): x = g(y) \\ (Oy): x = 0 \\ y = c \\ y = d \end{cases} \qquad \boxed{V_y = \pi\int_c^d [g(y)]^2\, dy}$$

- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ quanh trục Ox:

$$V=\pi\int_a^b\left|f^2(x)-g^2(x)\right|dx$$

B. BÀI TẬP

Câu 1. Một Elip có phương trình $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục Ox.

Lời giải

Ta có: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\Leftrightarrow y=\pm2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}$.

Elip đối xứng qua trục Ox nên ta chỉ cần xét hàm số $y=2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}$ khi quay quanh Ox.

Phương trình hoành độ giao điểm của $y=2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}$ và trục Ox: $2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}=0\Leftrightarrow x=\pm3$.

Thể tích cần tính: $V=\pi\int_{-3}^{3}4\left(1-\frac{x^2}{9}\right)dx=16\pi=50,24$

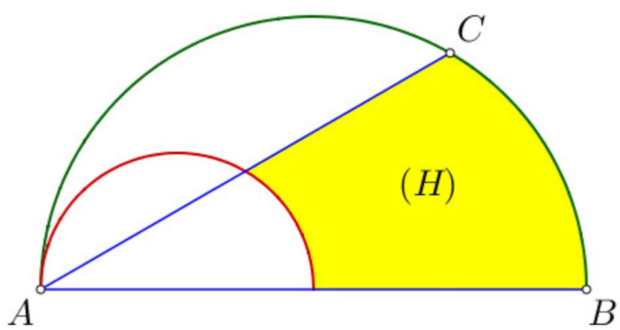
Câu 2. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=0$, $y=x\sqrt{\ln(x+1)}$ và $x=1$ xung quanh trục Ox.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $x\sqrt{\ln(x+1)}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ \ln(x+1)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow x=0$

Ta có: $V=\pi\int_0^1x^2\ln(x+1)\,dx=\frac{\pi}{18}(12\ln2-5)$

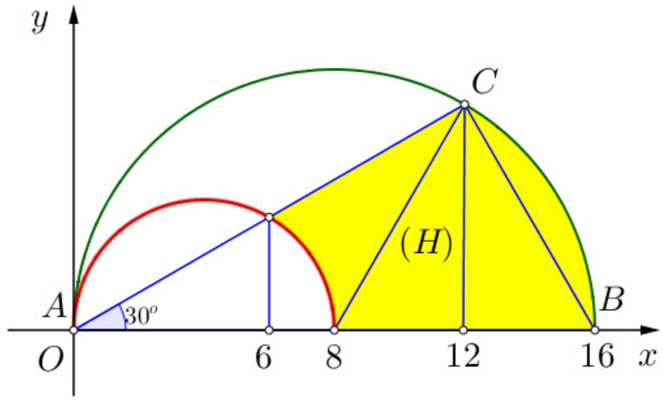
Câu 3. Người ta vẽ nửa đường tròn như hình vẽ bên, trong đó đường kính của đường tròn lớn gấp đôi đường kính của nửa đường tròn nhỏ.



Nửa hình tròn đường kính AB có diện tích là 32π và $\widehat{BAC}=30°$. Tính thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng (H) (phần tô đậm) xung quanh đường thẳng AB.

Lời giải

Dựng hệ trục toạ độ Oxy như hình vẽ.



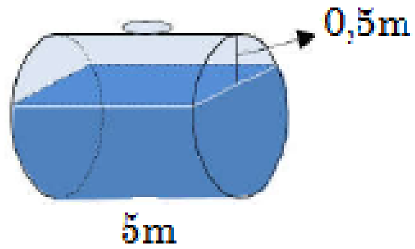
Ta có $\frac{1}{2}S = 32\pi \Leftrightarrow \pi R^2 = 64\pi \Leftrightarrow R = 8 \Rightarrow r = \frac{R}{2} = 4$

$$\Rightarrow \begin{cases} (C): y = \sqrt{64-(x-8)^2} \\ (C'): y = \sqrt{16-(x-4)^2} \end{cases}$$

$\widehat{BAC} = 30° \Rightarrow$ PT $AC:\ y = x.\tan 30° \Leftrightarrow y = \frac{x}{\sqrt{3}}$.

Vậy $V = \pi\left(\int_6^{12} \frac{x^2}{3}\mathrm{dx} + \int_{12}^{16}\left(64-(x-8)^2\right)\mathrm{dx} - \int_6^8\left(16-(x-4)^2\right)\mathrm{dx}\right) = \frac{784}{3}\pi$.

Câu 4. Một bồn hình trụ chứa dầu được đặt nằm ngang, có chiều dài 5m, bán kính đáy 1m, với nắp bồn đặt trên mặt nằm ngang của mặt trụ. Người ta rút dầu trong bồn tương ứng với 0,5m của đường kính đáy.

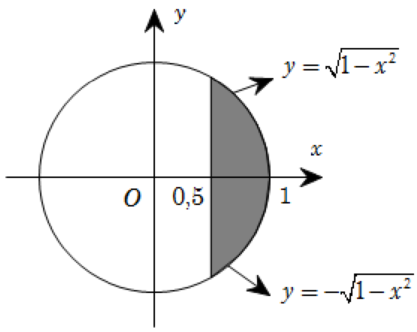


Tính thể tích của khối dầu còn lại trong bồn.

Lời giải

Thể tích của bồn (hình trụ) đựng dầu là: $V_1 = \pi r^2 h = \pi.1^2.5 = 5\pi\ m^3$.

Chọn hệ tục tọa độ như hình vẽ, gốc tọa độ gắn với tâm của mặt đáy.



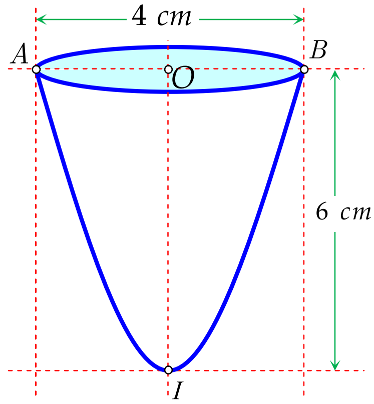
Đường tròn đáy có bán kính bằng 1 nên có phương trình $x^2 + y^2 = 1$. Suy ra $y = \pm\sqrt{1-x^2}$.

Diện tích phần hình tròn đáy bị mất: $S = 2\int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx \approx 0,61m^2$.

Thể tích phần dầu bị rút ra ngoài: $V_2 = S \times h = 2\int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx \times 5 \approx 3,07\ m^3$.

Vậy thể tích của khối dầu còn lại trong bồn: $V = V_1 - V_2 \approx 12,637\,m^3$

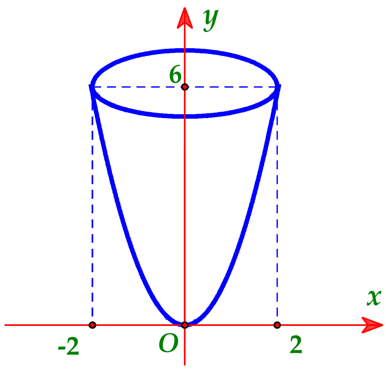
Câu 5. Có một vật thể là hình tròn xoay có dạng giống như một cái ly như hình vẽ dưới đây



Người ta đo được đường kính của miệng ly là $4cm$ và chiều cao là $6cm$. Biết rằng thiết diện của chiếc ly cắt bởi mặt phẳng đối xứng là một parabol. Tính thể tích của vật thể đã cho.

Lời giải

Chọn gốc tọa độ O trùng với đỉnh I của parabol (P).



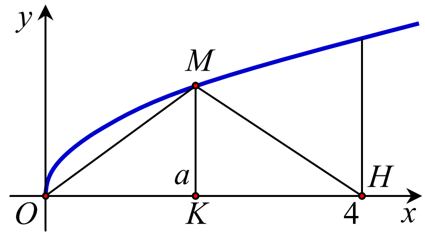
Vì parabol (P) đi qua các điểm $A(-2;6), B(2;6)$ và $I(0;0)$ nên parabol (P) có phương trình $y = \frac{3}{2}x^2$.

Ta có $y = \frac{3}{2}x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{3}y$.

Thể tích V bằng thể tích vật thể tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường: $x = \sqrt{\frac{2y}{3}}; x = 0; y = 0; y = 6$ quanh quanh trục Oy

Khi đó thể tích của vật thể đã cho là $V = \pi\int_0^6 \left(\frac{2}{3}y\right)dy = 12\pi\left(\text{cm}^3\right)$.

Câu 6. Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$, $y=0$ và $x=4$ quanh trục Ox. Đường thẳng $x=a\ (0<a<4)$ cắt đồ thị hàm $y=\sqrt{x}$ tại M (hình vẽ sau).



Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác OMH quanh trục Ox. Biết rằng $V=2V_1$. Tính a.

Lời giải

Ta có $\sqrt{x}=0 \Leftrightarrow x=0$. Khi đó $V=\pi\int\limits_0^4 x\mathrm{d}x=8\pi$

Ta có $M\left(a;\sqrt{a}\right)$

Khi quay tam giác OMH quanh trục Ox tạo thành hai hình nón có chung đáy:

- Hình nón (N_1) có đỉnh là O, chiều cao $h_1=OK=a$, bán kính đáy $R=MK=\sqrt{a}$;
- Hình nón (N_2) thứ 2 có đỉnh là H, chiều cao $h_2=HK=4-a$, bán kính đáy $R=MK=\sqrt{a}$

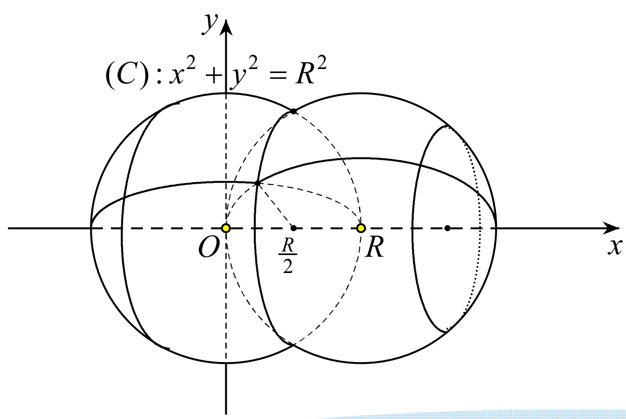
Khi đó $V_1=\frac{1}{3}\pi R^2h_1+\frac{1}{3}\pi R^2h_2=\frac{1}{3}\pi\left(\sqrt{a}\right)^2.a+\frac{1}{3}\pi\left(\sqrt{a}\right)^2.(4-a)=\frac{4}{3}\pi a$

Theo đề bài $V=2V_1 \Leftrightarrow 8\pi=2.\frac{4}{3}\pi a \Rightarrow a=3$.

Câu 7. Một vật thể được tạo thành bởi hai mặt cầu (S_1), (S_2) có cùng bán kính R thỏa mãn tính chất: tâm của (S_1) thuộc (S_2) và ngược lại. Tính thể tích phần chung của hai khối cầu tạo bởi (S_1) và (S_2).

Lời giải

Gắn hệ trục Oxy như hình vẽ



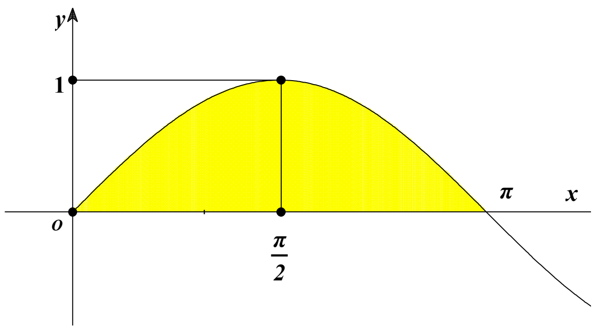
Khối cầu $S(O,R)$ chứa một đường tròn lớn là

$$(C): x^2+y^2=R^2$$

Dựa vào hình vẽ, thể tích cần tính là

$$V=2\pi\int_{\frac{R}{2}}^{R}\left(R^2-x^2\right)\mathrm{d}x=2\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{\frac{R}{2}}^{R}=\frac{5\pi R^3}{12}.$$

Câu 8. Một vật thể tròn xoay sinh ra bởi phép quay xung quanh trục Ox của hình giới hạn bởi trục Ox và đường $y=\sin x,\left(0\le x\le\pi\right)$ như hình vẽ

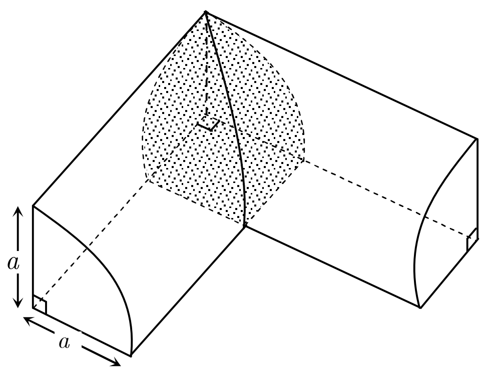


Tính thể tích vật thể.

Lời giải

Ta có: $V=\pi\int_0^{\pi}\sin^2 x dx=\pi\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{2}$.

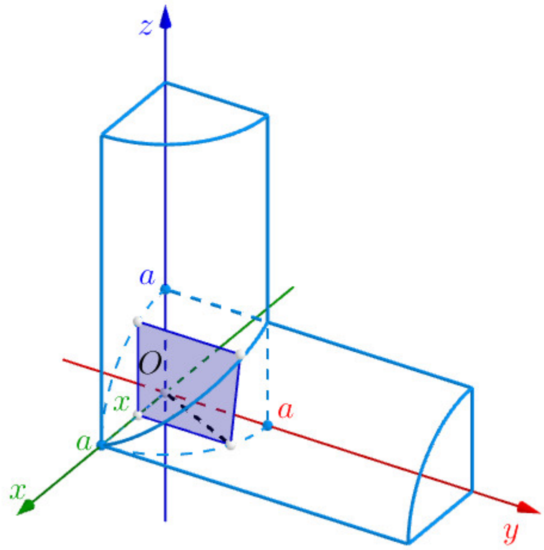
Câu 9. Gọi (H) là phần giao của hai khối $\frac{1}{4}$ hình trụ có bán kính a, hai trục hình trụ vuông góc với nhau như hình vẽ bên.



Tính thể tích của (H).

Lời giải

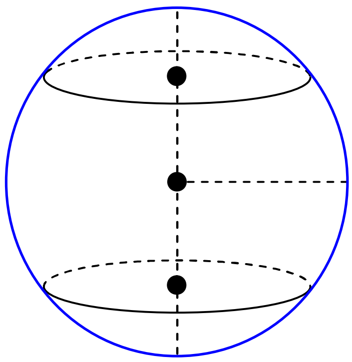
Gọi trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.



Khi đó phần giao (H) là một vật thể có đáy là một phần tư hình tròn tâm O bán kính a, thiết diện của mặt phẳng vuông góc với trục Ox là một hình vuông có diện tích $S(x)=a^2-x^2$

Thể tích khối (H) là $\int\limits_0^a S(x)dx=\int\limits_0^a (a^2-x^2)dx=\frac{2a^3}{3}$.

Câu 10. Một khối cầu có bán kính là $5(dm)$, người ta cắt bỏ hai phần của khối cầu bằng hai mặt phẳng song song cùng vuông góc đường kính và cách tâm một khoảng $3(dm)$ để làm một chiếc lu đựng nước (như hình vẽ). Tính thể tích mà chiếc lu chứa được.



Lời giải

Cách 1: Trên hệ trục tọa độ Oxy, xét đường tròn $(C):(x-5)^2+y^2=25$. Ta thấy nếu cho nửa trên trục Ox của (C) quay quanh trục Ox ta được mặt cầu bán kính bằng 5. Nếu cho hình phẳng (H) giới hạn bởi nửa trên trục Ox của (C), trục Ox, hai đường thẳng $x=0,\ x=2$ quay xung quanh trục Ox ta sẽ được khối tròn xoay chính là phần cắt đi của khối cầu trong đề bài. Ta có $(x-5)^2+y^2=25 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{25-(x-5)^2}$

$\Rightarrow$ Nửa trên trục Ox của (C) có phương trình $y=\sqrt{25-(x-5)^2}=\sqrt{10x-x^2}$

$\Rightarrow$ Thể tích vật thể tròn xoay khi cho (H) quay quanh Ox là:

$$V_1=\pi\int\limits_0^2 (10x-x^2)\mathrm{d}x=\pi\left(5x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=\frac{52\pi}{3}$$

Thể tích khối cầu là: $V_2=\frac{4}{3}\pi.5^3=\frac{500\pi}{3}$

Thể tích cần tìm: $V=V_2-2V_1=\frac{500\pi}{3}-2.\frac{52\pi}{3}=132\pi\left(dm^3\right)$

Cách 2: Hai phần cắt đi có thể tích bằng nhau, mỗi phần là một chỏm cầu có thể tích

$$V_1=\pi\int_d^R\left(R^2-x^2\right)dx=\pi\int_3^5\left(25-x^2\right)dx=\frac{52\pi}{3}$$

Vậy thể tích của chiếc lu là $V=V_c-2V_1=\frac{4}{3}\pi.5^3-2\frac{52}{3}\pi=132\pi$

Câu 11. Trong một đợt xả lũ, nhà máy thủy điện đã xả lũ trong 40 phút với tốc độ lưu lượng nước tại thời điểm t giây là $v(t)=10t+500\ \left(m^3/s\right)$. Hỏi sau thời gian xả lũ trên thì hồ thoát nước của nhà máy đã thoát đi một lượng nước là bao nhiêu?

Lời giải

Lượng nước thoát ra là:

$$\int_0^{2400}(10t+500)\,\mathrm{d}t=\left(5t^2+500t\right)\Big|_0^{2400}=3.10^7\ \left(m^3\right).$$

Câu 12. Một thùng rượu có bán kính các đáy là 30 cm, thiết diện vuông góc với trục và cách đều hai đáy là đường tròn có bán kính là 40 cm, chiều cao thùng rượu là 1m. Biết rằng mặt phẳng chứa trục và cắt mặt phẳng xung quanh thùng rượu là các đường parabol. Tính thể tích của thùng rượu.

Lời giải

Các đường xung quanh thùng rượu là các đường parabol. Đặt thùng rượu nằm ngang và chọn hệ trục có gốc tọa độ là tâm của đáy, trục hoành là trục đối xứng của thùng rượu. Gọi đường parabol có dạng $y=ax^2+bx+c$.

Theo bài ta có đường parabol này sẽ đi qua các điểm $(0;0;3),\left(\frac{1}{2};0;4\right),(1;0;3)$.

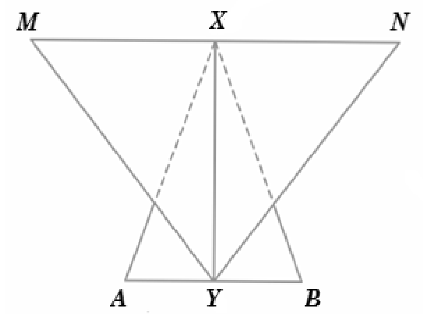
Suy ra $y=\frac{-2}{5}x^2+\frac{2}{5}x+\frac{3}{10}$.

Thể tích thùng rượu chính là thể tích hình phẳng giới hạn bởi các đường

$y=-\frac{2}{5}x^2+\frac{2}{5}x+\frac{3}{10};\ y=0;\ x=1$.

$$V=\pi\int_0^1\left(-\frac{2}{5}x^2+\frac{2}{5}x+\frac{3}{10}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{203\pi}{1500}\left(\mathrm{m}^3\right)\approx 425,2\ l.$$

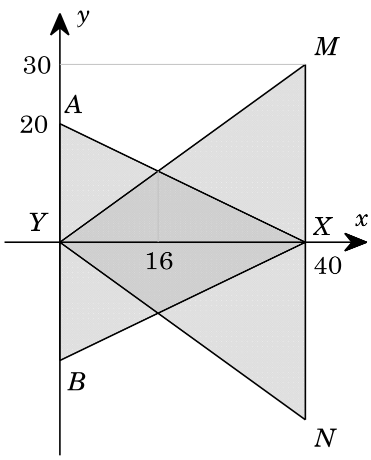
Câu 13. Cho hai tam giác cân có chung đường cao $XY=40\,cm$ và cạnh đáy lần lượt là $40\,cm$ và $60\,cm$, được xếp chồng lên nhau sao cho đỉnh của tam giác này là trung điểm cạnh đáy của tam giác kia như hình vẽ .



Tính thể tích V của vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay mô hình trên quanh trục XY.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ:



$$Y \equiv O(0;0),\ X(40;0),\ A(0;20),\ M(40;30).$$

Phương trình đường $YM: 3x-4y=0 \Rightarrow y=\dfrac{3x}{4}$.

Phương trình $AX: x+2y-40=0 \Rightarrow y=\dfrac{40-x}{2}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường YM và AX là: $\dfrac{3x}{4}=\dfrac{40-x}{2} \Leftrightarrow x=16$.

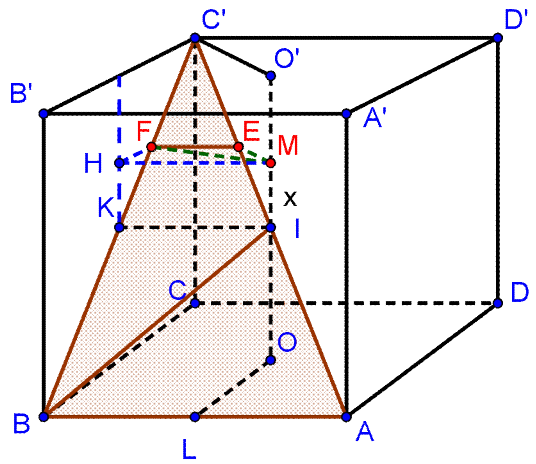
Thể tích vật thể cần tính:

$$V=\pi\int_0^{16}\left(\frac{40-x}{2}\right)^2 dx+\pi\int_{16}^{40}\left(\frac{3x}{4}\right)^2 dx=\frac{46240\pi}{3}\ cm^3.$$

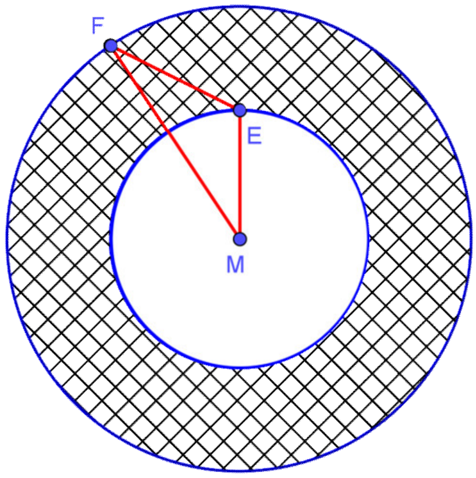
Câu 14. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng 1. Gọi O,O' lần lượt là tâm của hình vuông $ABCD$ và hình vuông $A'B'C'D'$. Tính thể tích khối tròn xoay sinh bởi tam giác ABC' khi quay quanh trục OO'?

Lời giải

Ta chia ΔOAB thành 2 phần gồm ΔIAB và $\Delta IBC'$.



Thể tích vật thể khi quay ΔIAB xung quanh trục OO' là phần chung của 2 hình nón có cùng chiều cao IO và bán kính đáy là OL, OA. Vậy $V_1 = \frac{1}{3}\pi.IO\left(OA^2 - OL^2\right) = \frac{\pi}{24}$.



Để tính thể tích vật thể tròn xoay khi quay $\Delta KIC'$ xung quanh trục OO' ta chọn chiều dương IO', xét mặt phẳng (P) qua M có toạ độ x và vuông góc với OO', $(P)\cap IC' = E; (P)\cap KC' = F$.

Khi đó thiết diện khi cắt vật thể bởi mặt phẳng (P) là 1 vành tròn như hình vẽ bên. Do đó

$V_2 = 2\int_0^{\frac{1}{2}} S(x)\,\mathrm{d}x$. Ta có:

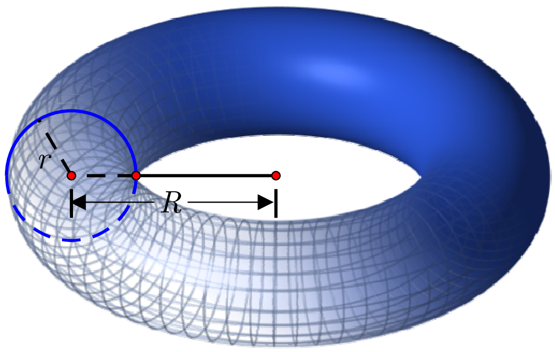
$$\frac{IM}{IO'} = \frac{ME}{O'C'} \Leftrightarrow \frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{EM}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \Leftrightarrow EM = x\sqrt{2}.$$

Tương tự $HF = x \Rightarrow MF = \sqrt{MH^2 + HF^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + x^2}$.

$$\Rightarrow S(x) = \pi\left(MF^2 - ME^2\right) = \pi\left(\frac{1}{4} - x^2\right) \Rightarrow V_2 = 2\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4} - x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{6}.$$

Vậy $V = V_1 + V_2 = \frac{5\pi}{24}$.

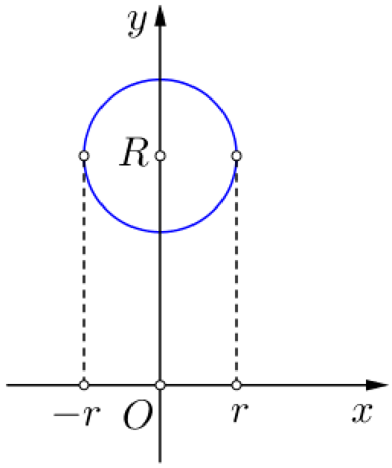
Câu 15. Một hình xuyến dạng cái phao có kích thước như hình vẽ.



Tính thể tích của hình đó theo R và r.

Lời giải

Xét hệ trục toạ độ Oxy như hình vẽ.



Khi đó hình xuyến dạng cái phao được tạo ra khi ta quay đường tròn tâm $(0;R)$ và bán kính r xung quanh trục Ox.

$\Rightarrow$Phương trình đường tròn $x^2+(y-R)^2=r^2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=R+\sqrt{r^2-x^2} \\ y=R-\sqrt{r^2-x^2}\end{array}\right.$.

$\Rightarrow V=\pi\int\limits_{-r}^{r}\left|\left(R+\sqrt{r^2-x^2}\right)^2-\left(R-\sqrt{r^2-x^2}\right)^2\right|\mathrm{dx}=4\pi R\int\limits_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{dx}$.

Đặt $x=r\sin t \Leftrightarrow \mathrm{dx}=r\cos t\mathrm{dt}\xrightarrow[-r\to-\frac{\pi}{2}]{r\to\frac{\pi}{2}}V=4\pi R\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(r\cos t)^2\,\mathrm{dt}$

$=2\pi r^2R\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\mathrm{dt}=2\pi r^2R\left(t+\dfrac{\sin 2\mathrm{t}}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2\pi^2r^2R$.

Câu 16. Cho phần vật thể (H) giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x=0$ và $x=2$. Cắt phần vật thể (H) bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0\le x\le 2)$, ta được thiết diện là một tam giác đều có độ dài cạnh bằng $x\sqrt{2-x}$.

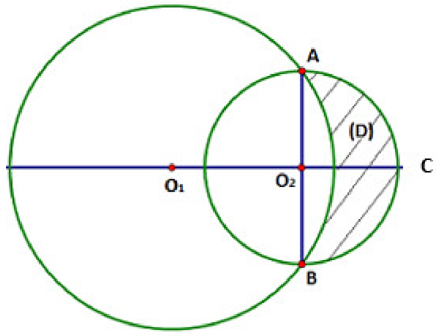
Tính thể tích V của phần vật thể (H).

Lời giải

Diện tích thiết diện: $S_{\Delta} = \dfrac{x^2(2-x)\sqrt{3}}{4}$.

$$V_{\mathfrak{I}} = \int_0^2 \frac{x^2(2-x)\sqrt{3}}{4}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^2 x^2(2-x)\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^2 x^2(2-x)\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)\Bigg|_0^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 17. Cho hai đường tròn $(O_1;5)$ và $(O_2;3)$ cắt nhau tại hai điểm A, B sao cho AB là một đường kính của đường tròn $(O_2;3)$. Gọi (D) là hình phẳng được giới hạn bởi hai đường tròn (ở ngoài đường tròn lớn, phần được gạch chéo như hình vẽ).



Quay (D) quanh trục O_1O_2 ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành.

Lời giải

Chọn hệ tọa độ Oxy với $O_2 \equiv O$, $O_2C \equiv Ox$, $O_2A \equiv Oy$.

Cạnh $O_1O_2 = \sqrt{O_1A^2 - O_2A^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \Rightarrow (O_1):(x+4)^2 + y^2 = 25$.

Phương trình đường tròn (O_2): $x^2 + y^2 = 9$.

Kí hiệu (H_1) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{25-(x+4)^2}$, trục Ox, $x=0$, $x=1$.

Kí hiệu (H_2) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{9-x^2}$, trục Ox, $x=0$, $x=3$.

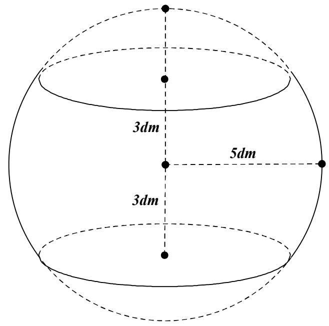
Khi đó thể tích V cần tính chính bằng thể tích V_2 của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H_2) xung quanh trục Ox trừ đi thể tích V_1 của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H_1) xung quanh trục Ox.

Ta có $V_2 = \dfrac{1}{2}.\dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{2}{3}\pi.3^3 = 18\pi$.

Lại có $V_1 = \pi\displaystyle\int_0^1 y^2\mathrm{d}x = \pi\int_0^1\left[25-(x+4)^2\right]\mathrm{d}x = \pi\left[25x - \frac{(x+4)^3}{3}\right]\Bigg|_0^1 = \frac{14\pi}{3}$.

Do đó $V = V_2 - V_1 = 18\pi - \dfrac{14\pi}{3} = \dfrac{40\pi}{3}$.

Câu 18. Một khối cầu có bán kính $5\mathrm{dm}$, người ta cắt bỏ 2 phần bằng 2 mặt phẳng vuông góc bán kính và cách tâm $3\mathrm{dm}$ để làm một chiếc lu đựng. Tính thể tích mà chiếc lu chứa được.



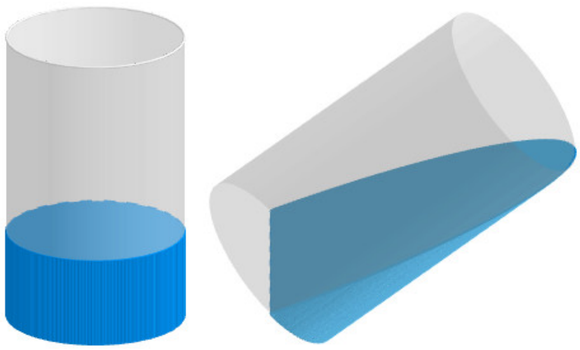
Lời giải

Đặt hệ trục với tâm O, là tâm của mặt cầu, đường thẳng đứng là Ox, đường thẳng ngang là Oy, đường tròn lớn có phương trình $x^2 + y^2 = 25$.

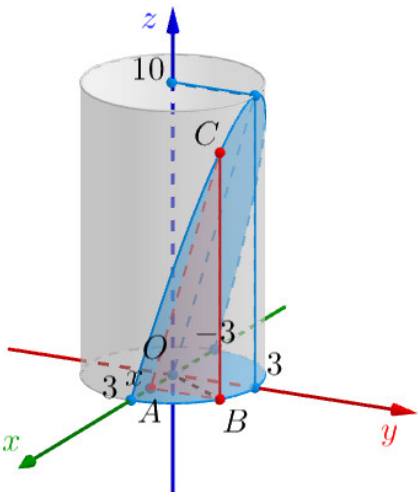
Thể tích là do hình giới hạn bởi Ox, đường cong $y = \sqrt{25 - x^2}$, $x = 3, x = -3$ quay quanh Ox.

Ta có $V = \pi \int_{-3}^{3} \left(25 - x^2\right) \mathrm{d}x = 132\pi$.

Câu 19. Bạn A có một cốc thuỷ tinh hình trụ, đường kính trong long cốc là $6cm$, chiều cao trong long cốc là $10cm$ đang đựng một lượng nước. Bạn A nghiêng cốc nước, vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì ở đáy mực nước trùng với dường kính đáy.



Tính thể tích lượng nước trong cốc.
Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ như hình vẽ.



Cắt khối trụ bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x, $(0 < x \le 3)$ ta được thiết diện là tam giác ABC vuông tại B. Khi đó thể tích lượng nước có trong cốc là

$V = 2\int_0^3 S(x)\,\mathrm{d}x$, (với $S(x) = S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.BC = \frac{5(9-x^2)}{3}$).

$\Rightarrow V = 2\int_0^3 S(x)\,\mathrm{d}x = \frac{10}{3}\int_0^3 (9-x^2)\,\mathrm{d}x = 60\text{ cm}^3$.

Câu 20. Trong hệ trục Oxy, cho tam giác OAB vuông ở A, điểm B nằm trong góc phần tư thứ nhất. A nằm trên trục hoành, $OB = 2017$. Góc $\widehat{AOB} = \alpha$, $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{3}\right)$. Khi quay tam giác đó quanh trục Ox ta được khối nón tròn xoay. Thể tích của khối nón lớn nhất. Tính góc α.

Lời giải

Phương trình đường thẳng $OB: y = x.\tan\alpha$, $OA = 2017\cos\alpha$.

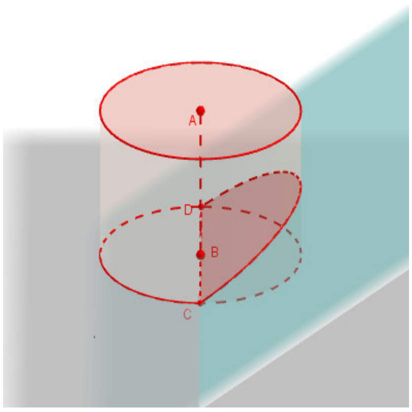
Khi đó thể tích nón tròn xoay là :

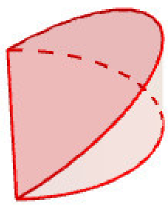
$$V = \pi\int_0^{2017\cos\alpha} x^2\tan^2\alpha.\mathrm{d}x = \frac{2017^3\pi}{3}\cos\alpha.\sin^2\alpha = \frac{2017^3\pi}{3}\cos\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right).$$

Đặt $t = \cos\alpha \Rightarrow t\left(0;\frac{1}{2}\right)$. Xét hàm số $f(t) = t(1-t^2)$, $t\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

Ta tìm được $f(t)$ lớn nhất khi $t = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

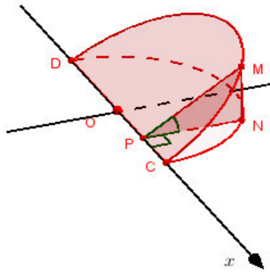
Câu 21. Từ một khúc gỗ hình trụ có đường kính $30\,\text{cm}$, người ta cắt khúc gỗ bởi một mặt phẳng đi qua đường kính đáy và nghiêng với đáy một góc $45°$ để lấy một hình nêm (xem hình minh họa dưới đây). Ký hiệu V là thể tích của hình nêm. Tính V.





Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Khi đó hình nêm có đáy là nửa hình tròn có phương trình: $y=\sqrt{225-x^2}$, $x\in[-15;15]$.

Một mặt phẳng cắt vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x, $\left(x\in[-15;15]\right)$ cắt hình nêm theo thiết diện có diện tích là $S(x)$ (xem hình).

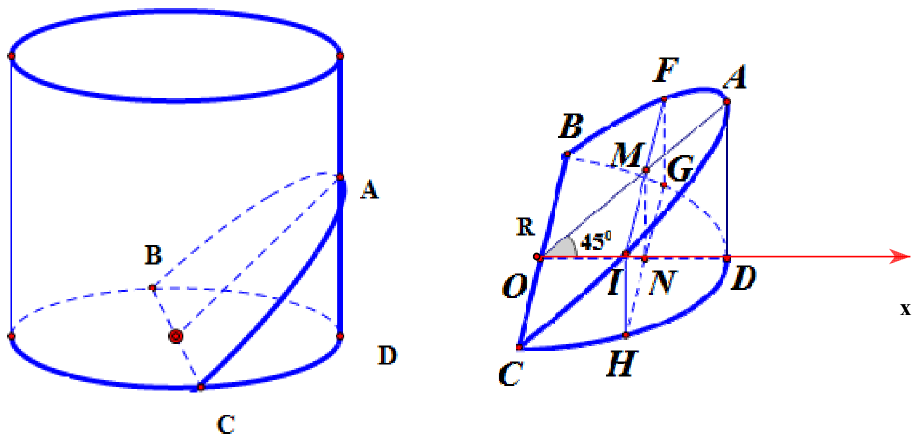
Dễ thấy $NP=y$ và $MN=NP\tan 45°=y=\sqrt{15-x^2}$ khi đó

$S(x)=\dfrac{1}{2}MN.NP=\dfrac{1}{2}.\left(225-x^2\right)$.

Suy ra thể tích hình nêm là $V=\int\limits_{-15}^{15}S(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int\limits_{-15}^{15}\left(225-x^2\right)\mathrm{d}x=2250\left(\mathrm{cm}^3\right)$.

Câu 22. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng R. Tính thể tích vật thể tạo thành bởi đáy của hình trụ và mặt phẳng qua đường kính đáy, biết mặt phẳng tạo với đáy một góc 45^0.

Lời giải



Gọi BC là đường kính đáy

Điểm A là điểm thuộc mặt phẳng cắt khối trụ sao cho $OA\perp BC$.

D là hình chiếu vuông góc của A trên (BCD)

Ta có: $\widehat{\left((ABC);(BCD)\right)}=45°\Rightarrow\widehat{AOD}=45°$

Gắn trục tọa độ Ox như hình vẽ.

Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với trục Ox

Cắt khối vật thể theo một thiết diện là hình chữ nhật $FGHI$.

$M=OA\cap IF$; $N=OD\cap HG$

Đặt $ON = x$

Ta có: $IH = FG = MN = x.\tan 45° = x$

$HG = 2NH = 2\sqrt{OH^2 - ON^2} = 2\sqrt{R^2 - x^2}$

Diện tích hình chữ nhật $FGHI$ bằng: $MN.HG = 2x\sqrt{R^2 - x^2}$

Diện tích $FGHI$ là một hàm liên tục trên đoạn $[0; R]$

Thể tích khối vật thể tạo thành:

$$V = \int_0^R 2x\sqrt{R^2 - x^2}dx = -\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}d\left(R^2 - x^2\right)$$

$$= -\frac{2}{3}\left(R^2 - x^2\right)\sqrt{R^2 - x^2}\Bigg|_0^R = \frac{2}{3}R^3$$

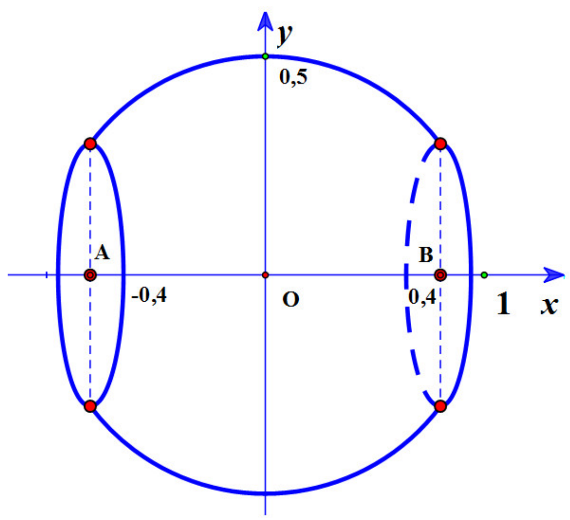
Công thức tổng quát khi mặt phẳng cắt khối trụ tạo với đáy góc α thì thể tích tạo thành:

$$\boxed{V = \frac{2}{3}R^3 \tan \alpha}$$

Câu 23. Coi cái trống trường là vật thể giới hạn bởi một mặt cầu bán kính $R = 0,5\text{m}$ và hai mặt phẳng song song cách đều tâm I. Biết chiều cao của trống là $h = 0,8\text{m}$ Tính thể tích V của cái trống.

Lời giải

Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



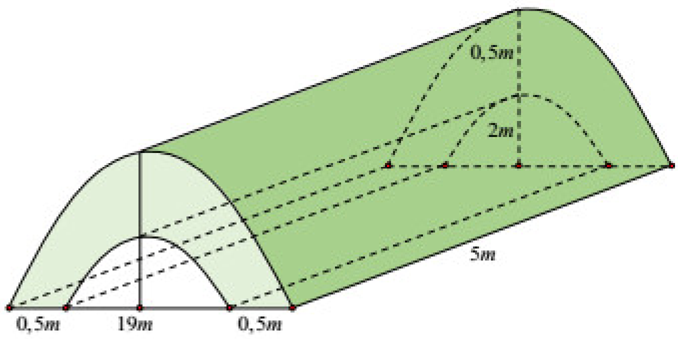
Để tạo ra hình trống, ta cho cung tròn nằm trên đường tròn $x^2 + y^2 = 0,5^2$ quanh quanh trục Ox

$\Rightarrow y = \pm\sqrt{0,5^2 - x^2}$

Vì chiều cao trống $h = 0,8 \Rightarrow OA = OB = \frac{AB}{2} = 0,4$

Thể tích của trống: $V = \pi\int_{-0,4}^{0,4}\left(0,5^2 - x^2\right)dx = \frac{59}{375}\pi$

Câu 24. Trong chương trình nông thôn mới, tại một xã X có xây một cây cầu bằng bê tông như hình vẽ. Tính thể tích khối bê tông để đổ đủ cây cầu. (Đường cong trong hình vẽ là các đường Parabol).



Lời giải

Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.

Gọi (P_1) là Parabol nằm ở phía dưới.

(P_2) là Parabol nằm ở phía trên.

Gọi $(P_1): y = ax^2 + c$ là Parabol đi qua hai điểm $A\left(\frac{19}{2};0\right), B(0;2)$

Nên ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 0 = a.\left(\frac{19}{2}\right)^2 + 2 \\ 2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{8}{361} \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow (P_1): y = -\frac{8}{361}x^2 + 2$$

Gọi $(P_2): y = ax^2 + c$ là Parabol đi qua hai điểm $C(10;0), D\left(0;\frac{5}{2}\right)$

Nên ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 0 = a.(10)^2 + \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{40} \\ b = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow (P_2): y = -\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}$$

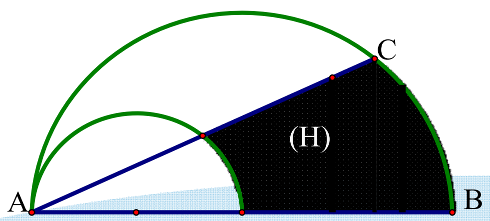
Ta có thể tích của bê tông là:

$$V = 5.2\left[\int_0^{10}\left(-\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}\right)dx - \int_0^{\frac{19}{2}}\left(-\frac{8}{361}x^2 + 2\right)dx\right] = 40m^3$$

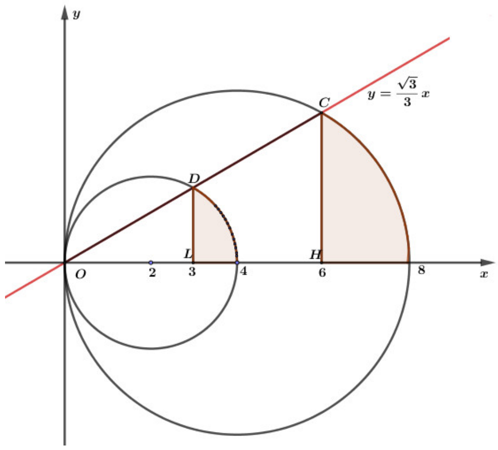
Câu 25. Ta vẽ hai nửa đường tròn như hình vẽ bên, trong đó đường kính của nửa đường tròn lớn gấp đôi đường kính của nửa đường tròn nhỏ. Biết rằng nửa hình tròn đường kính AB có diện tích là 8π và $\widehat{BAC} = 30°$. Tính thể tích của vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình (H) (phần tô đậm) xung quanh đường thẳng AB.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Do nửa đường tròn lớn bằng 8π nên bán kính của nó bằng 4, suy ra bán kính đường tròn nhỏ bằng 2.



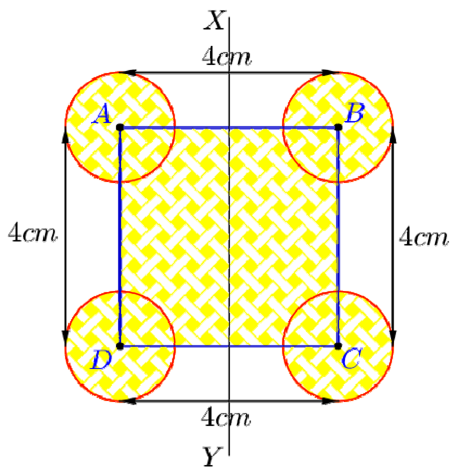
Phương trình đường tròn lớn $(x-4)^2+y^2=16$ nên nửa trên đường tròn có phương trình $y=\sqrt{16-(x-4)^2}$.

Phương trình đường tròn nhỏ $(x-2)^2+y^2=4$ nên nửa trên đường tròn có phương trình $y=\sqrt{4-(x-2)^2}$.

Đường thẳng tạo với trục hoành góc $30°$ nên phương trình đường thẳng là $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$.

Thể tích cần tính bằng $\pi\int_3^6\frac{1}{3}x^2dx-\pi\int_3^4\left(4-(x-2)^2\right)dx+\pi\int_6^8\left(16-(x-4)^2\right)dx=\frac{98}{3}\pi$.

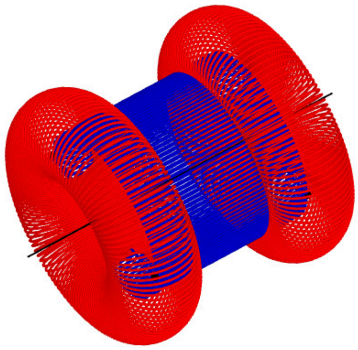
Câu 26. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $4cm$. Tại bốn đỉnh A, B, C, D người ta vẽ lần lượt bốn đường tròn có bán kính bằng nhau và bằng $1cm$.



Tính thể tích phần được tô màu khi quay hình phẳng xung quanh trục XY.

Lời giải

Ta có vật thể được tạo thành khi quay hình phẳng xung quanh trục XY có hình dạng như hình sau

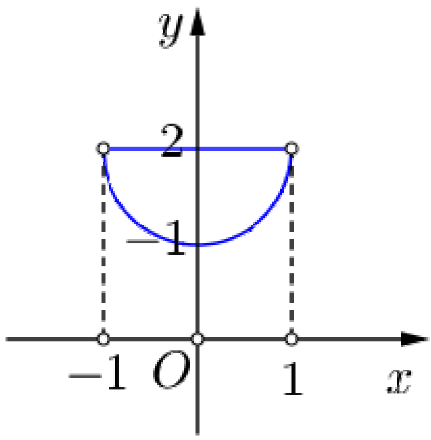


Khi đó thể tích vật thể được tạo thành sẽ bằng tổng thể tích của hình trụ có bán kính $R=2$, chiều cao $h=4$ và 2 hình xuyến dạng cái phao có $R=2,\ r=1$ trừ đi 2 lần thể tích của $\frac{1}{2}$ nửa bên trong hình xuyến dạng cái phao có $R=2,\ r=1$.

Vậy $V_{(H)}=\pi.2^2.4+2.2\pi^2.1^2.2-V'=8\pi^2+16\pi-V'$.

Với V' là thể tích một nửa bên trong của hình xuyến dạng cái phao có $R=2,\ r=1$

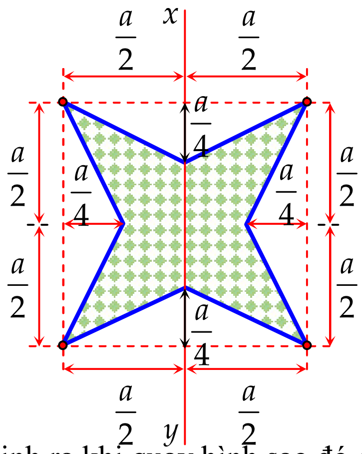
$\Rightarrow V'$ là thể tích của nửa hình tròn tâm $I(0;2)$, bán kính $r=1$ quay xung quanh trục Ox như hình vẽ.



$\Rightarrow V'=\pi\int_{-1}^{1}\left|2^2-\left(2-\sqrt{1-x^2}\right)^2\right|dx=\pi\int_{-1}^{1}\left(x^2-1+4\sqrt{1-x^2}\right)dx=2\pi^2-\frac{4}{3}\pi$ Vậy

$V_{(H)}=8\pi^2+16\pi-\left(2\pi^2-\frac{4}{3}\pi\right)=6\pi^2+\frac{52\pi}{3}$.

Câu 27. Bên trong hình vuông cạnh a, dựng hình sao bốn cánh đều như hình vẽ (các kích thước cần thiết cho ở trong hình).

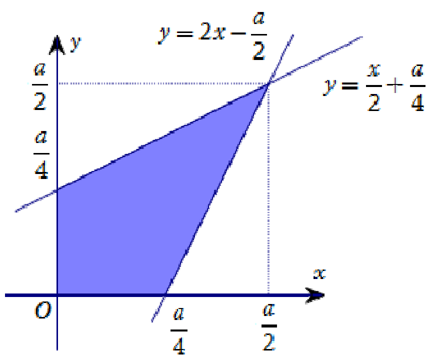


Tính thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình sao đó quanh trục xy.

Lời giải

Do hình sao có tính đối xứng nên ta quay theo trục thẳng đứng hay nằm ngang đều cho thể tích như nhau.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



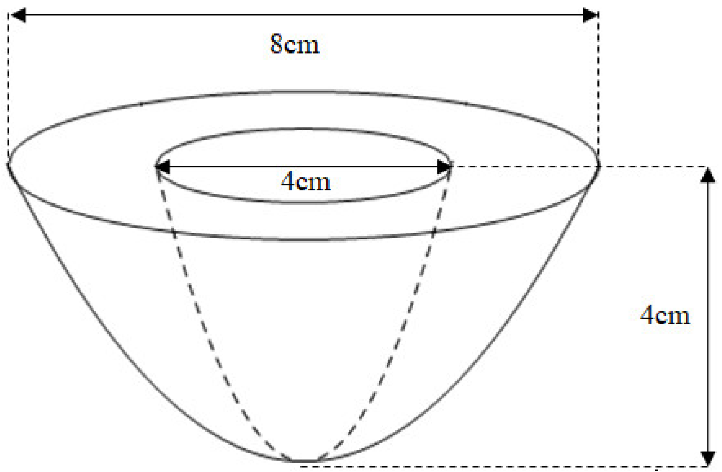
\+ Gọi V là thể tích khối tròn xoay cần tính.

\+ Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng được tô màu trong hình bên quanh trục hoành.

Khi đó $V = 2V_1$. Ta có $V_1 = \pi\int_0^{\frac{a}{2}}\left(\frac{x}{2}+\frac{a}{4}\right)^2 dx - \pi\int_{\frac{a}{4}}^{\frac{a}{2}}\left(2x-\frac{a}{2}\right)^2 dx = \frac{5\pi a^3}{96}$.

Thể tích cần tính $V = 2V_1 = \frac{5\pi a^3}{48}$

Câu 28. Người ta thiết kế đầu đạn của một quả bom là một khối tròn xoay đặc, được khoét vào trong. Biết rằng thiết diện qua trục đối xứng của đầu đạn là hai Parabol với các kích thước như hình vẽ dưới đây.



Tính thể tích của đầu đạn đó.

Lời giải

Ta có $V=\dfrac{1}{2}\pi.4.\left(4^2-2^2\right)=24\pi$.

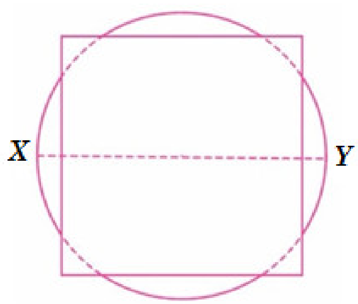
Câu 29. Cho phần vật thể B giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x=0$ và $x=2$. Cắt phần vật thể B bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0\le x\le 2)$, ta được thiết diện là một tam giác đều có độ dài cạnh bằng $x\sqrt{2-x}$. Tính thể tích của phần vật thể B .

Lời giải

Tam giác đều cạnh $x\sqrt{2-x}$ có diện tích là: $S\left(x\right)=\dfrac{x^2\left(2-x\right)\sqrt{3}}{4}$.

Suy ra thể tích $V=\int\limits_0^2 S\left(x\right)dx=\int\limits_0^2 \dfrac{x^2\left(2-x\right)\sqrt{3}}{4}dx=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\int\limits_0^2 x^2\left(2-x\right)dx=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

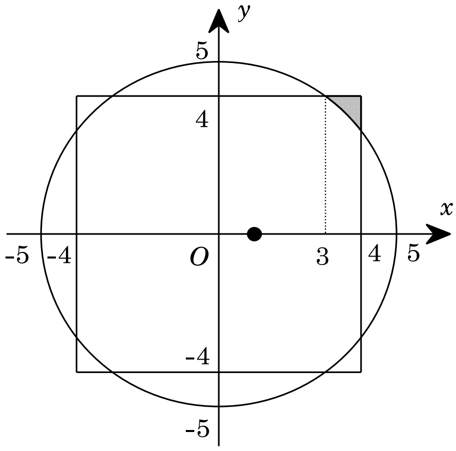
Câu 30. Cho hình vuông có độ dài cạnh bằng $8cm$ và một hình tròn có bán kính $5cm$ được xếp chồng lên nhau sao cho tâm của hình tròn trùng với tâm của hình vuông như hình vẽ.



Tính thể tích V của vật thể tròn xoay tạo thành khi quay mô hình trên quanh trục XY.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



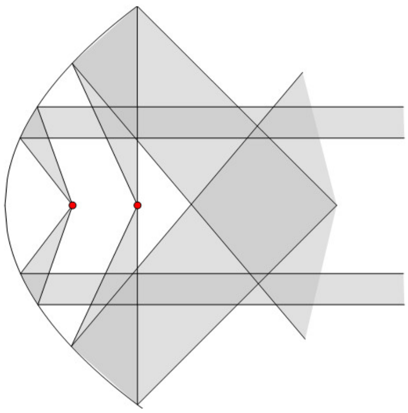
+ Thể tích khối cầu: $V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi 5^3 = \frac{500\pi}{3}$.

