CHUYỀN ĐỀ BỒI DƯỠNG HSG TOÁN 7

PHẦN ĐẠI SỐ

Chuyền đề 1: Các bài toán thực hiện phép tính:

1. **Các kiến thức vận dụng:**
   - Tính chất của phép cộng , phép nhân
   - Các phép toán về lũy thừa:

$a^n = \underbrace{a.a....a}_{n}$; $a^m.a^n = a^{m+n}$; $a^m : a^n = a^{m-n}$ ($a \neq 0$, $m \geq n$)

$(a^m)^n = a^{m.n}$; $(a.b)^n = a^n.b^n$; $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n} (b \neq 0)$

2 . **Một số bài toán** :

Bài 1: a) Tính tổng : $1+2+3+\dots+n$, $1+3+5+\dots+(2n-1)$

b) Tính tổng : $1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n.(n+1)$

$1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + n(n+1)(n+2)$

Với n là số tự nhiên khác không.

HD : a) $1+2+3+\dots+n = n(n+1)$

$1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$

b) $1.2+2.3+3.4+\dots+n