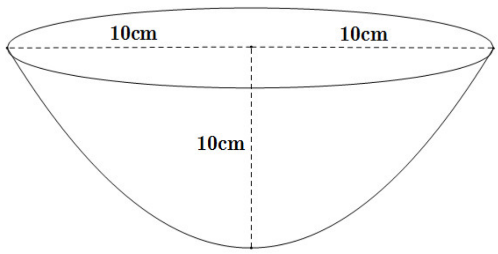
+ Gọi V_2 là thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) (phần tô màu) được giới hạn bởi đường thẳng $y = 4$, đường tròn $y^2 = 25 - x^2$ và $x = 4$ quanh trục hoành

$$\Rightarrow V_2 = \pi\int_3^4 \left|4^2 - \left(25 - x^2\right)\right| dx = \frac{10\pi}{3}.$$

Vậy thể tích cần tính $V = V_1 + 2V_2 = \frac{520\pi}{3}\ cm^3$.

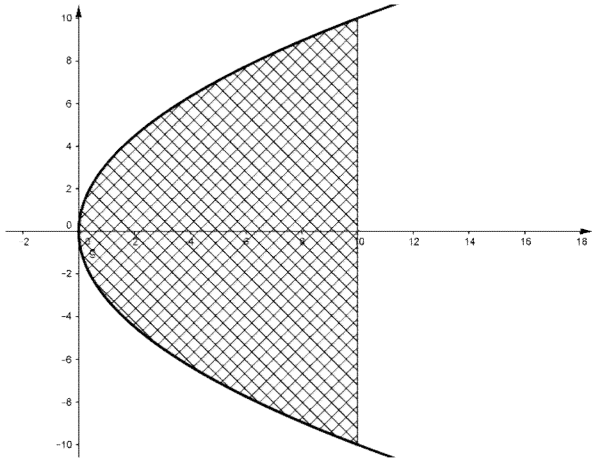
Câu 31. Khi bật công tắc đèn pha từ chế độ chiếu xa sang chiếu gần, bạn hãy hiểu rằng toán học, cụ thể hơn là các tính chất của parabol, đang phát huy tác dụng. Chùm sáng chiếu xa được tạo thành khi nguồn sáng đặt tại vị trí tiêu điểm của gương phản xạ và khi đó tia sáng đi song song với trục đối xứng của parabol. Khi thay đổi vị trí của nguồn sáng, các tia phản xạ không còn song song với trục đối xứng, ta được chế độ chiếu gần.





Gương phản xạ ở phía sau đèn pha có dạng paraboloit (hình thu được khi cho parabol quay tròn quanh trục đối xứng của nó) và có các kích thước như hình vẽ trên. Hãy tính thể tích của chiếc đèn.

Lời giải



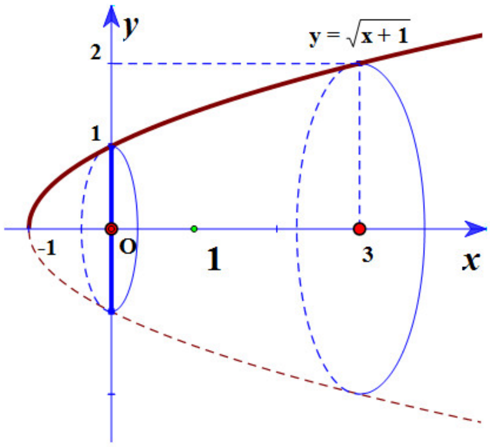
Đặt parabol nằm ngang có dạng $x = ky^2$.

Parabol đi qua điểm $(10;10)$ do đó $k = \dfrac{1}{10}$. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường:

$y = \sqrt{10x}, y = 0, x = 0, x = 10$ xoay quanh trục hoành.

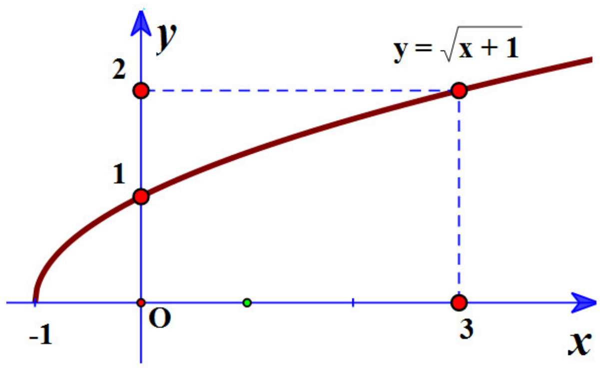
Khi đó thể tích của đèn pha là: $V = \pi\int_0^{10} 10x dx = 500\pi\ \left(cm^3\right)$

Câu 32. Một Bác thợ gốm làm một cái lọ có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x+1}$ (đồ thị như hình vẽ bên dưới) và trục Ox quay quanh trục Ox. Biết đáy lọ và miệng lọ có đường kính lần lượt là $2\ dm$ và $4\ dm$.



Tính thể tích V của lọ.

Lời giải

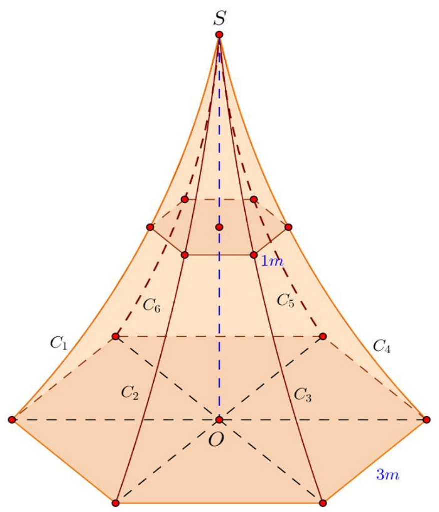


Bán kính hai đáy lần lượt là $1\,dm$ và $2\,dm$

$\Rightarrow \sqrt{x+1}=1 \Leftrightarrow x=0; \sqrt{x+1}=2 \Rightarrow x=3$

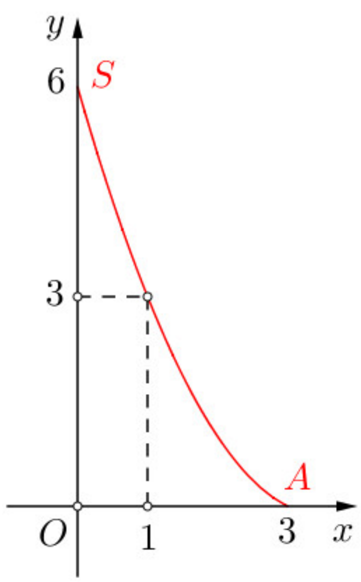
Thể tích của lọ: $V=\pi\int_0^3 (x+1)\,dx=\pi\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_0^3=\frac{15\pi}{2}$.

Câu 33. Người ta dựng một cái lều vải (H) có dạng hình "chóp lục giác cong đều" như hình vẽ bên. Đáy của (H) là một hình lục giác đều cạnh $3m$. Chiều cao $SO=6m$ (SO vuông góc với mặt phẳng đáy). Các cạnh bên của (H) là các sợi dây $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ nằm trên các đường parabol có trục đối xứng song song với SO. Giả sử giao tuyến (nếu có) của (H) với mặt phẳng (P) qua trung điểm của SO thì lục giác đều có cạnh $1m$. Tính thể tích phần không gian nằm bên trong cái lều (H) đó.



Lời giải

Chọn hệ trục toạ độ Oxy như hình vẽ.



Gọi phương trình parabol của (C_1) là:

$$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow \begin{cases} 0 = 9a + 3b + c \\ 3 = a + b + c \\ 6 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = -\dfrac{7}{2} \\ c = 6 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 6.$$

Khi cắt (H) bởi mặt phẳng vuông góc với trục Oy tại điểm có tung độ y, $(0 < y \le 6)$ ta được thiết diện là một hình lục giác đều có độ dài cạnh x xác định bởi $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 6$.

Do $0 < x \le 3 \Rightarrow x = \dfrac{7 - \sqrt{1+8y}}{2} \Rightarrow S(y) = 6.\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{7 - \sqrt{1+8y}}{2}\right)^2$.

Vậy thể tích túp lều là: $V = \int_0^6 S(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^6 \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{7 - \sqrt{1+8y}}{2}\right)^2 \mathrm{d}y = \dfrac{135\sqrt{3}}{8}\left(m^3\right)$.

Chuyên đề 6 ỨNG DỤNG NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN TRONG CÁC BÀI TOÁN THỰC TIỄN KHÁC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng K. Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nếu $F'(x)=f(x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Kí hiệu $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$

2. Nhận xét: Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì $F(x)+C$, $(C\in\mathbb{R})$ cũng là nguyên hàm của $f(x)$.

Lưu ý:

Ngoài công thức nguyên hàm, tích phân đã biết, ta cần bổ sung thêm một số lý thuyết

☺ Với $s(t)$, $v(t)$, $a(t)$ là các hàm số quãng đường, vận tốc, thời gian theo biến t.

Theo khái niệm vật lý, ta có : $v(t)=s'(t)$, $a(t)=v'(t)$. Ta có một số công thức:

1. $s(t)=\int v(t)\mathrm{d}t$ 2. $v(t)=\int a(t)\mathrm{d}t$

3. Quãng đường đi được từ thời gian t_1 đến thời gian t_2, $(t_1<t_2)$ là : $s=\int_{t_1}^{t_2} v(t)\mathrm{d}t$

☺ **Từ thông qua khung dây của máy phát điện:**

$\phi=NBS\cos\left(\vec{n},\vec{B}\right)=NBS\cos(\omega t+\varphi)$

ϕ : từ thông qua khung dây (Wb)

N : số vòng dây

B : cảm ứng từ (T)

S : diện tích thiết diện khung dây (m^2)

ω : vận tốc góc không đổi của khung $(\mathrm{rad/s})$, $\omega=2\pi f=\dfrac{2\pi}{T}$

f : tần số (Hz) hoặc (số vòng/s)

T : chu kỳ (s)

☺ **Suất điện động trong khung dây của máy phát điện:**

$e=-\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}=\omega NBS\sin(\omega t+\varphi)=\omega NBS\cos\left(\omega t+\varphi-\dfrac{\pi}{2}\right)$

e : suất điện động trong khung dây (V).

B. BÀI TẬP

Loại 1 : Tính quãng đường đi.

Câu 1. Một vật chuyển động với vận tốc $v(t)=1,2+\dfrac{t^2+4}{t+3}(\text{m/s})$. Quãng đường vật đó đi được trong 4 giây đầu tiên bằng bao nhiêu? (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

A. $18,82\,(\text{m})$. **B.** $11,81\,(\text{m})$. **C.** $4,06\,(\text{m})$. **D.** $7,28\ (\text{m})$.

Lời giải

Gọi $s(t)$ là quãng đường đi được của máy bay

Ta đã biết: $v(t)=s'(t)$. Do đó $s(t)$ là nguyên hàm của $v(t)$

Quãng đường đi được trong 4 giây đầu tiên là:

$$s=\int_0^4\left(1,2+\frac{t^2+4}{t+3}\right)\mathrm{d}t=\int_0^4\left(1,2+t-3+\frac{13}{t+3}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\left(1,2t+\frac{t^2}{2}-3t+13\ln|t+3|\right)\Bigg|_0^4=0,8+13\ln 4-3\ln 3\approx 11,81(\text{m}).$$

Chọn B.

Câu 2. Bạn Nam ngồi trên máy bay đi du lịch thế giới và vận tốc chuyển động của máy bay là $v(t)=3t^2+5(\text{m/s})$. Quãng đường máy bay đi được từ giây thứ 4 đến giây thứ 10 là :

A. $36\,(\text{m})$. **B.** $252\,(\text{m})$. **C.** $1134\,(\text{m})$. **D.** $996\,(\text{m})$.

Lời giải

Gọi $s(t)$ là quãng đường đi được của máy bay

Ta đã biết: $v(t)=s'(t)$. Do đó $s(t)$ là nguyên hàm của $v(t)$.

Quãng đường đi được từ giây thứ 4 đến giây thứ 10 là:

$$s(t)=\int_4^{10}(3t^2+5)\mathrm{d}t=(t^3+5t)\Big|_4^{10}=966\,(\text{m}).$$

Chọn D.

Câu 3. Một ô tô đang chạy với vận tốc 10m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+10\,(\text{m/s})$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. $0,2\,(\text{m})$. **B.** $2\,(\text{m})$. **C.** $10\,(\text{m})$. **D.** $20\,(\text{m})$.

Lời giải

Lúc dừng thì $v(t)=0\Rightarrow -5t+10=0\Rightarrow t=2$.

Gọi $s(t)$ là quãng đường ôtô đi được trong khoảng thời gian $t=2$.

Ta có $v(t)=s'(t)$, suy ra $s(t)$ là nguyên hàm của $v(t)$.

Vậy trong $2(\text{s})$ ô tô đi được quãng đường là: $s=\displaystyle\int_0^2(-5t+10)\mathrm{d}t=\left(-\frac{5}{2}t^2+10t\right)\Big|_0^2=10(\text{m})$.

Chọn C.

Câu 4. Một vật đang chuyển động với vận tốc 10m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=3t+t^2\,(\text{m/s}^2)$. Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc bằng bao nhiêu ?

A. $\frac{4000}{3}\ (\mathrm{m})$. **B.** $\frac{4300}{3}\ (\mathrm{m})$. **C.** $\frac{1900}{3}\ (\mathrm{m})$. **D.** $\frac{2200}{3}\ (\mathrm{m})$.

Lời giải

Lấy mốc thời gian tại thời điểm $t=0$ (Vận tốc bằng 10m/s tăng tốc)

Gọi $s(t)$ là quãng đường ôtô đi được trong khoảng thời gian 10 (s) và gọi $v(t)$ là vận tốc của ôtô

Ta có: $a(t)=v'(t)\Rightarrow v(t)$ là nguyên hàm của $a(t)$

$$v(t)=\int a(t)\,\mathrm{d}t=\int(3t+t^2)\,\mathrm{d}t=\frac{3t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+C$$

Tại thời điểm ban đầu: $v(0)=10\Leftrightarrow C=10\Rightarrow v(t)=\frac{3t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+10$

Ta có: $v(t)=s'(t)\Rightarrow s(t)$ là nguyên hàm của $v(t)$

Vậy trong $10(\mathrm{s})$ ô tô đi được quãng đường là:

$$\int_t^T v(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{10}\left(\frac{3t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+10\right)\mathrm{d}t=\left(\frac{t^3}{2}+\frac{t^4}{12}+10t\right)\Bigg|_0^{10}=\frac{4300}{3}(\mathrm{m}).$$

Chọn B.

Câu 5. Một vật di chuyển với gia tốc $a(t)=-20(1+2t)^{-2}\ (\mathrm{m/s^2})$. Khi $t=0$ thì vận tốc của vật là $30(\mathrm{m/s})$. Tính quãng đường vật đó di chuyển sau 2 giây (làm tròn kết quả đến chữ số hàng đơn vị).

A. $106\ (\mathrm{m})$. **B.** $107\ (\mathrm{m})$. **C.** $108\ (\mathrm{m})$. **D.** $109\ (\mathrm{m})$.

Lời giải

Ta có $v(t)=\int a(t)dt=\int -20(1+2t)^{-2}\,dt=\frac{10}{1+2t}+C$.

Theo đề ta có $v(0)=30\Leftrightarrow C+10=30\Leftrightarrow C=20$.

Vậy quãng đường vật đó đi được sau 2 giây là:

$$S=\int_0^2\left(\frac{10}{1+2t}+20\right)\mathrm{d}t=\left[5\ln(1+2t)+20t\right]\Big|_0^2=5\ln 5+100\approx 108(\mathrm{m}).$$

Chọn C.

Câu 6. Vận tốc của một vật chuyển động là $v(t)=\frac{1}{2\pi}+\frac{\sin(\pi t)}{\pi}(\mathrm{m/s})$. Tính quãng đường di chuyển của vật đó trong thời gian 1,5 giây (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

A. $0,43\ (\mathrm{m})$. **B.** $0,53\ (\mathrm{m})$. **C.** $3,14\ (\mathrm{m})$. **D.** $0,34\ (\mathrm{m})$.

Lời giải

Vật đi được 1,5 giây.

Quãng đường cần tìm là :

$$s=\int_0^{1,5}v(t)\,dt=\int_0^{1,5}\left(\frac{1}{2\pi}+\frac{\sin(\pi t)}{\pi}\right)\mathrm{d}t=\left(\frac{t}{2\pi}-\frac{1}{\pi}\cos\pi t\right)\Bigg|_0^{1,5}=\frac{3}{4\pi}+\frac{1}{\pi^2}\approx 0,34(\mathrm{m}).$$

Chọn D.

Câu 7. Một vật chuyển động chậm dần với vận tốc $v(t)=160-10t\ \ (\text{m/s})$. Tính quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian từ thời điểm t = 0 (s) đến thời điểm mà vật dừng lại.

A. $1208(\text{m})$. **B.** $1820\ (\text{m})$. **C.** $1080\ (\text{m})$. **D.** $1280\ (\text{m})$.

Lời giải

Lúc vật dừng lại $v(t)=0 \Rightarrow t=16\ (\text{s})$.

Quãng đường vật di chuyển từ đầu tới lúc dừng lại:

$s(t)=\int\limits_0^{16}(160-10t)\text{d}t=\left(160t-5t^2\right)\Big|_0^{16}=1280\ (\text{m})$.

Chọn D.

Loại 2: Tính vận tốc.

Câu 8. Một vật chuyển động với vận tốc $v(t)\,(\text{m/s})$, có gia tốc $v'(t)=\dfrac{3}{t+1}\left(\text{m/s}^2\right)$. Vận tốc ban đầu của vật là $6\,\text{m/s}$. Vận tốc của vật sau 10 giây là (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị):

A. 14 (m/s). **B.** 13 (m/s). **C.** 11 (m/s). **D.** 12 (m/s).

Lời giải

Ta có $v(t)=\int v'(t)\text{d}t=\int\dfrac{3}{t+1}\text{d}t=3\ln|t+1|+C$.

Tại thời điểm ban đầu $(t=0)$ thì $v(0)=3\ln 1+C=6 \Leftrightarrow C=6$.

Suy ra $v(t)=3\ln|t+1|+6$.

Tại thời điểm $t=10\,s \Rightarrow v(10)=3\ln 11+6\approx 13(m/s)$.

Chọn B.

Câu 9. Một vật chuyển động với vận tốc ban đầu $5(\text{m/s})$ và có gia tốc được xác định bởi công thức $a=\dfrac{2}{t+1}\ \left(\text{m/s}^2\right)$. Vận tốc của vật sau $10(\text{s})$ đầu tiên là (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

A. $10\,(\text{m/s})$. **B.** $9{,}8\,(\text{m/s})$. **C.** $11\,(\text{m/s})$. **D.** $9\,(\text{m/s})$.

Lời giải

Ta có $v(t)=\int\dfrac{2}{t+1}\text{d}t=2\ln(t+1)+C$

Mà vận tốc ban đầu 5m/s tức là : $v(0)=5 \Leftrightarrow 2\ln(0+1)+C=5 \Leftrightarrow C=5$.

Nên $v(t)=2\ln(t+1)+5$

Vận tốc của vật sau $10(\text{s})$ đầu tiên là : $v(10)=2\ln(11)+5\approx 9{,}8$.

Chọn B.

Câu 10. Người ta tổ chức thực hành nghiên cứu thí nghiệm bằng cách như sau. Họ tiến hành quan sát một tia lửa điện bắn từ mặt đất bắn lên với vận tốc $15(\text{m/s})$. Hỏi biểu thức vận tốc của tia lửa điện là?

A. $v=-9{,}8t+15$. **B.** $v=-9{,}8t+13$. **C.** $v=9{,}8t+15$. **D.** $v=-9{,}8t-13$.

Lời giải

Tia lửa chịu sự tác động của trọng lực hướng xuống nên ta có gia tốc $a=-9{,}8\left(\text{m/s}^2\right)$

Ta có biểu thức vận tốc v theo thời gian t có gia tốc a là : $v=\int a\,\mathrm{d}t=\int -9,8\,\mathrm{d}t=-9,8t+C$

Ở đây, với : $t=0, v=15(\mathrm{m/s})\Rightarrow C=15$

Vậy ta được biểu thức vận tốc có dạng : $v=-9,8t+15$.

Chọn A.

Câu 11. Một vật xuất phát từ A chuyển động thẳng và nhanh dần đều với vận tốc $v(t)=1+2t(\mathrm{m/s})$. Tính vận tốc tại thời điểm mà vật cách A $20(\mathrm{cm})$? (Giả thiết thời điểm vật xuất phát từ A tương ứng với $t=0$)

A. $6\ (\mathrm{m/s})$. **B.** $7\ (\mathrm{m/s})$. **C.** $8\ (\mathrm{m/s})$. **D.** $9\ (\mathrm{m/s})$.

Lời giải

Ta có $S(t)=\int(1+2t)\,\mathrm{d}t=t+t^2+C$

Vật xuất phát từ A tương ứng với thời gian $t=0$ nên $S(0)=0\Leftrightarrow 0+0^2+C=0\Leftrightarrow C=0$

Suy ra : $S(t)=t+t^2$

Vật cách A $20(\mathrm{cm})$ ta có : $t^2+t=20\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=4\\t=-5\end{array}\right.$ Nhận $t=4$.

Vậy sau $4(\mathrm{s})$ thì vật cách A $20(\mathrm{cm})$ và vận tốc tại thời điểm đó là : $v(4)=9$.

Chọn D.

Câu 12. Một người chạy xe máy chuyển động thẳng theo phương trình $S(t)=t^3-3t^2+4t$, trong đó t tính bằng giây (s), S tính bằng mét (m). Gia tốc của xe máy lúc $t=2(\mathrm{s})$ bằng?

A. $4\ (\mathrm{m/s^2})$. **B.** $6\ (\mathrm{m/s^2})$. **C.** $8\ (\mathrm{m/s^2})$. **D.** $12\ (\mathrm{m/s^2})$.

Lời giải

Vận tại thời điểm t giây là $v(t)=(s(t))'=3t^2-6t+4$

Gia tốc tại thời điểm t giây là $a(t)=(v(t))'=6t-6$

Suy ra gia tốc tại thời điểm $t=2(\mathrm{s})$ giây là $a(2)=6\ (\mathrm{m/s^2})$.

Chọn B.

Câu 13. Trong giờ thực hành môn Vật Lí. Một nhóm sinh viên đã nghiên cứu về sự chuyển động của các hạt. Trong quá trình thực hành thì nhóm sinh viên này đã phát hiện một hạt prôton di chuyển trong điện trường với biểu thức gia tốc là: $a=-20(1+2t)^{-2}\ (\mathrm{cm/s^2})$.Với t của ta được tính bằng giây. Nhóm sinh viên đã tìm hàm vận tốc v theo t, biết rằng khi $t=0$ thì $v=30(\mathrm{m/s^2})$. Hỏi biểu thức đúng là?

A. $v=\left(\dfrac{10}{1+2t}+25\right)\ (\mathrm{cm/s^2})$. **B.** $v=\left(\dfrac{10}{1+t}+20\right)\ (\mathrm{cm/s^2})$.

C. $v=\left(\dfrac{10}{1+2t}+10\right)\ (\mathrm{cm/s^2})$. **D.** $v=\left(\dfrac{10}{1+2t}+20\right)\ (\mathrm{cm/s^2})$.

Lời giải

Trước hết để giải bài toán này ta cũng chú ý. Biểu thức vận tốc v theo thời gian t có gia tốc a là: $v=\int a\,\mathrm{d}t$

Áp dụng công thức trên, ta có : $v=\int a\,\mathrm{d}t=\int\frac{-20}{(1+2t)^2}\mathrm{d}t$

Đến đây ta đặt :

$u=1+2t\Rightarrow \mathrm{d}u=2\mathrm{d}t\Rightarrow \mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}u}{2}$

$v=\int\frac{-10}{u}\mathrm{d}u=\int -10u^{-2}\mathrm{d}u=\frac{10}{u}+K=\frac{10}{1+2t}+K$

Với $t=0, v=30\Rightarrow K=20$

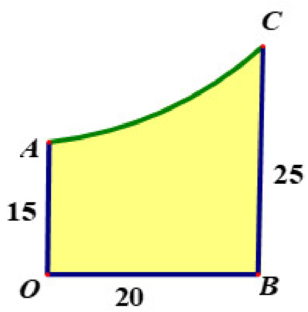
Vậy biểu thức vận tốc theo thời gian là : $v=\left(\frac{10}{1+2t}+20\right)\ (\mathrm{cm/s^2})$.

Chọn D.

DẠNG 2 : MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN TRONG THỰC TẾ

A. Ý TƯỞNG VÀ PHÂN TÍCH HƯỚNG GIẢI QUYẾT MỘT SỐ TÌNH HUỐNG

Bài toán 1: Một mảnh vườn hình thang cong $OACB$ vuông tại O và B, có dạng như hình vẽ, trong đó độ dài các cạnh $OA=15(\mathrm{m})$, $OB=20(\mathrm{cm})$, $BC=25(\mathrm{cm})$ và đường cong AC được mô tả bởi một hàm số mũ có dạng $f(x)=N.\mathrm{e}^{mx}$ trong đó N và m là các hằng số. Hỏi mảnh vườn này có diện tích bao nhiêu?



■ **Phân tích bài toán**

Điều đầu tiên dễ nhận thấy là chúng ta không thể dùng công thức diện tích hình thang thông thường để tính diện tích cho hình thang cong $OACB$. Để tính được diện tích này ta cần dùng ý nghĩa hình học của tích phân.

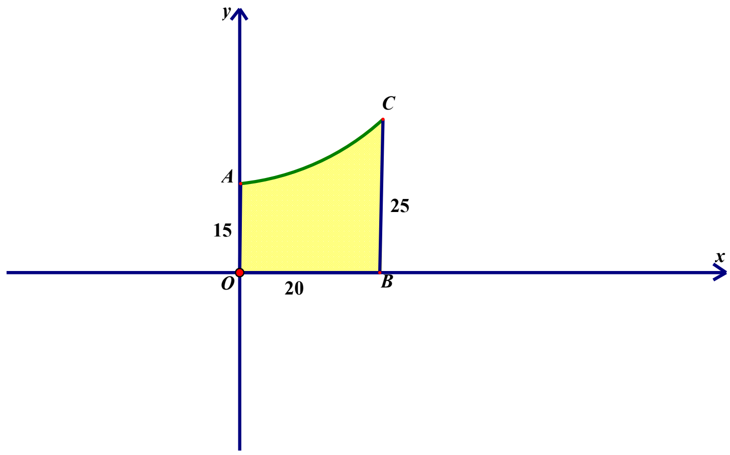
Ta chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ, khi đó hình thang cong $OACB$ được đơn giản hóa trong mặt phẳng tọa độ Oxy.

Bước tiếp theo ta cần tìm hàm số mũ $f(x)=N.\mathrm{e}^{mx}$ biểu thị cho đường cong AC, để ý rằng đường cong AC đi qua điểm $A(0;15)$ và $C(20;25)$.

Diện tích của hình thang cong được tính theo công thức $S=\int_0^{20} f(x)\mathrm{d}x$

Lời giải

□ Không mất tính tổng quát, chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ sao cho các đoạn OA, OB lần lượt nằm trên các trục Oy, Ox.



□ Để tính được diện tích mảnh vườn, ta cần tìm hàm số $f(x)=N.\mathrm{e}^{mx}$.

□ Theo hình vẽ ta có

$$\begin{cases} f(0)=15 \\ f(20)=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} N=15 \\ 15.\mathrm{e}^{20m}=25 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} N=15 \\ m=\dfrac{1}{20}\ln\dfrac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow f(x)=15.\mathrm{e}^{\frac{x}{20}\ln\frac{5}{3}}$$

□ Áp dụng công thức tính diện tích hình phẳng ta có diện tích mảnh vườn là:

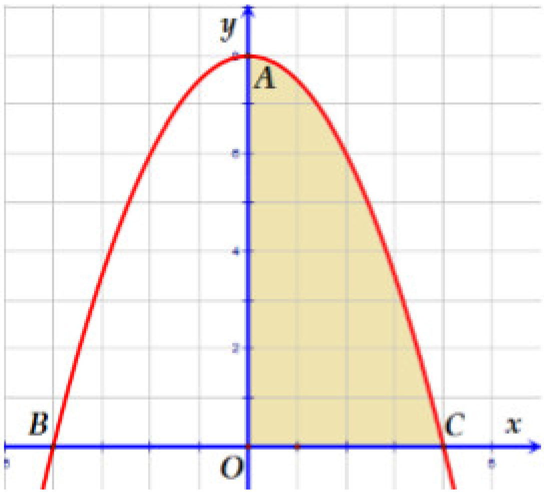
$$S=\int_0^{20} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{20} 15e^{\frac{x}{20}\ln\frac{5}{3}}\mathrm{d}x=\left.\left(\frac{20}{\ln\frac{5}{3}}.15e^{\frac{x}{20}\ln\frac{5}{3}}\right)\right|_0^{20}\approx 391,52\left(\mathrm{m}^2\right).$$

■ **Bình luận:** ***Qua bài toán này ta cần lưu ý:***

Một là, để tính diện tích của các hình phẳng phức tạp (không phải là tam giác, tứ giác, hình tròn,.) ta cần dùng đến tích phân để tính diện tích.

Hai là, đối với mỗi hình phẳng ta cần chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho hình phẳng đó được đơn giản hóa mà không mất tính tổng quát, kết quả diện tích không sai lệch.

Bài toán 2: Vòm cửa lớn của trường Đại Học Sư Phạm Tp.Hồ Chí Minh có dạng hình Parabol. Người ta dự định lắp cửa kính cho vòm cửa này. Hãy tính diện tích mặt kính cần lắp vào biết rằng vòm cửa cao $8\,\mathrm{m}$ và rộng 8 m.



■ **Phân tích bài toán**

Hình phẳng cần tính diện tích được giới hạn bởi 1 đường thẳng BC và 1 đường cong Parabol, cho nên ta không thể dùng các công thức tính diện tích của những hình đơn giản quen thuộc như: hình chữ nhật, hình tròn, tam giác,. Ta cần dùng tích phân để tính diện tích hình phẳng này.

Như vậy, việc đầu tiên ta cần đưa đường cong Parabol của cánh cửa vào hệ trục Oxy và mô hình nó thành hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$.

Dựa vào độ cao 8m và chiều rộng 8m của cánh cửa ta dễ dàng xác định các hệ số a, b, c trong biểu thức hàm số.

Ứng dụng ý nghĩa hình học của tích phân ta có công thức tính diện tích của cánh cửa là

$$S = \int_{-4}^{4} \left(ax^2 + bx + c\right)$$

Lưu ý rằng cánh cửa rộng 8m và ta cho đường cong Parabol đối xứng qua trục tung Oy nên dễ suy ra các cận $x = -4$ và $x = 4$.

Lời giải

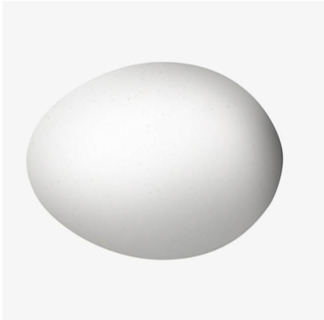
Không mất tổng quát, ta xét dạng hình parabol vòm cửa lớn như hình vẽ sau

Đồng thời xét $(P): y = ax^2 + bx + c$.

Ta có: $\begin{cases} A(0;8) \in (P) \\ B(4;0) \in (P) \\ C(-4;0) \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 8 \\ 16a + 4b + c = 0 \\ 16a - 4b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{-1}{2} \\ b = 0 \\ c = 8 \end{cases} \Rightarrow (P): y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 8$

Do đó: $S_H = 2\int_0^4 \left(-\dfrac{1}{2}x^2 + 8\right)\mathrm{d}x = \left(16x - \dfrac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^4 = \dfrac{128}{3}\left(\mathrm{m}^2\right)$.

Bài toán 3: Trong nghiên cứu khoa học, người ta sử dụng thể tích của một quả trứng để xác định kích thước của nó là một cách dự báo khá tốt về các thành phần cấu tạo của trứng và đặc điểm của con non sau khi nở ra. Một quả trứng ngỗng được mô hình bởi quay đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{30}\sqrt{7569 - 400x^2}$, $-4,35 \le x \le 4,35$ quanh trục Ox. Sử dụng mô hình này để tính thể tích quả trứng (x, y được đo theo đơn vị cm)



■ **Phân tích bài toán**

Quả trứng ngỗng trong đề bài được mô hình bởi quay đồ thị hàm số $y=\frac{1}{30}\sqrt{7569-400x^2}$, $-4,35\le x\le 4,35$ *quanh trục* Ox.

Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm $y=\frac{1}{30}\sqrt{7569-400x^2}$, $-4,35\le x\le 4,35$ *và trục* Ox.

Thể tích của quả trứng bằng thể tích của khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng quay quanh trục Ox.

$V=\pi\int\limits_{-4,35}^{4,35} y^2dx$.

Lời giải

□ Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường: đồ thị hàm số $y=\frac{1}{30}\sqrt{7569-400x^2}, -4,35\le x\le 4,35$ và trục Ox.

□ Thể tích của quả trứng bằng thể tích khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng (H) xoay quanh trục Ox:

$$V=\pi\int\limits_{-4,35}^{4,35}\left(\frac{1}{30}\sqrt{7569-400x^2}\right)^2\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{900}\int\limits_{-4,35}^{4,35}\left(7569-400x^2\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{900}\left(7569x-400\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-4,35}^{4,35}$$

$$\approx 153\left(\mathrm{cm}^2\right).$$

Bài toán 4: Một thùng rượu có bán kính ở trên là 30 cm và ở giữa là 40 cm. Chiều cao thùng rượu là 1m. Hỏi thùng rượu đó chứa được tối đa bao nhiêu lít rượu (kết quả lấy 2 chữ số thập phân)? Cho rằng cạnh bên hông của thùng rượu là hình parabol.

■ **Phân tích bài toán**

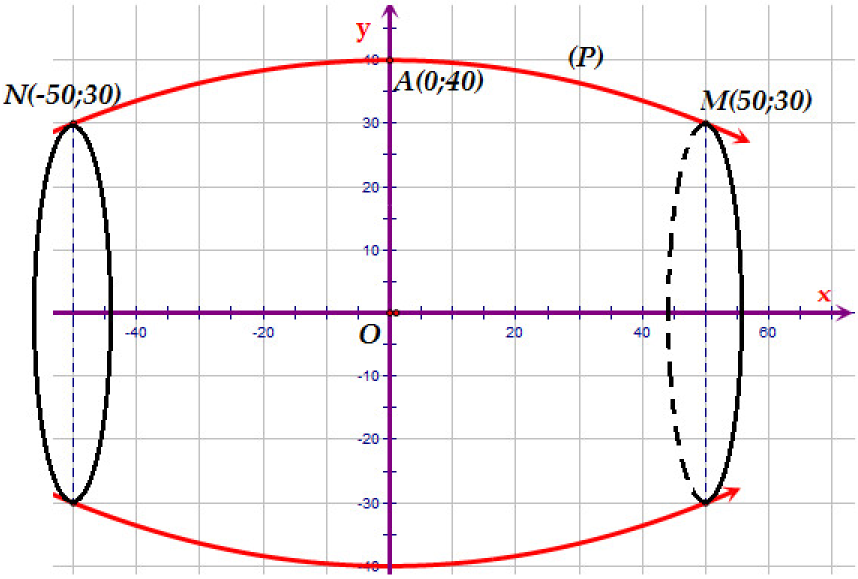
Thùng rượu có dạng là một khối tròn xoay có đường sinh là một đường cong có dạng Parabol $(P): y = ax^2 + bx + c\,(a \neq 0)$. Vì vậy để tính thể tích thùng rượu ta cần áp dụng tích phân để tính thể tích khối tròn xoay. Chú ý rằng khi mô hình đường cong Parabol ta để chiều cao của thùng rượu trải theo chiều của trục hoành.

Bước đầu ta cần xây dựng hàm số $(P): y = ax^2 + bx + c\,(a \neq 0)$ với điều kiện đi qua các đỉnh $N(-50;30)$, $A(0;40)$, $M(50;30)$ như hình vẽ.

Dựa vào chiều cao $1(\mathrm{m})$ của thùng rượu ta tìm được các cận của tích phân. Khi đó lập được công thức tính được thể tích thùng rượu.

Lời giải

- Ta sẽ để thùng rượu nằm ngang để thuận lợi cho việc tính toán.



- Ta cần tìm phương trình parabola $(P): y = ax^2 + bx + c\,(a \neq 0)$ đi qua đỉnh M, N, A

$$\begin{cases} M(50;30) \in (P) \\ A(0;40) \in (P) \\ N(-50;30) \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 50^2 a + 50b + c = 30 \\ c = 40 \\ 50^2 a - 50b + c = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{250} \\ b = 0 \\ c = 40 \end{cases}$$

$\Rightarrow (P): y = -\dfrac{x^2}{250} + 40$.

- Tới đây ta áp dụng công thức tính thể tích V khi quay hình phẳng giới hạn bởi (parabol), $x = 50, x = -50, y = 0$ xung quanh trục hoành Ox:

$$V = \pi \int_{-50}^{50} y^2\,\mathrm{d}x = \pi \int_{-50}^{50} \left(-\frac{x^2}{250} + 40\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_{-50}^{50} \left(\frac{x^4}{250^2} - \frac{80x^2}{250} + 40^2\right)\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow V = \pi\left(\frac{x^5}{312500} - \frac{8x^3}{75} + 40^2 x\right)\Bigg|_{-50}^{50} = \frac{406000\pi}{3} \approx 425162,20\left(\mathrm{cm}^3\right) \approx 425,16(\mathrm{l})$$

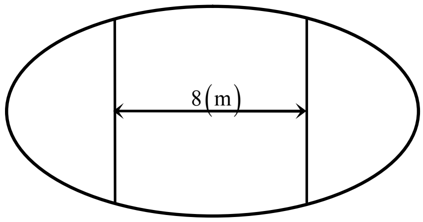
Vậy thùng rượu chứa được tối đa $425,16(\mathrm{l})$.

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 14. Ông An có một mảnh vườn hình Elip có độ dài trục lớn bằng $16(\text{m})$ và độ dài trục bé bằng $10(\text{m})$. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng $8(\text{m})$ và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng (như hình vẽ). Biết kinh phí để trồng hoa là 100000 (đồng/m^2). Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).

A. 7862000 (đồng). **B.** 7653000 (đồng).

C. 7128000 (đồng). **D.** 7826000 (đồng).



Lời giải

Chọn B.

Phương trình đường Elip $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{25}=1$. Khi đó, diện tích S phần đất trồng hoa nằm trong góc phần tư thứ nhất là hình giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\dfrac{5}{8}\sqrt{64-x^2}$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x=4$.

Diện tích phần đất trồng hoa $S=4\int\limits_0^4 \dfrac{5}{8}\sqrt{64-x^2}\,\text{d}x$.

Vậy số tiền ông An cần để trồng $T=100.000.S\simeq 7653000$ (đồng).

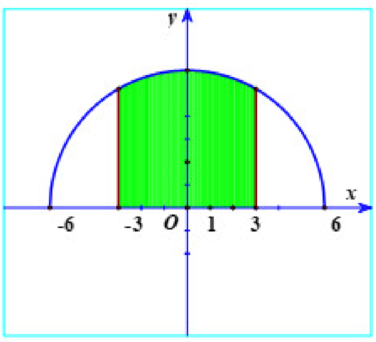
Câu 15. Một mảnh vườn hình tròn tâm O bán kính $6(\text{m})$. Người ta cần trồng cây trên dải đất rộng $6(\text{m})$ nhận O làm tâm đối xứng, biết kinh phí trồng cây là 70000 (đồng/m^2). Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cây trên dải đất đó (số tiền được làm tròn đến hàng đơn vị).

A. $8\,412\,322$ (đồng). **B.** $8\,142\,232$ (đồng).

C. $4\,821\,232$ (đồng). **D.** $4\,821\,322$ (đồng).

Lời giải

Chọn D.



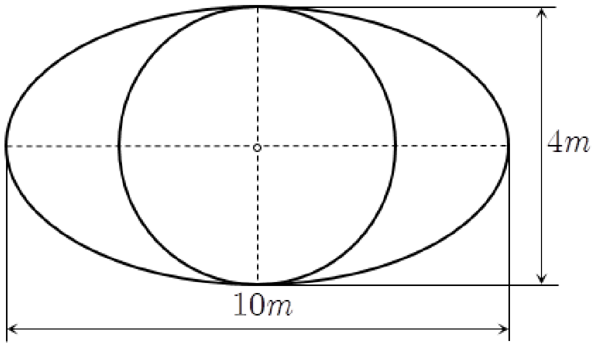
Ta có: $x^2+y^2=36\Rightarrow y=\sqrt{36-x^2}$ (Nữa đường tròn phía trên)

Diện tích khu đất $S=4\int\limits_0^3\sqrt{36-x^2}\,\text{d}x\approx 68,876026$

Số tiền cần để trồng cây $T=70000.S=4\,821\,321,847$.

Câu 16. Để trang trí cho một lễ hội đầu Xuân, từ một mảnh vườn hình elip có chiều dài trục lớn là $10\left(\mathrm{m}\right)$, chiều dài trục nhỏ là $4\left(\mathrm{m}\right)$. Ban tổ chức vẽ một đường tròn có đường kính bằng độ dài trục nhỏ và có tâm trùng với tâm của elip như hình vẽ. Trên hình tròn người ta trồng hoa với giá 100000 (đồng/m^2), phần còn lại của mảnh vườn người ta trồng cỏ với giá 60000 (đồng/m^2) (biết giá trồng hoa và trồng cỏ bao gồm cả công và cây). Hỏi ban tổ chức cần bao nhiêu tiền để trồng hoa và cỏ trên dải đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).

A. 2639000 (đồng). **B.** 2388000 (đồng).
C. 2387000 (đồng). **D.** 2638000 (đồng).



Lời giải

Chọn B.

Chiều dài trục lớn $2a=10$, chiều dài trục nhỏ $2b=4$ nên $a=5, b=2$. Do đó, diện tích mảnh vườn hình elip $S=\pi ab=10\pi\left(\mathrm{m}^2\right)$.

Đường kính đường tròn bằng độ dài trục nhỏ nên bán kính đường tròn $R=2$. Do đó, diện tích phần đất trồng hoa $S_1=\pi R^2=4\pi\left(\mathrm{m}^2\right)$.

Diện tích phần đất trồng cỏ $S_2=S-S_1=10\pi-4\pi=6\pi\left(\mathrm{m}^2\right)$.

Vậy số tiền ban tổ chức cần để trồng hoa và cỏ trên dải đất đó là:
$T=100\,000.4\pi+60\,000.6\pi\approx 2388000$ (đồng).

Câu 17. Ông B có một khu vườn giới hạn bởi đường parabol và một đường thẳng. Nếu đặt trong hệ tọa độ Oxy như hình vẽ bên thì parabol có phương trình $y=x^2$ và đường thẳng là $y=25$. Ông B dự định dùng một mảnh vườn nhỏ được chia từ khu vườn bởi đường thẳng đi qua O và điểm M trên parabol để trồng hoa. Hãy giúp ông B xác định điểm M bằng cách tính độ dài OM để diện tích mảnh vườn nhỏ bằng $\frac{9}{2}$.

A. $OM=2\sqrt{5}$. **B.** $OM=3\sqrt{10}$. **C.** $OM=15$. **D.** $OM=10$.

Lời giải

Chọn B.

Giả sử $M\left(a;a^2\right)$ suy ra phương trình $OM: y=ax$

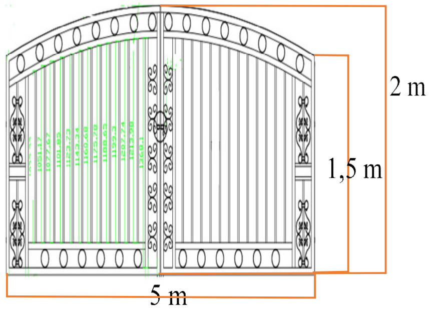
Khi đó diện tích khu vườn là $S=\int\limits_0^a\left(ax-x^2\right)\mathrm{d}x=\left.\left(a\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\right|_0^a=\frac{a^3}{6}$

Mà $S=\frac{9}{2}\Rightarrow a=3$

Khi đó $OM=3\sqrt{10}$.

Câu 18. Anh An muốn làm cửa rào sắt có hình dạng và kích thước giống như hình vẽ kế bên, biết đường cong phía trên là một parabol. Giá $1\left(\mathrm{m}^2\right)$ cửa rào sắt có giá là 700000 (đồng). Vậy anh An phải trả bao nhiêu tiền để làm cái cửa rào sắt như vậy (làm tròn đến hàng nghìn).

A. 6417000 (đồng). **B.** 6320000 (đồng). **C.** 6520000 (đồng). **D.** 6620000 (đồng).

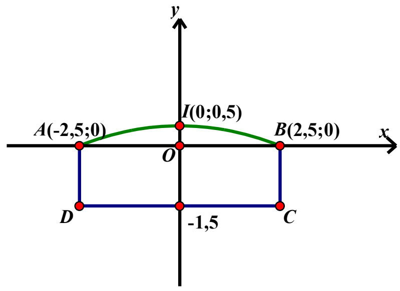


Lời giải

Chọn A.

Ta mô hình hóa cánh cửa rào bằng hình thang cong $ADCB$ vuông tại C và D, cung AB như hình vẽ.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho hai điểm A, B nằm trên trục Ox như hình vẽ.



Vậy diện tích cánh cửa sẽ bằng diện tích hình chữ nhật $ABCD$ cộng thêm diện tích miền cong AIB. Để tính diện tích miền cong AIB ta cần dùng tích phân.

Đầu tiên ta tìm cách viết phương trình Parabol $y = ax^2 + bx + c$ biểu thị cho đường cong AIB. Parabol có đỉnh $I\left(0;\frac{1}{2}\right)$, và cắt trục hoành tại 2 điểm $A\left(-\frac{5}{2};0\right)$, $B\left(\frac{5}{2};0\right)$

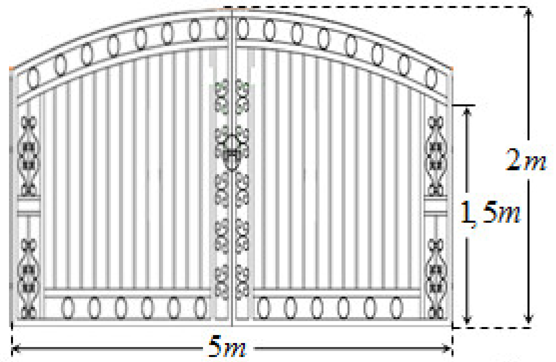
$$\begin{cases} a.0^2 + b.0 + c = \frac{1}{2} \\ -\frac{b}{2a} = 0 \\ a.\left(\frac{5}{2}\right)^2 + b.\left(\frac{5}{2}\right) + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{1}{2} \\ b = 0 \\ a = -\frac{2}{25} \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{2}{25}x^2 + \frac{1}{2}.$$

Diện tích miền cong AIB được tính bằng công thức: $\int_{-2,5}^{2,5}\left(-\frac{2}{25}x^2 + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{5}{3}$.

Suy ra diện tích cánh cửa là $\frac{5}{3} + 1,5.5 = \frac{55}{6}\left(\mathrm{m}^2\right)$.

Giá $1\left(\mathrm{m}^2\right)$ cửa rào sắt giá 700000 (đồng). Vậy giá tiền cửa rào sắt là 6416666.

Câu 19. Ông An muốn làm cửa rào sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ bên, biết đường cong phía trên là một Parabol. Giá $1\left(\mathrm{m}^2\right)$ của rào sắt là 700000 (đồng). Hỏi ông An phải trả bao nhiêu tiền để làm cái cửa sắt như vậy (làm tròn đến hàng phần nghìn).

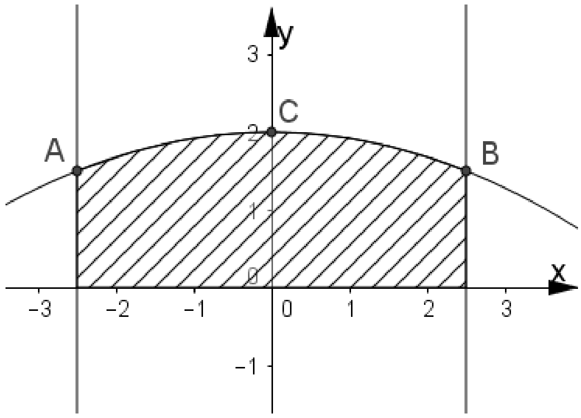


A. 6417000 (đồng). **B.** 6320000 (đồng). **C.** 6520000 (đồng). **D.** 6620000 (đồng).

Lời giải

Chọn A.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Trong đó $A(-2,5;1,5)$, $B(2,5;1,5)$, $C(0;2)$.

Giả sử đường cong phá trên là một Parabol có dạng $y = ax^2 + bx + c$, với $a;b;c \in \mathbb{R}$.

Do Parabol đi qua các điểm $A(-2,5;1,5)$, $B(2,5;1,5)$, $C(0;2)$ nên ta có hệ phương trình.

$$\begin{cases} a(-2,5)^2 + b(-2,5) + c = 1,5 \\ a(-2,5)^2 + b(2,5) + c = 1,5 \\ c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{2}{25} \\ b = 0 \\ c = 2 \end{cases}.$$

Khi đó phương trình Parabol là $y = -\dfrac{2}{25}x^2 + 2$.

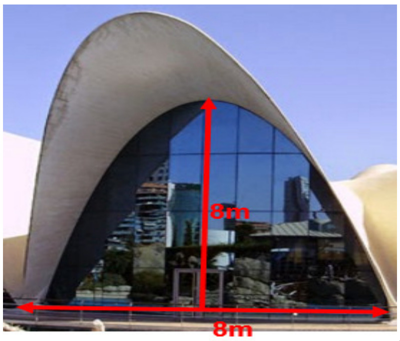
Diện tích S của cửa rào sắt là diện tích phần hình phẳng giới bởi đồ thị hàm số $y = -\dfrac{2}{25}x^2 + 2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -2,5$, $x = 2,5$.

Ta có $S = \displaystyle\int_{-2,5}^{2,5} \left(-\frac{2}{25}x^2 + 2\right) dx = \left(-\frac{2}{25}\frac{x^3}{3} + 2x\right)\Bigg|_{-2,5}^{2,5} = \frac{55}{6}$.

Vậy ông An phải trả số tiền để làm cái cửa sắt là:

$S.(700.000) = \dfrac{55}{6}.700000 \approx 6417000$ (đồng).

Câu 20. Vòm cửa lớn của một trung tâm văn hoá có dạng hình Parabol. Người ta dự định lắp cửa kính cường lực cho vòm cửa này. Hãy tính diện tích mặt kính cần lắp vào biết rằng vòm cửa cao $8(\text{m})$ và rộng $8(\text{m})$ (như hình vẽ).



A. $\frac{131}{3}\left(\text{m}^2\right)$. **B.** $\frac{28}{3}(\text{m}^2)$. **C.** $\frac{26}{3}(\text{m}^2)$. **D.** $\frac{128}{3}\left(\text{m}^2\right)$.

Lời giải

Chọn D.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy với gốc tọa độ O là trung điểm của cạnh đáy, trục Oy trùng với chiều cao của vòm cửa.

Gọi Parabol có dạng: $y = ax^2 + bx + c$.

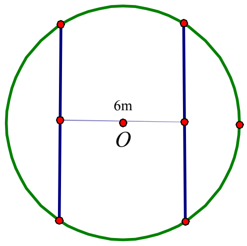
Vì Parabolcó đỉnh $I(0;8)$ và qua điểm $(4;0);(-4;0)$ nên ta có:

$$\begin{cases} c = 8 \\ 16a + 4b + 8 = 0 \\ 16a - 4b + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 8 \\ b = 0 \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases}$$. Vậy Parabol có phương trình là $y = -\frac{1}{2}x^2 + 8$.

Diện tích cái cổng chính bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi: $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^2 + 8 \\ y = 0 \\ x = -4 \\ x = 4 \end{cases}$.

Từ đó ta có $S = \int\limits_{-4}^{4} \left| -\frac{1}{2}x^2 + 8 \right| dx = \left| \int\limits_{-4}^{4} \left(-\frac{1}{2}x^2 + 8 \right) dx \right| = \frac{128}{3}(\text{m}^2)$.

Câu 21. Một mảnh vườn hình tròn tâm O bán kính $6(\text{m})$. Người ta cần trồng cây trên dải đất rộng $6(\text{m})$ nhận O làm tâm đối xứng, biết kinh phí trồng cây là 70000 (đồng/m^2). Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cây trên dải đất đó (số tiền được làm tròn đến hàng đơn vị)



A. 8412322 (đồng). **B.** 8142232 (đồng). **C.** 4821232 (đồng). **D.** 48213122 (đồng).

Lời giải

Chọn C.

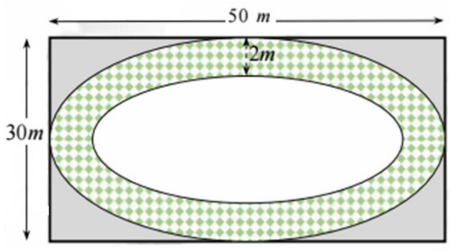
Gắn hệ trục tọa độ với O là gốc tọa độ, trục Oy song song với bờ dải đất.

Phương trình đường tròn: $x^2 + y^2 = 36 \Rightarrow y = \pm\sqrt{36 - x^2}$

Diện tích dải đất: $S=2\int\limits_{-3}^{3}\sqrt{36-x^2}\,\mathrm{d}x\approx 68,876\left(\mathrm{m}^2\right)$.

Suy ra số tiền cần dùng là: $68,876.70000=4821320$ (đồng).

Câu 22. Một sân chơi dành cho trẻ em hình chữ nhật có chiều dài $50\left(\mathrm{m}\right)$ và chiều rộng là $30\left(\mathrm{m}\right)$ người ta làm một con đường trong sân (như hình vẽ). Biết rằng viền ngoài và viền trong của con đường là hai đường elip và chiều rộng của mặt đường là $2\left(\mathrm{m}\right)$. Kinh phí để làm mỗi m^2 làm đường là 500000 (đồng). Tính số tiền làm con đường đó. (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).



A. 119000000 (đồng).

B. 152000000 (đồng).

C. 119320000 (đồng).

D. 125520000 (đồng).

Lời giải

Chọn C.

Gọi S là diện tích của hình elip $\left(E\right):\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ta có $S=\pi ab$.

Chứng minh $S=\int\limits_{-a}^{a}b\left(\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}+\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}\right)\mathrm{d}x=\pi ab$.

Xét hệ trục tọa độ Oxy sao cho trục hoành và trục tung lần lượt là các trục đối xứng của hình chữ nhật trong đó trục hoành dọc theo chiều dài của hình chữ nhật.

Gọi $\left(E_1\right)$ là elip lớn, $\left(E_2\right)$ là elip nhỏ ta có:

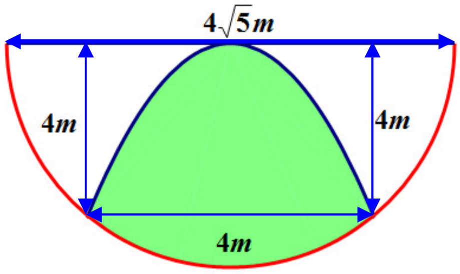
$\left(E_1\right):\dfrac{x^2}{25^2}+\dfrac{y^2}{15^2}=1\Rightarrow$ Diện tích của nó là $S_1=\pi.15.25=375\pi\ \left(\mathrm{m}^2\right)$.

$\left(E_2\right):\dfrac{x^2}{23^2}+\dfrac{y^2}{13^2}=1\Rightarrow$ Diện tích của nó là $S_2=\pi.13.23=299\pi\ \left(\mathrm{m}^2\right)$.

Diện tích con đường là $375\pi-299\pi=76\pi\ \left(\mathrm{m}^2\right)$.

Do đó số tiền đầu tư là $76\pi\times 500000\approx 119320000$ (đồng).

Câu 23. Một khuôn viên dạng nửa hình tròn có đường kính $4\sqrt{5}\ \left(\mathrm{m}\right)$. Trên đó, người ta thiết kế hai phần mỗi phần dùng để trồng hoa và trồng cỏ Nhật Bản. Phần trồng hoa có dạng một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm của nửa đường tròn, hai đầu mút của cánh hoa nằm trên đường tròn (phần tô màu) và cách nhau một khoảng bằng $4\left(\mathrm{m}\right)$; phần còn lại của khuôn viên (phần không tô màu) dùng để trồng cỏ Nhật Bản. Biết các kích thước cho như hình vẽ và chi phí để trồng cỏ Nhật Bản là 300000 (đồng/ m^2). Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cỏ Nhật Bản trên khuôn viên đó? (Số tiền làm tròn đến hàng nghìn).

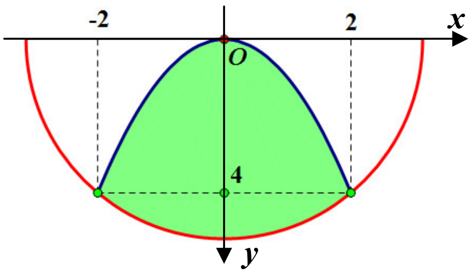


A. 1791000 (đồng). **B.** 2922000 (đồng). **C.** 3582000 (đồng). **D.** 5843000 (đồng).

Lời giải

Chọn D.

Gắn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ, với gốc tọa độ O trùng với tâm nửa đường tròn, trục Ox trùng với đường kính nửa đường tròn, trục Oy chiều dương hướng xuống.



Diện tích nửa hình tròn là: $S_T = \frac{1}{2}\pi R^2 = \frac{1}{2}\pi\left(2\sqrt{5}\right)^2 = 10\pi\left(\mathrm{m}^2\right)$

Ta thấy parabol $x = \pm 2 \rightarrow y = 4 \rightarrow (P): y = x^2$.

Do nửa đường tròn ở phần dương của Oy nên $(C): y = \sqrt{20 - x^2}$.

Diện tích phần trồng hoa là: $S_H = 2\int_0^2 \left(x^2 - \sqrt{20 - x^2}\right)\mathrm{d}x \approx 11{,}93962\left(\mathrm{m}^2\right)$.

Diện tích phần trồng cỏ Nhật Bản: $S = S_T - S_H = 10\pi - 11{,}93962\left(\mathrm{m}^2\right)$.

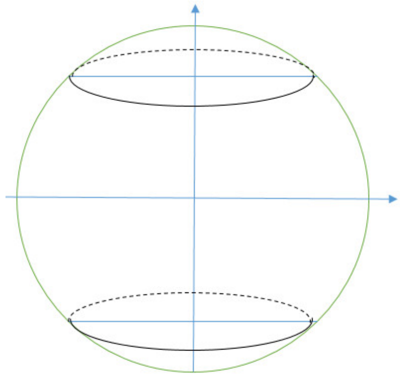
Vậy tổng số tiền phải trả là: $T = S.300000 \approx 5843000$ (đồng).

Câu 24. Từ một khối cầu bán kính bằng $5(\mathrm{dm})$ người ta cắt bỏ hai đầu bằng hai mặt phẳng vuông góc với một đường kính của khối cầu và cách tâm mặt cầu một khoảng bằng $4(\mathrm{dm})$ để làm một chiếc lu đựng nước. Tính thể tích cái lu.

A. $\frac{500\pi}{3}\left(\mathrm{dm}^3\right)$. **B.** $\frac{2296\pi}{15}\left(\mathrm{dm}^3\right)$. **C.** $\frac{952\pi}{27}\left(\mathrm{dm}^3\right)$. **D.** $\frac{472\pi}{3}\left(\mathrm{dm}^3\right)$.

Lời giải

Chọn D



Công thức thể tích khối chỏm cầu (chứng minh bằng tích phân): $V = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right)$

Thể tích của mỗi chỏm cầu bỏ đi bằng $V_1 = \pi.1^2.\left(5 - \frac{1}{3}\right) = \frac{14\pi}{3}\,(\mathrm{dm}^3)$

Thể tích của khối cầu: $V_2 = \frac{4}{3}\pi 5^3 = \frac{500\pi}{3}\,(\mathrm{dm}^3)$

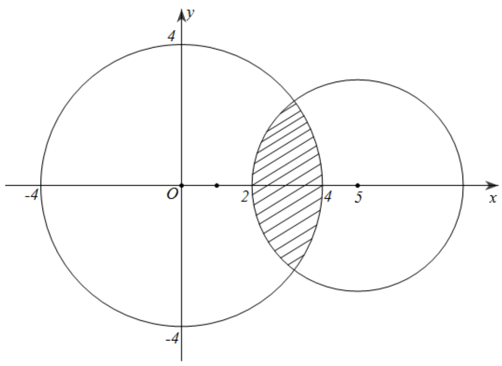
Ta có thể tích của cái lu bằng $V = V_2 - 2V_1 = \frac{472\pi}{3}\,(\mathrm{dm}^3)$.

Câu 25. Trên đồng cỏ có hai con Bò được cọc vào hai dây khác nhau khoảng cách giữa hai cọc là $5(\mathrm{m})$, còn hai sợi dây buộc hai con Bò lần lượt là $4(\mathrm{m})$ và $3(\mathrm{m})$. (Không tính phần chiều dài dây buộc). Tính diện tích mặt cỏ lớn nhất mà hai con Bò có thể ăn chung (làm tròn đến phần trăm).

A. $6,642(\mathrm{m}^2)$ **B.** $6,246(\mathrm{m}^2)$ **C.** $4,624(\mathrm{m}^2)$ **D.** $4,262(\mathrm{m}^2)$

Lời giải

Chọn A



Giả sử khoảng cách 2 cọc là $OB = 5$. Chọn hệ trục (hình vẽ)

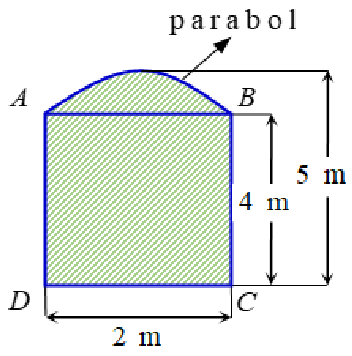
Ta có dây dài của trâu cột cọc O là 4 ứng với diện tích ăn được tối đa là hình tròn $(\mathrm{C}_1): x^2 + y^2 = 16$ và diện tích tối đa của trâu còn lại là hình tròn $(\mathrm{C}_2): (x-5)^2 + y^2 = 9$.

Do đó diện tích ăn chung tối đa của hai trâu là phần diện tích hình phẳng giao nhau của hai hình tròn trên.

Vậy phương trình hoành độ giao điểm: $16 - x^2 = 9 - (x-5)^2 \Leftrightarrow x = \frac{16}{5}$

$$S = 2.\left[\int_2^{\frac{16}{5}} \left|\sqrt{9-(x-5)^2}\right| \mathrm{d}x + \int_{\frac{16}{5}}^{4} \left|\sqrt{16-x^2}\right| \mathrm{d}x\right] \approx 6,642\,(\mathrm{m}^2).$$

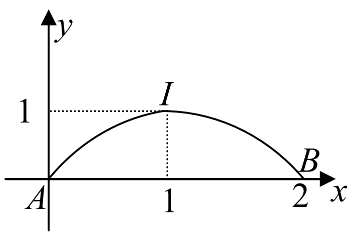
Câu 26. Một cửa có thước như hình vẽ bên. Biết đường cong phía trên là parabol, tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật và giá thành là 900000 (đồng) trên $1\left(\text{m}^2\right)$ thành phẩm. Hỏi ông A phải trả bao nhiêu tiền để làm cánh cửa đó?



A. 6000000 (đồng). **B.** 8700000 (đồng). **C.** 6600000 (đồng). **D.** 8400000 (đồng).

Lời giải

Chọn D



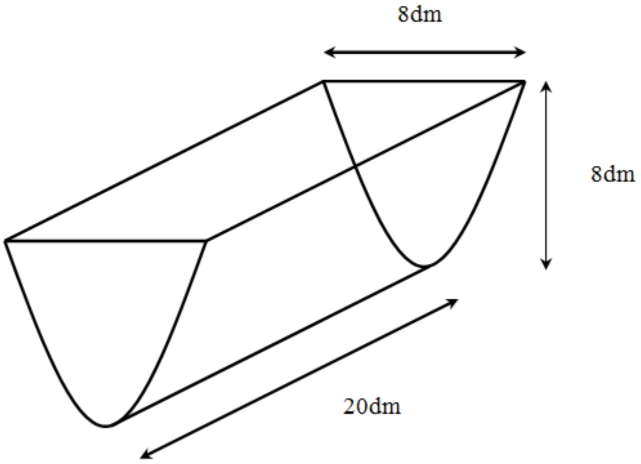
Gọi $(P): y = ax^2 + bx + c$.

Vì (P) đi qua điểm $A(0;0); B(2;0)$ và có đỉnh $I(1;1)$ nên $(P): y = -x^2 + 2x$.

Diện tích cánh cửa là $S = \int\limits_0^2 \left(-x^2 + 2x\right)\text{d}x + S_{ABCD} = \frac{4}{3} + 8 = \frac{28}{3}$.

Số tiền ông A phải trả là $\frac{28}{3} \times 900000 = 8400000$ (đồng).

Câu 27. Một bồn nước được thiết kế với chiều cao $8(\text{dm})$, ngang $8(\text{dm})$, dài $2(\text{m})$, bề mặt cong đều nhau với mặt cắt ngang là một hình parabol như hình vẽ bên dưới. Bồn chứa được tối đa bao nhiêu lít nước.

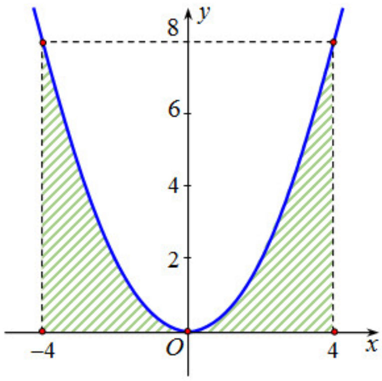


A. $\frac{1280}{3}$ (lít). **B.** 1280π (lít). **C.** $\frac{2560}{3}$ (lít). **D.** 1280 (lít).

Lời giải

Chọn C

Xét mặt cắt parabol, chọn hệ trục như hình vẽ. Ta thấy Parabol đi qua các điểm $A(-4;4)$, $B(4;4)$, $C(0;0)$ nên có phương trình $y=\frac{1}{2}x^2$. Diện tích phần mặt cắt tính như sau:



$$S=S_{hv}-\int_{-4}^{4}\frac{1}{2}x^2\,\mathrm{d}x=64-\frac{64}{3}=\frac{128}{3}\left(\mathrm{dm}^2\right)$$

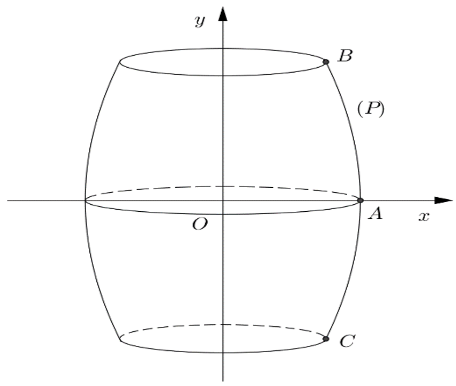
Do đó thể tích của bồn: $V=\int_0^{20}S\mathrm{d}x=\int_0^{20}\frac{128}{3}\mathrm{d}x=\frac{2560}{3}\left(\mathrm{dm}^3\right)$.

Câu 28. Một thùng rượu có bán kính các đáy là $30(\mathrm{cm})$, thiết diện vuông góc với trục và cách đều hai đáy có bán kính là $40(\mathrm{cm})$, chiều cao thùng rượu là $1(\mathrm{m})$ (hình vẽ). Biết rằng mặt phẳng chứa trục và cắt mặt xung quanh thùng rượu là các đường parabol, hỏi thể tích của thùng rượu (đơn vị lít) là bao nhiêu ?

A. 425162 (lít). **B.** 212581 (lít). **C.** 212,6 (lít). **D.** 425,2 (lít).

Lời giải

Chọn D



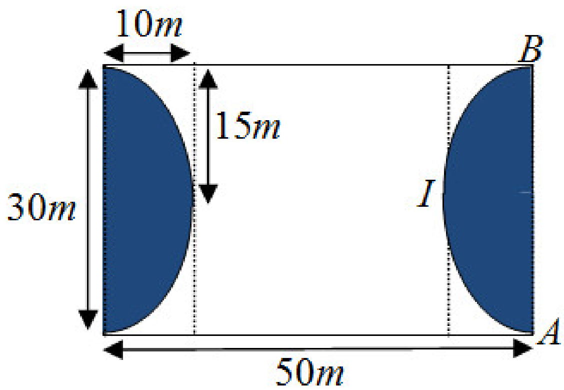
Đơn vị tính là dm.

Gọi $(P): x = ay^2 + by + c$ qua $A(4;0)$, $B(3;5)$, $C(3;-5)$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 0 \\ c = -\dfrac{1}{25} \end{cases} \Rightarrow (P): x = -\frac{1}{25}y^2 + 4$$

$$V = \pi \int_{-5}^{5} \left(-\frac{1}{25}y^2 + 4\right)^2 \mathrm{d}y \approx 425,2\left(\mathrm{dm}^3\right) = 425,2(1)$$

Câu 29. Ông An xây dựng một sân bóng đá mini hình chữ nhật có chiều rộng $30(\mathrm{m})$ và chiều dài $50(\mathrm{m})$. Để giảm bớt kinh phí cho việc trồng cỏ nhân tạo, ông An chia sân bóng ra làm hai phần (tô màu và không tô màu) như hình vẽ.



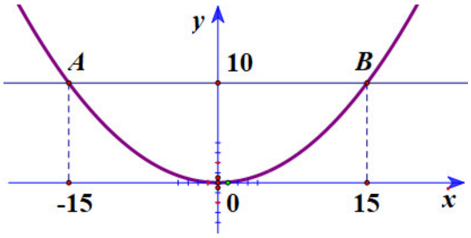
Phần tô màu gồm hai miền diện tích bằng nhau và đường cong AIB là một parabol có đỉnh I. Phần tô màu được trồng cỏ nhân tạo với giá 130 nghìn đồng/ m^2 và phần còn lại được trồng cỏ nhân tạo với giá 90 (nghìn đồng/ m^2). Hỏi ông An phải trả bao nhiêu tiền để trồng cỏ nhân tạo cho sân bóng?

A. 165 (triệu đồng). **B.** 151 (triệu đồng). **C.** 195 (triệu đồng). **D.** 135 (triệu đồng).

Lời giải

Chọn B

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ, $O \equiv I$.



Khi đó, đường cong AIB là hình phẳng giới hạn bởi các đường parabol $y=\frac{2}{45}x^2$ và đường thẳng $y=10$.

Phương trình hoành độ giao điểm $\frac{2}{45}x^2=10 \Leftrightarrow x=\pm 15$.

Diện tích phần tô màu là: $S_1=2\int\limits_{-15}^{15}\left|\frac{2}{45}x^2-10\right|\mathrm{d}x=400\left(\mathrm{m}^2\right)$.

Mặt khác diện tích sân bóng đá mini hình chữ nhật là $S=30.50=1500\left(\mathrm{m}^2\right)$.

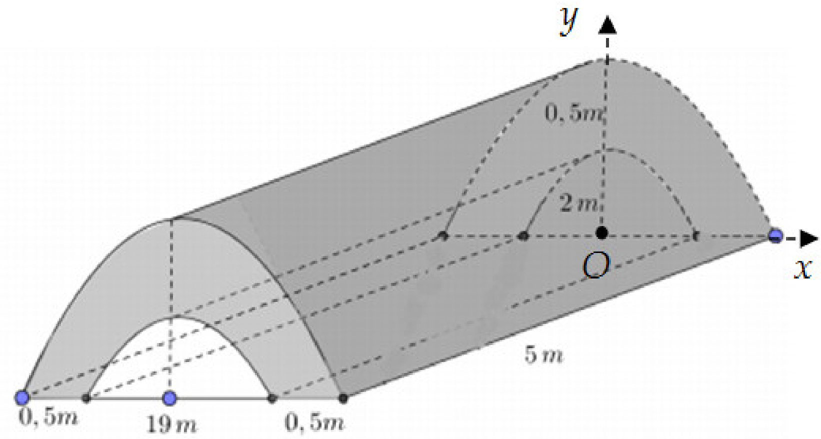
Phần không tô màu có diện tích là: $S_2=S-S_1=1100\left(\mathrm{m}^2\right)$.

Số tiền để trồng cỏ nhân tạo cho sân bóng:

$$S_1.130000+S_2.90000=400.130000+1100.90000=151000000.$$

Câu 30. Trong chương trình nông thôn mới, tại một xã X có xây một cây cầu bằng bê tông như hình vẽ. Tính thể tích khối bê tông để đổ đủ cây cầu. (Đường cong trong hình vẽ là các đường Parabol).

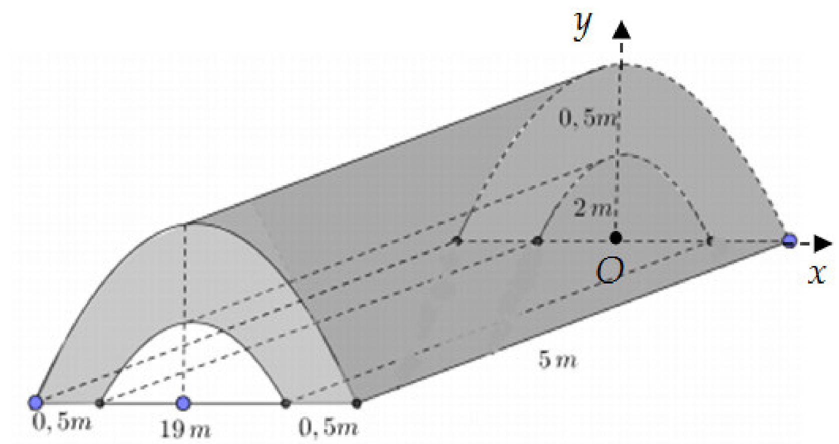
A. $21\left(\mathrm{m}^3\right)$. **B.** $18\left(\mathrm{m}^3\right)$. **C.** $40\left(\mathrm{m}^3\right)$. **D.** $19\left(\mathrm{m}^3\right)$.



Lời giải

Chọn C

Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.



Gọi $(P_1): y = ax^2 + c$ là Parabol đi qua hai điểm $A\left(\frac{19}{2};0\right)$, $B(0;2)$

Nên ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} 0 = a.\left(\frac{19}{2}\right)^2 + 2 \\ 2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{8}{361} \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow (P_1): y = -\frac{8}{361}x^2 + 2$.

Gọi $(P_2): y = ax^2 + c$ là Parabol đi qua hai điểm $C(10;0)$, $D\left(0;\frac{5}{2}\right)$.

Nên ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} 0 = a.(10)^2 + \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{40} \\ b = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow (P_2): y = -\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}$.

Ta có thể tích của bê tông là: $V = 5.2\left[\int_0^{10}\left(-\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}\right)dx - \int_0^{\frac{19}{2}}\left(-\frac{8}{361}x^2 + 2\right)\mathrm{d}x\right] = 40\left(\mathrm{m}^3\right)$.

DẠNG 3: DẠNG KHÁC

Câu 31. Một đám vi trùng tại ngày thứ t có số lượng $N(t)$, biết rằng $N'(t) = \frac{7000}{t+2}$ và lúc đầu đám vi trùng có 300000 (con). Hỏi sau 10 ngày, đám vi trùng có bao nhiêu con (làm tròn số đến hàng đơn vị)?

A. 322542 (con). **B.** 332542 (con). **C.** 302542 (con). **D.** 312542 (con).

Lời giải

Chọn D

Theo đề bài: $N(t) = \int N'(t)\mathrm{d}t = \int \frac{7000}{t+2}\mathrm{d}t = 7000\ln|t+2| + C$

Lúc đầu $t = 0$, $N(0) = 300000 \Rightarrow C = 300000 - 7000\ln 2$

Lúc $t = 10 \Rightarrow N(10) = 7000\ln 12 + 300000 - 7000\ln 2 \approx 312542$ (con).

Câu 32. Vi khuẩn HP (Helicobacter pylori) gây đau dạ dày tại ngày thứ m với số lượng là $F(m)$, biết nếu phát hiện sớm khi số lượng vi khuẩn không vượt quá 4000 con thì bệnh nhân sẽ được cứu chữa. Biết $F'(m) = \frac{1000}{2t+1}$ và ban đầu bệnh nhân có 2000 con vi khuẩn. Sau 15 ngày bệnh nhân phát hiện ra bệnh. Hỏi khi đó có bao nhiêu con vi khuẩn trong dạ dày (lấy xấp xỉ hàng thập phân thứ hai) và bệnh nhân có cứu chữa được không?

A. $5433,99$ và không cứu được. **B.** $1499,45$ và cứu được.

C. $280,01$ và cứu chữa được. **D.** $3716,99$ và cứu được.

Lời giải

Chọn D

Số lượng vi khuẩn HP tại ngày thứ m là $F(m) = \int \frac{1000}{2t+1}\mathrm{d}t = 500\ln|2t+1| + C$ (con).

Ban đầu có 2000 (con), nên ta có phương trình: $F(0) = 2000 \Leftrightarrow C = 2000$

$\Rightarrow F(m) = 500\ln|2t+1| + 2000$.

Sau 15 ngày, lượng vi khuẩn là: $F(15) = 500\ln 31 + 2000 \approx 3716,99$ (con) < 4000 (con)

$\Rightarrow$ cứu được.

Câu 33. Một đám vi trùng tại ngày thứ t có số lượng là $N(t)$. Biết rằng $N'(t)=\dfrac{2000}{1+2t}$ và lúc đầu đám vi trùng có $300\,000$ con. Ký hiệu L là số lượng vi trùng sau 10 ngày. Tìm L?

A. $L=306\,089$. **B.** $L=303\,044$. **C.** $L=301\,522$. **D.** $L=300\,761$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $N'(t)=\dfrac{2000}{1+2t}\Rightarrow N(t)=\int\dfrac{2000}{1+2t}\mathrm{d}t=1000\ln(1+2t)+C$

Lúc đầu đám vi trùng có 300000 con $\Rightarrow N(0)=300000$

$\Rightarrow 1000\ln(1+2.0)+C=300000\Rightarrow C=300000$

$\Rightarrow N(t)=1000\ln(1+2t)+300000$

Khi đó: $L=N(10)=1000\ln 21+300000\approx 303044$.

Câu 34. Các chuyên gia ước tính tốc độ nhiễm virus Zika là $f(t)=90t-3t^2$ (người/ngày) với t (ngày) và $0\le t\le 25$. Tổng số người bị nhiễm kể từ ngày đầu tiên đến ngày có số người nhiễm cao nhất?

A. $10\,250$ (người). **B** $12\,500$ (người). **C.** $3\,500$ (người). **D.** $6\,750$ (người).

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số: $f(t)=90t-3t^2$

$f'(t)=90-6t\Rightarrow f'(t)=0 \Leftrightarrow t=15$

Bảng biến thiên:

t	0		15		20
\` $f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$	0	$\nearrow$	675	$\searrow$	600

Dựa vào BBT, ngày 15 có số người nhiễm bệnh cao nhất.

Suy ra $F(t)=\int_0^{15} f(t)\mathrm{d}t=\int_0^{15}(90t-3t^2)\mathrm{d}t=(45t^2-t^3)\Big|_0^{15}=3\,500$ (người).

Câu 35. Một công ty M phải gánh chịu nợ với tốc độ $D(t)$ đôla mỗi năm, với $D'(t)=90(t+6)\sqrt{t^2+12t}$ trong đó t là số lượng thời gian (tính theo năm) kể từ công ty bắt đầu vay nợ. Đến năm thứ tư công ty đã phải chịu $1\,610\,640$ đôla tiền nợ. Tìm hàm biểu diễn tốc độ nợ của công ty này.

A. $D(t)=30\sqrt{(t^2+12t)^3}+C$. **B.** $D(t)=30\sqrt[3]{(t^2+12t)^3}+1\,610\,640$.

C. $D(t)=30\sqrt{(t^2+12t)^3}+1\,595\,280$. **D.** $D(t)=30\sqrt[3]{(t^2+12t)^3}+1\,610\,640$.

Lời giải

Chọn C

Tốc độ nợ của công ty được tính theo hàm $D(t)$

$D(t)=\int 90(t+6)\sqrt{t^2+12t}\,\mathrm{d}t=45\int\sqrt{t^2+12t}\,\mathrm{d}(t^2+12t)=30\sqrt{(t^2+12t)^3}$.

Năm thứ tư công ty chịu số tiền nợ 16106040 nên số tiền công ty vay năm đầu là:

$1610640-30\sqrt{\left(4^2+12.4\right)^3}=1595280$

Vậy công thức tính tiền nợ: $D(t)=30\sqrt{\left(t^2+12t\right)^3}+1595280$.

Câu 36. Sau trận động đất, một hồ chứa nước bị rò rỉ. Giả sử lượng nước thất thoát kể từ khi hồ bị rò rỉ đến thời điểm t (phút) là $s(t)$ (lít), biết rằng $s'(t)=(t+1)^2$. Tính lượng nước thất thoát sau 2 (giờ) kể từ khi hồ bị rò rỉ.

A. 590520 (lít). **B.** 1590520 (lít). **C.** 11590520 (lít). **D.** 890121 (lít).

Lời giải

Chọn A

Lượng nước thất thoát sau 2 (giờ): $s(t)=\int\limits_0^{120}(t+1)^2\,\mathrm{d}t=\left.\dfrac{(t+1)^3}{3}\right|_0^{120}\approx 590520$ (lít).

Câu 37. Người ta thay nước mới cho một bể bơi dạng hình hộp chữ nhật có độ sâu $h_1=180\ (\mathrm{cm})$. Giả sử $h(t)$ là chiều cao của mực nước bơm được tại thời điểm t (giây), biết rằng tốc độ tăng của chiều cao nước tại giây thứ t là $h'(t)=\dfrac{1}{500}\sqrt[3]{t+8}$. Hỏi sau bao lâu đầy bể?

A. 644 (phút). **B** 107 (phút). **C.** 190 (phút). **D.** 120 (phút).

Lời giải

Chọn B

Sau m (giây) mức nước đạt:

$$h(m)=\int\limits_0^m h'(t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^m\frac{1}{500}\sqrt[3]{t+8}\,\mathrm{d}t=\left.\frac{3}{2000}\sqrt[3]{(t+8)^4}\right|_0^m=\frac{3}{2000}\left(\sqrt[3]{(m+8)^4}-16\right)$$

Theo đề: $h(m)=180\ (\mathrm{cm})\Rightarrow\sqrt[3]{(m+8)^4}=120\,016\Rightarrow m\approx 6440,06\ (\mathrm{s})=107$ (phút).

Câu 38. Tốc độ tăng trưởng của bán kính thân cây được cho bởi công thức $f(t)=1,5+\sin\left(\dfrac{\pi t}{5}\right)$ (cm/năm), trong đó t là thời gian khảo sát (tính theo năm), $t=0$ là thời điểm bắt đầu khảo sát; $F(t)$ là bán kính của thân cây tại thời điểm t và $F'(t)=f(t)$. Tính bán kính của thân cây sau 10 năm biết rằng bán kính tại thời điểm bắt đầu khảo sát là $5\ (\mathrm{cm})$?

A. $25\ (\mathrm{cm})$. **B.** $6,5\ (\mathrm{cm})$. **C.** $20\ (\mathrm{cm})$. **D.** $15\ (\mathrm{cm})$.

Lời giải

Chọn.C

$$F'(t)=f(t)\Rightarrow F(t)=\int f(t)\,\mathrm{d}t=\int\left[1,5+\sin\left(\frac{\pi t}{5}\right)\right]\mathrm{d}t=1,5t-\frac{5}{\pi}\cos\left(\frac{\pi t}{5}\right)+C.$$

Thời điểm ban đầu: $t=0$, $F(0)=5\Rightarrow C=5+\dfrac{5}{\pi}$.

Bán kính cây sau 10 năm: $F(10)=1,5.10-\dfrac{5}{\pi}+5+\dfrac{5}{\pi}=20\ (\mathrm{cm})$.

Câu 39. Bạn An bơm nước vào một bồn chứa nước (lúc đầu không có nước). Mực nước trong bồn được tính theo hàm số $h = h(t)$, trong đó h tính theo (cm) và t tính theo (s). Biết rằng $h'(t) = \sqrt[3]{2t+1}$. Mức nước ở bồn sau khi bơm $13(\text{s})$ là:

A. $\frac{243}{4}(\text{cm})$. **B.** $60\ (\text{cm})$. **C.** $30\ (\text{cm})$. **D.** $\frac{243}{8}(\text{cm})$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $h'(t) = \sqrt[3]{2t+1} \Rightarrow$ mực nước trong bồn: $h(t) = \int \sqrt[3]{2t+1}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{8}(2t+1)\sqrt[3]{2t+1} + C\ (\text{cm})$.

Ban đầu, $t = 0$ nên $h(0) = \frac{3}{8} + C \Rightarrow C = -\frac{3}{8} \Rightarrow h(t) = \frac{3}{8}(2t+1)\sqrt[3]{2t+1} - \frac{3}{8}\ (\text{cm})$.

Mực nước sau $13(\text{s})$ là: $h(13) = 30\ (\text{cm})$.

Câu 40. Gọi $h(t)\ (\text{cm})$ là mực nước ở bồn chứa sau khi bơm nước được t giây. Biết rằng $h'(t) = \frac{1}{5}\sqrt[3]{t+8}$ và lúc đầu bồn không có nước. Tìm mực nước ở bồn sau khi bơm nước được 6 giây (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

A. $2{,}66\ (\text{cm})$. **B.** $0{,}55\ (\text{cm})$. **C.** $3{,}14\ (\text{cm})$. **D.** $2{,}66\ (\text{cm})$.

Lời giải

Chọn D.

Thời gian bơm nước được 6 giây.

Mức nước cần tìm là :

$$h(t) = \int_0^6 h'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^6 \frac{1}{5}\sqrt[3]{t+8}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{20}(t+8)^{\frac{4}{3}}\Big|_0^6 = \frac{3}{20}\cdot 14^{\frac{4}{3}} - \frac{12}{5} \approx 2{,}66(\text{cm})$$

Câu 41. Một bác thợ xây bơm nước vào bể nước. Gọi $h(t)\ (\text{m}^3)$ là thể tích nước được bơm trong $t\ (\text{s})$. Cho $h'(t) = 3at^2 + bt$ và ban đầu bể không chứa nước. Sau $5(\text{s})$ thể tích nước trong bể là $150\ (\text{m}^3)$. Sau $10(\text{s})$ thì thể tích nước trong bể là $1100\ (\text{m}^3)$. Hỏi thể tích nước trong bể sau khi bơm được $20\ (\text{s})$ là bao nhiêu?

A. $8400\ (\text{m}^3)$. **B.** $2200\ (\text{m}^3)$. **C.** $6000\ (\text{m}^3)$. **D.** $4200\ (\text{m}^3)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $h(t) = \int h'(t)\,\mathrm{d}t = \int (3at^2 + bt)\,\mathrm{d}t = at^3 + \frac{bt^2}{2} + C$

Do ban đầu, bể không có nước nên: $h(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow h(t) = at^3 + \frac{bt^2}{2}\ (\text{m}^3)$

Theo đề bài, được hệ: $\begin{cases} a.5^3 + \frac{1}{2}.b.5^2 = 150 \\ a.10^3 + \frac{1}{2}.b.10^2 = 1100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow h(t) = t^3 + t^2\ (\text{m}^3)$.

Thể tích nước sau khi bơm được $20\ (\text{s})$ là: $h(20) = 20^3 + 20^2 = 8400\ (\text{m}^3)$.

Câu 42. Tại thành phố, nhiệt độ sau t giờ, tính từ $8\left(\text{h}\right)$ đến $20\left(\text{h}\right)$ được tính bởi công thức $f\left(t\right)=50+14\sin\dfrac{\pi t}{12}\left({}^{\circ}\text{F}\right)$. Nhiệt độ trung bình trong khoảng thời gian trên là:

A. $50-\dfrac{\pi}{14}\left({}^{\circ}\text{F}\right)$. **B.** $50-\dfrac{14}{\pi}\left({}^{\circ}\text{F}\right)$. **C.** $50+\dfrac{14}{\pi}\left({}^{\circ}\text{F}\right)$. **D.** $50+\dfrac{\pi}{14}\left({}^{\circ}\text{F}\right)$.

Phân tích

Để giải quyết bài toán thực tế này ta cần nhớ định lý giá trị trung bình của tích phân: Nếu hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $[a,b]$ thì tồn tại một số c thuộc $[a,b]$ sao cho: $f\left(c\right)=\dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f\left(x\right)\text{d}x$

Lời giải

Chọn B

Nhiệt độ trung bình được tính theo công thức:

$$\frac{1}{20-8}\int\limits_8^{20}\left(50+14\sin\frac{\pi t}{12}\right)\text{d}t=\frac{1}{12}\left(50t-14.\frac{12}{\pi}\cos\frac{\pi t}{12}\right)\Bigg|_8^{20}=50-\frac{14}{\pi}.$$

Câu 43. Một tách cà phê có nhiệt độ $95\left({}^{\text{o}}\text{C}\right)$ và cần 30 (phút) để nguội còn $61\left({}^{\text{o}}\text{C}\right)$ trong gian phòng có nhiệt độ $20\left({}^{\text{o}}\text{C}\right)$. Biết nhiệt độ của tách cà phê giảm theo hàm $f\left(t\right)=-75ke^{-kt}$ với $k\approx 0,02$, t tính bằng phút. Tìm nhiệt độ trung bình của tách cà phê trong nửa giờ đầu tiên.

A. $60\ \left({}^{\text{o}}\text{C}\right)$. **B.** $74,6\ \left({}^{\text{o}}\text{C}\right)$. **C.** $61\ \left({}^{\text{o}}\text{C}\right)$. **D.** $76,4\ \left({}^{\text{o}}\text{C}\right)$.

Lời giải

Chọn D.

Nhiệt độ của tách cà phê giảm theo hàm $f\left(t\right)$ nên ta tìm được hàm nhiệt độ ở phút thứ t là:

$F\left(t\right)=\int f\left(t\right)\text{d}t=\int\left(-75ke^{-kt}\right)\text{d}t=75e^{-kt}+C$

Ban đầu, nhiệt độ tách là $95\left({}^{\text{o}}\text{C}\right)$ nên: $F\left(0\right)=95\Rightarrow 75+C=95\ \Rightarrow C=20$

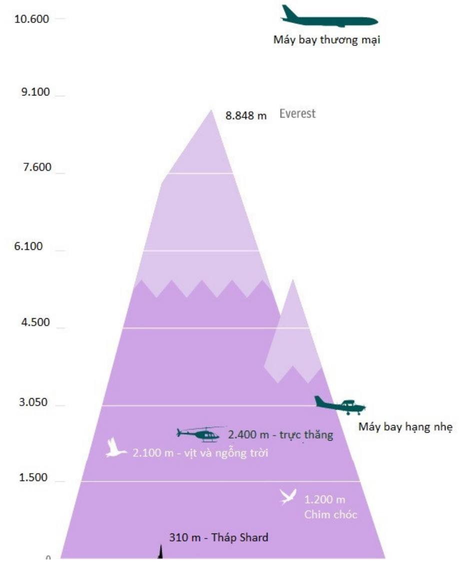
Ta tìm được hàm $F\left(t\right)=75e^{-kt}+20\ \left({}^{\text{o}}\text{C}\right)$

Nhiệt độ trung bình của tách cà phê trong nửa giờ đầu tiên:

$$\frac{1}{30-0}\int\limits_0^{30}\left(75e^{-kt}+20\right)\text{d}t=\frac{1}{30}\left(\frac{75}{-k}e^{-kt}+20t\right)\Bigg|_0^{30}\approx 76,4.$$

Câu 44. Các máy bay thương mại thường bay ở độ cao khoảng 10 $\left(\text{km}\right)$, và máy bay hạng nhẹ bay ở độ cao 3000 $\left(\text{m}\right)$ (so với mực nước biển). Biết càng lên cao, áp suất khí quyển càng giảm theo hàm $p\left(x\right)=P_{\text{o}}ie^{xi}$ $\left(\text{mmHg/m}\right)$, $P_{\text{o}}=760$ $\left(\text{mmHg}\right)$, i là hệ số suy giảm áp suất và áp suất phải chịu của máy bay hạng nhẹ là 527 $\left(\text{mmHg}\right)$. Tìm áp suất khí quyển ở độ cao 10 $\left(\text{km}\right)$.

A. $286,38\ \left(\text{mmHg}\right)$. **B.** $253,49\ \left(\text{mmHg}\right)$. **C.** $224,37\ \left(\text{mmHg}\right)$. **D.** $198,6\ \left(\text{mmHg}\right)$.



Lời giải

Chọn C

Áp suất $P(x)=\int p(x)\mathrm{d}x = P_o e^{xi} + C$

$P(0)=P_o \Leftrightarrow C=0 \Rightarrow P(x)=P_o e^{xi}$

Ta lại có: $P(3000)=527 \Leftrightarrow 527=760e^{3000i} \Rightarrow i\approx -1,22.10^{-4}$

Từ đó ta được: $P(x)=760e^{-1,22.10^{-4}x}$

$\Rightarrow P(10000)\approx 224,37\ (\text{mmHg})$. .

Câu 45. Một giáo viên sau khi nghiên cứu khả năng ghi nhớ của nhóm học sinh khối 12 về nội dung bài học ở trường để ôn thi THPT QG đã tìm được hàm biểu thị độ "quên" bài: $q(t)==Q'(x)=\dfrac{-12}{t+1}$ (%/tháng). Biết rằng để có kết quả tốt cần nắm rõ trên 80% nội dung bài học, trong tháng đầu tiên mọi người đều nhớ bài và chỉ còn 3 tháng nữa sẽ đến kì thi. Hỏi căn cứ theo nghiên cứu trên, nhóm học sinh còn nhớ bao nhiêu phần trăm kiến thức và có đạt yêu cầu không?

A. $70,5\ (\%)$, chưa đạt. **B.** $86,82\ (\%)$, đạt. **C.** $80,69\ (\%)$, đạt. **D.** $83,36\ (\%)$, đạt.

Lời giải

Chọn D

$Q(t)=\int q(t)\mathrm{d}t = -12\ln|x+1|+C$

Trong tháng đầu tiên, ai cũng nhớ bài nên $t=0 \Rightarrow Q(0)=100 \Rightarrow C=100$

Do đó: $Q(t)=100-12\ln|x+1|\ (\%)$

Theo đề ta có: $Q(3)=83,36\ (\%)$.

Câu 46. Gia đình thầy Nam có việc đột xuất nên phải vắng nhà 1 tháng. Trong khoảng thời gian đó, vòi nước đột nhiên bị hỏng và nước chảy ra với tốc độ $f(t)=F'(t)=\cos t+\dfrac{81}{25}\pi$, với $F(t)\ (\text{m}^3)$ là lượng nước chảy sau t (ngày). Lúc thầy về nhà (sau 30 ngày) đã vội khóa nước ngay. Biết rằng thời gian bắt đầu và kết thúc tính tiền nước tháng mới cũng là thời gian thầy vắng nhà. Số tiền nước thầy phải trả trong tháng đó khoảng bao nhiêu?

Mức tiêu thụ	Tổng cộng giá tiêu thụ ($đ/m^3$)
*1 m^3 - 10 m^3/hộ/tháng	4580
*11 m^3 - 30 m^3/hộ/tháng	5488
*31 m^3/hộ/tháng trở lên	6849

A. 2 (triệu). **B.** 1,4 (triệu). **C.** 1,7 (triệu). **D.** 2,1 (triệu).

Lời giải

Chọn A

Thể tích nước là: $F(t)=\int_0^{30} f(t)\mathrm{d}t=\int_0^{30}\left(\cos t+\frac{81}{25}\pi\right)\mathrm{d}t=\left(\sin t+\frac{81}{25}\pi t\right)\Big|_0^{30}\approx 304\ (\mathrm{m}^3)$

Vì giá tiêu thụ nước được tính theo từng mức tiêu thụ nên số tiền phải đóng:

$10 \times 4580+20 \times 5488+274 \times 6849=1990976$.

DẠNG 4: CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐIỆN

Câu 1. Một khung dây dẫn phẳng dẹt hình chữ nhật có 200 (vòng dây), quay quanh trục cố định đối xứng nằm trong mặt phẳng khung dây chữ nhật có kích thức $10(\mathrm{cm})\mathrm{x}10(\mathrm{cm})$. Cho biết cảm ứng từ $B=0,2(\mathrm{T})$, suất điện động được biểu diễn theo phương trình $e(t)=E_o\cos\left(100\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$ (V). Từ thông qua khung dây từ khoảng thời gian $t_1=\frac{T}{2}$ đến $t_2=T$ là?.

A. $\frac{2\sqrt{3}}{5\pi}(\mathrm{Wb})$. **B.** $\frac{3}{125\pi}(\mathrm{Wb})$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{5}(\mathrm{Wb})$. **D.** $\frac{3}{250}(\mathrm{Wb})$.

Lời giải

Chọn. C.

Theo đề bài:

$\omega=100\pi\left(\mathrm{rad.s^{-1}}\right)$, $\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{2\pi}{\omega}=0,02(\mathrm{s})$

$E_o=\omega NBS=100\pi.200.0,2.\frac{1}{100}=40\pi(\mathrm{V})$

Ta tìm được $t_1=\frac{T}{2}=0,01(\mathrm{s})$, $t_2=T=0,02(\mathrm{s})$ và phương trình suất điện động

$e(t)=40\pi\cos\left(100\pi t+\frac{\pi}{3}\right)(\mathrm{V})$

Từ thông cần tìm:

$\phi=\int_{0,01}^{0,02}40\pi\cos\left(100\pi t+\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}t=0,4.\sin\left(100\pi t+\frac{\pi}{3}\right)\Big|_{0,01}^{0,02}=\frac{2\sqrt{3}}{5}(\mathrm{Wb})$.

Câu 2. Một khung dây dẫn phẳng dẹt hình chữ nhật có 500 vòng dây, kích thước của mỗi khung là $22(\mathrm{cm})\mathrm{x}10(\mathrm{cm})$ và đang quay với tốc độ không đổi 50 (vòng/s) quanh trục đối xứng nằm trong mặt phẳng khung dây, trong từ trường đều có vectơ cảm ứng từ $\vec{B}$ vuông góc với trục quay và có độ lớn $\frac{\sqrt{2}}{5\pi}(\mathrm{T})$, biểu thức $e(t)=E_o\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)(\mathrm{V})$. Suất điện động cực đại và từ thông của qua khung dây từ thời gian $t_1=\frac{T}{2}(\mathrm{s})$ đến $t_2=T(\mathrm{s})$ là:

A. $220\sqrt{2}(\mathrm{V})$, $\frac{22\sqrt{2}}{5\pi}(\mathrm{Wb})$.

B. $220\sqrt{2}(\mathrm{V})$, $-\frac{22\sqrt{2}}{5\pi}(\mathrm{Wb})$.

C. $-220\sqrt{2}(\mathrm{V})$, $-\frac{22\sqrt{2}}{5\pi}(\mathrm{Wb})$.

D. $-220\sqrt{2}(\mathrm{V})$, $\frac{22\sqrt{2}}{5\pi}(\mathrm{Wb})$

Lời giải

Chọn. B.

Ta có:

$\omega=2\pi f=100\pi(\mathrm{rad/s})\Rightarrow T=\frac{1}{50}(\mathrm{s})$.

Ta tính được: $t_1=\frac{1}{100}$, $t_2=\frac{1}{50}$, $E_o=\omega NBS=220\sqrt{2}(\mathrm{V})$

$$\phi=\int_{t_1}^{t_2}E_o\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}t=\int_{\frac{1}{100}}^{\frac{1}{50}}220\sqrt{2}\cos\left(100\pi t-\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}t=\frac{220\sqrt{2}}{100\pi}\sin\left(100\pi t-\frac{\pi}{2}\right)\Bigg|_{\frac{1}{100}}^{\frac{1}{50}}$$

$$=-\frac{22\sqrt{2}}{5\pi}(\mathrm{Wb}).$$

Câu 3. Một vòng dây hình tròn có bán kính $r=\sqrt{\frac{60}{\pi}}(\mathrm{cm})$ quay đều với vận tốc 20 vòng trong một giây trong từ trường đều $B=\frac{1}{50}(\mathrm{T})$. Biểu thức biểu diễn suất điện động $e(t)=\omega NBS\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)(\mathrm{V})$. Từ thông qua vòng dây từ $t_1=\frac{1}{120}(\mathrm{s})$ đến $t=t_2$ $\left(\frac{1}{50}\le t_2\le\frac{3}{40}\right)$ là $1,8.10^{-4}(\mathrm{Wb})$. Tìm t_2.

A. $\frac{1}{40}(\mathrm{s})$.

B. $\frac{1}{50}(\mathrm{s})$.

C. $\frac{1}{30}(\mathrm{s})$.

D. $\frac{1}{45}(\mathrm{s})$

Lời giải

Chọn. A.

$$f=20(\mathrm{Hz})\Rightarrow\begin{cases}\omega=2\pi f=40\pi(\mathrm{rad/s})\\ T=\frac{1}{f}=\frac{1}{20}(\mathrm{s})\end{cases}$$

$$S=\pi r^2=\pi\sqrt{\frac{60}{\pi}}^2=60(\mathrm{cm}^2)=6.10^{-3}(\mathrm{m}^2)$$

$$E_o=\omega NBS=40\pi.1.\frac{1}{50}.6.10^{-3}=\frac{3\pi}{625}(\mathrm{V})$$

$$\phi = \int_{t_1}^{t_2} \omega NBS\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)dt = \int_{\frac{1}{120}}^{t_2} \frac{3\pi}{625}\cos\left(40\pi t - \frac{\pi}{2}\right)dt = \frac{3}{25000}\sin\left(40\pi t - \frac{\pi}{2}\right)\Bigg|_{t_1}^{t_2}$$

$$= \frac{3}{25000}\left[\sin\left(40t_2 - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\right]$$

Ta có:

$$\phi = 1,8.10^{-4}\,(\text{Wb}) \Leftrightarrow \sin\left(40\pi t_2 - \frac{\pi}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow 40\pi t_2 - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \;\Leftrightarrow t_2 = \frac{1}{40} + k\frac{1}{20}\,(k \in \mathbb{Z})$$

Vì $\frac{1}{50} \le t_2 \le \frac{3}{40}$ nên $t_2 = \frac{1}{40}\,(\text{s})$.

Câu 4. Biểu thức suất điện động xuất hiện trong vòng dây là $e(t) = 2\cos(100\pi t + \varphi)(\text{V})$. Biết rằng lúc $t = 0$ thì $\phi_0 = \frac{2.10^{-2}}{\pi}(\text{Wb})$ và $0 < \varphi < \pi$. Tìm φ.

A. $\frac{\pi}{3}$. **B.** $\frac{\pi}{6}$. **C.** $\frac{2\pi}{3}$. **D.** $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn. D.

$$\phi(t) = \int e(t)dt = \int 2\cos(100\pi + \varphi)dt = \frac{1}{50\pi}\sin(100\pi t + \varphi)\ (\text{Wb}),\ (C = 0)$$

Ta có: $\phi_0 = \frac{2.10^{-2}}{\pi}(\text{Wb}) \Rightarrow \sin(100\pi.0 + \varphi) = 1 \Leftrightarrow \sin\varphi = 1 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Theo điều kiện: $0 < \varphi < \pi$ ta tìm được $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Câu 5. Khung dây hình chữ nhật có 100 (vòng), diện tích mỗi vòng là $600(\text{cm}^2)$, quay đều quanh trục đối xứng của khung trong một phút quay được 120 vòng và đặt trong từ trường đều có cảm ứng từ $0,2(\text{T})$. Trục quay vuông góc với các đường cảm ứng từ. Biểu thức suất điện động $e(t) = E_0\sin(\omega t + \varphi)$, $\left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$. Cho biết lúc $t = t_1 = 0,25(\text{s})$ thì $\phi(t_1) = -\frac{3}{5}(\text{Wb})$. Tìm $\phi\left(\frac{3}{4}T\right)$

A. $-\frac{\sqrt{3}}{5}(\text{Wb})$. **B.** $-\frac{3\sqrt{3}}{5}(\text{Wb})$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{5}(\text{Wb})$. **D.** $\frac{3\sqrt{3}}{5}(\text{Wb})$

Lời giải

Chọn. B.

Theo đề:

$$S = 600(\text{cm}^2) = 0,06(\text{m}^2)$$

$$f = \frac{120}{60} = 2(\text{Hz}) \Rightarrow \omega = 2\pi f = 4\pi(\text{rad.s}^{-1}); T = \frac{1}{f} = 0,5(\text{s}).$$

$$E_0 = \omega NBS = 4\pi.100.0,2.0,06 = 4,8\pi(\text{V}) \Rightarrow e(t) = 4,8\pi\sin(4\pi t + \varphi)$$

$$\Rightarrow \phi(t) = \int e(t)dt = -\frac{4,8\pi}{4\pi}\cos(4\pi t + \varphi) = -1,2\cos(4\pi t + \varphi)$$

Mà $\Rightarrow\ \phi(0,25)=-\frac{3}{5}(\text{Wb})\Rightarrow\cos(\pi+\varphi)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos(\varphi)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\varphi=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$

Kết hợp điều kiện: $\varphi=\frac{\pi}{3}$

Ta tìm được $\phi(t)=-1,2\cos\left(4\pi t+\frac{\pi}{3}\right)\Rightarrow\phi\left(\frac{3}{4}T\right)=-1,2\cos\left(4\pi.\left(\frac{3}{4}.0,5\right)+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{5}(\text{Wb})$.

> Cường độ dòng điện chạy qua dây dẫn trong thời gian t là:
> $i(t)=I_o\cos(\omega t+\varphi)(\text{A})$ hoặc $i(t)=I_o\sin(\omega t+\varphi)(\text{A})$
> Điện lượng qua tiết diện S:
> $q(t)=\int i(t)\,\mathrm{d}t\ (\text{C})$
> Điện lượng qua tiết diện S trong thời gian t_1 đến t_2 là: $q=\int_{t_1}^{t_2}i(t)\,\mathrm{d}t\ \ (\text{C})$.

Câu 6. Dòng điện xoay chiều có phương trình $i=2\sin 100\pi t(\text{A})$ qua một khung dây. Điện lượng chạy qua tiết diện dây trong khoảng thời gian từ 0 đến $0,15(\text{s})$ là:

A. $\frac{3}{100\pi}(\text{C})$. **B.** $\frac{4}{100\pi}(\text{C})$. **C.** $\frac{5}{100\pi}(\text{C})$. **D.** $\frac{6}{100\pi}(\text{C})$.

Lời giải

Chọn. B.

Điện lượng cần tìm: $q=\int_0^{0,15}i\,dt=2\int_0^{0,15}\sin 100\pi t\,dt=-\frac{1}{50\pi}\cos 100\pi t\Big|_0^{0,15}=\frac{4}{100\pi}(\text{C})$.

Câu 7. Dòng điện xoay chiều có phương trình $i(t)=2\cos 100\pi t(\text{A})$ qua một dây dẫn. Điện lượng chạy qua tiết diện dây trong khoảng thời gian từ $t_1=\frac{T}{4}$ đến $t_2=\frac{T}{2}$ là:

A. $-\frac{1}{50\pi}(\text{C})$. **B.** $\frac{1}{50}(\text{C})$. **C.** $\frac{1}{50\pi}(\text{C})$. **D.** $-\frac{1}{50}(\text{C})$.

Lời giải

Chọn. C.

$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{2\pi}{100\pi}=\frac{1}{50}(\text{s})$

Từ đó ta tìm được: $t_1=\frac{1}{200}(\text{s})$, $t_2=\frac{1}{100}(\text{s})$

Điện lượng cần tìm: $q=\int_{t_1}^{t_2}i(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{50\pi}\sin 100\pi t\Big|_{\frac{1}{200}}^{\frac{1}{100}}=-\frac{1}{50\pi}(\text{C})$.

Câu 8. Dòng điện xoay chiều hình sin chạy qua một đoạn mạch có biểu thức $i(t)=I_o\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)(\text{A})$. Điện lượng chuyển qua tiết diện thẳng của dây dẫn đoạn mạch trong thời gian $t_o=0$ đến $t_1=0$ và $t_o=0$ đến $t_2=\frac{T}{4}$ lần lượt là:

A. $\frac{I_oT}{\omega},0$. **B.** $\frac{I_oT}{2\pi}$, 1. **C.** $\frac{2\pi}{I_oT}$, 0. **D.** $\frac{I_oT}{2}$, 1.

Lời giải

Chọn. **A.**

Ta có:

$$q=\int_0^{\frac{T}{4}} I_o \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\mathrm{d}t=\frac{I_oT}{2\pi}=\frac{I_o}{\omega},$$

$$q=\int_0^{\frac{T}{2}} I_o \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\mathrm{d}t=0.$$

Chuyên đề 7 BẤT ĐẲNG THỨC TÍCH PHÂN VÀ MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Cho các hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a;b]$. Khi đó:

- Nếu $f(x)\ge g(x)$ với mọi $x\in[a;b]$ thì $\int\limits_a^b f(x)dx\ge\int\limits_a^b g(x)dx$.
- Nếu $f(x)\ge 0$ với mọi $x\in[a;b]$ thì $\int\limits_a^b f(x)dx\ge 0$. Hệ quả: $\int\limits_a^b f^2(x)dx=0\Leftrightarrow f(x)=0$.
- Bất đẳng thức Holder (Cauchy – Schwarz): $\left(\int\limits_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\le\int\limits_a^b f^2(x)dx\int\limits_a^b g^2(x)dx$.

  Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $f(x)=kg(x)$ với $k\in\mathbb{R}$.

B. BÀI TẬP

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$ đồng thời thỏa mãn điều kiện $f(2)=2$, $\int\limits_0^2 xf(x)dx=0$, và $\int\limits_0^2[f'(x)]^2dx=10$. Hãy tính tích phân $I=\int\limits_0^2 x^2f(x)dx$?

Lời giải

Ta có: $0=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 f(x)dx^2=\frac{1}{2}x^2f(x)\Big|_0^2-\frac{1}{2}\int\limits_0^2 x^2f'(x)dx\Rightarrow\boxed{\int\limits_0^2 x^2f'(x)dx=8}$.

Cách 1: Kết hợp $\int\limits_0^2[f'(x)]^2dx=10$, $\int\limits_0^2 x^2f'(x)dx=8$ và $\int\limits_0^2 x^4dx=\frac{32}{5}$ ta được:

$$\int\limits_0^1\left\{[f'(x)]^2-\frac{5}{2}x^2f'(x)+\frac{25}{16}x^4\right\}dx=10-\frac{5.8}{2}+\frac{25}{16}.\frac{32}{5}=0\Leftrightarrow\int\limits_0^1\left[f'(x)-\frac{5}{4}x^2\right]^2dx=0\Leftrightarrow\boxed{f'(x)=\frac{5}{4}x^2}.$$

Cách 2: $64=\left(\int\limits_0^2 x^2f'(x)dx\right)^2\le\int\limits_0^2 x^4dx\int\limits_0^2[f'(x)]^2dx=\frac{32}{5}10=64$. Đẳng thức xảy ra khi: $f'(x)=kx^2$.

Vì $8=\int\limits_0^2 x^2f'(x)dx=k\int\limits_0^2 x^4dx=\frac{32}{5}k\Leftrightarrow k=\frac{5}{4}\Rightarrow\boxed{f'(x)=\frac{5}{4}x^2}$.

Khi đó: $\boxed{f(x)=\frac{5x^3}{12}-\frac{4}{3}}$ vì $f(1)=2$. Khi đó thay vào tích phân $I=\int\limits_0^2 x^2f(x)dx=\frac{8}{9}$.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn điều kiện $f(1)=2$, $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{3}$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx=\frac{25}{3}$. Hãy tính tích phân $I=\int_0^1 xf(x)dx$?

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{3}=\int_0^1 f(x)dx=xf(x)\Big|_0^1-\int_0^1 xf'(x)dx=2-\int_0^1 xf'(x)dx \Leftrightarrow \boxed{\int_0^1 xf'(x)dx=\frac{5}{3}}$.

Cách 1: Kết hợp $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx=\frac{25}{3}$, $\int_0^1 xf'(x)dx=\frac{5}{3}$ và $\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$ ta được:

$$\int_0^1 \left\{[f'(x)]^2-10xf'(x)+25x^2\right\}dx=\frac{25}{3}-\frac{50}{3}+\frac{25}{3}=0 \Leftrightarrow \int_0^1 [f'(x)-5x]^2 dx=0 \Leftrightarrow \boxed{f'(x)=5x}.$$

Cách 2: $\frac{25}{9}=\left(\int_0^1 xf'(x)dx\right)^2 \le \int_0^1 x^2dx\int_0^1 [f'(x)]^2 dx=\frac{1}{3}\frac{25}{3}=\frac{25}{9}$. Đẳng thức xảy ra khi: $f'(x)=kx$.

Vì $\frac{5}{3}=\int_0^1 xf'(x)dx=k\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}k \Leftrightarrow k=5 \Rightarrow \boxed{f'(x)=5x}$.

Khi đó $\boxed{f(x)=\frac{5x^2}{2}-\frac{1}{2}} \Rightarrow I=\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 \frac{5x^3}{2}-\frac{x}{2}dx=\frac{3}{8}$.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ đồng thời thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx=3\pi$, $\int_0^{\pi}(\sin x-x)f'\left(\frac{x}{2}\right)dx=6\pi$, và $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$. Hãy tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[f''(x)]^3 dx$?

Lời giải

Ta có $3\pi=\int_0^{\pi}(\sin x-x)f'\left(\frac{x}{2}\right)d\left(\frac{x}{2}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x-2x)f'(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x-2x)df(x)$

$$\Leftrightarrow 3\pi=(\sin 2x-2x)f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2x)f(x)dx=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xf(x)dx \Leftrightarrow \boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xf(x)dx=\frac{3\pi}{4}}.$$

Cách 1: Kết hợp $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx=3\pi$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xf(x)dx=\frac{3\pi}{4}$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 xdx=\frac{3\pi}{16}$ ta được:

$$\int_0^1\left\{f^2(x)-8\sin^2 xf(x)+16\sin^4 x\right\}dx=0 \Leftrightarrow \int_0^1\left[f(x)-4\sin^2 x\right]^2 dx=0 \Leftrightarrow \boxed{f(x)=4\sin^2 x}$$

Cách 2: $\frac{9\pi^2}{16}=\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xf(x)dx\right)^2 \le \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 xdx\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx=\frac{3\pi}{16}3\pi=\frac{9\pi^2}{16}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow f(x)=k\sin^2 x$. Vậy $\frac{3\pi}{4}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xf(x)dx=k\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 xdx=\frac{3\pi}{16}k \Leftrightarrow \boxed{f(x)=4\sin^2 x}$.

Khi đó: $f(x)=4\sin^2 x=2(1-\cos 2x)\Rightarrow f'(x)=4\sin 2x\Rightarrow f''(x)=8\cos 2x$.

Thay vào ta được: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f''(x)\right]^3 dx=512\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 2xdx=0$.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$ đồng thời thỏa mãn điều kiện $f(2)=1$, $\int_0^2 x^2 f(x)dx=\frac{8}{15}$, $\int_0^2\left[f'(x)\right]^4 dx=\frac{32}{5}$. Hãy tính tích phân $I=\int_0^2 f(x)dx$?

Lời giải

Ta có $\frac{8}{15}=\int_0^2 f(x)d\frac{x^3}{3}=\frac{x^3}{3}f(x)\Big|_0^2-\frac{1}{3}\int_0^2 x^3 f'(x)dx \Leftrightarrow \boxed{\int_0^2 x^3 f'(x)dx=\frac{32}{5}}$.

Cách 1: Như vậy: $\int_0^2\left[f'(x)\right]^4 dx=\frac{32}{5}$, $\int_0^2 x^3 f'(x)dx=\frac{32}{5}$ và $\int_0^2 x^4 dx=\frac{32}{5}$.

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có: $\left[f'(x)\right]^4+x^4+x^4+x^4\ge 4x^3 f'(x)$.

Do vậy: $\int_0^2\left[f'(x)\right]^4 dx+3\int_0^2 x^4 dx\ge 4\int_0^2 x^3 f'(x)dx$. Mà giá trị của hai vế bằng nhau.

Như vậy tồn tại dấu bằng xảy ra tức là: $f'(x)=x\Rightarrow f(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}$ do đó $I=\int_0^2 f(x)dx=\frac{7}{3}$.

Cách 2: Ta áp dụng hai lần liên tiếp bất đẳng thức Holder:

$$\frac{1048576}{625}=\left(\int_0^2 x^3 f'(x)dx\right)^4\le\left(\int_0^2 x^4 dx\right)^2\left(\int_0^2 x^2\left[f'(x)\right]^2 dx\right)^2\le\left(\int_0^2 x^4 dx\right)^3\int_0^2\left[f'(x)\right]^4 dx=\frac{1048576}{625}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $f'(x)=kx$.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$ đồng thời thỏa mãn $\int_1^2 x^3 f(x)dx=31$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của tích phân $I=\int_1^2 f^4(x)dx$?

Lời giải

Ta có áp dụng hai lần liên tiếp bất đẳng thức Holder ta được:

$$31^4=\left(\int_1^2 x^3 f(x)dx\right)^4\le\left(\int_1^2 x^4 dx\right)^2\left(\int_1^2 x^2 f^2(x)dx\right)^2\le\left(\int_1^2 x^4 dx\right)^3\int_1^2 f^4(x)dx\Rightarrow\boxed{\int_1^2 f^4(x)dx\ge 3875}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $f(x)=kx$ nên $k\int_1^2 x^4 dx=31\Leftrightarrow k=5\Leftrightarrow\boxed{f(x)=5x^2}$.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện sau: $\int_0^1 [f(x)f'(x)]^2\,dx \le 1$; $f(0)=1$; $f(1)=\sqrt{3}$. Tính giá trị của $f\left(\frac{1}{2}\right)=?$

Lời giải

Ta áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta được:

$$2 \ge \int_0^1 \left\{[f(x)f'(x)]^2+1\right\}dx \ge 2\int_0^1 f(x)f'(x)\,dx = f^2(x)\Big|_0^1 = f^2(1)-f^2(0)=2$$

Như vậy đẳng thức phải xảy ra tức là: $f(x)f'(x)=1 \Rightarrow \int f(x)f'(x)\,dx=\int 1dx \Rightarrow f(x)=\sqrt{2x+2C}$.

Mà $f(0)=1$; $f(1)=\sqrt{3}$ nên ta suy ra $\boxed{f(x)=\sqrt{2x+1}}$. Vậy $f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}$.

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện sau: $\int_1^2 \frac{[f'(x)]^2}{x^2f^4(x)}dx \le 21$; $f(1)=\frac{1}{8}$; $f(2)=1$. Tính giá trị của $f\left(\frac{3}{2}\right)=?$

Lời giải

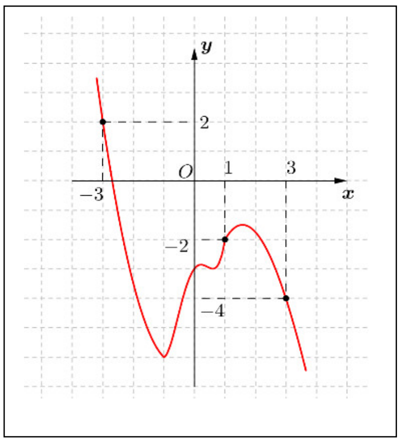
Ta áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta được:

$$42 \ge \int_1^2 \left\{\frac{[f'(x)]^2}{x^2f^4(x)}+9x^2\right\}dx \ge 6\int_1^2 \frac{f'(x)}{f^2(x)}dx = -\frac{6}{f(x)}\Big|_1^2 = 6\left(\frac{1}{f(1)}-\frac{1}{f(2)}\right)=42$$

Như vậy đẳng thức phải xảy ra tức là: $\frac{f'(x)}{f^2(x)}=3x^2 \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)}dx=\int 3x^2dx \Rightarrow f(x)=\frac{1}{C-x^3}$.

Mà $f(1)=\frac{1}{8}$; $f(2)=1$ nên ta suy ra $\boxed{f(x)=\frac{1}{9-x^3}}$. Vậy $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{8}{45}$.

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Đặt $g(x)=2f(x)+(x+1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng** sao cho sao cho tồn tại số thực m thỏa mãn $\int_{-3}^3 \left[\frac{m}{3}-g(x)\right]dx=0$.



A. $6g(1)<m<g(-3)$ **B.** $6g(1)<m<6g(-3)$

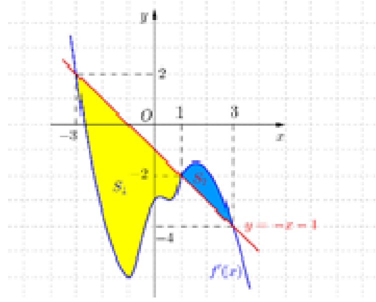
C. $3g(1)<m<3g(-3)$ **D.** $-3g(1)<m<3g(-3)$

Lời giải

$$g'(x)=2f'(x)+2x+2 \Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=-x-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$$

Lập BBT của hàm số $y=g(x)$ như hình vẽ bên.

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	$g(-3)$	$\searrow$	$g(1)$	$\nearrow$	$g(3)$	$\searrow$	



Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow g(1)$ nhỏ nhất trong các giá trị $g(-3)$, $g(1)$, $g(3)$.

Ta có:

$$S_1 > S_2 \Leftrightarrow 2\int_{-3}^{1}\left[-x-1-f'(x)\right]dx > 2\int_{1}^{3}\left[f'(x)+x+1\right]dx \Leftrightarrow -\int_{-3}^{1} g'(x)dx > \int_{1}^{3} g'(x)dx$$

$\Leftrightarrow g(-3)-g(1) > g(3)-g(1) \Leftrightarrow g(-3) > g(3) \Rightarrow$ min, max của $g(x)$ trên $[-3;3]$ lần lượt là $g(1)$, $g(-3) \Rightarrow \boxed{6g(1) \le \int_{-3}^{3} g(x)dx \le 6g(-3)}$. Mà $\int_{-3}^{3}\left[\frac{m}{3}-g(x)\right]dx = 0 \Leftrightarrow 2m = \int_{-3}^{3} g(x)dx$.

$\Rightarrow$ Để phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow \boxed{3g(1) \le m \le 3g(-3)}$

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện sau: $\int_0^1 \sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}}dx \ge 1$; $f(0)=1$; $f(1)=e^2$. Tính giá trị của $f\left(\frac{1}{2}\right)=?$

Lời giải

Cách 1: Áp dụng Holder: $1 \le \left(\int_0^1 \sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}}dx\right)^2 \le \int_0^1 xdx \int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \frac{1}{2}\ln\frac{f(1)}{f(0)} = 1$

Vậy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{f'(x)}{f(x)} = kx$. Thay vào $\int_0^1 \sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}}dx = 1$ ta được $k=4$.

Vì $\frac{f'(x)}{f(x)} = 4x \Rightarrow \boxed{\ln f(x) = 2x^2 + C}$ mà $f(0)=1$; $f(1)=e^2$ nên $C=0$ vậy $f(x)=e^{2x^2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}$

Cách 2: Áp dụng AM – GM: $2 \le \int_0^1 \sqrt{4x}\sqrt{\frac{f'(x)}{f(x)}}dx \le \frac{1}{2}\left(\int_0^1 4xdx + \int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)}dx\right) = 1 + \frac{1}{2}\ln\frac{f(1)}{f(0)} = 2$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{f'(x)}{f(x)} = 4x \Rightarrow \boxed{\ln f(x) = 2x^2 + C}$ mà $f(0)=1$; $f(1)=e^2$ nên $C=0$ vậy $f(x)=e^{2x^2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}$.

Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$ đồng thời thỏa mãn điều kiện $f(2)=16$, $\int_0^2 xf(x)dx = \frac{64}{5}$ và $\int_0^2 \left[f'(x)\right]^2 dx = \frac{1152}{5}$. Hãy tính tích phân $I=\int_0^2 f(x)dx$

Lời giải

Cách 1: $\frac{64}{5}=\int_0^2 f(x)d\left(\frac{x^2}{2}\right)=\frac{x^2}{2}f(x)\Big|_0^2-\int_0^2\frac{x^2}{2}f'(x)dx=32-\frac{1}{2}\int_0^2 x^2f'(x)dx\Rightarrow\boxed{\int_0^2 x^2f'(x)dx=\frac{192}{5}}$

Kết hợp $\int_0^2\left[f'(x)\right]^2dx=\frac{1152}{5}$; $\int_0^2 x^2f'(x)dx=\frac{192}{5}$ và $\int_0^2 x^4dx=\frac{32}{5}$ ta được

$\int_0^2\left[\left[f'(x)\right]^2-12.x^2f'(x)+36x^4\right]dx=\frac{1152}{5}-12.\frac{192}{5}+36.\frac{32}{5}=0\Leftrightarrow\int_0^2\left[f'(x)-6x^2\right]^2=0\Leftrightarrow\boxed{f'(x)=6x^2}$

Cách 2: $\frac{36864}{25}=\left(\int_0^2 x^2f'(x)dx\right)^2\le\int_0^2 x^4dx.\int_0^2\left[f'(x)\right]^2dx=\frac{32}{5}.\frac{1152}{5}=\frac{36864}{25}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow f'(x)=kx^2$. Mà $\frac{192}{5}=\int_0^2 x^2f'(x)dx=k\int_0^2 x^4dx=\frac{32}{5}k\Rightarrow k=6\Rightarrow\boxed{f'(x)=6x^2}$

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn điều kiện $f(1)=1$, $\int_0^1 x^5f(x)dx=\frac{11}{78}$ và $\int_0^1 f'(x)d(f(x))=\frac{4}{13}$. Hãy tính $f(2)$?

Lời giải

Cách 1: $\frac{11}{78}=\int_0^1 x^5f(x)dx=\int_0^1 f(x)d\left(\frac{x^6}{6}\right)=\frac{x^6}{6}f(x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^6}{6}f'(x)dx\Rightarrow\boxed{\int_0^1 x^6f'(x)dx=\frac{2}{13}}$

Lại có: $\int_0^1 f'(x)d(f(x))=\frac{4}{13}\Leftrightarrow\int_0^1\left[f'(x)\right]^2dx=\frac{4}{13}$. Kết hợp với $\int_0^1 x^{12}dx=\frac{1}{13}$ ta được

$\int_0^1\left[\left[f'(x)\right]^2-4x^6f'(x)+4x^{12}\right]dx=\frac{4}{13}-4.\frac{2}{13}+4.\frac{1}{13}=0\Leftrightarrow\int_0^1\left[f'(x)-2x^6\right]^2dx=0\Leftrightarrow\boxed{f'(x)=2x^6}$

Cách 2: $\frac{4}{169}=\left(\int_0^1 x^6f'(x)dx\right)^2\le\int_0^1 x^{12}dx.\int_0^1\left[f'(x)\right]^2dx=\frac{1}{13}.\frac{4}{13}=\frac{4}{169}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow f'(x)=kx^6$. Mà $\frac{2}{13}=\int_0^1 x^6f'(x)dx\Leftrightarrow k\int_0^1 x^{12}dx=\frac{2}{13}\Leftrightarrow k=2\Rightarrow\boxed{f'(x)=2x^6}$

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $[0;2]$ và có bảng biến thiên như hình bên. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để thỏa mãn điều kiện $\int_0^2\left[f(x)-m\right]dx=0$.

x	0		1		2
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	-5	↗	7	↘	-3

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

$$\begin{cases}\max\limits_{x\in[0;2]}f(x)=7\\ \min\limits_{x\in[0;2]}f(x)=-5\end{cases}\Rightarrow\int_0^2(-5)dx\le\int_0^2 f(x)dx\le\int_0^2 7dx.$$

Hay: $-10\le\int_0^2 f(x)dx\le 14$. Mặt khác $\int_0^2\left[f(x)-m\right]dx=0\Leftrightarrow 2m=\int_0^2 f(x)dx.$

Như vậy để phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -10\le 2m\le 14\Leftrightarrow -5\le m\le 7$. Vậy có 13 giá trị m nguyên thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn điều kiện $f(1)=2$, $\int_0^1 x^4 f(x)dx=\frac{3}{11}$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx=\frac{49}{11}$. Hãy tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx$?

Lời giải

$$\frac{3}{11}=\frac{1}{5}\int_0^1 f(x)dx^5=\frac{1}{5}x^5 f(x)\Big|_0^1-\frac{1}{5}\int_0^1 x^5 f'(x)dx \Leftrightarrow \frac{1}{5}\int_0^1 x^5 f'(x)dx=\frac{7}{55}\Leftrightarrow \boxed{\int_0^1 x^5 f'(x)dx=\frac{7}{11}}.$$

Cách 1: Kết hợp $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx=\frac{49}{11}$, $\int_0^1 x^5 f'(x)dx=\frac{7}{11}$ và $\int_0^1 x^{10}dx=\frac{1}{11}$ ta được:

$$\int_0^1 \left\{[f'(x)]^2-14x^5 f'(x)+49x^{10}\right\}dx=\frac{49}{11}-\frac{98}{11}+\frac{49}{11}=0\Leftrightarrow \int_0^1 [f'(x)-7x^5]^2 dx=0\Leftrightarrow \boxed{f'(x)=7x^5}.$$

Cách 2: Ta có: $\frac{49}{121}=\left(\int_0^1 x^5 f'(x)dx\right)^2\le \int_0^1 x^{10}dx\int_0^1 [f'(x)]^2 dx=\frac{1}{11}\frac{49}{11}=\frac{49}{121}$.

Đẳng thức xảy ra khi: $f'(x)=kx^5$. Vì $\frac{7}{11}=\int_0^1 x^5 f'(x)dx=k\int_0^1 x^{10}dx=\frac{1}{11}k\Leftrightarrow k=7\Rightarrow \boxed{f'(x)=7x^5}$.

Khi đó: $\boxed{f(x)=\frac{7x^6}{6}+\frac{5}{6}}$ vì $f(1)=2$. Khi đó thay vào tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 \frac{7x^6}{6}+\frac{5}{6}dx=1$.

Câu 14: Tính giới hạn: $\lim\int_0^1 \frac{ne^{x(1-n)}}{1+e^x}dx=?$

Lời giải

Ta có với $x\in[0;1]$ thì $\frac{1}{2}\le\frac{e^x}{1+e^x}\le\frac{e^x}{2}\Leftrightarrow \frac{ne^{-nx}}{2}\le\frac{ne^{x(1-n)}}{1+e^x}\le\frac{ne^{x(1-n)}}{2}$.

Do đó: $\lim\int_0^1\frac{ne^{-nx}}{2}dx\le\lim\int_0^1\frac{ne^{x(1-n)}}{1+e^x}dx\le\lim\int_0^1\frac{ne^{x(1-n)}}{2}dx\Rightarrow \lim\frac{1-e^{-n}}{2}\le\lim\int_0^1\frac{ne^{x(1-n)}}{1+e^x}dx\le\frac{n(1-e^{1-n})}{2(n-1)}$.

Vậy $\frac{1}{2}\le\lim\int_0^1\frac{ne^{x(1-n)}}{1+e^x}dx\le\frac{1}{2}$ cho nên ta suy ra $\boxed{\lim\int_0^1\frac{ne^{x(1-n)}}{1+e^x}dx=\frac{1}{2}}$.

Câu 15: Tính giới hạn: $\lim\int_a^b (1+x+x^2+...+x^n)dx$ với $0<a<b<1$.

Lời giải

Ta có $\int_a^b(1+x+x^2+...+x^n)dx=\int_a^b\frac{1}{1-x}dx-\int_a^b\frac{x^{n+1}}{1-x}dx=\ln\frac{1-a}{1-b}-\int_a^b\frac{x^{n+1}}{1-x}dx$.

Mà $0\le\int_a^b\frac{x^{n+1}}{1-x}dx\le\frac{1}{1-b}\int_0^1 x^{n+1}dx=\frac{1}{(1-b)(n+2)}\to 0$. Vậy $\boxed{\lim\int_a^b(1+x+x^2+...+x^n)dx=\ln\frac{1-a}{1-b}}$.

Câu 16: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện sau: $\int\limits_1^2 \frac{[f'(x)]^2}{xf(x)}dx \le 24$; $f(1)=1$; $f(2)=16$. Tính giá trị của $f(\sqrt{2})=?$

Lời giải

Ta áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta được:

$$48 \ge \int\limits_1^2 \left\{\frac{[f'(x)]^2}{xf(x)}+16x\right\}dx \ge 8\int\limits_1^2 \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 16\sqrt{f(x)}\Big|_1^2 = 16\left(\sqrt{f(2)}-\sqrt{f(1)}\right)=48$$

Như vậy đẳng thức phải xảy ra tức là:

$$\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}=4x \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}dx=\int 2xdx \Rightarrow \sqrt{f(x)}=x^2+C \Rightarrow f(x)=\left(x^2+C\right)^2.$$

Mà $f(1)=1$; $f(2)=16$ nên ta suy ra $\boxed{f(x)=x^4}$. Vậy $f(\sqrt{2})=4$.

Câu 17: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[-1;1]$ đồng thời thỏa mãn điều kiện $f^2(x)\le 1$ với mọi $x\in[-1;1]$ và $\int\limits_{-1}^1 f(x)dx=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\int\limits_{-1}^1 x^2 f(x)dx$?

A. $-\frac{1}{2}$ **B.** $-\frac{1}{4}$ **C.** $-\frac{2}{3}$ **D.** -1

Lời giải

Ta đặt $I=\int\limits_{-1}^1 x^2 f(x)dx \Rightarrow |I|=\left|\int\limits_{-1}^1 \left(x^2-a\right)f(x)dx\right| \le \int\limits_{-1}^1 \left|x^2-a\right|\left|f(x)\right|dx \le \int\limits_{-1}^1 \left|x^2-a\right|dx \quad \forall a\in\mathbb{R}$.

Do đó ta suy ra $|I|\le \min\limits_{a\in\mathbb{R}} \int\limits_{-1}^1 \left|x^2-a\right|dx$. Đến đây ta chia bài toán thành 3 trường hợp như sau:

Trường hợp 1: Nếu $a\le 0$ thì $\min\limits_{a\in\mathbb{R}} \int\limits_{-1}^1 \left|x^2-a\right|dx = \min\limits_{a\le 0} \int\limits_{-1}^1 \left(x^2-a\right)dx = \min\limits_{a\le 0}\left(\frac{2}{3}-2a\right)=\frac{2}{3}$.

Trường hợp 2: Nếu $a\ge 1$ thì $\min\limits_{a\in\mathbb{R}} \int\limits_{-1}^1 \left|x^2-a\right|dx = \min\limits_{a\ge 1} \int\limits_{-1}^1 \left(a-x^2\right)dx = \min\limits_{a\ge 1}\left(2a-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}$.

Trường hợp 3: Nếu $a\in[0;1]$ thì $\min\limits_{a\in\mathbb{R}} \int\limits_{-1}^1 \left|x^2-a\right|dx = \min\limits_{a\in[0;1]}\left(\int\limits_{-1}^{-\sqrt{a}} \left(x^2-a\right)dx + \int\limits_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} \left(a-x^2\right)dx + \int\limits_{\sqrt{a}}^1 \left(x^2-a\right)dx\right)$

$$\Leftrightarrow \min\limits_{a\in\mathbb{R}} \int\limits_{-1}^1 \left|x^2-a\right|dx = \min\limits_{a\in[0;1]}\left[\left(\frac{x^3}{3}-ax\right)\Big|_{-1}^{-\sqrt{a}} + \left(ax-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} + \left(\frac{x^3}{3}-ax\right)\Big|_{\sqrt{a}}^1\right]$$

$$\Leftrightarrow \min\limits_{a\in\mathbb{R}} \int\limits_{-1}^1 \left|x^2-a\right|dx = \min\limits_{a\in[0;1]}\left(\frac{8a\sqrt{a}}{3}-2a+\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2} \text{ khi và chỉ khi } a=\frac{1}{4}.$$

Kết luận: Như vậy $\min\limits_{a\in\mathbb{R}} \int\limits_{-1}^1 \left|x^2-a\right|dx=\frac{1}{2}$ do đó $|I|\le\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\min I=-\frac{1}{2}}$.

Câu 18: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn $f(x)\in[-8;8]$ với mọi $x\in[0;1]$ và $\int\limits_0^1 xf(x)dx=3$. Tìm giá trị lớn nhất của $\int\limits_0^1 x^3 f(x)dx$?

A. 2 **B.** $\dfrac{31}{16}$ **C.** $\dfrac{4}{3}$ **D.** $\dfrac{17}{8}$

Lời giải

Ta đặt $I=\int_0^1 x^3 f(x)dx$ khi đó: $|I-3a|=\left|\int_0^1 (x^3-ax)f(x)dx\right|\le\int_0^1 |x^3-ax||f(x)|dx$

$\Rightarrow |I-3a|\le 8\int_0^1 |x^3-ax|dx\quad\forall a\in\mathbb{R}\Rightarrow I\le 3a+8\int_0^1 |x^3-ax|dx\quad\forall a\in\mathbb{R}\Rightarrow I\le\min\limits_{a\in\mathbb{R}}\left(3a+8\int_0^1 |x^3-ax|dx\right)$.

Trường hợp 1: Nếu $a\le 0$ khi đó $\min\limits_{a\in\mathbb{R}}\left(3a+8\int_0^1 |x^3-ax|dx\right)=\min\limits_{a\le 0}\left(3a+8\int_0^1 (x^3-ax)dx\right)=\min\limits_{a\le 0}(2-a)=2$

Trường hợp 2: Nếu $a\ge 1$ khi đó $\min\limits_{a\in\mathbb{R}}\left(3a+8\int_0^1 |x^3-ax|dx\right)=\min\limits_{a\ge 1}\left(3a+8\int_0^1 (ax-x^3)dx\right)=\min\limits_{a\ge 1}(7a-2)=5$

Trường hợp 3: Nếu $a\in[0;1]$ khi đó ta có đánh giá sau:

$$\min_{a\in\mathbb{R}}\left(3a+8\int_0^1 |x^3-ax|dx\right)=\min_{a\in[0;1]}\left(3a+8\int_0^{\sqrt{a}}(ax-x^3)dx+8\int_{\sqrt{a}}^1 (x^3-ax)dx\right)=\min_{a\in[0;1]}(4a^2-a+2)=\frac{31}{16}$$

Kết luận: Vậy $\min\limits_{a\in\mathbb{R}}\left(3a+8\int_0^1 |x^3-ax|dx\right)=\dfrac{31}{16}\Rightarrow I\le\dfrac{31}{16}$. Đẳng thức xảy ra khi $a=\dfrac{1}{8};I=\dfrac{31}{12}>3a=\dfrac{3}{8}$.

Câu 19: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện sau: $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|=6$ và $\int_0^1 x^2 f(x)dx=0$. Giá trị lớn nhất của tích phân $\int_0^1 x^3 f(x)dx$ bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{1}{8}$ **B.** $\dfrac{3\left(2-\sqrt[3]{4}\right)}{4}$ **C.** $\dfrac{2-\sqrt[3]{4}}{16}$ **D.** $\dfrac{1}{24}$

Lời giải

Ta có với mọi số thực $a\in\mathbb{R}$ thì $\int_0^1 ax^2 f(x)dx=0$ do đó:

$$\left|\int_0^1 x^3 f(x)dx\right|=\left|\int_0^1 (x^3-ax^2)f(x)dx\right|\le\int_0^1 |x^3-ax^2||f(x)|dx\le 6\int_0^1 |x^3-ax^2|dx\quad\forall a\in\mathbb{R}$$

Do đó: $\left|\int_0^1 x^3 f(x)dx\right|\le\min\limits_{a\in\mathbb{R}}6\int_0^1 |x^3-ax^2|dx=\min\limits_{a\in\mathbb{R}}g(a)$. Tới đây ta chia các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Nếu $a\le 0$ thì $x^3-ax^2=x^2(x-a)\ge 0\ \forall x\in[0;1]$. Khi đó:

$$g(a)=6\int_0^1 |x^3-ax^2|dx=6\int_0^1 x^3-ax^2dx=6\left(\frac{1}{4}-\frac{a}{3}\right)\Rightarrow\min_{a\le 0}g(a)=\frac{3}{2}$$

Trường hợp 2: Nếu $a\ge 1$ thì $x^3-ax^2=x^2(x-a)\le 0\ \forall x\in[0;1]$. Khi đó:

$$g(a)=6\int_0^1 |x^3-ax^2|dx=6\int_0^1 ax^2-x^3dx=6\left(\frac{a}{3}-\frac{1}{4}\right)\Rightarrow\min_{a\ge 1}g(a)=\frac{1}{2}$$

Trường hợp 3: Nếu $a\in[0;1]$ thì $f(a)=6\int_0^1 |x^3-ax^2|dx=6\int_0^a ax^2-x^3dx+\int_a^1 x^3-ax^2dx=\dfrac{2a^4-4a+3}{2}$.

Ta tìm được $\min\limits_{a\in[0;1]}g(a)=\min\limits_{a\in[0;1]}\left(\dfrac{2a^4-4a+3}{2}\right)=\dfrac{3\left(2-\sqrt[3]{4}\right)}{4}<\dfrac{1}{2}<\dfrac{3}{2}$ vậy $\boxed{\min\limits_{a\in\mathbb{R}}g(a)=\dfrac{3\left(2-\sqrt[3]{4}\right)}{4}}$.

Do vậy: $\left|\int_0^1 x^3 f(x)dx\right| \le \min_{a\in\mathbb{R}} g(a) \Rightarrow \left|\int_0^1 x^3 f(x)dx\right| \le \dfrac{3\left(2-\sqrt[3]{4}\right)}{4} \Rightarrow \boxed{\max_{[0;1]} \int_0^1 x^3 f(x)dx = \dfrac{3\left(2-\sqrt[3]{4}\right)}{4}}$.

Câu 20: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $3f(x)+xf'(x)\ge x^{2018}$ với mọi $x\in[0;1]$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng:

A. $\dfrac{1}{2021\times 2022}$ **B.** $\dfrac{1}{2018\times 2021}$ **C.** $\dfrac{1}{2018\times 2019}$ **D.** $\dfrac{1}{2019\times 2021}$

Lời giải

Ta có: $3f(x)+x.f'(x)\ge x^{2018} \Rightarrow 3x^2 f(x)+x^3 f'(x)\ge x^{2020}$

$\Rightarrow \left[x^3 f(x)\right]' \ge x^{2020} \Rightarrow \int_0^t \left[x^3 f(x)\right]' dx \ge \int_0^t x^{2020}dx \ \ \forall t\in[0;1] \Rightarrow f(t)\ge \dfrac{t^{2018}}{2021}$

Khi đó $\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx \ge \int_0^1 \dfrac{x^{2018}}{2021}dx = \dfrac{1}{2019.2021}$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ là $\dfrac{1}{2019.2021}$.

Câu 21: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0, \int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx = \dfrac{1}{11}$ và $\int_0^1 x^4 f(x)dx = -\dfrac{1}{55}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\dfrac{-1}{7}$ **B.** $\dfrac{1}{7}$ **C.** $\dfrac{-1}{55}$ **D.** $\dfrac{1}{11}$

Lời giải

$\int_0^1 x^4 f(x)dx = \left[\dfrac{x^5}{5}f(x)\right]\Big|_0^1 - \int_0^1 \dfrac{x^5}{5}f'(x)dx$. Suy ra $\int_0^1 x^5 f'(x)dx = \dfrac{1}{11}$. Hơn nữa ta dễ dàng tính được

$\int_0^1 \left(x^5\right)^2 dx = \dfrac{1}{11}$. Do đó $\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx - 2\int_0^1 x^5 f'(x)dx + \int_0^1 \left(x^5\right)^2 dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left[f'(x)-x^5\right]^2 dx = 0$.

Suy ra $f'(x)=x^5$, do đó $f(x)=\dfrac{1}{6}x^6+C$. Vì $f(1)=0$ nên $C=-\dfrac{1}{6}$. Vậy $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \dfrac{x^6-1}{6}dx = \dfrac{-1}{7}$.

Câu 22: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0, \int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx = \dfrac{3}{2}-2\ln 2$ và $\int_0^1 \dfrac{f(x)}{(x+1)^2}dx = 2\ln 2 - \dfrac{3}{2}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\dfrac{1-2\ln 2}{2}$ **B.** $\dfrac{3-2\ln 2}{2}$ **C.** $\dfrac{3-4\ln 2}{2}$ **D.** $\dfrac{1-\ln 2}{2}$

Lời giải

Ta có: $\int_0^1 \dfrac{f(x)}{(x+1)^2}dx = \int_0^1 f(x)d\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right) = \left[\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)f(x)\right]\Big|_0^1 - \int_0^1 \left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)f'(x)dx$.

Suy ra $\int_0^1 \left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)f'(x)dx = \dfrac{3}{2}-2\ln 2$. Hơn nữa ta tính được:

$$\int_0^1\left(1-\frac{1}{x+1}\right)^2dx=\int_0^1\left(1-2\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx=\left[x-2\ln|x+1|-\frac{1}{(x+1)}\right]\Bigg|_0^1=\frac{3}{2}-2\ln 2.$$

Do đó $\int_0^1\left[f'(x)\right]^2dx-2\int_0^1\left(1-\frac{1}{x+1}\right)f'(x)dx+\int_0^1\left(1-\frac{1}{x+1}\right)^2dx=0\Leftrightarrow\int_0^3\left[f'(x)+\frac{1}{x+1}-1\right]^2dx=0$.

Suy ra $f'(x)=1-\frac{1}{x+1}$, do đó $f(x)=x-\ln(x+1)+C$. Vì $f(1)=0$ nên $C=\ln 2-1$.

Ta được $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left[x-\ln(x+1)+\ln 2-1\right]dx=\frac{1}{2}-\ln 2$.

Câu 23: Cho hàm số $y=f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời ta đặt $g(x)=1+\int_0^x f(t)dt$. Biết $g(x)\le\sqrt{f(x)}$ với mọi $x\in[0;1]$. Tích phân $\int_0^1\frac{1}{g(x)}dx$ có giá trị lớn nhất bằng:

A. $\frac{1}{3}$ **B.** 1 **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\frac{1}{2}$

Lời giải

Đặt $F(x)=\int_0^x f(t)dt\Rightarrow g(x)=1+F(x)\le\sqrt{f(x)}\ \ \forall x\in[0;1]\Rightarrow\frac{F'(x)}{(F(x)+1)^2}-1\ge 0\ \ \forall x\in[0;1]$

$\Rightarrow h(t)=\int_0^t\left(\frac{F'(x)}{(F(x)+1)^2}-1\right)dx=1-t-\frac{1}{F(t)+1}$ là hàm số đồng biến trên $[0;1]$ do vậy ta có đánh giá:

$h(x)\ge h(0)\ \ \forall x\in[0;1]\Rightarrow 1-x-\frac{1}{F(x)+1}\ge 0\Rightarrow\frac{1}{F(x)+1}\le 1-x\ \ \forall x\in[0;1]\Rightarrow\boxed{\int_0^1\frac{1}{g(x)}dx\le\frac{1}{2}}$.

Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời ta đặt $g(x)=1+3\int_0^x f(t)dt$. Biết $g(x)\ge f^2(x)$ với mọi $x\in[0;1]$. Tích phân $\int_0^1\sqrt{g(x)}dx$ có giá trị lớn nhất bằng:

A. $\frac{5}{2}$ **B.** $\frac{4}{3}$ **C.** $\frac{7}{4}$ **D.** $\frac{9}{5}$

Lời giải

Đặt $F(x)=\int_0^x f(t)dt\Rightarrow g(x)=1+3F(x)\ge f^2(x)\ \ \forall x\in[0;1]\Rightarrow\frac{F'(x)}{\sqrt{3F(x)+1}}-1\le 0\ \ \forall x\in[0;1]$

$\Rightarrow h(t)=\int_0^t\left(\frac{F'(x)}{\sqrt{3F(x)+1}}-1\right)dx=\frac{2}{3}\sqrt{3F(t)+1}-t-\frac{2}{3}$ là hàm số nghịch biến trên $[0;1]$ do vậy ta có:

$h(x)\le h(0)\ \ \forall x\in[0;1]\Rightarrow\frac{2}{3}\sqrt{3F(x)+1}-t-\frac{2}{3}\le 0\Rightarrow\sqrt{3F(x)+1}\le\frac{3}{2}x+1\ \ \forall x\in[0;1]\Rightarrow\boxed{\int_0^1\sqrt{g(x)}dx\le\frac{7}{4}}$.

Câu 25: Cho hàm số $y=f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời ta đặt $g(x)=1+\int_0^{x^2}f(t)dt$. Biết $g(x)\ge 2xf(x^2)$ với mọi $x\in[0;1]$. Tích phân $\int_0^1 g(x)dx$ có giá trị lớn nhất bằng:

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 1

Lời giải

Đặt $F\left(x^2\right)=\int\limits_0^{x^2} f(t)\,dt \Rightarrow g(x)=1+F\left(x^2\right)\ge 2xf\left(x^2\right)\ \forall x\in[0;1]\Rightarrow \dfrac{2xf\left(x^2\right)}{1+F\left(x^2\right)}-1\le 0\ \forall x\in[0;1]$

$\Rightarrow h(t)=\int\limits_0^{\sqrt{t}}\left(\dfrac{2xf\left(x^2\right)}{1+F\left(x^2\right)}-1\right)dx=\ln\left(1+F(t)\right)-\sqrt{t}$ là hàm số nghịch biến trên $[0;1]$ do vậy ta có:

$h(x)\le h(0)\ \forall x\in[0;1]\Rightarrow \ln\left(1+F(x)\right)-\sqrt{x}\le 0\Rightarrow 1+F(x)\le e^{\sqrt{x}}\ \ \forall x\in[0;1]\Rightarrow \boxed{\int\limits_0^1 g(x)dx\le 2}$.

Câu 26: Cho hàm số $y=f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời ta đặt $g(x)=1+2\int\limits_0^x f(t)\,dt$. Biết $g(x)\ge\left[f(x)\right]^3$ với mọi $x\in[0;1]$. Tích phân $\int\limits_0^1\sqrt[3]{\left[g(x)\right]^2}\,dx$ có giá trị lớn nhất bằng:

A. $\dfrac{5}{3}$ **B.** 4 **C.** $\dfrac{4}{3}$ **D.** 5

Lời giải

Ta đặt $F(x)=\int\limits_0^x f(t)\,dt$ khi đó $g(x)=1+2F(x)\ge\left[f(x)\right]^3\ \ \forall x\in[0;1]$.

Do vậy $\dfrac{f(x)}{\sqrt[3]{1+2F(x)}}-1\le 0\ \ \forall x\in[0;1]\Leftrightarrow \dfrac{F'(x)}{\sqrt[3]{1+2F(x)}}-1\le 0\ \ \forall x\in[0;1]$.

Xét hàm số: $h(t)=\int\limits_0^t\left(\dfrac{F'(x)}{\sqrt[3]{1+2F(x)}}-1\right)dx=\dfrac{3}{4}\left(\sqrt[3]{1+2F(t)}\right)^2-t-\dfrac{3}{4}\ \ \forall t\in[0;1]$ là hàm nghịch biến trên $[0;1]$ cho nên $h(t)\le h(0)\ \ \forall t\in[0;1]\Rightarrow \dfrac{3}{4}\left(\sqrt[3]{1+2F(t)}\right)^2-t-\dfrac{3}{4}\le 0\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{1+2F(t)}\right)^2\le\dfrac{4}{3}t+1\ \ \forall t\in[0;1]$.

Do đó: $\left(\sqrt[3]{g(x)}\right)^2\le\dfrac{4}{3}x+1\ \ \forall x\in[0;1]\Rightarrow\int\limits_0^1\sqrt[3]{\left[g(x)\right]^2}dx\le\int\limits_0^1\left(\dfrac{4}{3}x+1\right)dx\Rightarrow\boxed{\int\limits_0^1\sqrt[3]{\left[g(x)\right]^2}dx\le\dfrac{5}{3}}$. **Chọn A.**

Câu 27: Cho hàm số f có đạo hàm liên tục trên $[1;8]$ đồng thời thỏa mãn điều kiện:

$$\int\limits_1^2\left[f\left(x^3\right)\right]^2dx+2\int\limits_1^2 f\left(x^3\right)dx=\frac{2}{3}\int\limits_1^8 f(x)\,dx-\int\limits_1^2\left(x^2-1\right)^2dx$$

Tính tích phân $\int\limits_1^2\left[f'(x)\right]^3dx$ bằng:

A. $\dfrac{8\ln 2}{27}$ **B.** $\dfrac{\ln 2}{27}$ **C.** $\dfrac{4}{3}$ **D.** $\dfrac{5}{4}$

Lời giải

Đặt $t=x^3\Rightarrow dt=3x^2dx$. Khi đó: $\int\limits_1^2\left[f\left(x^3\right)\right]^2dx+2\int\limits_1^2 f\left(x^3\right)dx=\dfrac{2}{3}\int\limits_1^8 f(x)\,dx-\int\limits_1^2\left(x^2-1\right)^2dx$

$\Rightarrow\int\limits_1^8\dfrac{1}{\sqrt[3]{t^2}}\left[f(t)\right]^2dt+2\int\limits_1^8\dfrac{1}{\sqrt[3]{t^2}}f(t)\left(1-\sqrt[3]{t^2}\right)dt+\dfrac{2}{3}\int\limits_1^8\dfrac{1}{\sqrt[3]{t^2}}\left(1-\sqrt[3]{t^2}\right)^2dt=0$

$$\Rightarrow \int_1^8 \left[\frac{f(t)+1-\sqrt[3]{t^2}}{\sqrt[3]{t}}\right]^2 dt = 0 \Rightarrow \boxed{f(t)=\sqrt[3]{t^2}-1} \Rightarrow \boxed{\int_1^2 \left[f'(x)\right]^3 dx = \frac{8\ln 2}{27}}$$. **Chọn A.**

Câu 28: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương, liên tục trên $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f(0)=1$ và $3\int_0^1\left[f'(x)f^2(x)+\frac{1}{9}\right]dx \le 2\int_0^1 \sqrt{f'(x)}f(x)dx$. Tính tích phân $\int_0^1 f^3(x)dx$?

A. $\frac{3}{2}$ **B.** $\frac{5}{4}$ **C.** $\frac{5}{6}$ **D.** $\frac{7}{6}$

Lời giải

Theo bất đẳng thức Holder ta có: $\left(\int_0^1 \sqrt{f'(x)}f(x)dx\right)^2 \le \int_0^1 f'(x)f^2(x)dx\int_0^1 1dx$.

Như vậy: $9\left(\int_0^1\left[f'(x)f^2(x)+\frac{1}{9}\right]dx\right)^2 \le 4\int_0^1 f'(x)f^2(x)dx \Leftrightarrow 9\left(\int_0^1\left[f'(x)f^2(x)-\frac{1}{9}\right]dx\right)^2 \le 0$.

Do đó: $f'(x)f^2(x)=\frac{1}{9} \Rightarrow f^3(x)=\frac{1}{3}x+1 \Rightarrow \boxed{\int_0^1 f^3(x)dx=\frac{7}{6}}$.

Câu 29: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f(1)=\frac{3}{2}$; $\int_0^1 f(x)dx=\frac{5}{6}$ và $\int_0^1 (x-1)\sqrt{1+\frac{x}{x-2}(f'(x))^2}dx=-\frac{1}{3}$. Tính tích phân $\int_0^1 f^2(x)dx=?$

A. $\frac{7}{3}$ **B.** $\frac{8}{15}$ **C.** $\frac{53}{60}$ **D.** $\frac{203}{60}$

Lời giải

Sử dụng tích phân từng phần ta có: $\int_0^1 f(x)dx=\frac{5}{6}=f(1)-\int_0^1 xf'(x)dx \Rightarrow \int_0^1 xf'(x)dx=\frac{2}{3}$.

Mặt khác: $2(1-x)\sqrt{1+\frac{x}{x-2}(f'(x))^2} \le (1-x)^2+1+\frac{x}{x-2}(f'(x))^2$.

Tích phân hai vế ta $\Rightarrow \frac{2}{3} \le \frac{4}{3}+\int_0^1 \frac{x}{x-2}(f'(x))^2dx \Rightarrow \int_0^1 \frac{x}{2-x}(f'(x))^2dx \le \frac{2}{3}$.

Áp dụng Holder: $\left(\int_0^1 xf'(x)dx\right)^2=\frac{4}{9}=\left(\int_0^1\sqrt{x(2-x)}\sqrt{\frac{x}{2-x}}f'(x)dx\right)^2 \le \int_0^1 x(2-x)dx\int_0^1\frac{x}{2-x}(f'(x))^2dx$.

Do vậy $\Rightarrow \int_0^1 \frac{x}{2-x}(f'(x))^2dx \ge \frac{2}{3}$ nên dấu bằng $\Leftrightarrow f'(x)=2-x \Rightarrow f(x)=2x-\frac{x^2}{2} \Rightarrow \int_0^1 f^2(x)dx=\frac{53}{60}$.

Câu 30: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn điều kiện $f(0)=2$ và $21(x^2-1)^2-12(x-1)^2-12xf(x)=\left[f'(x)\right]^2$ $\forall x\in[0;1]$. Tính $\int_0^1 f(x)dx=?$

A. $\frac{3}{4}$ **B.** $\frac{4}{3}$ **C.** -2 **D.** $-\frac{5}{4}$

Lời giải

Ta có $21(x^2-1)^2-12(x-1)^2-12xf(x)=\left[f'(x)\right]^2$

$$\Rightarrow \frac{36}{5}-6\int_0^1 f(x)\,d(x^2-1)=\int_0^1 [f'(x)]^2\,dx \Rightarrow -\frac{24}{5}+6\int_0^1 (x^2-1)f'(x)\,dx=\int_0^1 [f'(x)]^2\,dx$$

$\Rightarrow \int_0^1 [f'(x)-3x^2+3]^2\,dx=0 \Rightarrow f(x)=x^3-3x+2$. Chọn đáp án A.

Câu 31: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 (f'(x))^2\,dx=\int_0^1 (x+1).e^x.f(x)\,dx=\frac{e^2-1}{4}$ và $f(1)=0$. Tính $\int_0^1 f(x)\,dx=?$

A. $2+e$ **B.** $2-e$ **C.** e **D.** $1-e$

Lời giải

Ta có: $\frac{e^2-1}{4}=\int_0^1 (x+1).e^x.f(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,d(x.e^x)=-\int_0^1 x.e^x.f'(x)\,dx$

$$\Rightarrow \int_0^1 (f'(x))^2\,dx=-\int_0^1 x.e^x.f'(x)\,dx=\frac{e^2-1}{4}=\int_0^1 x^2.e^{2x}\,dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (f'(x))^2\,dx+\int_0^1 x^2.e^{2x}\,dx+2\int_0^1 x.e^x.f'(x)\,dx=0 \Rightarrow \int_0^1 (f'(x)+x.e^x)^2\,dx=0$$

$\Rightarrow f'(x)=-x.e^x \Rightarrow f(x)=e^x(x-1) \Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx=2-e$. Chọn đáp án B.

Câu 32: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn điều kiện $f(0)=0, f(1)=1$ và $\int_0^1 \frac{[f'(x)]^2}{e^x}\,dx=\frac{1}{e-1}$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)\,dx=?$

A. $\frac{e-2}{e-1}$ **B.** $\frac{e-1}{e-2}$ **C.** 1 **D.** $\frac{1}{(e-1)(e-2)}$

Lời giải

Theo bất đẳng thức Holder ta có: $\int_0^1 \frac{[f'(x)]^2}{e^x}\,dx.\int_0^1 e^x\,dx \geq \left[\int_0^1 f'(x)\,dx\right]^2 \Leftrightarrow \frac{1}{e-1}.(e-1)\geq 1$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{f'(x)}{\sqrt{e^x}}=k.\sqrt{e^x} \Leftrightarrow f'(x)=k.e^x$. Vì $\int_0^1 f'(x)\,dx=1 \Rightarrow k=\frac{1}{e-1}$

Vậy $f(x)=\frac{e^x+C}{e-1}$. Mà $f(0)=0, f(1)=1$ và $f(x)=\frac{e^x-1}{e-1}$. Vậy $I=\frac{e-2}{e-1}$. Chọn đáp án A.

Câu 33: Cho hàm số $y=f(x)$ dương và liên tục trên $[1;3]$ thỏa mãn $\max_{[1;3]} f(x)=2; \min_{[1;3]} f(x)=\frac{1}{2}$ và biểu thức $S=\int_1^3 f(x)\,dx\int_1^3 \frac{1}{f(x)}\,dx$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó tính $\int_1^3 f(x)\,dx$?

A. $\frac{7}{2}$ **B.** $\frac{5}{2}$ **C.** $\frac{7}{5}$ **D.** $\frac{3}{5}$

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{2}\leq f(x)\leq 2 \Rightarrow (2f(x)-1)(f(x)-2)\leq 0 \Rightarrow f(x)+\frac{1}{f(x)}\leq\frac{5}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{f(x)} \le \dfrac{5}{2} - f(x) \Rightarrow S \le \int_1^3 f(x)dx\left(\int_1^3 \dfrac{5}{2} - f(x)dx\right)$. Ta tìm được $\max S = \dfrac{25}{4}$ khi $\int_1^3 f(x)dx = \dfrac{5}{2}$.

Câu 34: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ đồng thời $f(0)=0, f(1)=1$ và $\int_0^1 [f'(x)]^2\sqrt{1+x^2}\,dx = \dfrac{1}{\ln(1+\sqrt{2})}$. Tính tích phân $\int_0^1 \dfrac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}}dx$ bằng?

A. $\dfrac{1}{2}\ln^2(1+\sqrt{2})$ **B.** $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\ln^2(1+\sqrt{2})$

C. $\dfrac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})$ **D.** $(\sqrt{2}-1)\ln(1+\sqrt{2})$

Lời giải

Theo bất đẳng thức Holder ta có: $\int_0^1 [f'(x)]^2\sqrt{1+x^2}\,dx.\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx \ge \left[\int_0^1 f'(x)dx\right]^2 = 1$

Mặt khác $\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^1 = \ln(1+\sqrt{2})$

Vậy đẳng thức xảy ra khi $f'(x).\sqrt[4]{1+x^2} = \dfrac{k}{\sqrt[4]{1+x^2}} \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{k}{\sqrt{1+x^2}}$

Vì $\int_0^1 f'(x)dx = 1$ nên $k = \dfrac{1}{\ln(1+\sqrt{2})}$. Vậy $f(x) = \dfrac{1}{\ln(1+\sqrt{2})}.\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C$

Vì $\begin{cases} f(0)=0 \\ f(1)=1 \end{cases}$ nên $C=0$. Do đó $\int_0^1 \dfrac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}}dx = \dfrac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})$. Chọn đáp án C.

Câu 35: Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = \int_0^1 |x^2-ax|dx$ với $a\in[0,1]$

A. $\dfrac{2-\sqrt{2}}{6}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}-1}{3}$. **C.** $\dfrac{2-\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}-1}{6}$

Lời giải

Phá dấu trị tuyệt đối ta có

$$S = \int_0^1 |x^2-ax|dx = -\int_0^a (x^2-ax)dx + \int_a^1 (x^2-ax)dx = \left(\dfrac{-x^3}{3}+\dfrac{ax^2}{3}\right)\Bigg|_0^a + \left(\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{ax^2}{3}\right)\Bigg|_a^1 = \dfrac{2a^3-3a+2}{6}$$

$$S_{min} = f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{2-\sqrt{2}}{6}.$$

Câu 36: Cho hàm số $y=f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$và thỏa mãn $f(1)=e.f(0)=e;\int_0^1\left(\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right)^2dx \le 1$. Tìm mệnh đề đung

A. $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=e^2$. **B.** $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{e}$. **C.** $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{e}$. **D.** $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2e}$

Lời giải

Ta có $\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)}dx = ln\left|f(x)\right|\Big|_0^1 = lnf(1) - ln\,f(0) = ln\frac{f(1)}{f(0)} = ln\,e = 1$

Nên $\int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 dx \le 1 \Leftrightarrow \int_0^1 \left[\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 - 1\right]dx \le 0$

$\int_0^1 \left[\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 - 2.\frac{f'(x)}{f(x)} + 1\right]dx \le 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left[\frac{f'(x)}{f(x)} - 1\right]^2 dx \le 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} - 1 = 0$

Vậy: $f(x) = A.e^x$. Mà $f(1) = e.f(0) = e$ Nên $f(x) = e^x \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e}$.

Câu 37: Cho $a+b = ab+4$ và $a<b$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $I = \int_a^b \left|x^2 - (a+b)x + ab\right|dx$

A. $4\sqrt{3}$. **B.** 12. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** 48

Lời giải

Ta có

$$I^2 = \frac{\Delta^3}{36.a^4} = \frac{\left((a+b)^2 - 4ab\right)^3}{36} = \frac{\left((ab+4)^2 - 4ab\right)^3}{36} = \frac{\left((ab+2)^2 + 12\right)^3}{36} \ge \frac{12^3}{36} = 48$$

$\Rightarrow I \ge 4\sqrt{3}$

Câu 38: Tìm giá trị nhỏ nhất của $I = \int_a^b \left|x^2 + (2-m)x - 2\right|dx$ trong đó $a<b$ là hai nghiệm cảu phương trình $x^2 + (2-m)x - 2 = 0$

A. $\frac{128}{9}$. **B.** $\frac{8\sqrt{2}}{3}$. **C.** 8. **D.** $2\sqrt{2}$

Lời giải

$$I = \frac{\Delta^3}{36a^4} = \frac{\left((2-m)^2 + 8\right)^3}{36} \ge \frac{128}{9} \Rightarrow I \ge \frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

Câu 39: Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = \int_0^1 \left|x^3 - ax\right|dx$ với $a \in [0,1]$

A. $\frac{2-\sqrt{2}}{6}$. **B.** $\frac{1}{8}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{2-\sqrt{2}}{8}$

Lời giải

$$S = \int_0^{\sqrt{a}} \left(a.x - x^3\right)dx + \int_{\sqrt{a}}^1 \left(x^3 - a.x\right)dx = \left(\frac{a.x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{a}} + \left(\frac{x^4}{4} - \frac{a.x^2}{2}\right)\Bigg|_{\sqrt{a}}^1$$

$$S = \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{a}{2} - \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{8} \ge \frac{1}{8}$$

Câu 40: Gọi a,b lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $S=\int_m^{2m}\left|x^3-4mx^2+5m^2x-2m^3\right|dx$ với $m\in[1;3]$. Mệnh đề nào dưới đây đúng

A. $a+b=\frac{41}{6}$. **B.** $a+b=1$. **C.** $a+b=\frac{21}{4}$. **D.** $a+b=2$

Lời giải

$$S=\int_m^{2m}\left|(x-m)^2(x-2m)\right|dx=-\int_m^{2m}(x-m)^2(x-2m)dx=-\int_m^{2m}(x-m)^2((x-m)-m)dx$$

$$S=-\int_m^{2m}(x-m)^3dx+m\int_m^{2m}(x-m)^2dx=\left.\left(\frac{-(x-m)^4}{4}+\frac{m(x-m)^3}{3}\right)\right|_m^{2m}=\frac{m^4}{12}$$

Thay $m\in[1;3]$ vào ta có $a+b=\frac{41}{6}$.

Câu 41: Cho A là tập các hàm số f lien tục trên đoạn $[0;1]$ và nhận giá trị không âm trên đoạn $[0;1]$. Tìm m nhỏ nhất sao cho $\int_0^1 f\left(\sqrt[2018]{x}\right)dx\le m.\int_0^1 f(x)dx\quad\forall f\in A$

A. 2018. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2018}$. **D.** $\sqrt{2018}$

Lời giải

Đặt $t^{2018}=x\Rightarrow dx=2018.t^{2017}dt$ nên $\int_0^1 f\left(\sqrt[2018]{x}\right)dx=2018.\int_0^1 t^{2017}.f(t).dt\le 2018\int_0^1 f(t).dt$

Tìm m nhỏ nhất nên $m\le 2018$. Ta sẽ Cm $m=2018$ là số cần tìm. Xét $f(x)=x^n$ ta có

$$\int_0^1 x^{n/2018}dx\le m\int_0^1 x^n dx\to\frac{2018}{n+2018}\le\frac{m}{n+1}\to m\ge\frac{2018(n+1)}{n+2018}$$

Cho $n\to+\infty$ ta có $m\ge 2018$. Vậy $m=2018$ là hằng số nhỏ nhất cần tìm.

Câu 42: Cho hàm số $y=f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=2018.f(0)$. Tìm giá trị nhỏ nhất biểu thức $M=\int_0^1\frac{1}{[f(x)]^2}dx+\int_0^1[f'(x)]^2dx$

A. $ln2018$. **B.** $2ln2018$. **C.** $2e$. **D.** $2018e$

Lời giải

$$M=\int_0^1\left[\frac{1}{f(x)}-f'(x)\right]^2dx+2\int_0^1\frac{f(x)}{f'(x)}dx\ge 2\int_0^1\frac{f(x)}{f'(x)}dx=2ln\left|f(x)\right|\Big|_0^1=2ln2018.$$

Câu 43: Cho $a+b=ab+4$ và $a<b$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $I=\int_a^b\left|(x-a)^2(x-b)\right|dx$

A. 12. **B.** 0. **C.** $\frac{64}{3}$. **D.** $\frac{49}{3}$

Lời giải

$$S=-\int_a^b(x-a)^2\left[(x-a)+(a-b)\right]dx=-\int_a^b(x-a)^2(x-a)dx-(a-b)\int_a^b(x-a)^2dx$$

$S=\frac{1}{12}(a-b)^4=\frac{1}{12}\left((a+b)^2-4ab\right)^2=\frac{1}{12}\left((ab+4)^2-4ab\right)^2=\frac{1}{12}\left((ab+2)^2+12\right)^2\geq 12$.

Câu 44: Cho $(a-b)^2+(a^2-b^2)^2=4$ và $a<b$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$I=\int_a^b\left|x^2-(a+b)x+ab\right|dx$$

A. $\frac{16}{9}$. **B.** $\frac{9}{16}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{3}{4}$

Lời giải

$4=(a-b)^2+(a^2-b^2)^2=(a-b)^2\left(1+(a+b)^2\right)\geq(a-b)^2$

$$I^2=\frac{\Delta^3}{36a^4}=\frac{\left((a+b)^2-4ab\right)^3}{36}=\frac{\left((a-b)^2\right)^3}{36}\leq\frac{4^3}{36}=\frac{4}{3}$$

Khi đó $\begin{cases}a+b=0\\(a-b)^2+(a^2-b^2)^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=1\end{cases}$.

Câu 45: Cho hàm số $y=f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=e.f(0)$. Biểu thức $\int_0^1\frac{1}{\left[f(x)\right]^2}dx+\int_0^1\left[f'(x)\right]^2dx\leq 2$. Mệnh đề nào đúng

A. $f(1)=\sqrt{\frac{2e}{e-1}}$. **B.** $f(1)=\sqrt{\frac{2e^2}{e^2-1}}$. **C.** $f(1)=\sqrt{\frac{2(e-2)}{e-1}}$. **D.** $f(1)=\frac{2(e-2)}{e^2-1}$

Lời giải

Viết lại biểu thức cho dưới dạng $\int_0^1\left[\frac{1}{f(x)}-f'(x)\right]^2dx\leq 0$. Dấu bằng xảy ra khi

$$\frac{1}{f(x)}-f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{f(x)}=f'(x)\Leftrightarrow\int 1dx=\int f(x).d\left(f(x)\right)$$

$$\Leftrightarrow x+c=\frac{f^2(x)}{2}\Leftrightarrow f(x)=\sqrt{2(x+c)}$$

Thay $x=0$ vào ta có $\begin{cases}f(0)=\sqrt{2c}\\f(1)=\sqrt{2+2c}\end{cases}\Leftrightarrow\frac{f(1)}{f(0)}=e=\frac{\sqrt{2+2c}}{\sqrt{2c}}\Leftrightarrow c=\frac{1}{e^2-1}$

$$\to f(x)=\sqrt{2x+\frac{1}{e^2-1}}\to f(1)=\sqrt{\frac{2e^2}{e^2-1}}.$$

Câu 46: Cho A là tập các hàm số f lien tục trên đoạn $[0;1]$.

Tìm $m=\underbrace{min}_{f\in A}\left\{\int_0^1 x.f^2(x)dx-\int_0^1 x^{2018}.f(x)dx\right\}$

A. $\frac{-1}{2019}$. **B.** $\frac{-1}{16144}$. **C.** $\frac{-2017}{2018}$. **D.** $\frac{-1}{16140}$

Lời giải

Biểu thức đã cho là tam thức bậc 2 ẩn là $f(x)$ có hệ số $a=x;b=-x^{2018};c=0$

Nên biểu thức Min tại $\begin{cases} f(x)=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{x^{2017}}{2} \\ m_{min}=\int\limits_0^1 \dfrac{-\Delta}{4a}dx=\int\limits_0^1 \dfrac{-x^{4036}}{4.x}dx=\dfrac{-x^{4035}}{4x4036}\Big|_0^1=\dfrac{-1}{16144} \end{cases}$.

Câu 47: Cho m là tham số thuộc đoạn $[1;3]$. Gọi a,b lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P=\int\limits_m^{2m}(x-m)^2(x-2m)^2\,dx$. Tính $a+b=$

A. 31. **B.** 36. **C.** $\dfrac{122}{15}$. **D.** $\dfrac{121}{4}$

Lời giải

$P=\dfrac{m^5}{30}\in\left[\dfrac{1}{30};\dfrac{3^5}{30}\right]\to T=\dfrac{3^5+1}{30}=\dfrac{122}{15}$.

Câu 48: Giá trị nhỏ nhất của $P=\int\limits_m^{2m^2+2}\left|x^2-2\left(m^2+m+1\right)x+4\left(m^3+m\right)\right|dx$ là $S=\dfrac{a}{b};a,b$ nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Tính $T=a+b$

A. 7. **B.** 337. **C.** 25. **D.** 91

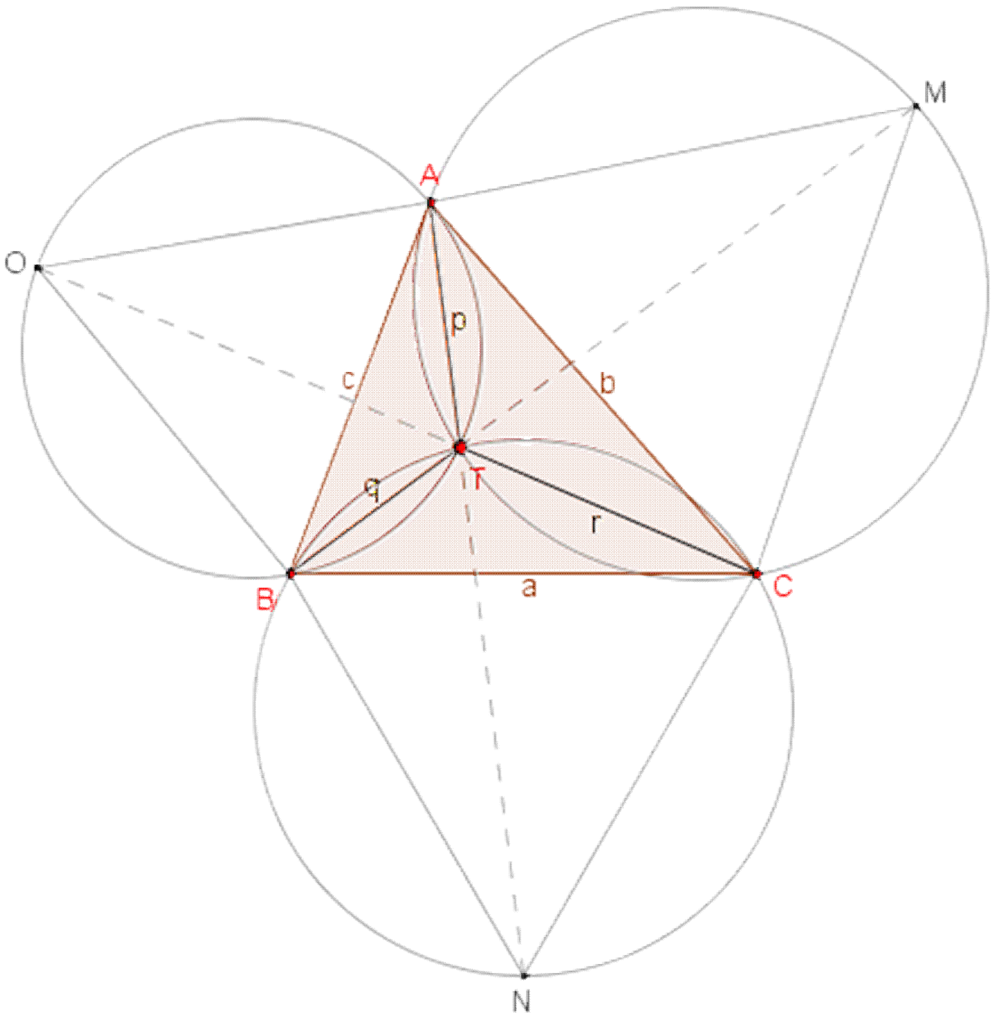
Lời giải

Ta có : $P=\dfrac{4\left(m^2-m+1\right)^3}{3}\ge\dfrac{4}{3}.\left(\dfrac{3}{4}\right)^3=\dfrac{9}{16}\Rightarrow T=9+16=25$

Chuyên đề 8 SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP HÌNH HỌC GIẢI BÀI TOÁN SỐ PHỨC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. **Điểm Torricelli:** Cho tam giác ABC có góc lớn nhất không quá $120°$. Điểm Torricelli của tam giác ABC là điểm T nằm trong ABC và có tổng 3 cạnh $TA+TB+TC=p+q+r$ nhỏ nhất. Để tìm ra điểm này, ta dựng 3 tam giác đều ACM, BCN, ABO: giao điểm của 3 đường tròn ngoại tiếp của 3 tam giác đều này (hoặc giao điểm của AN, BM, CO) chính là điểm Torricelli mà chúng ta cần tìm.

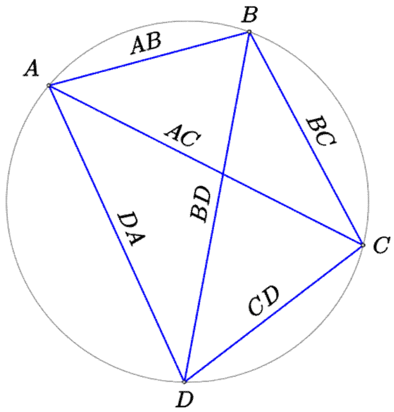


2. **Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz**: Với hai dãy số thực $a_1,a_2,...,a_m$ và $b_1,b_2,...,b_m$ ta luôn có bất đẳng thức sau

$$\left(a_1^2+a_2^2+...+a_m^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+...+b_m^2\right)\geq\left(a_1b_1+a_2b_2+...+a_mb_m\right)^2$$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{a_1}{b_2}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_m}{b_m}$

3. **Định lý Ptoleme** hay đẳng thức Ptoleme là một đẳng thức trong hình học Euclid miêu tả quan hệ giữa độ dài bốn cạnh và hai đường chéo của một tứ giác nội tiếp. Định lý này mang tên nhà toán học và thiên văn học người Hy Lạp cổ đại Ptolemy (tức Claudius Ptolemaeus).

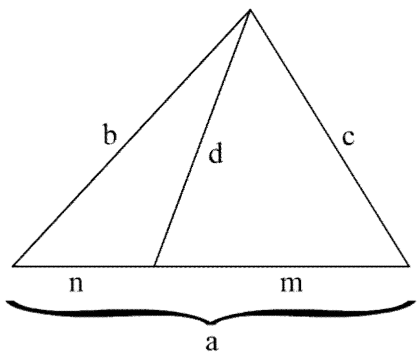


Nếu A, B, C, và D là 4 đỉnh của tứ giác nội tiếp đường tròn thì: $AC.BD = AB.CD + BC.AD$

4. **Bất đẳng thức Ptoleme** là trường hợp tổng quát của định lý Ptoleme đối với một tứ giác bất kỳ.

Nếu $ABCD$ là tứ giác bất kỳ thì $AC.BD \leq AB.CD + BC.AD$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tứ giác nội tiếp trong một đường tròn.

5. **Định lí Stewart:** Gọi a, b, và c là độ dài các cạnh của 1 tam giác. Gọi d là độ dài của đoạn thẳng nối từ 1 đỉnh của tam giác với điểm nằm trên cạnh (ở đây là cạnh có độ dài là a) đối diện với đỉnh đó.



Đoạn thẳng này chia cạnh a thành 2 đoạn có độ dài m và n, định lý Stewart nói rằng:

$$b^2m + c^2n = a\left(d^2 + mn\right)$$

B. BÀI TẬP

Câu 1: Cho số phức z thỏa mãn $|z-2-3i|=1$. Giá trị lớn nhất của $|\bar{z}+1+i|$ là

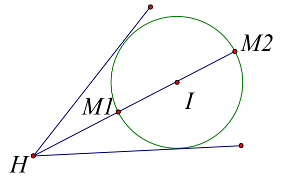
A. $\sqrt{13}+2$. **B.** 4. **C.** 6. **D.** $\sqrt{13}+1$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $z = x + yi$ ta có $z - 2 - 3i = x + yi - 2 - 3i = (x-2) + (y-3)i$.

Theo giả thiết $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$ nên điểm M biểu diễn cho số phức z nằm trên đường tròn tâm $I(2;3)$ bán kính $R = 1$.



Ta có $\left|\overline{z} + 1 + i\right| = \left|x - yi + 1 + i\right| = \left|(x+1) - (y-1)i\right| = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2}$.

Gọi $M(x;y)$ và $H(-1;1)$ thì $HM = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2}$.

Do M chạy trên đường tròn, H cố định nên MH lớn nhất khi M là giao của HI với đường tròn.

Phương trình $HI: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$, giao của HI và đường tròn ứng với t thỏa mãn: $9t^2 + 4t^2 = 1$

$\Leftrightarrow t = \pm\dfrac{1}{\sqrt{13}}$ nên $M\left(2 + \dfrac{3}{\sqrt{13}}; 3 + \dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)$, $M\left(2 - \dfrac{3}{\sqrt{13}}; 3 - \dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)$.

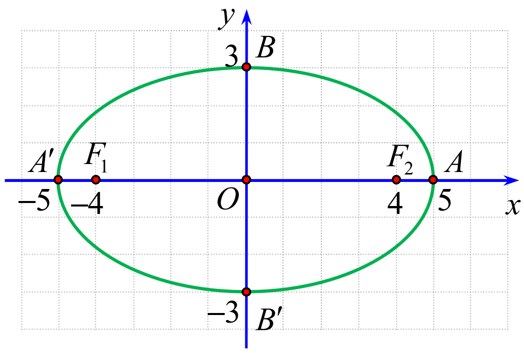
Tính độ dài MH ta lấy kết quả $HM = 1 + \sqrt{13}$.

Câu 2: Cho số phức z thỏa mãn $|z-4| + |z+4| = 10$ .Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ lần lượt là.

A. 10 và 4. **B.** 5 và 4. **C.** 5 và 3. **D.** 4 và 3

Lời giải

Chọn C



Gọi $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$.Theo giả thiết, ta có $|z-4| + |z+4| = 10$

$\Leftrightarrow \left|(x-4) + yi\right| + \left|(x+4) + yi\right| = 10 \Leftrightarrow \sqrt{(x-4)^2 + y^2} + \sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 10$ (*)

Gọi $M(x;y)$, $F_1(-4;0)$ và $F_2(4;0)$

Khi đó (*) $\Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 10$ nên tập hợp các

điểm $M(z)$ là đường elip (E).

Ta có $c = 4$, $2a = 10 \Leftrightarrow a = 5$ và $b^2 = a^2 - c^2 = 9$

Do đó, phương trình chính tắc của (E) là $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

Vậy $\max|z| = OA = OA' = 5$ và $\min|z| = OB = OB' = 3$ $\min|z| = OB = OB' = 3$

Câu 3: Xét tập (A) gồm các số phức z thỏa mãn $\frac{z-2i}{z-2}$ là số thuần ảo và các giá trị thực m, n thỏa mãn chỉ có duy nhất một số phức $z \in (A)$ thỏa mãn $|z-m-ni| = \sqrt{2}$. Đặt $M = \max(m+n)$ và $N = \min(m+n)$. Tính $P = M + N$?

A. $P = -2$. **B.** $P = -4$. **C.** $P = 4$. **D.** $P = 2$.

Lời giải

Chọn C

Giả sử $z = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$ thì $|z-2i| = |\overline{z}+2+4i| \Leftrightarrow a = b-4$ (1)

Ta có $\frac{z-2i}{z-2} = \frac{a+(b-2)i}{(a-2)+bi} = \frac{[a+(b-2)i][(a-2)-bi]}{(a-2)^2+b^2}$

$= \frac{a(a-2)+b(b-2)+[(a-2)(b-2)-ab]i}{(a-2)^2+b^2}$

Vì $\frac{z-2i}{z-2}$ là số thuần ảo nên $a(a-2)+b(b-2) = 0 \Leftrightarrow (a-1)^2+(b-1)^2 = 2$

Ta cũng có $(a-m)^2+(b-n)^2 = 2$

Vì chỉ có duy nhất một số phức thỏa mãn nên hai đường tròn (C_1) có $I_1(1;1)$, $R_1 = \sqrt{2}$ và đường tròn (C_2) có $I_2(m;n)$, $R_2 = \sqrt{2}$ tiếp xúc nhau.

Vậy $\left[\begin{array}{l} I_1I_2 = R_1 + R_2 = 2\sqrt{2} \\ I_1I_2 = |R_1 - R_2| = 0 \end{array}\right.$

Trường hợp $I_1I_2 = 0$ (không thỏa mãn) vì lúc đó hai đường tròn trùng nhau nên có vô số $(a;b)$ thỏa mãn $(a-1)^2+(b-1)^2 = 2$. Vậy $I_1I_2 = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow (m-1)^2+(n-1)^2 = 8$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, ta có :

$|m+n-2| = |(m-1)+(n-1)| \le \sqrt{(1^2+1^2)\left((m-1)^2+(n-1)^2\right)} = 4$

$\Rightarrow -4 \le m+n-2 \le 4 \Leftrightarrow -2 \le m+n \le 6$

Suy ra $\begin{cases} M = 6 \\ N = -2 \end{cases}$.

Câu 4: Xét các số phức z thỏa $|z+2-i|+|z-4-7i| = 6\sqrt{2}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $|z-1+i|$. Tính $P = m + M$.

A. $P = \sqrt{13}+\sqrt{73}$. **B.** $P = \frac{5\sqrt{2}+2\sqrt{73}}{2}$. **C.** $P = 5\sqrt{2}+\sqrt{73}$. **D.** $P = \frac{5\sqrt{2}+\sqrt{73}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $w = z-1+i = a+bi;\ a, b \in \mathbb{R}$

$|(z-1+i)+3-2i|+|(z-1+i)+(-3-8i)| = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow |w+3-2i|+|w-3-8i| = 6\sqrt{2}$

Do đó xét các điểm $M(a;b), A(-3;2), B(3;8)$, ta có:

$6\sqrt{2} = MA + MB \ge AB = 6\sqrt{2}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \in [AB]$, do đó $b = a + 5$ và $-3 \le a \le 3$.

$|w| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (a+5)^2} = \sqrt{2a^2 + 10a + 25}$

$m = \min\limits_{[-3;3]} \sqrt{2a^2 + 10a + 25} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$; $M = \max\limits_{[-3;3]} \sqrt{2a^2 + 10a + 25} = \sqrt{73}$.

Vậy $P = \dfrac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}}{2}$.

Cách 2: Cũng tương tự như trên, ta có:

$|w| = OM \ge d(O; AB) = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$, $|w| = OM \le OB = \sqrt{73}$.

Vậy $P = \dfrac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}}{2}$.

Câu 5: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3 + 4i| + |z - 2 + 3i| = \sqrt{2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \le |z| \le \sqrt{13}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \le |z| \le 5$. **C.** $1 \le |z| \le \sqrt{13}$. **D.** $\sqrt{13} \le |z| \le 5$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $z = a + bi$; $a, b \in \mathbb{R}$.

Xét các điểm $M(a;b), A(3;-4), B(2;-3)$, có: $\sqrt{2} = MA + MB \ge AB = \sqrt{2}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \in [AB]$.

Ta có phương trình $AB: x + y + 1 = 0 \Rightarrow a + b + 1 = 0$ và $2 \le a \le 3$.

Do đó $|w| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (a+1)^2} = \sqrt{2a^2 + 2a + 1} \in [\sqrt{13}; 5]$, $\forall a \in [2;3]$.

Câu 6: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 3i| + |z + 4 + 5i| = 10$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z - 1 + i|$. Tính $P = M.m$.

A. $P = \dfrac{8\sqrt{41}}{5}$. **B.** $P = \sqrt{697}$. **C.** $P = 5\sqrt{41}$. **D.** $P = \dfrac{8\sqrt{41}}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $w = z - 1 + i = a + bi$; $a, b \in \mathbb{R}$

$|(z - 1 + i) + (-1 - 4i)| + |(z - 1 + i) + (5 + 4i)| = 10 \Leftrightarrow |w - 1 - 4i| + |w + 5 + 4i| = 10$

Do đó xét các điểm $M(a;b), A(1;4), B(-5;-4)$, ta có:

$10 = MA + MB \ge AB = 10$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \in [AB]$, do đó $4a - 3b + 8 = 0$ và $-5 \le a \le 1$.

$|w| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{4a+8}{3}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{25a^2 + 64a + 64}}{3}$

$m = \min\limits_{[-5;1]} \dfrac{\sqrt{25a^2 + 64a + 64}}{3} = y\left(-\dfrac{32}{25}\right) = \dfrac{8}{5}$; $M = \max\limits_{[-5;1]} \dfrac{\sqrt{25a^2 + 64a + 64}}{3} = y(-5) = \sqrt{41}$.

Vậy $P = m.M = \dfrac{8\sqrt{41}}{5}$.

Câu 7: Cho số phức z_1 thỏa mãn $|z_1 - 2|^2 - |z_1 + i|^2 = 1$ và số phức z_2 thỏa mãn $|z_2 - 4 - i| = \sqrt{5}$ .Hỏi giá trị nhỏ nhất $|z_1 - z_2|$ là?

A. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $z_1 = a + bi;\ a, b \in \mathbb{R}$ và $z_2 = m + ni;\ m, n \in \mathbb{R}$.

Ta có: $|z_1 - 2|^2 - |z_1 + i|^2 = 1$

$\Leftrightarrow \left[(a-2)^2 + b^2\right] - \left[a^2 + (b+1)^2\right] = 1 \Leftrightarrow 2a + b - 1 = 0$.

Tương tự ta có $|z_2 - 4 - i| = \sqrt{5}$

$\Leftrightarrow (m-2)^2 + (n-1)^2 = 5$.

Khi đó xét các điểm $M(a;b), N(m;n)$, ta có: $M \in d: 2x + y - 2 = 0$

và $N \in (C)$ có $I(4;1), R = \sqrt{5}$.

$|z_1 - z_2| = MN \ge IM - IN \ge d(I;d) - R = \dfrac{8}{\sqrt{5}} - \sqrt{5} = \dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

Câu 8: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 + 2i| - |z + 1 - 3i| = \sqrt{34}$. Hỏi giá trị nhỏ nhất của $|z + 1 + i|$ là?

A. $\dfrac{9}{\sqrt{34}}$. **B.** 4. **C.** $\sqrt{13}$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có $z = a + bi;\ a, b \in \mathbb{R}$.

Do đó xét các điểm $M(a;b), A(2;-2), B(-1;3)$, ta có:

$|z - 2 + 2i| - |z + 1 - 3i| = \sqrt{34} \Leftrightarrow \sqrt{34} = MA - MB \le AB = \sqrt{34}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M$ thuộc tia AB và M nằm ngoài đoạn AB

Phương trình $AB: 5x + 3y - 4 = 0$, do đó $5a + 3b - 4 = 0$ và $a \le -1$.

Khi đó $|z + 1 + i| = \sqrt{(a+1)^2 + (b+1)^2} = \sqrt{(a+1)^2 + \left(\dfrac{4-5a}{3} + 1\right)^2}$

$\min\limits_{(-\infty;-1]} |z + 1 + i| = \min\limits_{(-\infty;-1]} \sqrt{(a+1)^2 + \left(\dfrac{4-5a}{3} + 1\right)^2} = y(-1) = 4$.

Câu 9: Cho ba số phức z, z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = 6$ và $|z_1 - z_2| = 6\sqrt{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z| + |z - z_1| + |z - z_2|$.

A. $6\sqrt{2+\sqrt{2}}$. **B.** $3\sqrt{2+\sqrt{3}}$. **C.** $6\sqrt{2+\sqrt{3}}$. **D.** $3\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

Lời giải

Chọn C.

Xét tam giác OAB với A, B lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z_1, z_2 và M là điểm biểu diễn số phức z, ta có $OA = OB = 6$, $AB = 6\sqrt{2}$ $\Rightarrow OAB$ vuông tại O.

Khi đó ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $P = MO + MA + MB$.

Dựng phía ngoài tam giác OAB tam giác đều ABC, đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt OC tại D, theo bất đẳng thức Ptoleme cho bốn đểm M, A, B, C ta có:

$MA.CB + MB.CA > MC.AB \Rightarrow MA + MB \geq MC$ và $MA + MB + MO \geq MC + MO \geq OC = const$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv D$. Ta đi tính độ dài đoạn OC, bằng định lý hàm số côsin ta có:

$OA = 6$, $AC = 6\sqrt{2}$, $\widehat{OAC} = \widehat{OAB} + \widehat{BAC} = 45° + 60° = 105°$.

Do đó $OC = \sqrt{OA^2 + AC^2 - 2.OA.AC.\cos 105°} = \sqrt{6^2 + \left(6\sqrt{2}\right)^2 - 2.6.6\sqrt{2}.\cos 105°} = 6\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Vậy gá trị nhỏ nhất của $P_{\min} = 6\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Câu 10: Cho số phức z. Kí hiệu A, B, C, D lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức $z, \bar{z}, z(4+3i)$ và $\overline{z(4+3i)}$. Biết A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình chữ nhật. Hỏi giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z+4i-5|$ là?

A. $\dfrac{5}{\sqrt{34}}$. **B.** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $\dfrac{4}{\sqrt{13}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Với $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$.

Ta có: $A(a;b)$, $B(a;-b)$, $C(4a-3b;3a+4b)$, $D(4a-3b;-3a-4b)$.

Do đó A, B đối xứng qua trục hoành; C, D đối xứng qua trục hoành và $AB//CD$.

Theo giả thiết A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình chữ nhật khi và chỉ khi có $a \neq 0$ và $b \neq 0$ và

$$\begin{cases} AB = CD \\ \left[\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = -2b \\ a = -b \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} -2b(3a+3b) = 0 \\ -2b(-3a-5b) = 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = -2b \\ a = -b \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} b = 0\,(l) \\ a = -b \\ b = -\dfrac{3}{5}a \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow a = -b.$$

Với $z = a - ai$, ta có: $|z+4i-5| = \sqrt{(a-5)^2 + (4-a)^2} = \sqrt{2\left(a - \dfrac{9}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{2}} \geq \dfrac{1}{2}$.

.

Câu 11: Gọi z là số phức thỏa mãn $P = |z-1-i| + |z-1-4i| + |z-2+i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $|z|$.

A. $\sqrt{2}$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $z = a + bi$, xét các điểm $M(a;b)$, $A(1;1)$, $B(1;4)$, $C(2;-1)$.

Ta có $\cos\widehat{BAC}=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2.AB.AC}=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}<-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\widehat{BAC}>120^\circ$.

Do đó $\left|\dfrac{\overrightarrow{AB}}{AB}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{AC}\right|<1$ và

$P=MA+MB+MC=MA+\dfrac{MB.AB}{AB}+\dfrac{MC.AC}{AC}$

$\geq MA+\dfrac{\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{AB}}{AB}+\dfrac{\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AC}}{AC}=MA+\overrightarrow{MA}\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{AB}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{AC}\right)+\dfrac{\overrightarrow{AB}^2}{AB}+\dfrac{\overrightarrow{AC}^2}{AC}$

$=MA+\overrightarrow{MA}\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{AB}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{AC}\right)+AB+AC\geq MA-\left|\overrightarrow{MA}\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{AB}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{AC}\right)\right|+AB+AC\geq AB+AC$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $M\equiv A\Rightarrow z=1+i\Rightarrow|z|=\sqrt{2}$.

Câu 12: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của tìm $Q=|z-1|+\left|z-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right|$. Tính $P=M+m$

A. $4+2\sqrt{3}$. **B.** $2+2\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{6}$. **D.** $2+\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn C

Vì $|z|=1\Rightarrow z=\cos x+i\sin x$ và

$Q=|\cos x+i\sin x-1|+\left|\cos x+i\sin x-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right|$

$=\sqrt{(\cos x-1)^2+\sin^2 x}+\sqrt{\left(\cos x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\sin x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

$=\sqrt{2-2\cos x}+\sqrt{2-\cos x+\sqrt{3}\sin x}\in\left[2\sqrt{2-\sqrt{3}};2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right]$

Do đó $P=2\sqrt{2-\sqrt{3}}+2\sqrt{2+\sqrt{3}}=2\sqrt{6}$. Chọn đáp án. **C.**

Cách 2: Khi biết $|z|=1$, xét ba điểm $M(a;b),A(1;0),B\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ta có $Q=MA+MB$ và M,A,B cùng thuộc đường tròn $(O,1)$ suy ra $(MA+MB)_{\max}\Leftrightarrow M$ là điểm chính giữa cung lớn $\overset{\frown}{AB}$. $(MA+MB)_{\min}\Leftrightarrow M$ là điểm chính giữa cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$.

Câu 13: Cho số phức z thoả mãn $|z^2+16|+|z(z+4i)|=4|z+4i|$. Gọi M,m lần lượt là các giá trị lớn nhất, và giá trị nhỏ nhất của $|z+1-i|$. Tính $P=M+m$.

A. $P=\sqrt{26}+\sqrt{10}$. **B.** $P=1+\sqrt{10}$. **C.** $P=\sqrt{2}+\sqrt{26}$. **D.** $P=1+\sqrt{26}$.

Lời giải

Chọn D

$|z^2+16|+|z(z+4i)|=4|z+4i|$

$|z^2+16|+|z(z+4i)|=4|z+4i|\Leftrightarrow|(z+4i)(z-4i)|+|z(z+4i)|=4|z+4i|$

$\Leftrightarrow |z+4i|\left(|z-4i|+|z|-4\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|z+4i|=0\\ |z-4i|+|z|-4=0\end{array}\right.$

Ta có: $|z-4i|+|z|\geq|z-4i-z|=4$,

dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ điểm biểu diễn của $4i$, 0, z thẳng hàng.

Vậy tập hợp các số phức là đoạn thẳng $x=0$ thỏa $0\leq y\leq 4$.

Ta có: $|z+1-i|=AX$ với $A(-1;1)$, X là điểm biểu diễn số phức z

Ta có: $|z+1-i|_{\max}=\sqrt{26}$, $|z+1-i|_{\min}=1$.

Câu 14: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=m^2+2m+5$ với m là số thực. Biết rằng tập hợp điểm của số phức $w=(3+4i)z-2i$ là đường tròn. Tìm bán kính R nhỏ nhất của đường tròn đó.

A. $R=5$. **B.** $R=10$. **C.** $R=15$. **D.** $R=20$

Lời giải

Chọn D

$w+2i=(3+4i)z\Rightarrow|w+2i|=|(3+4i)z|=|(3+4i)||z|=5\left[(m+1)^2+4\right]\geq 20$.

$\Rightarrow|w+2i|\geq 20$. Vậy đường tròn có bán kính $R_{\min}=20$ với tâm $I(0;2)$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m=-1$.

Câu 15: Cho hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn $z_1+z_2=8+6i$ và $|z_1-z_2|=2$. Tìm giá trị lớn nhất của $P=|z_1|+|z_2|$.

A. $P=4\sqrt{6}$. **B.** $P=2\sqrt{26}$. **C.** $P=5+3\sqrt{5}$. **D.** $P=32+3\sqrt{2}$

Lời giải

Chọn B

Gọi: $\begin{cases}z_1=a+bi\\ z_2=c+di\end{cases}(a,b,c,d\in\mathbb{R})\Rightarrow\begin{cases}a+c+(b+d)i=8+6i\\ (a-c)^2+(b-d)^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a+c)^2+(b+d)^2=100\\ (a-c)^2+(b-d)^2=4\end{cases}$.

$\Rightarrow(a+c)^2+(b+d)^2+(a-c)^2+(b-d)^2=104\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+d^2=52$.

Mặc khác: $P=\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\overset{B.C.S}{\leq}\sqrt{(1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2+d^2)}=2\sqrt{26}$.

Cách 2:

Gọi A,B lần lượt là điểm biểu diễn số phức z_1,z_2 trên mặt phẳng phức và D là điểm thứ tư của hình bình hành $AOBD\Rightarrow D$ là điểm biểu diễn số phức $(z_1+z_2)\Rightarrow OD=|z_1+z_2|=10$.

$|z_1-z_2|$ chính là độ dài đoạn AB.

ΔOAB có $\begin{cases}AB^2=OA^2+OB^2-2OA.OB.\cos\widehat{AOB}=4\\ OD^2=OA^2+OB^2+2OA.OB.\cos\widehat{AOB}=100\end{cases}\Rightarrow 104=2\left(OA^2+OB^2\right)\geq(OA+OB)^2$

$\Rightarrow(OA+OB)_{\max}=\sqrt{104}=2\sqrt{26}\Leftrightarrow\left(|z_1|+|z_2|\right)_{\max}=2\sqrt{26}$.

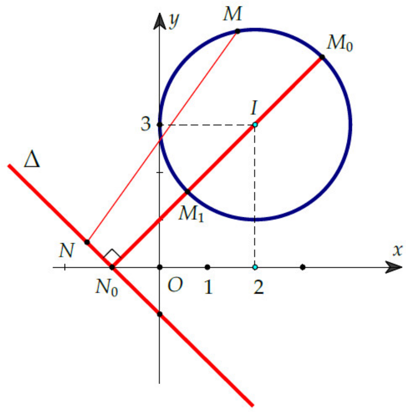
Câu 16: Cho số phức z_1 thỏa mãn $|(1+i)z+1-5i|=2\sqrt{2}$ và số phức z_2 thỏa mãn $|z+1+2i|=|z+i|$. Tính giá trị nhỏ nhất của $|z_1-z_2|$.

A. $\dfrac{7\sqrt{2}-2}{2}$. **B.** $\dfrac{7\sqrt{2}+4}{2}$. **C.** $\dfrac{7\sqrt{2}+4}{4}$. **D.** $\dfrac{7\sqrt{2}-4}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi M , N lần lượt là điểm biểu diễn số phức z_1 , z_2 trên mặt phẳng.



Từ $\left|(1+i)z+1-5i\right|=2\sqrt{2} \Leftrightarrow |1+i|.\left|z+\dfrac{1-5i}{1+i}\right|=2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow |z-2-3i|=2 \Rightarrow M\in(C)$ có tâm $\mathrm{I}(2;3)$, bán kính $R=2$.

Gọi $z_2=x+yi$, $(x,y\in\mathbb{R})$

$|z+1+2i|=|z+i|$

$\Leftrightarrow x+y+2=0 \Rightarrow N\in\Delta: x+y+2=0$

Ta có: $|z_1-z_2|=MN \Rightarrow |z_1-z_2|_{\min} \Leftrightarrow MN_{\min}$

Ta có:

$$d(I,\Delta)=\frac{7\sqrt{2}}{2} \Rightarrow MN_{\min}=d(I,\Delta)-R=\frac{7\sqrt{2}}{2}-2=\frac{7\sqrt{2}-4}{2}$$

Câu 17: Cho số phức z_1 thỏa mãn $\left|(1+i)z+1-5i\right|=2\sqrt{2}$ và số phức z_2 thỏa mãn $|z+1+2i|=|z+i|$. Tính giá trị nhỏ nhất của $|z_1-z_2-3+i|$

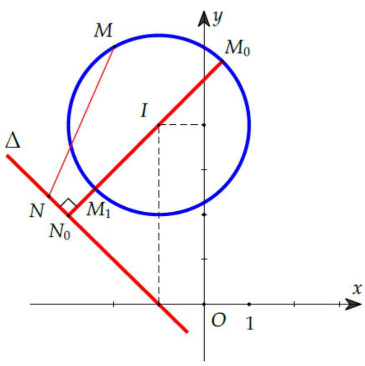
A. $\dfrac{5\sqrt{2}-4}{2}$. **B.** $\dfrac{5\sqrt{2}+4}{2}$. **C.** $\dfrac{7\sqrt{2}-4}{2}$. **D.** $\dfrac{7\sqrt{2}+4}{2}$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $|z_1-z_2-3+i|=\left|(z_1-3+i)-z_2\right|=MN \Rightarrow |z_3-z_2|_{\max} \Leftrightarrow MN_{\max}$

Gọi M , N lần lượt là điểm biểu diễn số phức z_3, z_2 trên mặt phẳng.



Từ $\left|(1+i)z+1-5i\right|=2\sqrt{2} \Leftrightarrow |1+i|.\left|z+\dfrac{1-5i}{1+i}\right|=2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow |z-2-3i|=2 \Leftrightarrow \left|\underbrace{(z-3+i)}_{z_3}+1-4i\right|=2$

$\Rightarrow M\in(C)$ có tâm $I(-1;4)$, bán kính $R=2$.

Gọi $z_2=x+yi$, $(x,y\in\mathbb{R})$

từ $|z+1+2i|=|z+i|$ $(x,y\in\mathbb{R}) \Rightarrow N\in\Delta: x+y+2=0$

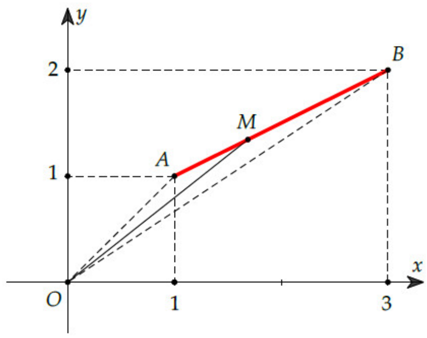
Ta có: $d(I,\Delta)=\dfrac{5\sqrt{2}}{2} \Rightarrow MN_{\min}=d(I,\Delta)-R=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}-2=\dfrac{5\sqrt{2}-4}{2}$.

Câu 18: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-1-i|+|z-3-2i|=\sqrt{5}$. Gọi $M;m$ lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của môđun của z, tính $M+m$.

A. $\dfrac{\sqrt{5}+5\sqrt{13}}{5}$. **B.** $\sqrt{5}+5\sqrt{13}$. **C.** $\sqrt{2}+\sqrt{13}$. **D.** $\sqrt{2}+2\sqrt{13}$

Lời giải

Chọn C



Gọi $z=x+yi;(x;y\in\mathbb{R})$ có điểm $M(x;y)$ biểu diễn z trên mặt phẳng tọa độ.

Ta có: $|z-1-i|+|z-3-2i|=\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}=\sqrt{5} \quad (1)$

Đặt $A(1;1)$, $B(3;2)$ thì từ (1) ta có: $AM+BM=\sqrt{5}(2)$

Mặt khác $\overrightarrow{AB}=(2;1)\Rightarrow AB=\sqrt{5}(3)$

Nên từ (2) và (3) suy ra M thuộc đoạn thẳng AB .

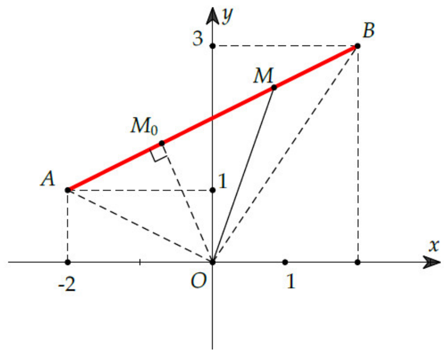
Nhận xét rằng $\widehat{OAB}$ là góc tù (hoặc quan sát hình vẽ) ta có $M=|z|_{max}=OB=\sqrt{13}$ và $m=|z|_{\min}=OA=\sqrt{2}$. Vậy $M+m=\sqrt{2}+\sqrt{13}$.(Chứng minh max min dựa vào các tam giác $OAM;OBM$ lần lượt tù tại $A;M$).

Câu 19: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z+2-i|+|z-2-3i|=2\sqrt{5}$. Gọi $M;m$ lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của môđun của z, tính $M+m$.

A. $\dfrac{4\sqrt{5}+5\sqrt{13}}{5}$. **B.** $\sqrt{5}+\sqrt{13}$. **C.** $\sqrt{2}+\sqrt{13}$. **D.** $\sqrt{2}+2\sqrt{13}$

Lời giải

Chọn A



Gọi $z=x+yi;(x;y\in\mathbb{R})$ có điểm $M(x;y)$ biểu diễn z trên mặt phẳng tọa độ.

Ta có: $|z+2-i|+|z-2-3i|=2\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}=2\sqrt{5}(1)$

Đặt $A(-2;1)$, $B(2;3)$ từ (1) có: $AM+BM=2\sqrt{5}(2)$

Mặt khác $\overrightarrow{AB}=(4;2)\Rightarrow AB=2\sqrt{5}\ (3)$

nên từ (2) và (3) suy ra M thuộc đoạn thẳng AB. Ta có $OA=\sqrt{5}$, $OB=\sqrt{13}$ và $AB:x-2y+4=0$.

Nhận xét rằng $\widehat{OAB}$ và $\widehat{OBM}$ là góc nhọn (hoặc quan sát hình vẽ) ta có

$M=|z|_{max}=\max\{OB,OA\}=\sqrt{13}$ và $m=|z|_{\min}=d(O,AB)=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

Vậy $M+m=\sqrt{13}+\dfrac{4\sqrt{5}}{5}=\dfrac{4\sqrt{5}+5\sqrt{13}}{5}$

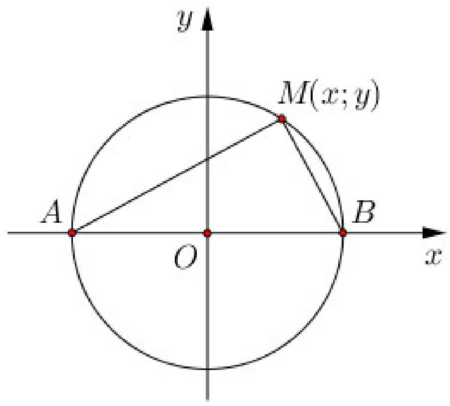
Câu 20: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$ .Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=|z+1|+2|z-1|$.

A. $\max T=2\sqrt{5}$. **B.** $\max T=2\sqrt{10}$. **C.** $\max T=3\sqrt{5}$. **D.** $\max T=3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1. Gọi $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow M(x; y)$



Và $A(-1;0)$, $B(1;0)$. Ta có $|z| = 1 \Rightarrow |x + yi| = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$

$\Rightarrow M$ thuộc đường tròn đường kính AB.

$\Rightarrow MA^2 + MB^2 = AB^2 = 4$. Khi đó, theo Bunhiacopxki, ta có

$T = MA + 2MB \le \sqrt{(1^2 + 2^2)(MA^2 + MB^2)} = \sqrt{5.4} = 2\sqrt{5}$

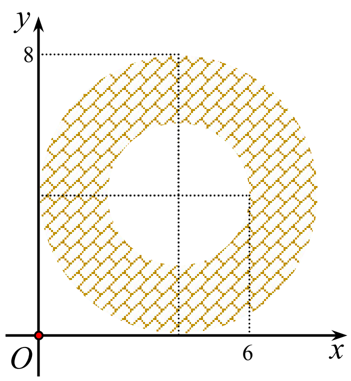
Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $\max T = 2\sqrt{5}$.

Cách 2. Đặt $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow |z + 1| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$ và $|z - 1| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$

Mặt khác $|z| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$, khi đó $T = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$

$\le \sqrt{(1^2 + 2^2)\left[(x+1)^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2\right]} = \sqrt{10(x^2 + y^2 + 1)} = \sqrt{10.2} = 2\sqrt{5} \Rightarrow \max T = 2\sqrt{5}$.

Câu 21: Phần gạch sọc trong hình vẽ bên là hình biểu diễn của tập các số phức thỏa mãn điều kiện nào sau đây:



A. $6 \le |z| \le 8$. **B.** $2 \le |z + 4 + 4i| \le 4$. **C.** $2 \le |z - 4 - 4i| \le 4$. **D.** $4 \le |z - 4 - 4i| \le 16$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$

Vì hình vẽ biểu diễn số phức z là hình vành khăn nằm ở góc phần tư thứ nhất của hệ trục toan độ nên tâm của hai đường đồng tâm có tọa dương $\Rightarrow$ loại A, **B.**

Quan sát hình vẽ ta thấy đường tròn lớn có đường kính bằng 8 $\Rightarrow$ bán kính $R = 4$

Vậy chọn đáp án **C.**

Câu 22: Xét các số phức $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $|z| = 2$. Tính $P = x + y$ khi $|z - 4| + 2|z + 1 + 4i|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $P = 4\sqrt{5}$. **B.** $P = 2$. **C.** $P = -2$. **D.** $P = 4\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C.

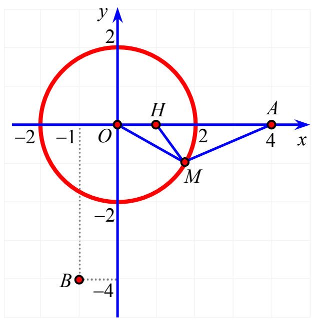
Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$.

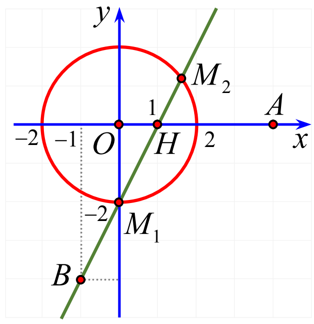
Ta có

$|z| = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow$ tập hợp điểm M là đường tròn tâm O, bán kính $R = 2$.

$$P' = |z-4| + 2|z+1+4i| = |(x-4)+yi| + 2|(x+1)+(y+4)i|$$
$$= \sqrt{(x-4)^2 + y^2} + 2\sqrt{(x+1)^2 + (y+4)^2} \quad (*)$$

Gọi $A(4;0)$, $B(-1;-4)$ thì $P' = AM + 2BM \quad (1)$.





Gọi $H(1;0)$ thì $OH.OA = 4 = OM^2 \Rightarrow$ tam giác OHM và tam giác OMA đồng dạng.

$$\Rightarrow \frac{HM}{MA} = \frac{OM}{OA} = \frac{1}{2} \Rightarrow AM = 2HM \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $P' = AM + 2BM = 2(HM + BM) \geq 2BH \Rightarrow P'_{\min} = 2BH$ khi B, H, M thẳng hàng và M nằm giữa điểm B và H.

Khi đó M là giao điểm của đường thẳng $BH: y = 2x - 2$ và đường tròn $x^2 + y^2 = 4$

$\Rightarrow$ tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} y = 2x-2 \\ x^2+y^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = \dfrac{8}{5} \\ y = \dfrac{6}{5} \end{cases}$.

Vì M nằm giữa điểm B và H nên chọn $\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases}$.

Khi đó $P = -2$.

Câu 23: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + i| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z+2-i|^2 + |z-2-3i|^2$.

A. $18 + 8\sqrt{10}$. **B.** $38 - 8\sqrt{10}$. **C.** $38 + 8\sqrt{10}$. **D.** $8\sqrt{10} - 18$

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi$, $(x,y\in\mathbb{R})$.

Ta có $|z-1+i|=2 \Leftrightarrow |(x-1)+(y+1)i|=2 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=4$

$\Rightarrow$ tập hợp điểm M là đường tròn (C_1) tâm $I(1;-1)$, bán kính $R_1=2$.

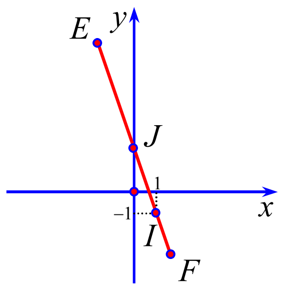
Xét biểu thức $P=|z+2-i|^2+|z-2-3i|^2$

$\Leftrightarrow P=(x+2)^2+(y-1)^2+(x-2)^2+(y-3)^2 \Leftrightarrow x^2+y^2-4y+9-\dfrac{P}{2}=0$

$\Rightarrow$ tập hợp điểm M là đường tròn (C_2) tâm $J(0;2)$, bán kính $R_2=\sqrt{\dfrac{P}{2}-5}$, $P>10$.

Khi đó $P_{\max}$ khi (C_1) và (C_2) tiếp xúc

trong $\Leftrightarrow R_2=IJ+R_1 \Leftrightarrow R_2^2=(IJ+R_1)^2 \Leftrightarrow \dfrac{P}{2}-5=\left(2+\sqrt{10}\right)^2 \Leftrightarrow P=38+8\sqrt{10}$.



Cách 2 :

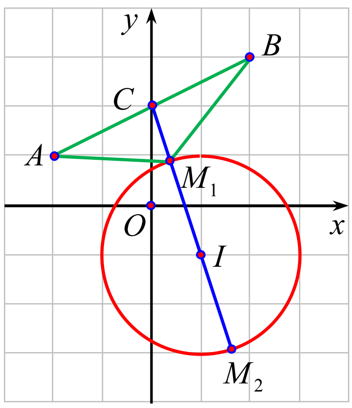
Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi$, với $x,y\in\mathbb{R}$.

Ta có $|z-1+i|=2 \Leftrightarrow |(x-1)+(y+1)i|=2 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=4$

$\Rightarrow$ tập hợp điểm M là đường tròn (C_1) tâm $I(1;-1)$, bán kính $R_1=2$.

Xét biểu thức $P=|z+2-i|^2+|z-2-3i|^2$, với $A(-2;1)$ và $B(2;3)$ thì $P=MA^2+MB^2$

$\Leftrightarrow P=2MC^2+\dfrac{AB^2}{2} \Leftrightarrow P=2MC^2+10$, với $C(0;2)$ là trung điểm của AB.



Mặt khác $IC=\sqrt{10}$ $\Rightarrow \begin{cases} M_1C=\sqrt{10}-2 \\ M_2C=\sqrt{10}+2 \end{cases}$

Khi đó $P_{\max}=2\left(\sqrt{10}+2\right)^2+10=38+8\sqrt{10}$.

Câu 24: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|2z-i|=|2+iz|$, biết $|z_1-z_2|=1$. Tính $P=|z_1+z_2|$.

A. $P=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $P=\sqrt{2}$. **C.** $P=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $P=\sqrt{3}$

Lời giải

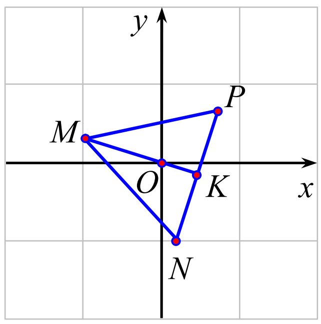
Chọn D

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi$, với $x,y\in\mathbb{R}$

Ta có $|2z-i|=|2+iz|\Leftrightarrow|2z-i|=|z-2i|\Leftrightarrow\left|2\overrightarrow{OM}-\vec{j}\right|=\left|\overrightarrow{OM}-2\vec{j}\right|$, với $\vec{j}=(0;1)$

$\Leftrightarrow 4OM^2-4\overrightarrow{OM}.\vec{j}+\vec{j}^2=OM^2-4\overrightarrow{OM}.\vec{j}+4\vec{j}^2\Leftrightarrow OM^2=1\Leftrightarrow OM=1$

$\Rightarrow$ tập hợp điểm M là đường tròn (C) tâm O, bán kính $R=1$.



Mặt khác gọi N, P là điểm biểu diễn z_1, z_2 thì

$\begin{cases} N\in(C) \\ P\in(C) \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} ON=OP=1 \\ \left|\overrightarrow{NP}\right|=\left|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{ON}\right| \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} ON=OP=1 \\ NP=|z_2-z_1|=1 \end{cases}\Rightarrow\Delta MNP$ là tam giác đều

$\Rightarrow|z_1+z_2|=2OK=2.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

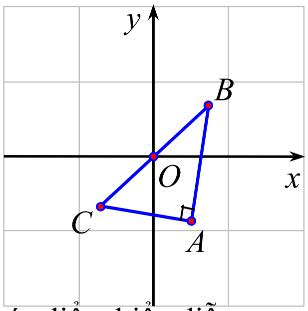
Cách 2:

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi$, với $x,y\in\mathbb{R}$

Ta có $|2z-i|=|2+iz|\Leftrightarrow|2z-i|=|z-2i|\Leftrightarrow|2x+(2y-1)i|=|x+(y-2)i|$

$\Leftrightarrow 4x^2+(2y-1)^2=x^2+(y-2)^2\Leftrightarrow x^2+y^2=1$

$\Rightarrow$ tập hợp điểm M là đường tròn (C) tâm O, bán kính $R=1$.



Mặt khác gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn z_1, z_2 và $-z_2$ thì A, B, C nằm trên đường tròn (C), BC là đường kính

Mà $|z_1 - z_2| = 1 \Leftrightarrow |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = 1 \Leftrightarrow |\overrightarrow{BA}| = 1 \Leftrightarrow AB = 1$

Khi đó: $|z_1 + z_2| = |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{CO}| = CA \Leftrightarrow |z_1 + z_2| = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{3}$.

Câu 25: Cho số phức z thỏa mãn $|z-3-4i| = \sqrt{5}$. Gọi M và m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z+2|^2 - |z-i|^2$. Tính môđun của số phức $w = M + mi$.

A. $|w| = \sqrt{2315}$. **B.** $|w| = \sqrt{1258}$. **C.** $|w| = 3\sqrt{137}$. **D.** $|w| = 2\sqrt{309}$

Lời giải

Chọn B

Gọi $K(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có $|z-3-4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |(x-3)+(y-4)i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5$

$\Rightarrow$ tập hợp điểm K là đường tròn (C) có tâm $I(3;4)$, bán kính $R = \sqrt{5}$.

Mặt khác $P = |z+2|^2 - |z-i|^2 \Leftrightarrow P = (x+2)^2 + y^2 - \left[x^2 + (y-1)^2\right] = 4x + 2y + 3$

$\Rightarrow$ tập hợp điểm K là đường thẳng $\Delta : 4x + 2y + 3 - P = 0$

Khi đó Δ và (C) có điểm chung khi $d(I, \Delta) \le R \Leftrightarrow \dfrac{|4x+2y+3-P|}{2\sqrt{5}} \le \sqrt{5}$

$\Leftrightarrow |23 - P| \le 10 \Leftrightarrow 13 \le P \le 33 \Rightarrow M = 33$ và $m = 13$

Vậy $w = 33 + 13i \Rightarrow |w| = \sqrt{1258}$.

Câu 26: Trong mặt phẳng xOy, gọi M là điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $|z + 3 - \sqrt{3}i| = \sqrt{3}$. Tìm phần ảo của z trong trường hợp góc $\measuredangle xOM$ nhỏ nhất.

A. $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** 0. **D.** $2\sqrt{3}$

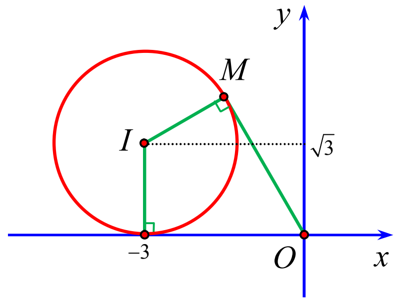
Lời giải

Chọn A

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$

Ta có $\left|z+3-\sqrt{3}i\right|=\sqrt{3} \Leftrightarrow \left|(x+3)+\left(y-\sqrt{3}\right)i\right|=\sqrt{3} \Leftrightarrow (x+3)^2+\left(y-\sqrt{3}\right)^2=3$.

$\Rightarrow$ tập hợp điểm M là đường tròn tâm $\left(-3;\sqrt{3}\right)$, bán kính $R=\sqrt{3}$.



Gọi $\Delta: Ax+By$ là tiếp tuyến của (C) đi qua điểm O

Ta có $d(I,\Delta)=R$

$\Leftrightarrow \dfrac{\left|-3A+\sqrt{3}B\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\sqrt{3} \Leftrightarrow \left|\sqrt{3}A-B\right|=\sqrt{A^2+B^2} \Leftrightarrow 2A^2-2\sqrt{3}AB=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=0 \\ A=\sqrt{3}B \end{array}\right.$

❍ Với $A=0$ chọn $B=1$ $\Rightarrow \Delta: y=0$ không thỏa mãn vì khi đó $\measuredangle xOM=180°$.

❍ Với $A=\sqrt{3}B$ chọn $B=1$ thì $A=\sqrt{3}$ $\Rightarrow \Delta: \sqrt{3}x+y=0$ $\Rightarrow \measuredangle xOM=120° \Rightarrow \widehat{HOM}=30°$

Khi đó M là giao điểm của đường thẳng d đi qua tâm I của đường tròn và đường thẳng Δ

$\Rightarrow d: x-\sqrt{3}y+6=0$; tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{3}x+y=0 \\ x-\sqrt{3}y=-6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{3}{2} \\ y=\dfrac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(-\dfrac{3}{2};\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

Vậy phần ảo của z là $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

Câu 27: Gọi M, n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left|z-2+i\right|^2-\left|\bar{z}+1-4i\right|^2$, biết rằng số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|z(i+1)+1+i\right|=\sqrt{2}$. Tính M^2+n^2.

A. 216. **B.** 162. **C.** 186. **D.** 240

Lời giải

Chọn A

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi$, với $x,y\in\mathbb{R}$.

Ta có

$\left|z(i+1)+1+i\right|=\sqrt{2} \Leftrightarrow \left|(i+1)(z+1)\right|=\sqrt{2} \Leftrightarrow |i+1|.|z+1|=\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}|z+1|=\sqrt{2} \Leftrightarrow |z+1|=1$

$\Leftrightarrow \left|(x+1)+yi\right|=1 \Leftrightarrow (x+1)^2+y^2=1$

$\Rightarrow$ tập hợp điểm M là đường tròn (C) có tâm $I(-1;0)$, bán kính $R=1$.

Mặt khác $P=|z-2+i|^2-|\overline{z}+1-4i|^2 \Leftrightarrow P=|(x-2)+(y+1)i|^2-|(x+1)-(y+4)i|^2$

$\Leftrightarrow P=(x-2)^2+(y+1)^2-\left[(x+1)^2+(y+4)^2\right]$

$\Leftrightarrow P=-6x-6y-12 \Leftrightarrow 6x+6y+12+P=0\ (*)$

$\Rightarrow$ tập hợp các điểm thỏa phương trình $(*)$ là đường thẳng Δ

Khi đó để Δ cắt (C) thì $d(I,\Delta)\le R \Leftrightarrow \dfrac{|6x_I+6y_I+12+P|}{6\sqrt{2}}\le 1 \Leftrightarrow |6+P|\le 6\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow -6-6\sqrt{2}\le P\le -6+6\sqrt{2} \Rightarrow M=-6+6\sqrt{2}$; $n=-6-6\sqrt{2}$.

Vậy $M^2+n^2=216$.

Câu 28: Cho số phức z thỏa mãn $|z-2+3i|+|z+2+i|=4\sqrt{5}$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z-4+4i|$.

A. $\max P=4\sqrt{5}$. **B.** $\max P=7\sqrt{5}$. **C.** $\max P=5\sqrt{5}$. **D.** $\max P=6\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi$, với $x,y\in\mathbb{R}$.

Ta có $|z-2+3i|+|z+2+i|=4\sqrt{5} \Leftrightarrow AM+BM=4\sqrt{5}$, với $F_1(-2;-1)$; $F_2(2;-3)$.

$\Rightarrow$ tập hợp điểm M là elip (E) với hai tiêu điểm $F_1(-2;-1)$; $F_2(2;-3)$, tâm $H(0;-2)$ và $2a=4\sqrt{5} \Leftrightarrow a=2\sqrt{5}$;

Mặt khác $P=|z-4+4i|=IM$, với $I(4;-4)$

❍ $\overrightarrow{IF_1}=(-6;3)$, $\overrightarrow{IF_2}=(-2;1) \Rightarrow \overrightarrow{IF_1}=3\overrightarrow{IF_2} \Rightarrow I,F_1,F_2$ thẳng hàng, F_2 nằm giữa I và F_1.

❍ I nằm ngoài (E)

$\Rightarrow IM_{\max}=IF+a$, $F(0;-2)$ là trung điểm F_1F_2.

$\Leftrightarrow IM_{\max}=2\sqrt{5}+2\sqrt{5}=4\sqrt{5}$

Câu 29: Xét số phức $z=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z-4-3i|=\sqrt{5}$ và $A=|z+1-3i|+|z-1+i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P=a+b$.

A. $P=2$. **B.** $P=4$. **C.** $P=8$. **D.** $P=6$.

Lời giải

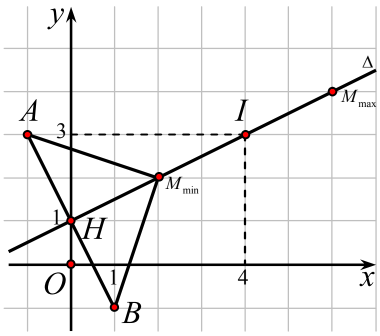
Chọn B.

Gọi $M(a;b)$ là điểm biểu diễn số phức $z=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{R})$

Ta có $|z-4-3i|=\sqrt{5} \Leftrightarrow |(a-4)+(b-3)i|=\sqrt{5} \Leftrightarrow (a-4)^2+(b-3)^2=5$

$\Rightarrow$ tập hợp điểm M là đường tròn (C) có tâm $I(4;3)$, bán kính $R=\sqrt{5}$.

Xét $A=|z+1-3i|+|z-1+i|$; đặt $A(-1;3)$, $B(1;-1)$ thì $A=AM+BM$



Gọi Δ là trung trực của đoạn thẳng AB $\Rightarrow \Delta$ đi qua trung điểm $H(0;1)$ của AB

$\Rightarrow \Delta:\ a-2b+2=0$.

Khi đó để $A=|z+1-3i|+|z-1+i|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì M là giao điểm của Δ và (C).

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}(a-4)^2+(b-3)^2=5\\ a=2b-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=2\\ b=4\end{array}\right.$

Với $b=2 \Rightarrow a=2 \ \Rightarrow z=2+2i \ \Rightarrow A=\sqrt{17}+\sqrt{10}$

Với $b=4 \Rightarrow a=6 \ \Rightarrow z=6+4i \ \Rightarrow A=\sqrt{65}+\sqrt{50}$

Vì $A_{\min}$ nên chọn $z=2+2i$.

Khi đó $P=4$.

Câu 30: Cho số phức z thỏa mãn $|2z+1-3i|=\sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=|z-1|+3|z+1-2i|$.

Lời giải

Gọi $M(x;y)$, với $x,y\in\mathbb{R}$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi$.

Ta có $|2z+1-3i|=\sqrt{2} \Leftrightarrow \left|\left(x+\frac{1}{2}\right)+\left(y-\frac{3}{2}\right)i\right|=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ tập hợp điểm M là đường tròn tâm $I\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$, bán kính $R=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Xét $T=|z-1|+3|z+1-2i| \Leftrightarrow T=|(x-1)+yi|+3|(x+1)+(y-2)i|$

$\Leftrightarrow T=\sqrt{(x-1)^2+y^2}+3\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2} \Leftrightarrow T=AM+3BM$, với $A(1;0)$, $B(-1;2)$.

Bài toán quy về đi tìm tọa độ điểm M trên (C) sao cho $AM+3BM$ đạt giá trị lớn nhất.

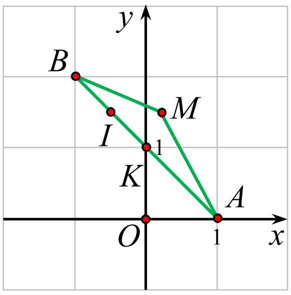
$\overrightarrow{BI}=\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{AI}=\left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$ $\Rightarrow B$, I, A thẳng hàng và $AI=3BI$

Khi đó theo định lý Stewart, ta có $IB.MA^2+IA.MB^2=AB\left(MI^2+IB.IA\right)$, với $AB=2\sqrt{2}$,

$MI=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $IB=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $IA=\frac{3}{\sqrt{2}}$. $\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}MA^2+\frac{3}{\sqrt{2}}MB^2=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$. $\Leftrightarrow MA^2+3MB^2=8$

Do đó $MA+3MB=MA+\sqrt{3}\left(\sqrt{3}MB\right)\le\sqrt{(1+3)\left(MA^2+3MB^2\right)}$ $\Leftrightarrow MA+3MB\le4\sqrt{2}$

Vậy $T_{\min}=4\sqrt{2}$.



Câu 31: Với hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn $z_1+z_2=8+6i$ và $\left|z_1-z_2\right|=2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\left|z_1\right|+\left|z_2\right|$.

A. $P=5+3\sqrt{5}$. **B.** $P=2\sqrt{26}$. **C.** $P=4\sqrt{6}$. **D.** $P=34+3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B.

Gọi M, N lần lượt là điểm biểu các số phức z_1 và z_2.

Ta có $z_1+z_2=8+6i\Rightarrow\left|z_1+z_2\right|=\left|8+6i\right|=10=OP$.

$MN=\left|\overrightarrow{MN}\right|=\left|\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}\right|$ $\Leftrightarrow MN=\left|z_1-z_2\right|=2$.

Áp dụng công thức trung tuyến ta có $OI^2=\frac{OM^2+ON^2}{2}-\frac{MN^2}{4}$

$\Leftrightarrow OI^2=\frac{\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2}{2}-\frac{\left|z_1-z_2\right|^2}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{4}OP^2=\frac{\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2}{2}-1\Leftrightarrow\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2=52$

Khi đó $P=\left|z_1\right|+\left|z_2\right|\Rightarrow P=\left|z_1\right|+\left|z_2\right|\le\sqrt{\left(1^2+1^2\right)\left(\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2\right)}\Rightarrow P\le2\sqrt{26}$.

Vậy $P_{\min}=2\sqrt{26}$.

Câu 32: Cho số phức z thỏa mãn $\left|z+3\right|\le8$. Khi đó tất cả các giá trị của $P=\left|z-2\right|$ tạo thành miền nào sao đây?

A. $[-2;13]$. **B.** $[0;13]$. **C.** $[2;13]$. **D.** $[-13;2]$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có $|z+3| \le 8 \Leftrightarrow |(x+3)+yi| \le 8 \Leftrightarrow (x+3)^2 + y^2 \le 64$ (1)

Đặt $w = z - 2 \Rightarrow \begin{cases} x_w = x - 2 \\ y_w = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_w + 2 \\ y = y_w \end{cases}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\Leftrightarrow (x_w+5)^2 + y_w^2 \le 64$

$\Rightarrow$ tập hợp điểm M biểu diễn số phức $w = z - 2$ là hình tròn (C) tâm $I(-3;0)$, bán kính $R = 8$.

Do $O \in (C)$ nên $\begin{cases} \min w = 0 \\ \max w = OI = R = 13 \end{cases}$

Câu 13. Xét số phức $z = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z - 4 - 3i| = \sqrt{5}$. Tính $P = a + b$ khi $|z+1-3i| + |z-1+i|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $P = 10$. **B.** $P = 4$. **C.** $P = 6$. **D.** $P = 8$.

Lời giải

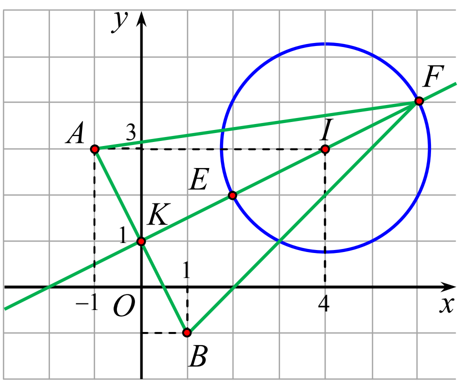
Chọn A.

Gọi $M(a;b)$ là điểm biểu diễn số phức $z = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$

Ta có $|z-4-3i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |(a-4)+(b-3)i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (a-4)^2 + (b-3)^2 = 5$

$\Rightarrow$ tập hợp điểm M là đường tròn (C) tâm $I(4;3)$, bán kính $R = \sqrt{5}$.

Xét $A = |z+1-3i| + |z-1+i|$; đặt $A(-1;3)$, $B(1;-1)$ thì $A = AM + BM$



Gọi Δ là trung trực của đoạn thẳng AB $\Rightarrow \Delta$ đi qua trung điểm $K(0;1)$ của AB

$\Rightarrow \Delta$: $a - 2b + 2 = 0$.

Khi đó để $A = |z+1-3i| + |z-1+i|$ đạt giá trị lớn nhất thì M là giao điểm của Δ và (C).

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} (a-4)^2 + (b-3)^2 = 5 \\ a = 2b - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 2 \\ b = 4 \end{array}\right.$

Với $b=2 \Rightarrow a=2 \Rightarrow z=2+2i \Rightarrow A=\sqrt{17}+\sqrt{10}$

Với $b=4 \Rightarrow a=6 \Rightarrow z=6+4i \Rightarrow A=\sqrt{65}+\sqrt{50}$

Vì $A_{\max}$ nên chọn $z=6+4i$.

Khi đó $P=10$.

Câu 14. Cho số phức z thỏa mãn $5|z-i|=|z+1-3i|+3|z-1+i|$. Tìm giá trị lớn nhất M của biểu thức $P=|z-2+3i|$?

A. $M=\dfrac{10}{3}$.　　**B.** $M=1+\sqrt{13}$.　　**C.** $M=4\sqrt{5}$.　　**D.** $M=9$.

Lời giải

Chọn C.

Đặt $z=w+2-3i$ thì $5|z-i|=|z+1-3i|+3|z-1+i| \Leftrightarrow 5|w+2-4i|=|w+3-6i|+3|w+1-2i|$

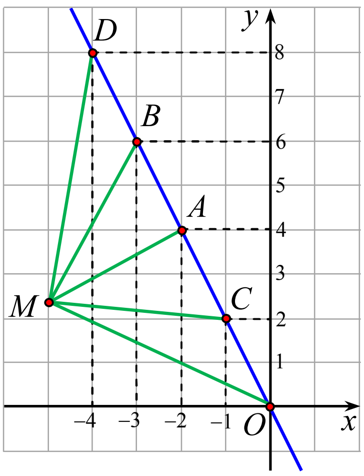
Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức w, $A(-2;4)$, $B(-3;6)$, $C(-1;2)$

Ta có:

❍ $\overrightarrow{AB}=(-1;2)$, $\overrightarrow{AC}=(1;-2)=-\overrightarrow{AB} \Rightarrow A, B, C$ cùng nằm trên đường thẳng $\Delta: 2x+y=0$

❍ $5|w+2-4i|=|w+3-6i|+3|w+1-2i| \Leftrightarrow 5MA=MB+3MC$

Xét hai trường hợp:



➯ Trường hợp 1: $M \in \Delta \Rightarrow M(x;-2x)$

Ta có $5MA=MB+3MC \Rightarrow M \equiv D(-4;8)$

Khi đó $w=-4+8i \Rightarrow P=|w|=4\sqrt{5}$

➯ Trường hợp 2: $M \notin \Delta$

Ta có: $5MA=MB+3MC \Leftrightarrow 25MA^2=(MB+3MC)^2 \le (1+9)(MB^2+MC^2)$

Mà A là trung điểm của BC nên $MA^2=\dfrac{2(MB^2+MC^2)-BC^2}{4} \Rightarrow MB^2+MC^2=MA^2+AB^2$

Khi đó $25MA^2 \le 20\left(MA^2+AB^2\right) \Leftrightarrow 25MA^2 \le 20\left(MA^2+5\right) \Leftrightarrow MA^2 \le 20$

Lại có $MA^2 = \dfrac{2\left(MD^2+MO^2\right)-OD^2}{4} \Rightarrow OM^2 = 2MA^2 + \dfrac{1}{2}OD^2 - MD^2$

$\Rightarrow OM^2 \le 2.20 + \dfrac{1}{2}.80 \Rightarrow OM \le 4\sqrt{5}$

Vậy $M = 4\sqrt{5}$.

Cách 2:

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x+yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có

$5|z-i| = |z+1-3i| + 3|z-1+i| \Leftrightarrow 5MI = MA + 3MB$, với $I(0;1)$, $A(-1;3)$, $B(1;-1)$, $C(2;-3)$

I là trung điểm AB $\Rightarrow MI^2 = \dfrac{2\left(MA^2+MB^2\right)-AB^2}{4} \Rightarrow MA^2+MB^2 = 2MI^2+2AI^2$

$25MI^2 = \left(MA+3MB\right)^2 \le 10\left(MA^2+MB^2\right) \Leftrightarrow 25MI^2 \le 20\left(MI^2+AI^2\right)$

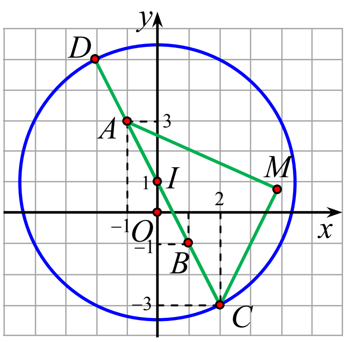
$\Leftrightarrow MI^2 \le 20 \Leftrightarrow MI \le 2\sqrt{5} \Rightarrow M$ thuộc hình tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R = 2\sqrt{5}$

Lại có $IC = 2\sqrt{5}$ $\Rightarrow C$ nằm trên đường tròn tâm I, bán kính $R = 2\sqrt{5}$

Khi đó $P = |z-2+3i| = MC$ lớn nhất khi $M \equiv D$, với $D(-2;5)$ là điểm đối xứng của C qua I

Hay $z = -2+5i$ $\Rightarrow P = |-4+8i|$.

Vậy $P_{\max} = 4\sqrt{5}$.



Câu 33: Cho hai số phức z và w biết chúng thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $\left|\dfrac{(1+i)z}{1-i}+2\right| = 1$ và $w = iz$. Tìm giá trị lớn nhất của $M = |z-w|$.

A. $M = 3\sqrt{3}$. **B.** $M = 3$. **C.** $M = 3\sqrt{2}$. **D.** $M = 2\sqrt{3}$.

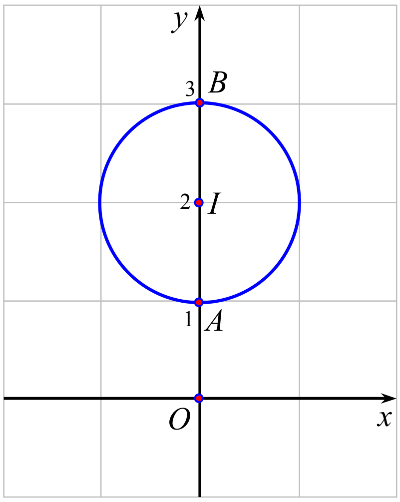
Lời giải

Chọn C

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x+yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có $\left|\frac{(1+i)z}{1-i}+2\right|=1 \Leftrightarrow |iz+2|=1 \Leftrightarrow |z-2i|=1 \Leftrightarrow x^2+(y-2)^2=1$

$\Rightarrow$ tập hợp điểm biểu diễn điểm M là đường tròn tâm $I(0;2)$, bán kính $R=1$.



Khi đó $M=|z-w|=|z(1-i)| \Leftrightarrow M=\sqrt{2}|z| \le 3\sqrt{2}$

Vậy $M_{\max}=3\sqrt{2}$.

Câu 34: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|=3$, $|z_2|=4$, $|z_1-z_2|=\sqrt{37}$. Gọi M, m lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức $w=\frac{z_1}{z_2}$. Tính $P=M^2-m^2$.

A. $P=-\frac{9}{32}$. **B.** $P=\frac{9}{32}$. **C.** $P=-\frac{3}{8}$. **D.** $P=-\frac{9}{64}$

Lời giải

Chọn A

Gọi $M(a;b)$, $N(c;d)$ là điểm biểu diễn các số phức $z_1=a+bi$ và $z_2=c+di$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}$

Gọi $N'(d;-c)$ thì $ON=ON'$; $\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{ON'}=0 \Rightarrow ON \perp ON'$

Ta có

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+bi}{c+di} \Leftrightarrow z=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} \Leftrightarrow z=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{16}$$

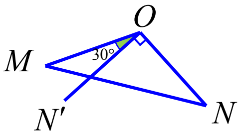
$$\Leftrightarrow z=\frac{ac+bd}{16}+\frac{bc-ad}{16}i \Leftrightarrow z=\frac{\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}}{16}-\frac{\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON'}}{16}i$$

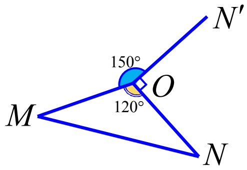
$$|z_2-z_1|=\left|\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}\right| \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MN}\right|=\sqrt{37}$$

$$\cos\widehat{MON}=\frac{OM^2+ON^2-MN^2}{2.OM.ON} \Rightarrow \cos\widehat{MON}=\frac{9+16-37}{2.3.4}=-\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{MON}=120^\circ$$

Với $\widehat{MON}=120^\circ$, ta có:

$$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}=OM.ON.\cos\widehat{MON}=-6$$





➪ $\widehat{MON}=120° \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\widehat{MON'}=30°\\ \widehat{MON'}=150°\end{array}\right.$

❍ Với $\widehat{MON'}=30°$, có $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON'}=OM.ON'.\cos\widehat{MON}=6\sqrt{3}$

Khi đó $z=-\dfrac{3}{8}-\dfrac{3\sqrt{3}}{8}i$

❍ Với $\widehat{MON'}=150°$, có $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON'}=OM.ON'.\cos\widehat{MON}=-6\sqrt{3}$

Khi đó $z=-\dfrac{3}{8}+\dfrac{3\sqrt{3}}{8}i$.

Vậy $z=\dfrac{-3\pm 3\sqrt{3}i}{8}$ và $P=M^2-m^2=\dfrac{-9}{32}$.

Cách 2 .Chuẩn hóa sao cho thỏa mãn đề bài $|z_1|=3$, $|z_2|=4$, $|z_1-z_2|=\sqrt{37}$. Ta được

$$z_1=3; z_2=a+bi \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2=16 \\ (a-3)^2+b^2=37 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{3}{-2+2i\sqrt{3}}=\frac{-3}{8}-\frac{-3\sqrt{3}}{8}i \Rightarrow M^2-m^2=\frac{-9}{32}$$

Câu 35: Gọi z là số phức sao cho $P=|z-1-i|+|z-1-4i|+|z-2+i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $|z|$.

A. $\sqrt{2}$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A.

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi$, với $x,y\in\mathbb{R}$.

Ta có: $P=|z-1-i|+|z-1-4i|+|z-2+i|$, với $A(1;4)$, $B(1;1)$, $C(2;-1)$ thì

$P=MA+MB+MC$; $\overrightarrow{BA}=(0;3)$, $\overrightarrow{BC}=(1;-2)$

Vì $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$ không cùng phương nên ba điểm A, B, C lập thành một tam giác có

$$\cos B=\frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{BA.BC}=-\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \widehat{B}\approx 153°>120°$$

Khi đó để $P_{\min}$ thì $M\equiv B$ (vì M là điểm ***Toricenli***) $\Rightarrow z=-1-i$

Vậy $|z|=\sqrt{2}$.

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Câu 36. Cho số phức z thay đổi thỏa mãn $|z-1-i|=5$. Hỏi giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-7-9i|+\sqrt{2}|(1+i)z+8-8i|$ là?

A. $3\sqrt{5}$. **B.** $5\sqrt{5}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $4\sqrt{5}$.

Câu 37. Cho số phức z thỏa mãn $|z-i|=2$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z+2|+|z+2-2i|$. Tính $P=M+m$.

A. $P=2+\sqrt{17}$. **B.** $P=2+2\sqrt{17}$. **C.** $P=\sqrt{2+2\sqrt{17}}$. **D.** $P=\sqrt{2+\sqrt{17}}$.

Câu 40. Cho số phức z thỏa mãn $|z^2+4|=|z|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Tính $P=M+m$.

A. $P=\dfrac{2\sqrt{17}+1}{2}$. **B.** $P=\sqrt{17}$. **C.** $P=\dfrac{\sqrt{17}+1}{2}$. **D.** $P=\dfrac{2\sqrt{17}-1}{2}$.

Câu 41. Cho số phức $z=a+bi$, $(a\ge 0, b\ge 0)$ thỏa mãn $a-b-2\le 0$; $a+4b-12\le 0$. Hỏi giá trị lớn nhất của $|z|$ là bao nhiêu?

A. $2\sqrt{5}$. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** 5. **D.** $2\sqrt{6}$.

Câu 42. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1-z_2=3+4i$ và $|z_1+z_2|=5$. Hỏi giá trị lớn nhất của biểu thức $|z_1|+|z_2|$ là bao nhiêu?

A. 5. **B.** $5\sqrt{3}$. **C.** $12\sqrt{5}$. **D.** $5\sqrt{2}$.

Câu 43. Cho số phức z. Kí hiệu A, B, C, D lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức z, $\overline{z}$, $z(4+3i)$ và $\overline{z(4+3i)}$. Biết A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình chữ nhật. Hỏi giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z+4i-5|$ là bao nhiêu?

A. $\dfrac{5}{\sqrt{34}}$. **B.** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $\dfrac{4}{\sqrt{13}}$.

Câu 44. Cho số phức $z=\dfrac{i-m}{1-m(m-2i)}$, trong đó m là số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho $|z-i|\le\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Hỏi trong S có tất cả bao nhiêu phần tử nguyên?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Câu 45. Cho số phức z khác 0. Tính diện tích của tam giác có ba đỉnh là ba điểm biểu các số phức z, iz và $z+iz$.

A. $|z|^2$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}|z|^2$. **C.** $\dfrac{1}{2}|z|^2$. **D.** $\dfrac{3}{2}|z|^2$.

Câu 46. Xét số phức z thỏa mãn $|z+2-3i|+|z-6-i|=2\sqrt{17}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\big||z+1-2i|-|z-2+i|\big|$.

A. $M=3\sqrt{2}$, $m=0$.
B. $M=3\sqrt{2}$, $m=\sqrt{2}$.
C. $M=3\sqrt{2}$, $m=5\sqrt{2}-2\sqrt{5}$.
D. $M=\sqrt{2}$, $m=5\sqrt{2}-2\sqrt{5}$.

Câu 47. Xét số phức z thỏa mãn $|z-2+2i|-|z+1-3i|=\sqrt{34}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+1+i|$.

A. $P_{\min}=\dfrac{9}{\sqrt{34}}$.
B. $P_{\min}=3$.
C. $P_{\min}=\sqrt{13}$.
D. $P_{\min}=4$.

Câu 48. Cho số phức z thỏa mãn $|z-2|+|z+2|=6$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=|z-1+3i|$.

Câu 49. Cho số phức z thỏa mãn $z.\overline{z}=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left|z^3+z+\dfrac{7}{\overline{z}^2}\right|-3\left|1+\dfrac{1}{z}\right|$.

A. $\dfrac{5}{2}$.
B. $\dfrac{11}{4}$.
C. 2.
D. 3.

Câu 50. Cho z_1, z_2 là hai số phức liên hợp của nhau thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^3$ là số thực và $|z_1^2-z_2^2|=4\sqrt{3}$. Đặt $T=|z_1^2+z_2^2|$. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $\dfrac{3}{2}<T<\dfrac{5}{2}$.
B. $0<T<\dfrac{3}{2}$.
C. $\dfrac{1}{2}<|z_1|<\dfrac{19}{5}$.
D. $3<T<\dfrac{9}{2}$.

Chuyên đề 9 PHƯƠNG PHÁP ĐẠI SỐ, LƯỢNG GIÁC TRONG GIẢI BÀI TOÁN MAX – MIN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa

Lưu ý:

2. Bất đẳng thức tam giác

- $\left|z_1+z_2\right| \le \left|z_1\right|+\left|z_2\right|$ dấu bằng xảy ra khi $z_1 = kz_2$ với $k \ge 0$.
- $\left|z_1-z_2\right| \le \left|z_1\right|+\left|z_2\right|$ dấu bằng xảy ra khi $z_1 = kz_2$ với $k \le 0$.
- $\left|z_1+z_2\right| \ge \left|z_1\right|-\left|z_2\right|$ dấu bằng xảy ra khi $z_1 = kz_2$ với $k \le 0$.
- $\left|z_1-z_2\right| \le \left|z_1\right|-\left|z_2\right|$ dấu bằng xảy ra khi $z_1 = kz_2$ với $k \ge 0$.

3. Bất đẳng thức AM-GM

Với $a_1, a_2, ..., a_n$ không âm ta luôn có $a_1 + a_2 + ... + a_n \ge n\sqrt[n]{a_1.a_2....a_n}$, n là số tự nhiên lớn hơn 1.Dấu bằng xảy ra khi $a_1 = a_2 = ...a_n$.

4. Bất đẳng thức Bunyakovsky

$$\left(a_1^2+a_2^2+....+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+....+b_n^2\right) \ge \left(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\right)^2$$

Dấu bằng xảy ra khi $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = ... = \dfrac{a_n}{b_n}$

B. BÀI TẬP

Kĩ thuật 1: Đánh giá hai modun với nhau

Kĩ thuật này chúng ta tận dụng các phép đánh giá

- $|a+b| \le |a|+|b|$
- $|a+b| \ge |a|-|b|$

Câu 1. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z^2 - i\right| = 1$. Giá trị lớn nhất của $|\overline{z}|$ là

A. $\sqrt{5}$. **B.** 2. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Phân tích

- Nhận thấy bên trong mô đun chỉ có 1 vị trí chứa z bởi vậy ta sẽ nghĩ đến đánh giá hai modun $\left|z^2-i\right|$, $|z|$ với nhau.
- Công cụ chúng ta hay dùng để đánh giá các mô đun với nhau $|a+b| \le |a|+|b|$ và $|a+b| \ge |a|-|b|$.

Lời giải

Ta có: $\left|z^2-i\right| \ge \left|z^2\right|-|i| = |z|^2-1$. Do đó $|z|^2-1 \le 1 \Leftrightarrow |z|^2 \le 2 \Leftrightarrow 0 \le |z| \le \sqrt{2}$.

Với $z = 1+i$, ta có $\left|z^2-i\right| = |i| = 1$ và $|\overline{z}| = \sqrt{2}$.

Do đó $|\overline{z}|_{\max} = |z|_{\max} = \sqrt{2}$.

Vậy chọn **đáp án D**

Câu 2. Cho số phức z thỏa mãn z không phải số thực và $w=\frac{z}{2+z^2}$ là số thực. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z+1-i|$.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 2. **D.** 8.

Phân tích

- Đề bài cho $w=\frac{z}{2+z^2}$ là số thực nên ta tìm cách biểu diễn số phức z theo số thực đó. Sau đó ta nhận thấy z là ẩn của phương trình bậc hai. Từ đó ta sẽ tìm được $|z|$.
- Nhận thấy bên trong mô đun chỉ có 1 vị trí chứa z bởi vậy ta sẽ nghĩ đến đánh giá hai modun $|z+1-i|$, $|z|$ với nhau.
- Công cụ chúng ta hay dùng để đánh giá các môdun với nhau
  $|a+b|\le|a|+|b|$ và $|a+b|\ge|a|-|b|$.

Lời giải

Ta có $w=\frac{z}{2+z^2}\Leftrightarrow w\left(2+z^2\right)=z\Leftrightarrow z^2-\frac{1}{w}z+2=0\ (*)$.

(*) là phương trình bậc hai với hệ số thực $\frac{1}{w}\in\mathbb{R}$. Vì z thỏa $(*)$ nên z là nghiệm phương trình $(*)$. Gọi z_1,z_2 là hai nghiệm của (*).

Suy ra $z_1z_2=2\Rightarrow|z_1z_2|=2\Leftrightarrow|z_1||z_2|=2\Rightarrow|z|=\sqrt{2}$.

Suy ra $P=|z+1-i|\le|z|+|1-i|=\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$. Dấu bằng xảy ra khi $z=1-i$.

Vậy chọn **đáp án A**

Câu 3. Cho số phức z thỏa $|z|\ge 2$. Tìm tích giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=\left|\frac{z+i}{z}\right|$.

A. $\frac{3}{4}$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $\frac{2}{3}$.

Phân tích

- Nhận thấy $\left|\frac{z+i}{z}\right|$ có thể viết lại thành $\left|1+\frac{i}{z}\right|$ tức là bên trong cũng chỉ có một vị trí chứa z. Nên ta tìm cách đánh giá $\left|\frac{z+i}{z}\right|$ với $|z|$.
- Công cụ chúng ta hay dùng để đánh giá các môdun với nhau
  $|a+b|\le|a|+|b|$ và $|a+b|\ge|a|-|b|$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $P=\left|1+\frac{i}{z}\right|\le 1+\frac{1}{|z|}\le\frac{3}{2}$. Mặt khác: $\left|1+\frac{i}{z}\right|\ge 1-\frac{1}{|z|}\ge\frac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{1}{2}$, xảy ra khi $z=-2i;$ giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{3}{2}$ xảy ra khi $z=2i.$

Câu 4. Xét số phức z thỏa mãn $2|z-1|+3|z-i|\le 2\sqrt{2}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $\frac{3}{2} \le |z| \le 2$. **B.** $|z| > 2$. **C.** $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$. **D.** $|z| < \frac{1}{2}$.

Lời giải

Cách 1

Sử dụng bất đẳng thức modun, ta có

$2\sqrt{2} \ge 2|z-1| + 3|z-i| \ge 2\left(|z-1| + |z-i|\right) \ge 2|z-1-(z-i)| = 2\sqrt{2}$

Do đó dấu bằng phải xảy ra, tức là

$\begin{cases} |z-i| = 0 \\ |z-1| + |z-i| = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow z = i \Rightarrow |z| = 1$

Chọn **đáp án C**

Cách 2

Gọi $z = x + yi, (x; y \in \mathbb{R})$ được biểu diễn bởi điểm $M(x;y)$.

Suy ra $2|z-1| + 3|z-i| = 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + 3\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = 2MA + 3MB$ với $A(1;0), B(0;1)$.

Khi đó, điều kiện bài toán trở thành $2MA + 3MB \le 2\sqrt{2} = 2AB$ (1).

Mặt khác, ta luôn có: $2MA + 3MB = 2(MA + MB) + MB \ge 2AB + MB$ (2).

Từ (1) và (2), suy ra:

$2AB + MB \le 2MA + 3MB \le 2AB \Rightarrow 2AB + MB \le 2AB \Leftrightarrow MB \le 0$

$\Rightarrow MB = 0 \Leftrightarrow M \equiv B(0;1) \Rightarrow |Z| = 1 \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$

Câu 5. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất $M_{\max}$ và giá trị nhỏ nhất $M_{\min}$ của biểu thức $M = |z^2 + z + 1| + |z^3 + 1|$.

A. $M_{\max} = 5;\ M_{\min} = 1$. **B.** $M_{\max} = 5;\ M_{\min} = 2$.

C. $M_{\max} = 4;\ M_{\min} = 1$. **D.** $M_{\max} = 4;\ M_{\min} = 2$.

Phân tích

- Ta tìm cách đánh giá $|z^2 + z + 1| + |z^3 + 1|$ với $|z|$.
- Công cụ chúng ta hay dùng để đánh giá các môđun với nhau
  $|a + b| \le |a| + |b|$ và $|a + b| \ge |a| - |b|$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $M \le |z|^2 + |z| + 1 + |z|^3 + 1 = 5$, khi $z = 1 \Rightarrow M = 5 \Rightarrow M_{\max} = 5$.

Mặt khác: $M = \frac{|1 - z^3|}{|1 - z|} + |1 + z^3| \ge \frac{|1 - z^3|}{2} + \frac{|1 + z^3|}{2} \ge \frac{|1 - z^3 + 1 + z^3|}{2} = 1$,

khi $z = -1 \Rightarrow M = 1 \Rightarrow M_{\min} = 1$.

Câu 6. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z + \frac{1}{z}\right| = 3$. Tổng của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ là

A. 3. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\sqrt{13}$. **D.** 5.

Phân tích

- Ta tìm cách đánh giá $\left|z + \frac{1}{z}\right|$ với $|z|$.

- Trước hết ta có bài toán tổng quát: Cho a,b,c là các số thực dương và số phức $z \neq 0$ thỏa mãn $\left|az+\frac{b}{z}\right|=c$. Chứng minh rằng $\frac{-c+\sqrt{c^2+4ab}}{2a} \le |z| \le \frac{c+\sqrt{c^2+4ab}}{2a}$.
  Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi z là số thuần ảo.
- Dựa vào dấu đẳng thức xảy ra ta chỉ cần tiến hành giải phương trình $az-\frac{b}{z}=c$ rồi lấy trị tuyệt đối mỗi nghiệm. Khi đó số dương nhỏ là $\min|z|$ số dương lớn là $\max|z|$.

Lời giải

Ta có $|z|-\frac{1}{|z|} \le \left|z+\frac{1}{z}\right|=3 \Rightarrow |z|^2-3|z|-1\le 0 \Rightarrow \frac{3-\sqrt{13}}{2} \le |z| \le \frac{3+\sqrt{13}}{2}$

Do đó $\min|z|=\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$; $\max|z|=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$.

Vậy tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z|$ là $\sqrt{13}$.

Kĩ thuật 2: Dùng các bất đẳng thức đại số

Kĩ thuật này chúng ta tận dụng các phép đánh giá

- Với $a_1,a_2,...a_n$ không âm ta luôn có $a_1+a_2+...+a_n \ge n\sqrt[n]{a_1.a_2....a_n}$
  Dấu bằng xảy ra khi $a_1=a_2=...a_n$.
- $\left(a_1^2+a_2^2+....a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+....b_n^2\right) \ge \left(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\right)^2$
  Dấu bằng xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}$

Câu 7. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-1|=\sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của $T=|z+i|+|z-2-i|$.

A. $\max T=8\sqrt{2}$. **B.** $\max T=4$. **C.** $\max T=4\sqrt{2}$. **D.** $\max T=8$.

Phân tích

- Ta tìm cách biểu diễn $z+i$, $z-2-i$ theo $z-1$. Khi đó $T=|z+i|+|z-2-i|$ biểu diễn được dưới dạng $\sqrt{\ }+\sqrt{\ }$ và $|z-1|$ cũng biểu diễn được dưới dạng $\sqrt{\ }$
- Ta tìm cách đánh giá $\sqrt{\ }+\sqrt{\ }$ và $\sqrt{\ }$

Lời giải

Chọn B

$T=|z+i|+|z-2-i|=|(z-1)+(1+i)|+|(z-1)-(1+i)|$.

Đặt $w=z-1$. Ta có $|w|=1$ và $T=|w+(1+i)|+|w-(1+i)|$.

Đặt $w=x+y.i$. Khi đó $|w|^2=2=x^2+y^2$.

$$T=|(x+1)+(y+1)i|+|(x-1)+(y-1)i|=1.\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}+1.\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$$

$$\le\sqrt{\left(1^2+1^2\right)\left((x+1)^2+(y+1)^2+(x-1)^2+(y-1)^2\right)}=\sqrt{2\left(2x^2+2y^2+4\right)}=4$$

Vậy $\max T=4$.

Câu 8. Cho số phức z thỏa mãn $|z-3|+|z+3|=8$. Gọi M, m lần lượt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z|$. Khi đó $M+m$ bằng

A. $4-\sqrt{7}$. **B.** $4+\sqrt{7}$. **C.** 7. **D.** $4+\sqrt{5}$.

Phân tích

- Đề bài yêu cầu tính $M+m$ do vậy ta sẽ đi tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$
- Đề bài cho $|z-3|+|z+3|=8$ có 2 môđun mà môđun có thể biểu diễn qua căn. Tức là đề bài cho biết tổng hai căn. Do vậy ta sẽ đánh giá tổng hai căn với căn thứ ba.
- Công cụ để đánh tổng hai căn với căn thứ ba có thể dùng Bunhiacopxki.

Lời giải

Chọn B

Gọi $z=x+yi$ với $x;y\in\mathbb{R}$.

Ta có $8=|z-3|+|z+3|\ge|z-3+z+3|=|2z|\Leftrightarrow|z|\le4$.

Do đó $M=max|z|=4$ khi $z=\pm4$.

Mà $|z-3|+|z+3|=8\Leftrightarrow|x-3+yi|+|x+3+yi|=8\Leftrightarrow\sqrt{(x-3)^2+y^2}+\sqrt{(x+3)^2+y^2}=8$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có

$$8=1.\sqrt{(x-3)^2+y^2}+1.\sqrt{(x+3)^2+y^2}\le\sqrt{(1^2+1^2)\left[(x-3)^2+y^2+(x+3)^2+y^2\right]}$$

$$\Leftrightarrow 8\le\sqrt{2(2x^2+2y^2+18)}\Leftrightarrow 2(2x^2+2y^2+18)\ge64$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2\ge7\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2}\ge\sqrt{7}\Leftrightarrow|z|\ge\sqrt{7}.$$

Do đó $M=min|z|=\sqrt{7}$.

Vậy $M+m=4+\sqrt{7}$.

Câu 9. Tìm số phức z sao cho $|z-(3+4i)|=\sqrt{5}$ và biểu thức $P=|z+2|^2-|z-i|^2$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $z=2+i$. **B.** $z=5+5i$. **C.** $z=2+2i$. **D.** $z=4+3i$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1

Đặt $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$.

Khi đó $|z-(3+4i)|=\sqrt{5}\Leftrightarrow(x-3)^2+(y-4)^2=5$.

Ta có $P=(x+2)^2+y^2-x^2-(y-1)^2=4x+2y+3\Leftrightarrow P-23=4(x-3)+2(y-4)$

Suy ra $|P-23|=|4(x-3)+2(y-4)|\le\sqrt{(4^2+2^2)\left((x-3)^2+(y-4)^2\right)}=\sqrt{20.5}=10$.

Suy ra $13\le P\le33$.

Do đó: $P_{\max}=33$ khi và chỉ khi $\begin{cases}\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-4}{2}\\4(x-3)+2(y-4)=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\y=5\end{cases}$.

Vậy $z=5+5i$.

Cách 2

Đặt $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$.

Khi đó $|z-(3+4i)|=\sqrt{5}\Leftrightarrow(x-3)^2+(y-4)^2=5$.

Đặt $\begin{cases} x-3=\sqrt{5}\sin t \Leftrightarrow x=3+\sqrt{5}\sin t \\ y-4=\sqrt{5}\cos t \Leftrightarrow y=4+\sqrt{5}\cos t \end{cases}$.

$P=|z+2|^2-|z-i|^2=4x+2y+3=4\left(3+\sqrt{5}\sin t\right)+2\left(4+\sqrt{5}\cos t\right)+3$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{5}\sin t+2\sqrt{5}\cos t=P-23$

Theo điều kiện có nghiệm phương trình lượng giác

$\Rightarrow \left(4\sqrt{5}\right)^2+\left(2\sqrt{5}\right)^2\geq (P-23)^2 \Leftrightarrow P^2-46P+429\leq 0 \Leftrightarrow 13\leq P\leq 33$.

Vậy GTLN của P là 33 $\Rightarrow z=5+5i$.

Câu 10. Cho số phức z thỏa mãn $|z|\leq 1$ và số phức $w=\dfrac{2z-i}{2+iz}$. Khi đó, kết luận nào sau đây đúng?

A. $|w|>2$. **B.** $|w|\leq 1$. **C.** $|w|=2$. **D.** $1<|w|<2$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $z=a+bi\,(a,b\in\mathbb{R})\Rightarrow a^2+b^2\leq 1$ do $|z|\leq 1$.

$$|w|=\left|\frac{2z-i}{2+iz}\right|=\left|\frac{2a+(2b-1)i}{(2-b)+ai}\right|=\frac{|2a+(2b-1)i|}{|(2-b)+ai|}=\sqrt{\frac{4a^2+(2b-1)^2}{(2-b)^2+a^2}}$$

Ta chứng minh $\dfrac{4a^2+(2b-1)^2}{(2-b)^2+a^2}\leq 1$.

Thật vậy ta có: $4a^2+(2b-1)^2\leq (2-b)^2+a^2 \Leftrightarrow a^2+b^2\leq 1$.

Dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi $a^2+b^2\leq 1$.

Câu 11. Cho ba số phức z_1,z_2,z_3 thỏa mãn $z_1+z_2+z_3=0$ và $|z_1|=|z_2|=|z_3|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức của $P=|z_1+z_2|+2|z_2+z_3|+2|z_3+z_1|$ bằng bao nhiêu?

A. $P_{\max}=\dfrac{7\sqrt{2}}{3}$. **B.** $P_{\max}=\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$. **C.** $P_{\max}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$. **D.** $P_{\max}=\dfrac{10\sqrt{2}}{3}$.

Phân tích

- Với phép biến đổi
  $|z_1+z_2|^2+|z_2+z_3|^2+|z_3+z_1|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2+(z_1+z_2+z_3)\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}\right)$ giúp ta đánh giá $|z_1+z_2|+|z_2+z_3|+|z_3+z_1|$ và $|z_1|+|z_2|+|z_2|$.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức biến đổi $|z_1+z_2|^2+|z_2+z_3|^2+|z_3+z_1|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$P=|z_1+z_2|+2|z_2+z_3|+2|z_3+z_1|\leq\sqrt{\left(1^2+2^2+2^2\right)\left(|z_1+z_2|^2+|z_2+z_3|^2+|z_3+z_1|^2\right)}=3\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{3\sqrt{6}}{2}$$

Suy ra $P_{\max}=\dfrac{3\sqrt{6}}{2}\rightarrow$ đáp án B.

Câu 12. Với hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 + z_2 = 8 + 6i$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z_1| + |z_2|$.

A. $P = 5 + 3\sqrt{5}$. **B.** $P = 2\sqrt{26}$. **C.** $P = 4\sqrt{6}$. **D.** $P = 34 + 3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Gọi $z_1 = a_1 + b_1 i$ và $z_2 = a_2 + b_2 i$ với $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$.

Khi đó $\begin{cases} z_1 + z_2 = 8 + 6i \\ |z_1 - z_2| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i = 8 + 6i \\ |(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 = 8 \\ b_1 + b_2 = 6 \\ (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 = 4 \end{cases}$

$\Rightarrow (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 = 104 \Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 = 52 \;\; (*)$.

Ta có $P = |z_1| + |z_2| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \overset{Bunh}{\leq} \sqrt{(1^2 + 2^2)(a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2)} \overset{(*)}{=} \sqrt{2.52} = 2\sqrt{26}$

$\Rightarrow P_{\max} = 2\sqrt{26}$

$\rightarrow$ đáp án B.

Cách 2: Áp dụng công thức biến đổi $z.\overline{z} = |z|^2$ và $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$ ta có:

$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} + (z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_2)} = (z_1 + z_2)(\overline{z}_1 + \overline{z}_2) + (z_1 - z_2)(\overline{z}_1 - \overline{z}_2)$

$= 2(z_1\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2) = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)$.

Vậy $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)$.

Suy ra $|z_1|^2 + |z_2|^2 = \dfrac{|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2}{2} = \dfrac{8^2 + 6^2 + 2^2}{2} = 52 \;\; (*)$

$P = |z_1| + |z_2| \overset{Bunh}{\leq} \sqrt{(1^2 + 2^2)\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)} \overset{(*)}{=} \sqrt{2.52} = 2\sqrt{26} \Rightarrow P_{\max} = 2\sqrt{26}$ $\rightarrow$ đáp án B.

Câu 13. Xét các số phức $z = a + bi \; (a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z - 4 - 3i| = \sqrt{5}$. Tính $P = a + b$ khi $|z + 1 - 3i| + |z - 1 + i|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $P = 10$. **B.** $P = 4$. **C.** $P = 6$. **D.** $P = 8$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

Ta có: $|z - 4 - 3i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (a - 4)^2 + (b - 3)^2 = 5 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 8a + 6b - 20$

Đặt $A = |z + 1 - 3i| + |z - 1 + i|$ ta có:

$A = \sqrt{(a + 1)^2 + (b - 3)^2} + \sqrt{(a - 1)^2 + (b + 1)^2}$

$A^2 \leq (1^2 + 1^2)\left((a + 1)^2 + (b - 3)^2 + (a - 1)^2 + (b + 1)^2\right) = 2\left(2(a^2 + b^2) - 4b + 12\right)$

$= 2(16a + 8b - 28) = 8(4a + 2b - 7) \; (1)$

Mặt khác ta có:

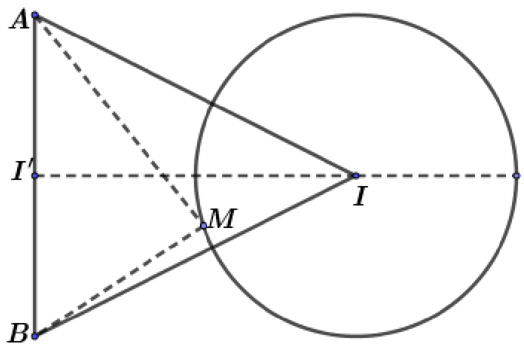
$4a + 2b - 7 = 4(a - 4) + 2(b - 3) + 15 \leq \sqrt{(4^2 + 2^2)\left((a - 4)^2 + (b - 3)^2\right)} + 15 = 25 \; (2)$

Từ (1) và (2) ta được: $A^2 \le 200$

Để $A_{\max} = 10\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+2b-7=25 \\ \dfrac{a-4}{4} = \dfrac{b-3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=4 \end{cases}$

Vậy $P = a+b = 10$.

Cách 2:



Do $|z-4-3i| = \sqrt{5} \Rightarrow (a-4)^2 + (b-3)^2 = 5$

Suy ra $M \in (C)$ có tâm $I(4;3)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$

Gọi $A(-1;3)$, $B(1;-1)$, $I'(0;1)$

Suy ra $P = MA + MB \le \sqrt{2(MA^2 + MB^2)}$

Mặt khác ta có $MA^2 + MB^2 = 2MI'^2 + \dfrac{AB^2}{2}$

Suy ra $P_{Max} \Leftrightarrow MI'_{Max} \Leftrightarrow I'$ là hình chiếu vuông góc của M trên $AB \Leftrightarrow M, I, I'$ thẳng hàng. Vì ta thấy $IA = IB \Rightarrow MA = MB$ nên xảy ra dấu=.

Ta có $\overrightarrow{IM} = (a-4; a-3), \overrightarrow{II'} = (-4;-2)$ nên $AB \Leftrightarrow M, I, I'$ thẳng hàng

$\Leftrightarrow -2(a-4) = -4(b-3) \Leftrightarrow a = 2b-2$.

Tọa độ M là nghiệm của hệ

$\begin{cases} (a-4)^2 + (b-3)^2 = 5 \\ a = 2b-2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2; b=2 \\ a=6; b=4 \end{array} \right.$

Mặt khác

$M(2;2) \Rightarrow P = MA + MB = 2\sqrt{10}$

$M(6;4) \Rightarrow P = MA + MB = 10\sqrt{2}$

Vậyđể P_{Max} thì $M(6;4)$ Suy ra $a+b=10$.

Cách 3

Ta có $|z-4-3i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (a-4)^2 + (b-3)^2 = 5$

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{5}\sin\alpha + 4 \\ b = \sqrt{5}\cos\alpha + 3 \end{cases}$.

Khi đó $M = |z+1-3i| + |z-1+i| = \sqrt{(a+1)^2 + (b-3)^2} + \sqrt{(a-1)^2 + (b+1)^2}$

$= \sqrt{10\sqrt{5}\sin\alpha + 30} + \sqrt{6\sqrt{5}\sin\alpha + 8\sqrt{5}\cos\alpha + 30}$.

Áp dụng BĐT Bunhiacopski

$M \le \sqrt{2(16\sqrt{5}\sin\alpha + 8\sqrt{5}\cos\alpha + 60)} = \sqrt{2[8\sqrt{5}(2\sin\alpha + \cos\alpha) + 60]} \le 10\sqrt{2}$.

Nên $M_{\max} = 10\sqrt{2}$ khi $\begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{5}\sin\alpha + 4 = 6 \\ b = \sqrt{5}\cos\alpha + 3 = 4 \end{cases}$.

Vậy $P = a + b = 10$.

Kĩ thuật 3: Dồn biến

Kĩ thuật này chúng ta đi theo hướng

- Với số phức ở dạng đại số từ đề bài ta đi tìm mối liên hệ giữa phần thực và phần ảo. Nếu làm được điều này ta sẽ dồn về 1 biến.
- Từ đề bài chúng ta đánh giá về một môđun có thể là $|z|$.

Câu 14. Trong các số phức thỏa mãn điều kiện $|z+3i| = |z+2-i|$. Tìm số phức có môđun nhỏ nhất?

A. $z = 1-2i$. **B.** $z = -\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$. **C.** $z = \frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$. **D.** $z = -1+2i$.

Phân tích

- Đề bài cho $|z+3i| = |z+2-i|$ nên ta sẽ tìm được mối liên hệ giữa phần thực và phần ảo của số phức z. Bởi vậy $|z|$ sẽ dồn được một biến.

Lời giải

Chọn C

Giả sử $z = x + yi\,(x, y \in \mathbb{R})$.

$|z+3i| = |z+2-i| \Leftrightarrow |x+(y+3)i| = |(x+2)+(y-1)i| \Leftrightarrow x^2 + (y+3)^2 = (x+2)^2 + (y-1)^2$

$\Leftrightarrow 6y + 9 = 4x + 4 - 2y + 1 \Leftrightarrow 4x - 8y - 4 = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2y + 1$.

$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(2y+1)^2 + y^2} = \sqrt{5y^2+4y+1} = \sqrt{5\left(y+\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}} \geq \frac{\sqrt{5}}{5}$

Suy ra $|z|_{\min} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ khi $y = -\frac{2}{5} \Rightarrow x = \frac{1}{5}$ Vậy $z = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$.

Câu 15. Cho z thỏa mãn $|z-2-4i| = |z-2i|$. Tìm GTLN của $|w|$ với $w = \frac{2+i}{z}$.

A. $|w| = 2\sqrt{2}$. **B.** $|w| = \frac{\sqrt{10}}{8}$. **C.** $|w| = \frac{\sqrt{10}}{4}$. **D.** $|w| = \sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $z = x + yi\,(x, y \in \mathbb{R})$. Khi đó

$|z-2-4i| = |z-2i| \Leftrightarrow |x+yi-2-4i| = |x+yi-2i| \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-4)^2 = x^2 + (y-2)^2$

$\Leftrightarrow -4x - 4y + 16 = 0 \Leftrightarrow x + y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = 4 - x$.

Ta có

$$w = \frac{2+i}{z} \Rightarrow |w| = \left|\frac{2+i}{z}\right| = \frac{|2+i|}{|z|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{x^2+(4-x)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2x^2-8x+16}}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2(x-2)^2+8}}.$$

Ta có $\sqrt{2(x-2)^2+8}\geq\sqrt{8}$ nên $|w|=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2x^2-8x+16}}\leq\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$. Vậy $|w|_{\max}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

Câu 16. Cho các số phức $z_1=1+3i$, $z_2=-5-3i$. Tìm điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức z_3, biết rằng trong mặt phẳng phức điểm M nằm trên đường thẳng $x-2y+1=0$ và mô đun số phức $w=3z_3-z_2-2z_1$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M\left(-\dfrac{3}{5};-\dfrac{1}{5}\right)$. **B.** $M\left(\dfrac{3}{5};-\dfrac{1}{5}\right)$. **C.** $M\left(\dfrac{3}{5};\dfrac{1}{5}\right)$. **D.** $M\left(-\dfrac{3}{5};\dfrac{1}{5}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có điểm $M(x;y)\in d: x-2y+1=0$ nên $M(2y-1;y)\Rightarrow z_3=2y-1+yi$

Do đó $w=3z_3-z_2-2z_1=3(2y-1+yi)-(-5-3i)-2(1+3i)=6y+(3y-3)i$

Suy ra $|w|=\sqrt{(6y)^2+(3y-3)^2}=3\sqrt{5y^2-2y+1}=3\sqrt{5\left(y-\dfrac{1}{5}\right)^2+\dfrac{4}{5}}\geq 3\sqrt{\dfrac{4}{5}}=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}, \forall y\in\mathbb{R}$

Vậy $\min|w|=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$, dấu bằng xảy ra khi $y=\dfrac{1}{5}\Rightarrow M\left(-\dfrac{3}{5};\dfrac{1}{5}\right)$.

Câu 17. Cho z thỏa mãn $|z-2-4i|=|z-2i|$. Tìm GTLN của $|w|$ với $w=\dfrac{2+i}{z}$.

A. $|w|=2\sqrt{2}$. **B.** $|w|=\dfrac{\sqrt{10}}{8}$. **C.** $|w|=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$. **D.** $|w|=\sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$. Khi đó

$|z-2-4i|=|z-2i|\Leftrightarrow|x+yi-2-4i|=|x+yi-2i|\Leftrightarrow(x-2)^2+(y-4)^2=x^2+(y-2)^2$

$\Leftrightarrow -4x-4y+16=0\Leftrightarrow x+y-4=0\Leftrightarrow y=4-x$.

Ta có

$$w=\frac{2+i}{z}\Rightarrow|w|=\left|\frac{2+i}{z}\right|=\frac{|2+i|}{|z|}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{x^2+(4-x)^2}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2x^2-8x+16}}$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2(x-2)^2+8}}.$$

Ta có $\sqrt{2(x-2)^2+8}\geq\sqrt{8}$ nên $|w|=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2x^2-8x+16}}\leq\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$. Vậy $|w|_{\max}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

Câu 18. Cho số phức z thoả mãn $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z+1|+2|z-1|$

A. $P_{\max}=2\sqrt{5}$. **B.** $P_{\max}=2\sqrt{10}$. **C.** $P_{\max}=3\sqrt{5}$. **D.** $P_{\max}=3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

Đặt $z=x+yi\ (x;y\in\mathbb{R})$.

Ta có $|z|=1 \Leftrightarrow x^2+y^2=1$. Suy ra $x\in[-1;1]$

Ta có $P=|z+1|+2|z-1|=\sqrt{(x+1)^2+y^2}+2\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{2x+2}+2\sqrt{-2x+2}$.

Xét hàm $f(x)=\sqrt{2x+2}+2\sqrt{-2x+2}$ trên đoạn $[-1;1]$, ta được

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x+2}}-\dfrac{2}{\sqrt{-2x+2}}$, $f'(x)=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{5}$

Bảng biến thiên:

x	-1		$-\frac{3}{5}$		1
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖
$f(x)$	4	↗	$2\sqrt{5}$	↘	2

Dựa vào BBT, ta suy ra: $\max\limits_{[-1;1]} f(x)=f\left(-\dfrac{3}{5}\right)=2\sqrt{5}$ và $\min\limits_{[-1;1]} f(x)=f(1)=2$.

Cách 2: Bunhiacopxki

Theo BĐT Bunhiacopxki:

$P=|z+1|+2|z-1|\le\sqrt{(1^2+2^2)\left(|z+1|^2+|z-1|^2\right)}=\sqrt{10\left(|z|^2+1\right)}=2\sqrt{5}$.

Câu 19. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|1+z|+3|1-z|$.

A. $3\sqrt{15}$ **B.** $6\sqrt{5}$ **C.** $\sqrt{20}$ **D.** $2\sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $z=x+yi$; $(x\in\mathbb{R}; y\in\mathbb{R})$. Ta có: $|z|=1\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}=1\Rightarrow y^2=1-x^2\Rightarrow x\in[-1;1]$.

Ta có: $P=|1+z|+3|1-z|=\sqrt{(1+x)^2+y^2}+3\sqrt{(1-x)^2+y^2}=\sqrt{2(1+x)}+3\sqrt{2(1-x)}$.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{2(1+x)}+3\sqrt{2(1-x)}$; $x\in[-1;1]$. Hàm số liên tục trên $[-1;1]$ và với $x\in(-1;1)$ ta có: $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2(1+x)}}-\dfrac{3}{\sqrt{2(1-x)}}=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{4}{5}\in(-1;1)$.

Ta có: $f(1)=2$; $f(-1)=6$; $f\left(-\dfrac{4}{5}\right)=2\sqrt{10}\Rightarrow P_{\max}=2\sqrt{10}$.

Câu 20. Xét số phức z thỏa mãn $|z+2-i|+|z-4-7i|=6\sqrt{2}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $|z-1+i|$. Tính $P=m+M$.

A. $P=\sqrt{13}+\sqrt{73}$. **B.** $P=\dfrac{5\sqrt{2}+2\sqrt{73}}{2}$. **C.** $P=5\sqrt{2}+2\sqrt{73}$. **D.** $P=\dfrac{5\sqrt{2}+\sqrt{73}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của z. Các điểm $A(-2;1)$, $B(4,7)$, $C(1;-1)$.

Ta có $|z+2-i|+|z-4-7i|=6\sqrt{2}\Leftrightarrow MA+MB=6\sqrt{2}$, mà $AB=6\sqrt{2}\Rightarrow MA+MB=AB$.

Suy ra M thuộc đoạn thẳng AB.

Phương trình đường thẳng $AB: y=x+3$, với $x\in[-2;4]$.

Ta có $|z-1+i|=MC \Rightarrow |z-1+i|^2=MC^2=(x-1)^2+(y+1)^2=(x-1)^2+(x+4)^2=2x^2+6x+17$

Đặt $f(x)=2x^2+6x+17$, $x\in[-2;4]$.

$f'(x)=4x+6$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{2}$ **(nhận)**

Ta có $f(-2)=13$, $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{25}{2}$, $f(4)=73$.

Vậy $f(x)_{\max}=f(4)=73$, $f(x)_{\min}=f\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{25}{2}$.

$\Rightarrow M=\sqrt{73}, m=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}. \Rightarrow P=\dfrac{5\sqrt{2}+2\sqrt{73}}{2}$.

Câu 21. Cho số phức z thỏa mãn $\left|(z+2)i+1\right|+\left|(\overline{z}-2)i-1\right|=6$. Tính tổng $T=\max|z|+\min|z|$?

A. $T=\dfrac{5\sqrt{5}-2}{2}$. **B.** $T=0$. **C.** $T=6$. **D.** $T=\dfrac{3\sqrt{5}-2}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $z=a+bi;\ a,b\in\mathbb{R}$.

Ta có: $\left|(z+2)i+1\right|+\left|(\overline{z}-2)i-1\right|=6$

$\Leftrightarrow \left|(a+bi+2)i+1\right|=2\left|(a-bi-2)i-1\right|=6$

$\Leftrightarrow \sqrt{(a+2)^2+(1-b)^2}+\sqrt{(a-2)^2+(b-1)^2}=6$

$\Leftrightarrow 5(9-a^2)=9(b-1)^2 \Leftrightarrow a^2=\dfrac{45-9(b-1)^2}{5}\ge 0$

$\Leftrightarrow 1-\sqrt{5}\le b\le 1+\sqrt{5}$

Khi đó $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\dfrac{45-9(b-1)^2}{5}+b^2}$.

Khảo sát hàm số, ta có

$$\min_{\left[1-\sqrt{5};1+\sqrt{5}\right]}\sqrt{\frac{45-9(b-1)^2}{5}+b^2}=y\left(1-\sqrt{5}\right)=\sqrt{5}-1;$$

$$\max_{\left[1-\sqrt{5};1+\sqrt{5}\right]}\sqrt{\frac{45-9(b-1)^2}{5}+b^2}=y\left(\frac{9}{4}\right)=\frac{3\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy $T=\dfrac{5\sqrt{5}-2}{2}$

Câu 22. Cho số phức z thoả mãn $|z|=1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+1|+|z^2-z+1|$. Tính giá trị của M.n

A. $\dfrac{13\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{39}{4}$. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{13}{4}$.

Lời giải

Chọn A

➢ **Cách 1:**

Đặt $z = a + bi,\ (a,b \in \mathbb{R})$. Đặt $t = |z+1|$

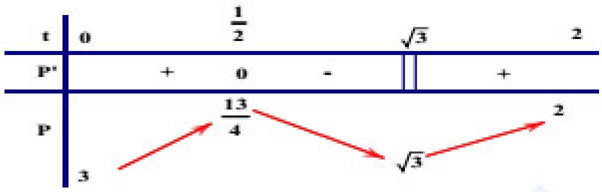
Ta có : $0 \le |z| - 1 \le |z+1| \le |z| + 1 \Leftrightarrow 0 \le t \le 2$.

$t^2 = |z+1|^2 = (z+1)(\bar{z}+1) = 1 + z\bar{z} + z + \bar{z} = 1 + |z|^2 + 2a = 2 + 2a \Rightarrow a = \dfrac{t^2-2}{2}$

$|z^2 - z + 1| = |z^2 - z + z\bar{z}| = |z||z - 1 + \bar{z}| = |z||2a-1| = |t^2 - 3| \Rightarrow P = t + |t^2 - 3|$ với $t \in [0;2]$

$P = t + |t^2 - 3| = \begin{cases} t^2 + t - 3, \sqrt{3} \le t \le 2 \\ -t^2 + t + 3, 0 \le t \le \sqrt{3} \end{cases}$

Bảng biến thiên:



$\Rightarrow \underset{[0;2]}{Max}P = \dfrac{13}{4};\ \underset{[0;2]}{Min}P = \sqrt{3} \Rightarrow M.m = \dfrac{13\sqrt{3}}{4}$.

➢ **Cách 2:**

$z = r(\cos x + i\sin x) = a + bi$

Do $|z| = 1 \Rightarrow \begin{cases} z.\bar{z} = |z|^2 = 1 \\ r = \sqrt{a^2+b^2} = 1 \end{cases}$

$P = \sqrt{2 + 2\cos x} + |2\cos x - 1|$, đặt $t = \cos x \in [-1;1] \Rightarrow f(t) = \sqrt{2+2t} + |2t-1|$

TH1: $t \in \left[-1; \dfrac{1}{2}\right]$

$f'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2+2t}} + 2 > 0 \Rightarrow \begin{cases} \max f(t) = f(1) = 3 \\ \min f(t) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{3} \end{cases}$

TH2: $t \in \left[\dfrac{1}{2}; 1\right]$

$f'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2+2t}} - 2 = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{7}{8} \Rightarrow \max f(t) = f\left(-\dfrac{7}{8}\right) = \dfrac{13}{4}$

$\Rightarrow Maxf(t) = \dfrac{13}{4};\ Minf(t) = \sqrt{3} \Rightarrow M.n = \dfrac{13\sqrt{3}}{4}$.

Câu 23. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Tìm tổng giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức P với $P = |1 + z^2| - |1 + z|$?

A. $2 + \sqrt{2}$. **B.** $1 + 2\sqrt{2}$. **C.** $-1 + 2\sqrt{2}$. **D.** $2 - \sqrt{2}$.

Lời giải

Ta có

$P = \dfrac{|1+z^2|}{|z|} - |1+z| = |z + \bar{z}| - |1+z| = 2|x| - \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 2|x| - \sqrt{2+2x}$ vì $x^2 + y^2 = 1$.

Khảo sát hàm số $f(x) = 2|x| - \sqrt{2+2x}$ với $x \in D = [-1;1]$.

+ Với $x \ge 0$ ta có $f(x) = 2x - \sqrt{2+2x}$ ta có $f'(x) = 2 - \dfrac{1}{\sqrt{2+2x}} = \dfrac{2\sqrt{2+2x}-1}{\sqrt{2+2x}}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{2+2x} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x = -\dfrac{7}{8}$ nên ta có $\max P = P(1) = 0; \min P = P(0) = -\sqrt{2}$.

+ Với $-1 \le x \le 0$ ta được $f(x) = -2x - \sqrt{2+2x}$

$f'(x) = -2 - \dfrac{1}{\sqrt{2+2x}} < 0$ trên tập điều kiện. Hàm số nghịch biến trên $[-1;0]$. Từ đó ta được $\max P = P(-1) = 2; \min P = P(0) = -\sqrt{2}$.

+ Từ trên ta được $\max\limits_{[-1;1]} P = P(-1) = 2; \min\limits_{[-1;1]} P = P(0) = -\sqrt{2}$. Vậy kết.

Câu 24. Cho số phức z thỏa mãn $z.\overline{z} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \left|z^3 + 3z + \overline{z}\right| - \left|z + \overline{z}\right|$.

A. $\dfrac{15}{4}$. **B.** $\dfrac{3}{4}$. **C.** $\dfrac{13}{4}$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Gọi $z = a + bi$, với $a, b \in \mathbb{R}$

Ta có: $z + \overline{z} = 2a$; $z.\overline{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$

Khi đó $P = \left|z^3 + 3z + \overline{z}\right| - \left|z + \overline{z}\right| = \left|z\left(z^2 + 3 + \dfrac{\overline{z}}{z}\right)\right| - \left|z + \overline{z}\right|$

$P = |z|.\left|z^2 + 3 + \dfrac{\overline{z}^2}{|z|^2}\right| - \left|z + \overline{z}\right| = \left|z^2 + 2z\overline{z} + \overline{z}^2 + 1\right| - \left|z + \overline{z}\right|$

$P = \left|\left(z + \overline{z}\right)^2 + 1\right| - \left|z + \overline{z}\right| = \left|4a^2 + 1\right| - 2|a| = 4a^2 + 1 - 2|a| = \left(2|a| - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} \ge \dfrac{3}{4}$

Vậy $P_{\min} = \dfrac{3}{4}$.

Kĩ thuật 4: Lượng giác hóa

Câu 25. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 2$. Tìm môđun lớn nhất của số phức z.

A. $\sqrt{9+4\sqrt{5}}$. **B.** $\sqrt{11+4\sqrt{5}}$. **C.** $\sqrt{6+4\sqrt{5}}$. **D.** $\sqrt{5+6\sqrt{5}}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $z = x + yi$; $(x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R})$. Ta có: $|z - 1 + 2i| = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$.

Đặt $x = 1 + 2\sin t; y = -2 + 2\cos t$; $t \in [0; 2\pi]$.

Lúc đó:

$|z|^2 = (1 + 2\sin t)^2 + (-2 + 2\cos t)^2 = 9 + (4\sin t - 8\cos t) = 9 + \sqrt{4^2 + 8^2}\sin(t + \alpha)$; $(\alpha \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow |z|^2 = 9 + 4\sqrt{5}\sin(t + \alpha) \Rightarrow z \in \left[-\sqrt{9+4\sqrt{5}}; \sqrt{9+4\sqrt{5}}\right]$

$\Rightarrow z_{\max} = \sqrt{9+4\sqrt{5}}$ đạt được khi $z = \dfrac{5+2\sqrt{5}}{5} + \dfrac{-10+4\sqrt{5}}{5}i$.

Câu 26. Cho số phức z thỏa mãn $|(1-i)z - 6 - 2i| = \sqrt{10}$. Tìm môđun lớn nhất của số phức z.

A. $4\sqrt{5}$. **B.** $3\sqrt{5}$. **C.** 3. **D.** $3 + \sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $z = x + yi;\ (x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R})$.

Ta có:

$$\left|(1-i)z - 6 - 2i\right| = \sqrt{10} \Leftrightarrow \left|(1-i)\right|.\left|z + \frac{-6-2i}{1-i}\right| = \sqrt{10} \Leftrightarrow |z - 2 - 4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-4)^2 = 5.$$

Đặt $x = 2 + \sqrt{5}\sin t; y = 4 + \sqrt{5}\cos t;\ t \in [0; 2\pi]$.

Lúc đó:

$$|z|^2 = \left(2 + \sqrt{5}\sin t\right)^2 + \left(4 + \sqrt{5}\cos t\right)^2 = 25 + \left(4\sqrt{5}\sin t + 8\sqrt{5}\cos t\right)$$

$$= 25 + \sqrt{\left(4\sqrt{5}\right)^2 + \left(8\sqrt{5}\right)^2}\sin(t+\alpha);\ (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow |z|^2 = 25 + 20\sin(t+\alpha) \Rightarrow z \in \left[\sqrt{5}; 3\sqrt{5}\right]$$

$\Rightarrow z_{\max} = 3\sqrt{5}$ đạt được khi $z = 3 + 6i$.

Câu 27. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 3$. Tìm môđun lớn nhất của số phức $z - 2i$.

A. $\sqrt{26 + 6\sqrt{17}}$. **B.** $\sqrt{26 - 6\sqrt{17}}$. **C.** $\sqrt{26 + 8\sqrt{17}}$. **D.** $\sqrt{26 - 4\sqrt{17}}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $z = x + yi;\ (x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}) \Rightarrow z - 2i = x + (y-2)i$. Ta có:

$|z - 1 + 2i| = 9 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$.

Đặt $x = 1 + 3\sin t;\ y = -2 + 3\cos t;\ t \in [0; 2\pi]$.

$$\Rightarrow |z - 2i|^2 = (1 + 3\sin t)^2 + (-4 + 3\cos t)^2 = 26 + 6(\sin t - 4\cos t) = 26 + 6\sqrt{17}\sin(t+\alpha);\ (\alpha \in \mathbb{R}).$$

$$\Rightarrow \sqrt{26 - 6\sqrt{17}} \le |z - 2i| \le \sqrt{26 + 6\sqrt{17}} \Rightarrow |z - 2i|_{\max} = \sqrt{26 + 6\sqrt{17}}.$$

Câu 28. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của tìm $Q = |z - 1| + \left|z - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right|$. Tính $P = M + m$.

A. $4 + 2\sqrt{3}$. **B.** $2 + 2\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{6}$. **D.** $2 + \sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn C

Vì $|z| = 1 \Rightarrow z = \cos x + i\sin x$ và $Q = |\cos x + i\sin x - 1| + \left|\cos x + i\sin x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right|$

$$= \sqrt{(\cos x - 1)^2 + \sin^2 x} + \sqrt{\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{2 - 2\cos x} + \sqrt{2 - \cos x + \sqrt{3}\sin x} \in \left[2\sqrt{2 - \sqrt{3}}; 2\sqrt{2 + \sqrt{3}}\right].$$

Do đó $P = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}} + 2\sqrt{2 + \sqrt{3}} = 2\sqrt{6}$.

Cách 2: Khi biết $|z|=1$, xét ba điểm $M(a;b), A(1;0), B\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ta có $Q=MA+MB$ và M, A, B cùng thuộc đường tròn $(O,1)$ suy ra $(MA+MB)_{\max} \Leftrightarrow M$ là điểm chính giữa cung lớn $\overset{\frown}{AB}$. $(MA+MB)_{\min} \Leftrightarrow M$ là điểm chính giữa cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$.

Câu 29. Cho số phức z thay đổi thỏa mãn $|z-1-i|=5$. Hỏi giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-7-9i|+\sqrt{2}|(1+i)z+8-8i|$ là?

A. $3\sqrt{5}$. **B.** $5\sqrt{5}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $4\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn B

Với $z-1-i=5(\cos x+i\sin x)$, ta có:

$$P=|1+i+5(\cos x+i\sin x)-7-9i|+2\left|1+i+5(\cos x+i\sin x)+\frac{8-8i}{1+i}\right|$$

$$=|(5\cos x-6)+i(5\sin x-8)|+2\left|(5\cos x+i\sin x)+\frac{8-8i}{1+i}\right|$$

$$=\sqrt{(5\cos x-6)^2+(5\sin x-8)^2}+2\sqrt{(5\cos x+1)^2+(5\sin x-7)^2}$$

$$=\sqrt{25-60\cos x-80\sin x+100}+2\sqrt{25+10\cos x-70\sin x+50}\ge 5\sqrt{5}.$$

Câu 30. Cho số phức z thỏa mãn $|z-i|=2$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z+2|+|z+2-2i|$. Tính $P=M+m$

A. $P=2+\sqrt{17}$. **B.** $P=2+2\sqrt{17}$. **C.** $P=\sqrt{2+2\sqrt{17}}$. **D.** $P=\sqrt{2+\sqrt{17}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có: $z-i=2(\cos x+i\sin x)$ và

$$|z+2|+|z+2-2i|=|2(\cos x+i\sin x)+i+2|+|2(\cos x+i\sin x)+i+2-2i|$$

$$=\sqrt{(2\cos x+2)^2+(2\sin x+1)^2}+\sqrt{(2\cos x+2)^2+(2\sin x-1)^2}$$

$$=\sqrt{9+8\cos x+4\sin x}+\sqrt{9+8\cos x-4\sin x}$$

$$=\sqrt{18+16\cos x+2\sqrt{(9+8\cos x)^2-16\sin^2 x}}$$

$$=\sqrt{18+16\cos x+2\sqrt{80\cos^2 x+144\cos x+65}}\in\left[2;2\sqrt{17}\right].$$

Câu 31. Gọi $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$ là số phức thỏa mãn hai điều kiện $|z-2|^2+|z+2|^2=26$ và $\left|z-\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{2}}i\right|$ đạt giá trị lớn nhất. Tính tích xy.

A. $xy=\frac{9}{4}$. **B.** $xy=\frac{13}{2}$. **C.** $xy=\frac{16}{9}$. **D.** $xy=\frac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $z=x+iy\,(x,y\in\mathbb{R})$. Thay vào điều kiện thứ nhất, ta được $x^2+y^2=36$.

Đặt $x=3\cos t, y=3\sin t$. Thay vào điều kiện thứ hai, ta có

$$P=\left|z-\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{2}}i\right|=\sqrt{18-18\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}\le 6.$$

Dấu bằng xảy ra khi $\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)=-1\Rightarrow t=-\frac{3\pi}{4}\Rightarrow z=-\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}i.$

Kĩ thuật 5: Sử dụng biểu thức liên hợp $z.\bar{z}=|z|^2$

Câu 32. Cho số phức z thỏa mãn z không phải là số thực và $w=\frac{z}{2+z^2}$ là số thự**C.** Giá trị lớn nhất của biểu thức $M=|z+1-i|$ là

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 2. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Do w là số thực, suy ra:

$$w=\bar{w}\Leftrightarrow \frac{z}{2+z^2}=\overline{\left(\frac{z}{2+z^2}\right)}\Leftrightarrow \frac{z}{2+z^2}=\frac{\bar{z}}{\overline{2+z^2}}\Leftrightarrow \frac{z}{2+z^2}=\frac{\bar{z}}{2+\bar{z}^2}\Leftrightarrow 2z+z.\bar{z}^2=2\bar{z}+z^2.\bar{z}$$

$$\Leftrightarrow (z-\bar{z})(2-z.\bar{z})=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\bar{z} \\ z.\bar{z}=2\end{array}\right. \overset{z\notin\mathbb{R}}{\Leftrightarrow} z.\bar{z}=2\Leftrightarrow |z|^2=2\Leftrightarrow |z|=\sqrt{2}.$$

Đặt $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$. Khi đó $|z|=\sqrt{2}\Leftrightarrow x^2+y^2=2$ (*).

<u>Cách 1</u> *(Theo đại số và kết hợp bất đẳng thức)*

$$M=|z+1-i|=|(x+1)+(y-1)i|=\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}=\sqrt{x^2+y^2+2x-2y+2}$$

$$\xrightarrow{(*)}\sqrt{2x-2y+4}.$$

Suy ra $M^2=2x-2y+4\le\sqrt{(2^2+2^2)(x^2+y^2)}+4=\sqrt{8.2}+4=8\Rightarrow M\le 2\sqrt{2}\Rightarrow M_{\max}=2\sqrt{2}$

<u>Cách 2</u> *(Theo hình học)*

Gọi điểm $T(x;y)$ biểu diễn số phức $z=x+yi$

$\xrightarrow{(*)} T$ thuộc đường tròn (C) có tâm $O(0;0)$ và bán kính $R=2$.

Ta có $M=|(x+1)+(y-1)i|=\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}=TA$ với $A(-1;1)$.

Do $A(-1;1)\in(C)$ suy ra $M_{\max}=TA_{\max}=2R=2\sqrt{2}$.

Chú ý: *Nếu* $A\notin(C)\Rightarrow M_{\max}=TA_{\max}=OA+R$.

Câu 33. Cho số phức z thỏa mãn $|z^2+4|=|z|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Tính $P=M+m$.

A. $P=\frac{2\sqrt{17}+1}{2}$. **B.** $P=\sqrt{17}$. **C.** $P=\frac{\sqrt{17}+1}{2}$. **D.** $P=\frac{2\sqrt{17}-1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $|z^2+4|=|z|\Leftrightarrow\left|\frac{z^2+4}{z}\right|=1\Leftrightarrow\left|z+\frac{4}{z}\right|=1\Leftrightarrow\left(z+\frac{4}{z}\right)\overline{\left(z+\frac{4}{z}\right)}=1\Leftrightarrow\left(z+\frac{4}{z}\right)\left(\bar{z}+\frac{4}{\bar{z}}\right)=1$

$$\Leftrightarrow z.\bar{z}+\frac{16}{z.\bar{z}}+4\left(\frac{z}{\bar{z}}+\frac{\bar{z}}{z}\right)=1\Leftrightarrow |z|^2+\frac{16}{|z|^2}+\frac{4\left(z^2+\bar{z}^2\right)}{|z|^2}=1.$$

Vậy với $a=|z|>0$, ta có $1\ge a^2+\dfrac{16}{a^2}-8 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{17}-1}{2}\le a\le \dfrac{\sqrt{17}+1}{2}$.

Do đó $P=\dfrac{\sqrt{17}-1}{2}+\dfrac{\sqrt{17}+1}{2}=\sqrt{17}$.

Câu 34. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z+\dfrac{1}{z}\right|=3$. Tính $P=\max|z|+\min|z|$.

A. $P=3$. **B.** $P=\sqrt{13}$. **C.** $P=3\sqrt{13}$ **D.** $P=3+\sqrt{13}$.

Lời giải

Chọn B

Theo giả thiết, ta có

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)\overline{\left(z+\frac{1}{z}\right)}=9\Leftrightarrow\left(z+\frac{1}{z}\right)+\left(\overline{z}+\frac{1}{\overline{z}}\right)=9$$

$$\Leftrightarrow |z|^2+\frac{1}{|z|^2}+\frac{z^2+\overline{z}^2}{|z|^2}=9\Leftrightarrow |z|^2+\frac{1}{|z|^2}+\frac{\left(z+\overline{z}\right)^2-2|z|^2}{|z|^2}=9$$

$$\Rightarrow 9\ge |z|^2+\frac{1}{|z|^2}+\frac{-2|z|^2}{|z|^2}\Leftrightarrow |z|^2+\frac{1}{|z|^2}\le 11$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{13}-3}{2}\le |z|\le\frac{\sqrt{13}+3}{2}\Rightarrow P=\sqrt{13}$$

Câu 35. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+1|+|z^2-z+1|$. Tính giá trị của $M.m$.

A. $\dfrac{13\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{39}{4}$. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{13}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $z=x+yi$; $(x\in\mathbb{R};y\in\mathbb{R})$. Ta có: $|z|=1\Leftrightarrow z.\overline{z}=1$

Đặt $t=|z+1|$, ta có $0=|z|-1\le|z+1|\le|z|+1=2\Rightarrow t\in[0;2]$.

Ta có $t^2=(1+z)(1+\overline{z})=1+z.\overline{z}+z+\overline{z}=2+2x\Rightarrow x=\dfrac{t^2-2}{2}$.

Suy ra $|z^2-z+1|=|z^2-z+z.\overline{z}|=|z||z-1+\overline{z}|=\sqrt{(2x-1)^2}=|2x-1|=|t^2-3|$.

Xét hàm số $f(t)=t+|t^2-3|, t\in[0;2]$. Bằng cách dùng đạo hàm, suy ra

$\max f(t)=\dfrac{13}{4}$; $\min f(t)=\sqrt{3}\Rightarrow M.n=\dfrac{13\sqrt{3}}{4}$.

Câu 36. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z^3+\dfrac{1}{z}\right|=4$. Tính $P=\max|z|+\min|z|$.

A. $P=4\sqrt{2}$. **B.** $P=2\sqrt{2}$. **C.** $P=\sqrt{4\sqrt{2}-2}$. **D.** $P=2\sqrt{2\sqrt{2}-1}$.

Lời giải

Chọn D

Theo giả thiết ta có

$$\left(z^3+\frac{1}{z}\right)\overline{\left(z^3+\frac{1}{z}\right)}=16\Leftrightarrow\left(z^3+\frac{1}{z}\right)\left(\overline{z}^3+\frac{1}{\overline{z}}\right)=116$$

$$\Leftrightarrow |z|^6+\frac{1}{|z|^2}+\frac{z^4+z^{-4}}{|z|^2}=16 \Leftrightarrow |z|^6+\frac{1}{|z|^2}+\frac{\left(z^2+\overline{z}^2\right)^2-2|z|^4}{|z|^2}=16$$

$$\Rightarrow 16 \geq |z|^6+\frac{1}{|z|^2}+\frac{-2|z|^4}{|z|^2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{4\sqrt{2}-2}-\sqrt{2}}{2} \leq |z| \leq \frac{\sqrt{4\sqrt{2}-2}+\sqrt{2}}{2} \Rightarrow P=\sqrt{4\sqrt{2}-2}\,.$$

Chuyên đề 10 CÁC BÀI TOÁN SỐ PHỨC KHÁC Ở MỨC ĐỘ VẬN DỤNG CAO

Tính giá trị biểu thức, toán thực tiễn liên quan số phức,...

Chủ đề 1: Một số dạng phương trình số phức nâng cao

Trong kỳ thi THPTQG, dạng phương trình số phức ta hay gặp là một phương trình trong đó có chứa z và $|z|$. Mục tiêu ta cần tìm số phức z bằng bao nhiêu. Có thể có nhiều cách hỏi, nhưng nhìn chung, nếu ta tìm ra được số phức z, thì mọi chuyện sẽ trở nên rất dễ dàng. Để làm được dạng bài này, bạn đọc có thể lựa chọn hai cách sau:

Cách 1: Gọi $z=a+bi$ và tiến hành giải một hệ phương trình: phần thực và phần ảo lần lượt bằng không (chú ý chuyển vế cho vế phải bằng không). Cách này thường sẽ gặp khó khăn trong việc giải phương trình, vì đôi lúc hệ phương trình của ta rất khó giải.

Cách 2: Ta xem $|z|$ chính là một số thực (bởi định nghĩa của modun số phức z). Khi đó, chuyển vế để cho một vế của chúng ta chứa z, vế còn lại, ta ghép phần thực và phần ảo tương ứng với nhau, sau đó thực hiện bước lấy modun hai vế, từ đó ta tìm được $|z|$, thay vào phương trình ban đầu sẽ tìm ra z. Sau đây là một vài ví dụ:

Câu 1. Xét số phức z thỏa mãn $(1+2i)|z|=\dfrac{\sqrt{10}}{z}-2+i$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\dfrac{3}{2}<|z|<2$. **B.** $|z|>2$. **C.** $|z|<\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}<|z|<\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $(1+2i)|z|=\dfrac{\sqrt{10}}{z}-2+i \Leftrightarrow (1+2i)|z|+2-1=\dfrac{\sqrt{10}}{z} \Leftrightarrow (|z|+2)+(2|z|-1)i=\dfrac{\sqrt{10}}{z}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(|z|+2)^2+(2|z|-1)^2}=\dfrac{\sqrt{10}}{|z|} \Leftrightarrow (|z|+2)^2+(2|z|-1)^2=\dfrac{10}{|z|^2} \Leftrightarrow |z|=1.$

Câu 2. Cho số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+1+3i-|z|i=0$. Tính $S=a+3b$.

A. $S=\dfrac{7}{3}$. **B.** $S=-5$. **C.** $S=5$. **D.** $S=-\dfrac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $z+1+3i-|z|i=0 \quad (*)$.

$\Leftrightarrow z=|z|i-1-3i \Leftrightarrow z=-1+(|z|-3)i \Leftrightarrow |z|=\sqrt{1+(|z|-3)^2} \Leftrightarrow |z|^2=1+(|z|-3)^2 \Leftrightarrow |z|=\dfrac{5}{3}$.

Thay vào pt $(*)$ ta được: $(a+bi)+1+3i-\dfrac{5}{3}i=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-\dfrac{4}{3} \end{cases}$.

Vậy $S=a+3b=-1+3\cdot\dfrac{-4}{3}=-5$.

Câu 3. Cho số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ thoả mãn $z+2+i=|z|$. Tính $S=4a+b$.

A. $S=4$. **B.** $S=2$. **C.** $S=-2$. **D.** $S=-4$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $z+2+i=|z|\quad(*)$.

$\Leftrightarrow z=|z|-2-i \Leftrightarrow z=(|z|-2)-1i \Leftrightarrow |z|=\sqrt{(|z|-2)^2+(-1)^2} \Leftrightarrow |z|^2=1+(|z|-2)^2 \Leftrightarrow |z|=\frac{5}{4}$.

Thay vào pt $(*)$ ta được: $(a+bi)+2+i-\frac{5}{4}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{3}{4} \\ b=-1 \end{cases}$.

Vậy $S=4a+b=4\bullet\frac{-3}{4}-1=-4$.

Câu 4. Cho số phức $z=a+bi\ (a,\ b\in\mathbb{Z})$ thỏa $(2+5i)|z|=4z-7+3i(3+z)$. Tính $a-b$.

A. 1. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $(2+5i)|z|=4z-7+3i(3+z)$.

$\Leftrightarrow (2+5i)|z|+7-9i=(4+3i)z \Leftrightarrow (2|z|+7)+(5|z|-9)i=(4+3i)z$

$\Leftrightarrow (2|z|+7)^2+(5|z|-9)^2=25|z|^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |z|=13 \\ |z|=\frac{5}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=12+5i \\ z=\frac{117}{50}-\frac{22}{25}i \end{array}\right.$

Do $a,\ b\in\mathbb{Z}$ nên ta nhận $z=12+5i \Rightarrow P=7$.

Câu 5. Cho số phức $z=a+bi\ \ (a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+2+i-|z|(1+i)=0$ và $|z|>1$. Tính $P=a+b$.

A. $P=-1$. **B.** $P=-5$. **C.** $P=3$. **D.** $P=7$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $z+2+i-|z|(1+i)=0$.

$\Leftrightarrow z=|z|(1+i)-2-i \Leftrightarrow z=(|z|-2)+(|z|-1)i\quad(*)$.

$\Leftrightarrow |z|=\sqrt{(|z|-2)^2+(|z|-1)^2} \Leftrightarrow |z|^2=(|z|-2)^2+(|z|-1)^2 \Leftrightarrow |z|=1$.

Thay vào pt $(*)$ ta được: $(a+bi)=(1-2)+(1-1) \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=0 \end{cases}$.

Vậy $P=a+b=-1+0=-1$.

Câu 6. Cho số phức $z=a+bi$ (với $a,\ b\in\mathbb{R}$) thỏa $|z|(2+i)=z-1+i(2z+3)$, tính $S=a+b$.

A. $S=-1$. **B.** $S=1$. **C.** $S=7$. **D.** $S=-5$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có:

$|z|(2+i)=z-1+i(2z+3) \Leftrightarrow z=|z|\left(\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i\right)+(-1-i) \Leftrightarrow z=\left(\frac{4}{5}|z|-1\right)+\left(-\frac{3}{5}|z|-1\right)i\quad(*)$

$\Leftrightarrow |z|=\sqrt{\left(\frac{4}{5}|z|-1\right)^2+\left(-\frac{3}{5}|z|-1\right)^2} \Leftrightarrow |z|^2=\left(\frac{4}{5}|z|-1\right)^2+\left(-\frac{3}{5}|z|-1\right)^2 \Leftrightarrow |z|=5$.

Thay vào pt $(*)$ ta được: $(a+bi)=\left(\frac{4}{5}\bullet 5-1\right)+\left(-\frac{3}{5}\bullet 5-1\right)\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=-4\end{cases}$.

Vậy $S=a+b=3-4=-1$.

Câu 7. Tìm phần thực của số phức z biết: $z+\frac{|z|^2}{z}=10$.

A. -5. **B.** 5. **C.** $\sqrt{10}$. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $z+\frac{|z|^2}{z}=10$, điều kiện $z\neq 0$

Đặt $z=a+bi$ $(a,b\in R)$. Khi đó

$$z+\frac{|z|^2}{z}=10\Leftrightarrow z^2-10z+|z|^2=0\Leftrightarrow a^2-b^2-10(a+bi)+a^2+b^2=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2a^2-10a=0\\-10b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=0\\a=5\end{array}\right.\\b=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=0\\b=0\end{cases}\quad(\text{Loai})\\\begin{cases}a=5\\b=0\end{cases}\end{array}\right..$$

Vậy $z=5+0.i$ suy ra phần thực của số phức z là 5.

Câu 8. Cho số phức z thỏa mãn $(1+i)|z|=\frac{2\sqrt{10}}{z}-1+i$. Hỏi phần thực của số phức $w=\frac{1}{2+z}$ bằng bao nhiêu?

A. $-\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $(1+i)|z|=\frac{2\sqrt{10}}{z}-1+i\qquad(*)$.

$$\Leftrightarrow(1+i)|z|+1-1=\frac{2\sqrt{10}}{z}\Leftrightarrow(|z|+1)+(|z|-1)i=\frac{2\sqrt{10}}{z}\Leftrightarrow\sqrt{(|z|+1)^2+(|z|-1)^2}=\frac{2\sqrt{10}}{|z|}$$

$$\Leftrightarrow(|z|+1)^2+(|z|-1)^2=\frac{40}{|z|^2}\Leftrightarrow|z|=2.$$

Thay vào pt $(*)$ ta được: $(a+bi)=\frac{2\sqrt{10}}{(1+i).2+1-i}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{3\sqrt{10}}{5}\\b=-\frac{\sqrt{10}}{5}\end{cases}$.

Vậy $w=\frac{1}{2+z}=\frac{1}{2+\left(\frac{3\sqrt{10}}{5}-\frac{\sqrt{10}}{5}i\right)}=\frac{1}{4}+\frac{-3+\sqrt{10}}{4}i$.

Câu 9. Tìm môđun của số phức z biết $z-4=(1+i)|z|-(4+3z)i$

A. $|z|=1$. **B.** $|z|=4$. **C.** $|z|=2$. **D.** $|z|=\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $z-4=(1+i)|z|-(4+3z)i \Leftrightarrow (1+3i)z=(|z|+4)+(|z|-4)i$

Lấy môđun hai vế, ta được $|(1+3i)z|=|(|z|+4)+(|z|-4)i| \Leftrightarrow |z|\sqrt{10}=\sqrt{(|z|+4)^2+(|z|-4)^2}$

$\Leftrightarrow 10|z|^2=(|z|+4)^2+(|z|-4)^2 \Leftrightarrow 8|z|^2=32 \Leftrightarrow |z|^2=4 \Rightarrow |z|=2$.

Câu 10. Cho số phức z có phần thực dương và thỏa $\overline{z}-\dfrac{(5+\sqrt{3}i)}{z}-1=0$. Lúc đó:

A. $|z|=2$. **B.** $|z|=3$. **C.** $|z|=4$. **D.** $|z|=\sqrt{7}$.

Lời giải

Chọn D.

$$\overline{z}-\frac{(5+\sqrt{3}i)}{z}-1=0 \Leftrightarrow z.\overline{z}-(5+\sqrt{3}i)-z=0 \Leftrightarrow |z|^2-(5+\sqrt{3}i)-z=0 \Leftrightarrow (|z|^2-5)-\sqrt{3}i=z$$

$$\Leftrightarrow (|z|^2-5)^2+3=|z|^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|z|=2\\ |z|=-2\\ |z|=\sqrt{7}\\ |z|=-\sqrt{7}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}z=-1-\sqrt{3}i\\ z=-1-\sqrt{3}i \xrightarrow{a>0} |z|=\sqrt{7}\\ z=2-\sqrt{3}i\end{array}\right.$$

Câu 11. Cho số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$; $a^2+b^2>0$ thỏa mãn $(1-i)|z|^2+(2+2i)z^2+2z(z+i)=0$.

Tìm giá trị của biểu thức $F=\dfrac{a}{b}$.

A. $F=\dfrac{5}{3}$. **B.** $F=-\dfrac{1}{5}$. **C.** $F=-5$. **D.** $F=\dfrac{3}{5}$.

Lời giải

Chọn D.

Do $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$; $a^2+b^2>0 \Rightarrow z\neq 0$.

$(1-i)|z|^2+(2+2i)z^2+2z(z+i)=0$

$\Leftrightarrow (1-i)z.\overline{z}+(2+2i)z^2+2z(z+i)=0 \Leftrightarrow (1-i)\overline{z}+(2+2i)z+2(z+i)=0$

$\Leftrightarrow (1-i)(a-bi)+(2+2i)(a+bi)+2(a+(b+1)i)=0$

$$\Leftrightarrow 5a-3b+(a+3b+2)i=0 \Leftrightarrow \begin{cases}5a-3b=0\\ a+3b=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-\dfrac{1}{3}\\ b=-\dfrac{5}{9}\end{cases} \Rightarrow F=\frac{3}{5}$$

Câu 12. Cho số phức z thỏa mãn $(\overline{z})\left[(3+4i)|z|-4+3i\right]-5\sqrt{2}=0$. Giá trị của $|\overline{z}|$ là:

A. 2. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D.

$(\overline{z})\left[(3+4i)|z|-4+3i\right]-5\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow \overline{z}\left[(3|z|-4)+(4|z|+3)i\right]=5\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow |z|^2\left[(3|z|-4)^2+(4|z|+3)^2\right]=50 \Leftrightarrow |z|=\pm 1 \xrightarrow{|z|>0} |z|=1$

Câu 13. Cho số phức z, w khác 0 sao cho $|z-w| = 2|z| = |w|$. Phần thực của số phức $u = \frac{z}{w}$ là:

A. $a = \frac{1}{4}$. **B.** $a = 1$. **C.** $a = \frac{1}{8}$. **D.** $a = -\frac{1}{8}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $|z-w| = 2|z| = |w| \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{1}{2} \\ \left|\frac{z-w}{w}\right| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |u| = \frac{1}{2} \\ |u-1| = 1 \end{cases}$, (*).

Giả sử $u = a + bi,\ (a,\ b \in \mathbb{R})$. Khi đó (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = \frac{1}{4} \\ (a-1)^2 + b^2 = 1 \end{cases}$ $(**)$.

Từ $(**) \Rightarrow -2a + 1 = 1 - \frac{1}{4} \Leftrightarrow a = \frac{1}{8}$.Chọn **C.**

Câu 14. Cho số phức z thỏa $|z| + z = 3 + 4i$. Môđun của z bằng

A. $\frac{5}{6}$. **B.** $\frac{25}{6}$. **C.** $\frac{6}{25}$. **D.** $\sqrt{\frac{25}{6}}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $|z| + z = 3 + 4i \Leftrightarrow z = (3 - |z|) - 4i \Leftrightarrow |z|^2 = (3 - |z|)^2 + 4^2 \Leftrightarrow |z| = \frac{25}{6}$.

Câu 15. Cho số phức z có môđun bằng 2 và số phức w thỏa mãn: $\frac{1}{z} + \frac{1}{w} = \frac{1}{z+w}$. Mô đun của số phức w bằng bao nhiêu?

A. $\frac{1}{3}$. **B.** 2. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C.

Do $|z| = |w| = 2 \Rightarrow z, w \neq 0$.

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{w} = \frac{1}{z+w} \Leftrightarrow (z+w)^2 = zw \Leftrightarrow z^2 + zw + w^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{w}\right)^2 + \frac{z}{w} + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{z}{w} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ \frac{z}{w} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{array}\right.$$

$$\left|\frac{z}{w}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z|}{|w|} = 1 \Leftrightarrow |w| = |z| = 2 .$$

Câu 16. Trong tập các số phức,cho phương trình $z^2 - 6z + m = 0,\ m \in \mathbb{R}\ (1)$. Gọi m_0 là một giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $z_1.\overline{z_1} = z_2.\overline{z_2}$. Hỏi trong khoảng $(0;20)$ có bao nhiêu giá trị $m_0 \in \mathbb{N}$?

A. 10. **B.** 11. **C.** 12. **D.** 13.

Lời giải

Chọn A

Trường hợp 1: $\Delta' > 0$, phương trình có hai nghiệm thực phân biệt z_1, z_2. Khi đó:

$$\begin{cases} z_1 = \overline{z_1} \\ z_2 = \overline{z_2} \end{cases} \Rightarrow z_1.\overline{z_1} \neq z_2.\overline{z_2}$$ không thỏa mãn.

Trường hợp 2: $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m > 9$, phương trình có hai nghiệm phức phân biệt z_1, z_2. Khi đó:

$$\begin{cases} z_1 = \overline{z_2} \\ z_2 = \overline{z_1} \end{cases} \Rightarrow z_1.\overline{z_1} = z_2.\overline{z_2}$$ với mọi phương trình.

Mà m là số nguyên thuộc khoảng $(0;20)$ nên có 10 giá trị.

Câu 17. Cho a,b,c là các số thực sao cho phương trình $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ có ba nghiệm phức lần lượt là $z_1 = \omega + 3i;\ z_2 = \omega + 9i;\ z_3 = 2\omega - 4$, trong đó ω là một số phức nào đó. Tính giá trị của $P = |a+b+c|$.

A. $P = 208$. **B.** $P = 84$. **C.** $P = 136$. **D.** $P = 36$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $z_1 + z_2 + z_3 = -a \Leftrightarrow 4w + 12i - 4 = -a$ là số thực, suy ra w có phần ảo $-3i$ hay $w = m - 3i$

Khi đó $z_1 = m;\ z_2 = m + 6i; z_3 = 2m - 6i - 4$ mà $z_3;\ z_2$ là liên hợp của nhau nên

$m = 2m - 4 \Leftrightarrow m = 4$.

Vậy $z_1 = 4;\ z_2 = 4 + 6i; z_3 = 4 - 6i$

Theo Viet ta có

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = -a \\ z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3 = b \\ z_1z_2z_3 = -c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -12 \\ b = 84 \\ c = -208 \end{cases}$$

$P = |-12 + 84 - 208| = 136$

Câu 18. Cho số phức w và hai số thực $a,\ b$. Biết rằng $2w + i$ và $3w - 5$ là hai nghiệm của phương trình $z^2 + az + b = 0$. Tìm phần thực của số phức w.

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D.

Gọi $w = c + di, (c, d \in \mathbb{R})$. Khi đó hai nghiệm của phương trình là

$2w + i = 2(c + di) + i = 2c + (2d + 1)i$

$3w - 5 = 3(c + di) - 5 = (3c - 5) + 3di$

Theo định lí Vi-ét:

$$\begin{cases} 5c - 5 + (5d + 1)i = a \\ (2c + (2d+1)i)((3c - 5) + 3di) = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -\dfrac{1}{5} \\ \left(2c + \dfrac{3}{5}i\right)\left(3c - 5 - \dfrac{3}{5}i\right) = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d = -\dfrac{1}{5} \\ -\dfrac{6}{5}c + \dfrac{3}{5}(3c - 5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -\dfrac{1}{5} \\ c = 5 \end{cases}$$

Câu 19. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất số phức z thỏa mãn $z.\overline{z}=1$ và $\left|z-\sqrt{3}+i\right|=m$. Tìm số phần tử của S.

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

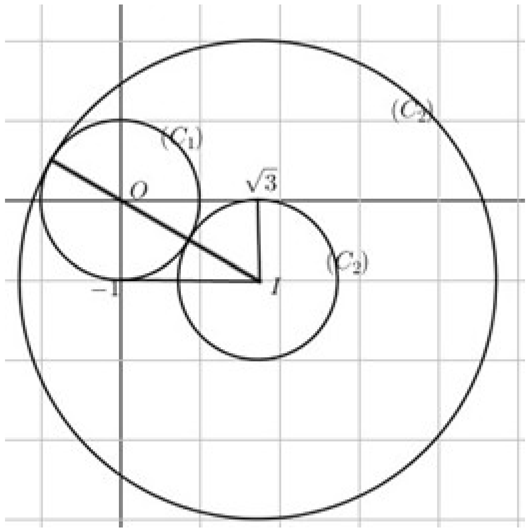
Chọn A.

Gọi $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$, ta có hệ $\begin{cases}x^2+y^2=1(1)\\(x-\sqrt{3})^2+(y+1)^2=m^2(m\ge 0)\end{cases}$

Ta thấy $m=0\Rightarrow z=\sqrt{3}-i$ không thỏa mãn $z.\overline{z}=1$ suy ra $m>0$.

Xét trong hệ tọa độ Oxy tập hợp các điểm thỏa mãn (1) là đường tròn (C_1) có $O(0;0),R_1=1$, tập hợp các điểm thỏa mãn (2) là đường tròn (C_2) tâm $I(\sqrt{3};-1),R_2=m$,ta thấy $OI=2>R_1$ suy ra I nằm ngoài (C_1).

Để có duy nhất số phức z thì hệ có nghiệm duy nhất khi đó tương đương với $(C_1),(C_2)$ tiếp xúc ngoài và tiếp xúc trong, điều điều này xảy ra khi $OI=R_1+R_2\Leftrightarrow m+1=2\Leftrightarrow m=1$ hoặc $R_2=R_1+OI\Leftrightarrow m=1+2=3$.



Câu 20. Gọi z_1,z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2+2z+m^2+2m+4=0$. Có bao nhiêu giá trị m nguyên thỏa mãn $|z_1-z_2|\le 6$.

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B.

Gọi $z_1=a+bi$ là nghiệm của phương trình $\Rightarrow z_2=a-bi$.

Ta có: $\begin{cases}z_1+z_2=2a=-2\Rightarrow a=-1\\z_1z_2=a^2+b^2=m^2+2m+4\Rightarrow b^2=m^2+2m+5\end{cases}$

$|z_1-z_2|\le 6\Leftrightarrow|a+bi-(a-bi)|\le 6\Leftrightarrow|2bi|\le 6\Leftrightarrow 4b^2\le 36\Leftrightarrow m^2+2m+5\le 9\Leftrightarrow -1-\sqrt{5}\le m\le -1+\sqrt{5}$

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m=\{-3;-2;-1;0;1\}$. Có 5 giá trị nguyên thỏa mãn.

Câu 21. Cho các số phức z_1,z_2,z_3 phân biệt, thỏa mãn $|z_1-1+i|=|z_2-1+i|=|z_3-1+i|=\sqrt{5}$ và $|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=2$. Tính $|z_1-z_3|$.

A. $\sqrt{5}$. **B.** $\dfrac{8}{\sqrt{5}}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{95}}{5}$. **D.** $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$.

Lời giải

Chọn B.

Gọi A,B,C lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z_1,z_2,z_3.

Do $|z_1-1+i|=|z_2-1+i|=|z_3-1+i|=\sqrt{5}$ nên A,B,C thuộc đường tròn tâm $I(1;-1)$, bán kính $R=\sqrt{5}$. Vậy ΔABC có đường tròn ngoại tiếp tâm $I(1;-1)$, bán kính $R=\sqrt{5}$.

Do $|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=2$ nên $AB=BC=2$.

Đặt $|z_1-z_3|=AC=2x$, gọi H là trung điểm của AC. Khi đó $BH\perp AC$.

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}.BH.AC=\dfrac{x\sqrt{4-x^2}}{2}$.

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{AB.AC.BC}{4R}\Leftrightarrow\dfrac{x\sqrt{4-x^2}}{2}=\dfrac{4x}{4\sqrt{5}}\Leftrightarrow\sqrt{4-x^2}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\Leftrightarrow x=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$. Vậy $AC=\dfrac{8}{\sqrt{5}}$.

Câu 22. Cho các số phức z_1,z_2,z_3 phân biệt thỏa mãn $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ và $z_1+z_2+z_3=0$. Tính $P=|z_1-z_2|+|z_2-z_3|+|z_3-z_1|$.

A. 3. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** $3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C.

Gọi A,B,C lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z_1,z_2,z_3.

Do $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ nên A,B,C thuộc đường tròn tâm O, bán kính $R=1$.

Do $z_1+z_2+z_3=0$ nên O là trọng tâm của ΔABC.

Do đó ΔABC đều. Đặt $AB=BC=CA=x$, $S_{\Delta ABC}=\dfrac{\sqrt{3}x^2}{4}$.

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{x^3}{4}\Leftrightarrow\dfrac{x^3}{4}=\dfrac{\sqrt{3}x^2}{4}\Rightarrow x=\sqrt{3}$.

Vậy $P=|z_1-z_2|+|z_2-z_3|+|z_3-z_1|=AB+BC+CA=3\sqrt{3}$.

Câu 23. Cho các số phức z_1,z_2,z_3 phân biệt thỏa mãn $|z_1|=|z_2|=|z_3|=3$ và $|z_2-z_3|=6$. Biết rằng z_1,z_2,z_3 có các điểm biểu diễn lần lượt là A,B,C. Số đo góc $\widehat{BAC}$ là

A. 60°. **B.** 90°. **C.** 45°. **D.** 30°.

Lời giải

Chọn B.

Do $|z_1|=|z_2|=|z_3|=3$ nên O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Do $|z_2-z_3|=6\Rightarrow BC=6\Rightarrow BC=OB+OC$ hay O là trung điểm của cạnh BC.

Suy ra ΔABC vuông tại A.

Chủ đề 2: Một số dạng toán biểu diễn hình học số phức nâng cao

Câu 1. Có bao nhiêu số nguyên dương m không vượt quá 2018 thỏa mãn $\left(\frac{7+i}{4-3i}\right)^m$ là số thuần ảo?

A. 504. **B.** 505. **C.** 2017. **D.** 2018.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $0 < m \le 2018$ và $m \in \mathbb{Z}$. Ta có: $\left(\frac{7+i}{4-3i}\right)^m = (1+i)^m$.

Ta thấy với $k \in \mathbb{N}^*$:

$(1+i)^{4k} = (-4)^k$, $(1+i)^{4k+1} = (-4)^k(1+i)$, $(1+i)^{4k+2} = (-4)^k.2i$, $(1+i)^{4k+3} = (-4)^k(-2+2i)$.

Do đó để $(1+i)^m$ thuần ảo thì $m = 4k+2$ với $k \in \mathbb{N}^*$.

Khi đó $0 \le k \le 504$. Vậy có 505 số m thỏa mãn.

Câu 2. Có bao nhiêu số phức z mà điểm biểu diễn của nó, nghịch đảo của nó và một điểm trên trục hoành tạo thành một tam giác đều có độ dài các cạnh $\sqrt{3}+\frac{1}{4}$.

A. 8. **B.** 12. **C.** 4. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B.

Ta chia ra hai trường hợp:

TH1. Nếu $|z| = 1$ thì điểm biểu diễn số phức nghịch đảo $\frac{1}{z}$ đối xứng với điểm biểu diễn số phức z, mà $\sqrt{3}+\frac{1}{4} < 2$ nên sẽ có 4 số phức z thỏa mãn đề cho.

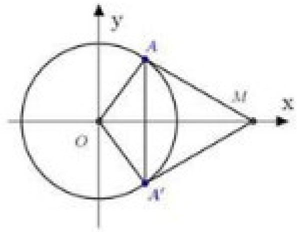
TH2. Nếu $|z| \ne 1$ thì ta có tính chất hình học như sau: "Gọi A, A' là điểm biểu diễn số phức z và $\frac{1}{z}$. Trung trực AA' cắt trục hoành Ox tại M và trục tung Oy tại N. Khi đó ta có 5 điểm A, M, A', O, N nằm trên một đường tròn".

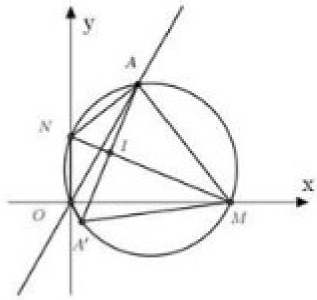
Chứng minh: giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác AOA' cắt đường thẳng Ox tại M', khi đó $\widehat{AA'M'} = \widehat{AOM'} = \widehat{A'OM'} = \widehat{A'AM'}$ suy ra tam giác $AM'A'$ cân tại M' hay $M' \equiv M$.

Do đó để tam giác AMA' đều khi và chỉ khi $\widehat{AMA'} = 60° \Leftrightarrow (OA;Oy) = 30°$. Có 4 trường hợp $(OA;Oy) = 30°$, trong mỗi trường hợp này nếu đặt $OA = x$ thì $OA' = \frac{1}{x}$ và $AA' = \sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}-1}$.

Do đó có hai điểm A sao cho $AA' = \sqrt{3}+\frac{1}{4}$. Khi đó để tam giác AMA' đều có cạnh

$AA' = \sqrt{3}+\frac{1}{4}$ tương đương $\begin{cases} (OA;Oy) = 30° \\ AA' = \sqrt{3}+\frac{1}{4} \end{cases}$. Do đó có tất cả 8 trường hợp.





Kết hợp hai trường hợp lại ta có tất cả 12 số phức thỏa mãn yêu cầu đề cho.

Câu 3. Cho z_1, z_2 là hai số phức thỏa mãn phương trình $|2z-i|=|2+iz|$, biết $|z_1-z_2|=1$. Tính giá trị của biểu thức $P=|z_1+z_2|$.

A. $P=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $P=\sqrt{2}$. **C.** $P=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $P=\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D.

Cách 1.

Ta có: $|2z-i|=|2+iz| \Leftrightarrow |2z-i|^2=|2+iz|^2 \Leftrightarrow (2z-i)(2.\overline{z}+i)=(2+iz)(2-i\overline{z})$

$\Leftrightarrow 4z.\overline{z}+2iz-2i\overline{z}-i^2=4-2i\overline{z}+2iz-i^2z.\overline{z} \Leftrightarrow 5z.\overline{z}=5$

$\Leftrightarrow z.\overline{z}=1 \Leftrightarrow |z|^2=1 \Rightarrow |z|=1 \Rightarrow |z_1|=1$ và $|z_2|=1$.

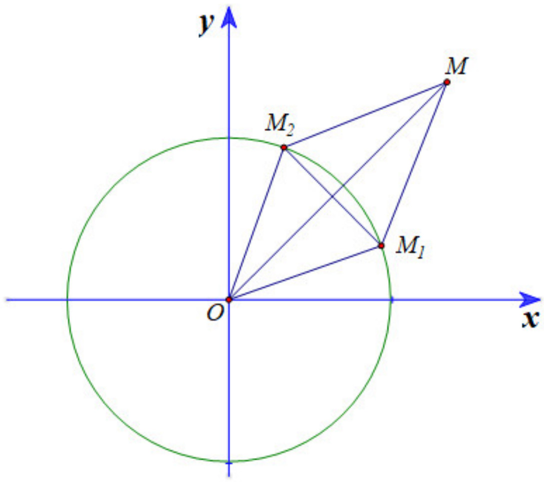
Chú ý: $a.\overline{a}=a^2 \Rightarrow |2z-i|^2=(2z-i).(\overline{2z-i})=(2z-i)(2\overline{z}+i)$

Tập hợp điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 là đường tròn tâm O, bán kính $R=1$.

Gọi $M_1(z_1), M_2(z_2) \Rightarrow OM_1=OM_2=1$.

Ta có $|z_1-z_2|=|\overline{OM_1}-\overline{OM_2}|=|\overline{M_1M_2}|=1 \Rightarrow \Delta OM_1M_2$ đều.

Mà $|z_1+z_2|=|\overline{OM_1}+\overline{OM_2}|=|\overline{OM}|=OM$ với M là điểm thỏa mãn OM_1MM_2 là hình thoi cạnh $1 \Rightarrow OM=\sqrt{3} \Rightarrow P=\sqrt{3}$.



Cách 2.

Đặt $z=x+yi\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$, ta có $2z-i=2x+\left(2y-1\right)i$ và $2+iz=2-y+xi$.

Khi đó $\left|2z-i\right|=\left|2+iz\right|\Leftrightarrow\sqrt{4x^2+\left(2y-1\right)^2}=\sqrt{\left(y-2\right)^2+x^2}\Leftrightarrow x^2+y^2=1\Rightarrow\left|z\right|=1\Rightarrow\begin{cases}\left|z_1\right|=1\\\left|z_1\right|=1\end{cases}$.

Sử dụng công thức $\left|z_1+z_2\right|^2+\left|z_1-z_2\right|^2=2\left(\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2\right)\Rightarrow\left|z_1+z_2\right|^2=3\Rightarrow\left|z_1+z_2\right|=\sqrt{3}$.

Câu 4. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất số phức z thỏa mãn $z.\overline{z}=1$ và $\left|z-\sqrt{3}+i\right|=m$. Tìm số phần tử của S.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B.

Gọi $z=a+bi,\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$

Ta có: $z.\overline{z}=1\Leftrightarrow\left|z\right|=1\Leftrightarrow a^2+b^2=1$.

$\left|z-\sqrt{3}+i\right|=m\Leftrightarrow\sqrt{\left(a-\sqrt{3}\right)^2+\left(b+1\right)^2}=m\Leftrightarrow\begin{cases}m\geq 0\\\left(a-\sqrt{3}\right)^2+\left(b+1\right)^2=m^2\end{cases}$.

Ta có: $\begin{cases}m\geq 0\\a^2+b^2=1\\\left(a-\sqrt{3}\right)^2+\left(b+1\right)^2=m^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\geq 0\\a^2+b^2=1\\-2\sqrt{3}a+2b+5=m^2\end{cases}$.

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi đường thẳng $\Delta:-2\sqrt{3}a+2b+5=m^2$ tiếp xúc với đường tròn $a^2+b^2=1\Leftrightarrow d\left(O,\Delta\right)=1\Leftrightarrow\dfrac{\left|5-m^2\right|}{4}=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=3\\m=1\end{array}\right.\quad\left(m\geq 0\right)$

Câu 5. Cho hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn $\left|z_1\right|=2,\left|z_2\right|=\sqrt{3}$. Gọi M,N là các điểm biểu diễn cho z_1 và iz_2. Biết $\widehat{MON}=30^\circ$. Tính $S=\left|z_1^2+4z_2^2\right|$.

A. $5\sqrt{2}$. **B.** $3\sqrt{3}$. **C.** $4\sqrt{7}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $0 < m \le 2018$ và $m \in \mathbb{Z}$. Ta có: $\left(\frac{7+i}{4-3i}\right)^m = (1+i)^m$.

Câu 6. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 + 4z + 5 = 0$. Đặt $w = (1+z_1)^{2017} + (1+z_2)^{2017}$.

A. $w = 2^{1009} i$. **B.** $w = -2^{1010}$. **C.** $w = 2^{1010}$. **D.** $w = -2^{1009} i$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $z^2 + 4z + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = -2+i \\ z_2 = -2-i \end{cases}$.

$w = (1+z_1)^{2017} + (1+z_2)^{2017} = (-1+i)^{2017} + (-1-i)^{2017} = (-2i)^{1008}(-1+i) + (2i)^{1008}(-1-i)$

$= -2^{1008}.i^{1008}(-1+i) - 2^{1008}.i^{1008}(1+i) = -2^{1008}(-1+i) - 2^{1008}(1+i) = -2^{1009} i$.

Câu 7. Cho các số phức z, w khác 0 thỏa mãn $|z-w| = 2|z| = |w|$. Phần thực của số phức $u = \frac{z}{w}$ là

A. $a = \frac{1}{4}$. **B.** $a = 1$. **C.** $a = \frac{1}{8}$. **D.** $a = -\frac{1}{8}$.

Lời giải

Chọn C.

Sử dụng tính chất $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ ta có:

$$|z-w| = 2|z| = |w| \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{z}{w} - 1\right| = 1 \\ \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |u-1| = 1 \\ |u| = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Đặt $u = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Khi đó:

$$\begin{cases} |u-1| = 1 \\ |u| = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 + b^2 = 1 \\ a^2 + b^2 = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{8}.$$

Tổng quát:

Bài toán trên có thể tổng quát hóa khi đẳng thức thỏa mãn là $a|z-kw| = b|z| = c|w|$ với $a, b, c, k \in \mathbb{R}$ và $a, b, c > 0$.

Nếu thay đều kiện là $a|z-kiw| = b|z| = c|w|$ với $a, b, c, k \in \mathbb{R}$ và $a, b, c > 0$ thì ta tìm được phần ảo của số phức z.

Câu 8. Cho z là số phức thỏa mãn $z + \frac{1}{z} = 1$. Tính giá trị của $z^{2017} + \frac{1}{z^{2017}}$.

A. -2. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C.

Đặt $S_n = z^n + \frac{1}{z^n}$ với $n \in \mathbb{Z}, n \ge 1$.

Khi đó $S_1 = 1$, $S_2 = z^2 + \frac{1}{z^2} = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2 = -1$.

Ta có $S_{n+1} = z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}} = \left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)\left(z + \frac{1}{z}\right) - \left(z^{n-1} + \frac{1}{z^{n-1}}\right) = S_n - S_{n-1}$ với mọi $n \ge 2$.

Khi tính một số phần tử đầu ta có:

$S_1 = S_7 = ... = S_{6k+1} = 1$, $S_2 = S_8 = ... = S_{6k+2} = -1$, $S_3 = S_9 = ... = S_{6k+3} = -2$,

$S_4 = S_{10} = ... = S_{6k+4} = -1$, $S_5 = S_{11} = ... = S_{6k+5} = 1$, $S_6 = S_{12} = ... = S_{6k+6} = 2$.

Vậy $S_{2017} = S_{336.6+1} = S_1 = 1$.

Câu 9. Cho z là số phức thỏa mãn $\frac{|z|^4}{z^2} + 2\bar{z} = -6$. Tính giá trị của $|z|$.

A. $|z| = 8$. **B.** $|z| = 2\sqrt{2}$. **C.** $|z| = 6$. **D.** $|z| = \sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn D.

Do $z.\bar{z} = |z|^2$ nên ta có:

$$\frac{|z|^4}{z^2} + 2\bar{z} = -6 \Leftrightarrow \frac{|z|^4}{z^2} + 2\frac{|z|^2}{z} + 6 = 0.$$

Đặt $t = \frac{|z|^2}{z}$, phương trình có dạng: $t^2 + 2t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \pm \sqrt{5}i$.

Do đó $\frac{|z|^2}{z} = -1 \pm \sqrt{5}i \Rightarrow \left|\frac{|z|^2}{z}\right| = \sqrt{6} \Rightarrow |z| = \sqrt{6}$.

Câu 10. Tìm phần ảo của số phức $z = 1 + i + 2i^2 + 3i^3 + ... + 2017i^{2017}$.

A. 1009. **B.** -1009. **C.** 2017. **D.** -2017.

Lời giải

Chọn A.

Xét $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^{2017} \Rightarrow f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + ... + 2017x^{2016}$

$\Rightarrow xf'(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + ... + 2017x^{2017}$ (1).

Mặt khác:

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^{2017} = \frac{x^{2018} - 1}{x - 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2018x^{2017}(x-1) - (x^{2018} - 1)}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow xf'(x) = x.\frac{2018x^{2017}(x-1) - (x^{2018} - 1)}{(x-1)^2} \ (2).$$

Thay $x = i$ vào (1) và (2) ta được:

$$z = 1 + i.\frac{2018i^{2017}(i-1) - (i^{2018} - 1)}{(i-1)^2} = 1 + i\frac{-2018 - 2018i + 2}{-2i} = 1009 + 1009i.$$

Vậy phần ảo của z là 1009.

Chủ đề 3: Một số dạng toán tự luận nâng cao

A. Nhắc lại một số định nghĩa

Với $i \in \mathbb{C}$ mà $i^2 = -1$. Ta có:

1) Dạng đại số của số phức: $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$

2) Dạng hình học của số phức:

Với số phức $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$, trên mặt phẳng toạ độ Oxy, xác định điểm $M(a;b)$ thì $M(a;b)$ gọi là dạng (biểu diễn) hình học của số phức z.

Chú ý: Khi $M(a;b)$ thì $\overrightarrow{OM} = (a;b)$ và ngược lại nên ta cũng có thể nói $\overrightarrow{OM}$ là dạng (biểu diễn) hình học của số phức z.

3) Dạng lượng giác của số phức:

Với số phức $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$, và $M(a;b)$ là biểu diễn hình học của số phức z. Ký hiệu: $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (gọi là mô đun) và $\varphi = \left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}\right)$ (gọi là ac gu men) của z. Khi đó $z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$ gọi là dạng lượng giác của số phức z.

Chú ý:

- ac gu men của z ký hiệu là: $Arg(z)$

- Mỗi số phức z có vô số ac gu men và các ac gu men của một số phức z thì sai khác nhau một bội nguyên 2π. Trị số của $Arg(z) \in [-\pi; \pi]$ gọi là ac gu men chính của z. Ký hiệu: $\arg(z)$.

4) Dạng số mũ của số phức:

Với số phức $z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$. Ta ký hiệu: $\cos\varphi \pm i\sin\varphi = e^{\pm i\varphi}$ thì $z = r.e^{i\varphi}$: Gọi là dạng số mũ của số phức z.

5) Tích vô hướng của hai số phức:

Trong mặt phẳng phức, cho $M_1(z_1), M_2(z_2)$. Khi đó,

$$\overrightarrow{OM}_1.\overrightarrow{OM}_2 = OM_1.OM_2.\cos(\overrightarrow{OM}_1, \overrightarrow{OM}_2)$$

Thật vậy, giả sử, $|z_k| = r_k$ và $\arg(z_k) = \alpha_k$ thì

$$\overrightarrow{OM}_1.\overrightarrow{OM}_2 = r_1.r_2.\cos(\alpha_2 - \alpha_1) = r_1.r_2\left(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \sin\alpha_1\sin\alpha_2\right)$$

Do đó, $\langle z_1; z_2\rangle = \frac{1}{2}.\left(z_1.\overline{z_2} + \overline{z_1}.z_2\right)$. Từ đó suy ra: $\overline{\langle z_1; z_2\rangle} = \langle z_1; z_2\rangle$ và do đó $\langle z_1; z_2\rangle \in \mathbb{R}$.

Tích vô hướng của hai số phức cũng có tính chất như tích vô hướng của hai véc tơ. Ngoài ra, $\langle z_1; zz_2\rangle = \overline{z}\langle z_1; z_2\rangle$ *và* $\langle z.z_1; z_2\rangle = z.\langle z_1; z_2\rangle$.

6) Tích ngoài của hai số phức:

Trong mặt phẳng phức, cho $M_1(z_1), M_2(z_2)$. Khi đó,

$$\overrightarrow{OM}_1 \times \overrightarrow{OM}_2 = OM_1.OM_2.\sin(\overrightarrow{OM}_1, \overrightarrow{OM}_2).$$

Giả sử, $|z_k| = r_k$ và $\arg(z_k) = \alpha_k$ thì

$$\overrightarrow{OM}_1 \times \overrightarrow{OM}_2 = r_1.r_2.\sin(\alpha_2 - \alpha_1) = r_1.r_2\left(\cos\alpha_1\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1\cos\alpha_2\right).$$

Do đó, $z_1 \times z_2 = \frac{i}{2}\left(z_1.\overline{z_2} - \overline{z_1}.z_2\right)$. Từ đó, do $\overline{z_1 \times z_2} = z_1 \times z_2$ suy ra $\mathrm{Im}(z_1 \times z_2) = 0$.

Tích ngoài của hai số phức cũng có các tính chất như tích ngoài của hai véc tơ trong mặt phẳng, ngoài ra: $(zz_1) \times z_2 = z.(z_1 \times z_2)$ *và* $z_1 \times (zz_2) = \overline{z}.(z_1 \times z_2)$.

B. Một số kết quả

Khi giải các bài toán trong hình học phẳng ta thường đồng nhất số phức $z = x + yi$, với điểm $M(x;y)$ trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy và gọi z là toạ vị của M đối với hệ trục đó. Kí hiệu $M(z)$. Lưu ý rằng $M(x;y)$ đồng nghĩa với $\overrightarrow{OM} = (x;y)$. Như vậy, nếu nói M có toạ vị là z cũng đồng nghĩa với $\overrightarrow{OM}$ có toạ vị z. Qua đó, ta có một số kết quả mở đầu như sau:

+ Nếu $A(a), B(b)$ thì $\overrightarrow{AB}$ có toạ vị là $b-a$ và $|\overrightarrow{AB}|^2 = (b-a)(\overline{b}-\overline{a})$ hay $|\overrightarrow{AB}| = |b-a|$.

+ Đường tròn

Đường tròn tâm $M_0(z_0)$ bán kính R là tập hợp các điểm $M(z)$ sao cho $M_0M = R$ hay $|z-z_0| = R$ tức $z.\overline{z} - \overline{z_0}.z - z_0.\overline{z} + z_0.\overline{z_0} - R^2 = 0$ hay $z.\overline{z} + \overline{\alpha}.z + \alpha.\overline{z} + \beta = 0$ với $\alpha \in \mathbb{C}, \beta \in \mathbb{R}$.

+ $M \in AB \Leftrightarrow \exists t : m = tb + (1-t)b$

+ $M \in [AB] \Leftrightarrow \exists t \in [0;1] : m - a = t(b-a) \Leftrightarrow t \in [0;1] : m = tb + (1-t)a$

Đặc biệt: Nếu $t = 1$ thì $M \equiv B; t = 0$ thì $M \equiv A$

+ Đường thẳng đi qua hai điểm $M_1(m_1), M_2(m_2)$ là $\dfrac{m-m_1}{m-m_2} = t, t \in \mathbb{R}$ hay

$(m-m_1).\overline{(m_2-m_1)} - \overline{(m-m_1)}.(m_2-m_1) = 0$

Đặc biệt:

$z = x + bi$, với $b = const$: Đường thẳng song song với Ox

$z = a + yi$, với $a = const$: Đường thẳng song song với Oy.

$z = x + yi$, với $y = x\tan\alpha$: Đường thẳng tạo với tia Ox một góc α.

+ Góc định hướng giữa hai đường thẳng AB và CD là: $\arg\dfrac{c-d}{a-b}$

Thật vậy, trong mặt phẳng phức cho hai điểm $M_1(m_1)$, $M_2(m_2)$ và $\alpha_1 = \arg(m_1); \alpha_2 = \arg(m_2)$. Khi đó,

$$\left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}_1\right) + \left(\overrightarrow{OM}_1, \overrightarrow{OM}_2\right) = \left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}_2\right)(\operatorname{mod} 2\pi)$$

nên $\left(\overrightarrow{OM}_1, \overrightarrow{OM}_2\right) = \left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}_2\right) - \left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}_1\right)(\operatorname{mod} 2\pi)$ hay góc định hướng tạo bởi hai tia OM_1 và OM_2 là $\arg\dfrac{z_2}{z_1}$

+ Hai tam giác ABC, A'B'C'

- đồng dạng cùng hướng khi và chỉ khi: $\dfrac{c-a}{b-a} = \dfrac{c'-a'}{b'-a'}$
- đồng dạng ngược hướng khi và chỉ khi: $\dfrac{c-a}{b-a} = \dfrac{\overline{c'}-\overline{a'}}{\overline{b'}-\overline{a'}}$

+ Trong mặt phẳng phức, cho hai điểm $M_1(z_1), M_2(z_2)$. Khi đó, $\langle z_1; z_2 \rangle$ bằng phương tích của O với đường tròn, đường kính M_1M_2.

- Nếu $A(a), B(b), C(c), D(d)$ là 4 điểm của mặt phẳng phức, thì $AB \perp CD \Leftrightarrow \langle b-a; d-c \rangle = 0 \Leftrightarrow b\overline{d} - b\overline{c} - a\overline{d} + a\overline{c} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}\left(\dfrac{b-a}{d-c}\right) = 0.$

+ Công thức tính diện tích tam giác

Diện tích của tam giác định hướng ABC, với các đỉnh $A(a), B(b), C(c)$ được tính theo công thức:

$S = \frac{i}{4}\begin{vmatrix} a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \\ c & \overline{c} & 1 \end{vmatrix}$. Do đó, A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \\ c & \overline{c} & 1 \end{vmatrix} = 0.$

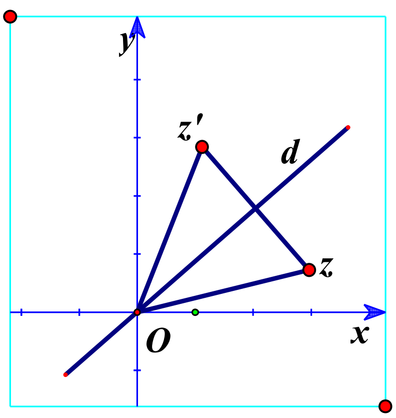
+ Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng:

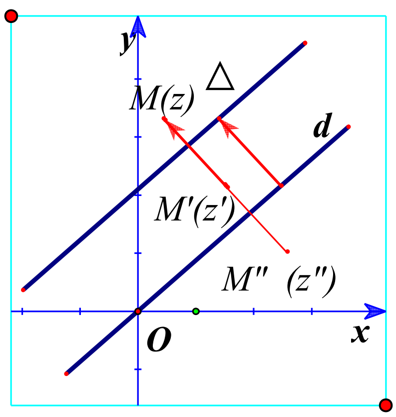
Khoảng cách từ điểm $M(m_0)$ đến đường thẳng $\Delta : \alpha z + \overline{\alpha}.\overline{z} + \beta = 0$ là

$$d(M,\Delta) = \frac{\left|\alpha.m_0 + \overline{\alpha}.\overline{m_0} + \beta\right|}{2\sqrt{\alpha.\overline{\alpha}}}$$

+ Một số phép biến hình mô tả bằng "ngôn ngữ" số phức

- Phép tính tiến theo véc tơ $\vec{v} = (v)$ biến điểm $M(z)$ thành $M'(z')$ sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$. Do đó, biểu thức của phép tịnh tiến là: $z' = z + v$
- Phép quay tâm $M_0(z_0)$, góc quay α là phép biến hình biến điểm $M(z)$ thành $M'(z')$ sao cho $\begin{cases} M_0M = M_0M' \\ (\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{M_0M'}) \equiv \alpha (\bmod 2\pi) \end{cases}$. Từ đó, biểu thức của phép quay là: $z' - z_0 = e^{i\alpha}(z - z_0)$.
- Phép đối xứng trục *d* là phép biến hình biến điểm $M(z)$ thành $M'(z')$ sao cho *d* là trung trực của MM'. Từ đó:
    - Biểu thức toạ độ của phép đối xứng qua trục thực: $z' = \overline{z}$
    - Biểu thức toạ độ của phép đối xứng qua trục ảo: $z' = -\overline{z}$
    - Biểu thức toạ độ của phép đối xứng qua đường thẳng đi qua gốc toạ độ O và điểm $z_0 = e^{i.\frac{\alpha}{2}}$ có biểu thức $z' = e^{i\alpha}\overline{z}$. Từ đó, nếu $\Delta = T_{\vec{v}}(d)$ với $\vec{v} = (v)$ thì phép đối xứng qua Δ có biểu thức $z' = e^{i\alpha}.\overline{z} + 2v$.





- Phép vị tự tâm $C(c)$, tỷ số $k \in \mathbb{R}$ là phép biến hình biến mỗi điểm $M(z)$ thành $M'(z')$ sao cho $\overrightarrow{CM'} = k\overrightarrow{CM}$. Do đó, biểu thức toạ độ là $z' = k(z - c) + c$.

+ Điều kiện thẳng hàng, vuông góc và cùng nằm trên một đường tròn:

Định lý: Ba điểm $M_k(z_k), k = 1,2,3$ thẳng hàng $\Leftrightarrow \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}$ hay $\mathrm{Im}\left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right) = 0.$

Định lý: Bốn điểm $M_k(z_k), k=1,2,3,4$ cùng nằm trên một đường thẳng $\begin{cases} \dfrac{z_3-z_2}{z_1-z_2}\in\mathbb{R} \\ \dfrac{z_3-z_4}{z_1-z_4}\in\mathbb{R} \end{cases}$

Định lý: Bốn điểm $M_k(z_k), k=1,2,3,4$ cùng nằm trên một đường tròn khi và chỉ khi $\dfrac{z_3-z_2}{z_1-z_2}:\dfrac{z_3-z_4}{z_1-z_4}\in\mathbb{R}$ nhưng $\begin{cases} \dfrac{z_3-z_2}{z_1-z_2}\notin\mathbb{R} \\ \dfrac{z_3-z_4}{z_1-z_4}\notin\mathbb{R} \end{cases}$.

MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 1.

Cho tam giác ABC. Trên BC lấy các điểm E và F sao cho $\overrightarrow{EB}=k\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{FC}=k\overrightarrow{FB}, (k\neq 1)$.

1) Tính $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{EF}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$

2) Chứng minh các tam giác ABC, AEF có cùng trọng tâm.

3) Trên AB lấy điểm D, trên AC lấy điểm I sao cho $\overrightarrow{DA}=k\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{IC}=k\overrightarrow{IA}$. Chứng minh: $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$.

Giải

1) Ta viết: $\overrightarrow{AE}=E-A$. Từ giả thiết

$$\overrightarrow{EB}=k\overrightarrow{EC} \Leftrightarrow B-E=kC-kE \Leftrightarrow E=\frac{kC-B}{k-1}$$

Từ đó, $E-A=\dfrac{kC-B}{k-1}-A=\dfrac{kC-B-kA+A}{k-1}=\dfrac{A-B}{k-1}+\dfrac{k(C-A)}{k-1}$

Hay $\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{k-1}\overrightarrow{AB}+\dfrac{k}{k-1}\overrightarrow{AC}$.

Tương tự, ta được: $\overrightarrow{AF}=-\dfrac{1}{k-1}\overrightarrow{AC}+\dfrac{k}{k-1}\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=\left(\frac{k}{k-1}+\frac{1}{k-1}\right)\overrightarrow{AB}-\frac{1+k}{k-1}\overrightarrow{AC}=\frac{1+k}{k-1}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right).$$

2) $E=\dfrac{kC-B}{k-1}; F=\dfrac{kB-C}{k-1}$ suy ra

$$A+E+F=A+\frac{kC-B}{k-1}+\frac{kB-C}{k-1}=\frac{(kA+kB+kC)-(A+B+C)}{k-1}=A+B+C$$

Vậy, hai tam giác ABC và AEF có cùng trọng tâm.

3) Từ giả thiết $\overrightarrow{DA}=k\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{IC}=k\overrightarrow{IA}$ ta tính được $D=\dfrac{kB-A}{k-1}; I=\dfrac{kA-C}{k-1}$.

Từ đó ta có: $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{CD}=(E-A)+(I-B)+(D-C)=$

$$=\frac{(kC-B-kA+A)+(kA-C-kB+B)+(kB-A-kC+C)}{k-1}=0$$

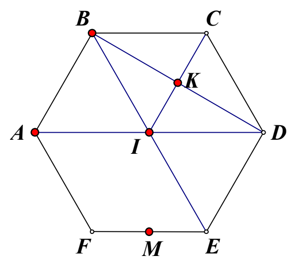
Điều phải chứng minh.

Ví dụ 2.

Cho lục giác đều ABCDEF, K là trung điểm của BD, M là trung điểm của EF. Chứng minh AMK là tam giác đều.

Giải

Giả sử mặt phẳng toạ độ Oxy sao cho A trung với gốc toạ độ O, trục hoành qua A, D. Gọi I là tâm của lục giác đều. Ta nhận thấy, tứ giác BCDI là hình thoi nên K là trung điểm của CI. Ta có $|C| = |E|$.



$+\ C = |C|\left(\cos\arg C + i\sin\arg C\right) = |C|\left(\cos 30^0 + i\sin 30^0\right)$

$+\ E = |E|\left(\cos\arg E + i\sin\arg E\right) = |C|\left(\cos\left(-30^0\right) + i\sin\left(-30^0\right)\right)$

$+\ C\left(\cos(-60^o) + i\sin(-60^o)\right) = |C|\left(\cos(-30^o) + i\sin(-30^o)\right) = E$

$+\ F = |F|\left(\cos(-60^o) + i\sin(-60^o)\right) = I\left(\cos(-60^o) + i\sin(-60^o)\right)$

Vì M là trung điểm của EF, K là trung điểm của CI, nên

$M = \frac{1}{2}(E+F) = \frac{1}{2}(C+I)\left(\cos(-60^o) + i\sin(-60^o)\right) = K\left(\cos(-60^o) + i\sin(-60^o)\right)$.

Từ đó suy ra, $|K| = |M|, \widehat{KAM} = 60^o$, do đó tam giác KAM đều.

Ví dụ 3. (Bất đẳng thức Ptolemy).

Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng ta luôn có: $AB.CD + AD.BC \geq AC.BD$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi A, B, C, D theo thứ tự là đỉnh của một tứ giác lồi nội tiếp một đường tròn.

Giải

Xét mặt phẳng phức và giả sử $A(a), B(b), C(c), D(d)$ trong mặt phẳng phức đó.

Ta có:

$AB.CD + AD.BC = |b-a|.|d-c| + |d-a|.|c-b| \geq |(b-a)(d-c) + (d-a)(c-b)|$

$\Leftrightarrow AB.CD + AD.BC \geq |(c-a)(d-b)| = AC.BD$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(b-a)(d-c) = t(d-a)(c-b)$, $t > 0$ hay

$\frac{d-a}{b-a} = \frac{1}{t}.\frac{d-c}{c-b} \Leftrightarrow \arg\left(\frac{d-a}{b-a}\right) = \arg\left(\frac{d-c}{c-b}\right)$ tức $\widehat{DAB} = \pi - \widehat{DCB}$. Vậy tứ giác ABCD nội tiếp được trong một đường tròn.

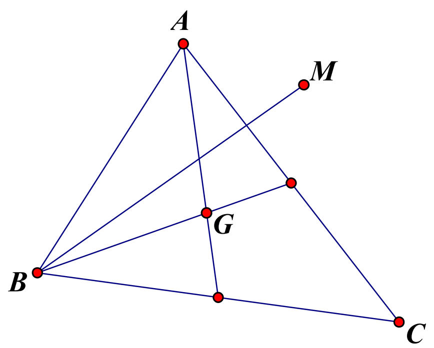
Ví dụ 4.

Cho tam giác ABC với trọng tâm G. M là một điểm bất kỳ trong mặt phẳng. Chứng minh rằng:

$MG^2 = \frac{1}{3}MA^2 + MB^2 + MC^2 - \frac{1}{9}AB^2 + BC^2 + CA^2$.

Giải

Chọn đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC làm đường tròn đơn vị và giả sử $A(a), B(b), C(c), M(m), G(g)$. Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $g = \frac{1}{3}(a+b+c)$.



Khi đó,

$MG^2 = (g-m).(\overline{g}-\overline{m}) = g\overline{g} - m\overline{g} - g\overline{m} + m\overline{m},$

$MA^2 = (a-m).(\overline{a}-\overline{m}) = a\overline{a} - m\overline{a} - a\overline{m} + m\overline{m},$

$MB^2 = (b-m).(\overline{b}-\overline{m}) = b\overline{b} - m\overline{b} - b\overline{m} + m\overline{m},$

$MC^2 = (c-m).(\overline{c}-\overline{m}) = c\overline{c} - m\overline{c} - c\overline{m} + m\overline{m},$

$$AB^2 = (b-a).\left(\overline{b}-\overline{a}\right) = b\overline{b} - b\overline{a} - a\overline{b} + a\overline{a},$$

$$BC^2 = (c-b).\left(\overline{c}-\overline{b}\right) = c\overline{c} - c\overline{b} - b\overline{c} + b\overline{b},$$

$$AC^2 = (c-a).\left(\overline{c}-\overline{a}\right) = c\overline{c} - c\overline{a} - a\overline{c} + a\overline{a}.$$

Do A, B, C đều nằm trên đường tròn đơn vị nên $a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c} = 1$,
ta có:

$$+\ MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3 - m\overline{a} - a\overline{m} + m\overline{m} - m\overline{b} - b\overline{m} + m\overline{m} - m\overline{c} - c\overline{m} + m\overline{m}$$

$$= 3 - m(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}) - \overline{m}(a+b+c) + 3m\overline{m}$$

$$+\ AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3 - 3m\overline{g} - 3\overline{m}g + 3m\overline{m}$$

$$= 3(1 - m\overline{g} - \overline{m}g + m\overline{m})$$

$$= b\overline{b} - b\overline{a} - a\overline{b} + a\overline{a} + c\overline{c} - c\overline{b} - b\overline{c} + b\overline{b} + c\overline{c} - c\overline{a} - a\overline{c} + a\overline{a}$$

$$= 9 - b\overline{a} - a\overline{b} - c\overline{b} - b\overline{c} - c\overline{a} - a\overline{c} - b\overline{b} - c\overline{c} - a\overline{a}$$

$$= 9 - (a+b+c)(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c})$$

$$= 9 - 9g\overline{g}$$

Thay vào vế trái, ta được:

$$\frac{1}{3}\left[MA^2 + MB^2 + MC^2\right] - \frac{1}{9}\left[AB^2 + BC^2 + CA^2\right] =$$

$$= (1 - m\overline{g} - \overline{m}g + m\overline{m}) - (1 - g\overline{g})$$

$$= g\overline{g} - m\overline{g} - \overline{m}g + m\overline{m} = (g-m)(\overline{g}-\overline{m}) = MG^2$$

Ta được điều phải chứng minh.

Ví dụ 5. (Bài toán Napoleon).

Lấy các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC làm đáy, dựng ra ngoài các tam giác đều với tâm tương ứng A_0, B_0, C_0. Chứng minh rằng A_0, B_0, C_0 là ba đỉnh của một tam giác đều.

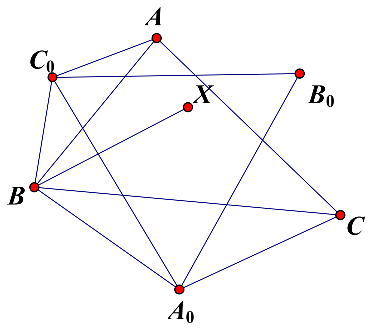
Giải

Trường hợp 1:
Giả sử tam giác ABC định hướng dương và $X(x)$ là một điểm nào đó trong mặt phẳng.
Ta có:

$$a + c_1x + bx^2 = 0; b + a_1x + cx^2 = 0; c + b_1x + ax^2 = 0.$$

Do A_0, B_0, C_0 theo thứ tự là các trọng tâm của các tam giác BCA_1, ACB_1, ABC_1 nên

$$3a_0 = b + c + a_1; 3b_0 = a + c + b_1, 3c_0 = a + b + c_1$$



Từ đó ta có:

$$3(c_0 + a_0x + b_0x^2) = a + b + c_1 + (b + c + a_1)x + (c + a + b_1)x^2$$

$$= (b + a_1x + cx^2) + (c + b_1x + x^2)x + (a + c_1x + bx^2)x^2 = 0.$$

Suy ra, điều phải chứng minh.
Trường hợp 2:
Giả sử tam giác ABC định hướng âm và $X(x)$ là một điểm nào đó trong mặt phẳng.

Ta có: $c=e^{i\frac{2\pi}{3}}(b-a_0)+a_0; a=e^{i\frac{2\pi}{3}}(c-b_0)+b_0; b=e^{i\frac{2\pi}{3}}(a-c_0)+c_0;$

Suy ra,

$$b=e^{i\frac{2\pi}{3}}\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}(c-b_0)+b_0-c_0\right)+c_0=e^{i\frac{4\pi}{3}}\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}(b-a_0)+a_0-b_0\right)+e^{i\frac{2\pi}{3}}(b_0-c_0)+c_0$$

$$=b-a_0+e^{i\frac{4\pi}{3}}(a_0-b_0)+e^{i\frac{2\pi}{3}}(b_0-c_0)+c_0$$

Từ đó suy ra, $c_0-a_0=e^{-i\frac{\pi}{3}}(b_0-a_0)$ tức tam giác $A_0B_0C_0$ đều.

Ví dụ 6. (Đề thi vô địch Anh 1983)

Cho tam giác ABC cân đỉnh A, gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. D là trung điểm của AB và J là trọng tâm tam giác ACD. Chứng minh rằng: $IJ\perp CD$.

Giải

Chọn đường tròn tâm I làm đường tròn đơn vị. Giả sử $A(a),B(b),C(c)$. Vì A,B,C cùng thuộc đường tròn nên ta có: $a\bar{a}=b\bar{b}=c\bar{c}=1$ và D là trung điểm của AB nên $D\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Suy ra

$$\overline{DC}=c-\frac{a+b}{2}=\frac{2c-a-b}{2}.$$

Mặt khác, J là trọng tâm tam giác ACD nên $j=\dfrac{a+c+\frac{a+b}{2}}{3}=\dfrac{3a+2c+b}{6}$

Suy ra, $IJ=\dfrac{3a+2c+b}{6}$ (Do I là gốc toạ độ).

Xét, $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\left(\frac{3a+2c+b}{6}.\frac{2\bar{c}-\bar{a}-\bar{b}}{2}+\frac{3\bar{a}+2\bar{c}+\bar{b}}{6}.\frac{2c-a-b}{2}\right)=$

$$=\frac{1}{24}\left(-4a\bar{b}+4c\bar{a}-4\bar{a}b+4a\bar{c}\right)$$

$$=\frac{1}{6}\left(c\bar{a}+a\bar{c}-\bar{a}b-a\bar{b}\right)$$

Mặt khác, $AC=AB$ nên $(c-a)(\bar{c}-\bar{a})=(b-a)(\bar{b}-\bar{a})$

$$\Leftrightarrow c\bar{c}-c\bar{a}-a\bar{c}+a\bar{a}=b\bar{b}-b\bar{a}-a\bar{b}+a\bar{a}$$

$$\Leftrightarrow c\bar{a}+a\bar{c}=b\bar{a}+a\bar{b}$$

$$\Leftrightarrow c\bar{a}+a\bar{c}-\bar{a}b-a\bar{b}=0 \text{ hay } \overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{CD}=0.$$

Điều phải chứng minh.

Ví dụ 7. (IMO 1977).

Cho hình vuông ABCD. Dựng về phía trong hình vuông ABCD các tam giác đều ABK, BCL, CDM, DAN. Chứng minh rằng, các trung điểm của các đoạn thẳng $KL, LM, MN, NK, BK, BL, CL, DM, DN, NA$ là đỉnh của một đa giác đều.

Giải

Giả sử hình vuông ABCD định hướng dương. Chọn tâm O của hình vuông làm gốc toạ độ và $X(x)$ là một điểm trong mặt phẳng.

Khi đó, $b=ai, c=-a, d=-ai$. Đặt $e^{i\frac{\pi}{3}}=u$, ta có:

$$k=(iu+\bar{u})a; l=(-u+i\bar{u})a; m=(-ui-\bar{u}); n=(u-\bar{u}i)a$$

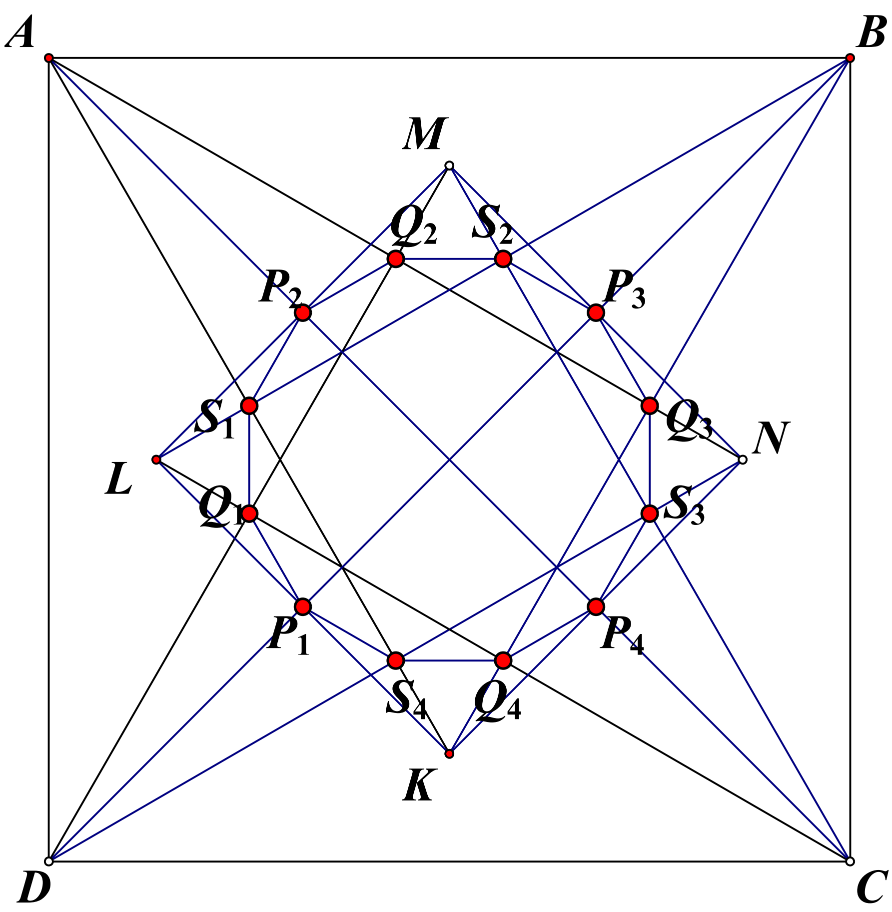
Để ý rằng, đa giác $P_1Q_1S_1P_2Q_2S_2P_3Q_3S_3P_4Q_4S_4$ nhận O làm tâm đối xứng, do đó với f là phép quay tâm O, góc quay $\frac{\pi}{6}$ thì chỉ cần chứng minh $f(P_k)=Q_k, f(Q_k)=S_k, f(S_k)=P_{k+1}$ (với $k=1,2$) là đủ.

Ta có: $p_1=\frac{1}{2}(k+l)=\frac{a}{2}\left[(i-1)u+(i+1)\overline{u}\right]$

$p_1=\frac{1}{2}(m+l)=\frac{a}{2}\left[-(i+1)u+(i-1)\overline{u}\right];$

$q_1=\frac{1}{2}\left[d+m\right]=-\frac{a}{2}\left[i(1+u)+\overline{u}\right];$

$s_1=\frac{1}{2}\left(a+k\right)=\frac{a}{2}\left[1+iu+\overline{u}\right]$



Khi đó, với $\varepsilon=e^{i\frac{\pi}{6}}$ thì

$$f(p_1)=\varepsilon p_1=\frac{a}{2}\left[\left(i-1\right)\varepsilon u+(i+1)\varepsilon\overline{u}\right]=q_1;$$

$$f(q_1)=\varepsilon p_1=\frac{a}{2}\left[i\varepsilon+i\varepsilon u+\varepsilon\overline{u}\right]=s_1;$$

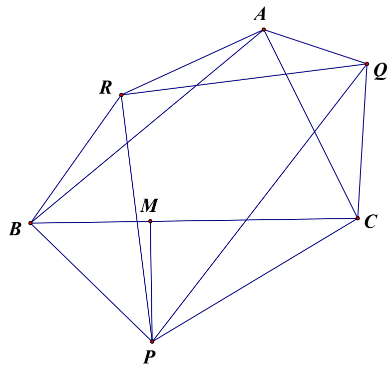
$$f(s_1)=\varepsilon s_1=\frac{a}{2}\left[\varepsilon+i\varepsilon u+\varepsilon\overline{u}\right]=p_2.$$

Tương tự, ta cũng được: $f(p_2)=q_2, f(q_2)=s_2; f(s_2)=p_3$.

Ví dụ 8. (IMO 17, 1975).

Cho tam giác ABC, về phía ngoài của tam giác ABC, lần lượt dựng các tam giác ABR, BCP, CQA sao cho $\widehat{PBC}=\widehat{CAQ}=45^0, \widehat{BCP}=\widehat{QCA}=30^0, \widehat{ABR}=\widehat{RAB}=15^0$. Chứng minh rằng: ΔQRP vuông cân tại R.

Giải



Xét bài toán trong mặt phẳng phức. Gọi M là chân đường vuông góc hạ từ P xuống đường thẳng BC. Vì $MP=MB$ và $MC=\sqrt{3}MP$ nên $\dfrac{p-m}{b-m}=i$ và $\dfrac{c-m}{p-m}=i\sqrt{3}$.

Do đó, $p=\dfrac{c+\sqrt{3}b}{1+\sqrt{3}}+\dfrac{b-c}{1+\sqrt{3}}i$

Tương tự, $q=\dfrac{c+\sqrt{3}a}{1+\sqrt{3}}+\dfrac{a-c}{1+\sqrt{3}}i$

Điểm B nhận được từ điểm A bằng phép quay tâm R, góc quay 150^0.

Do đó, $b=a\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)$. Từ đó, bằng phép biến đổi đại số, ta được:

$\dfrac{p}{q}=i$. Suy ra $QR\perp PR$ và $QR=PR$ hay tam giác PRQ vuông cân tại R.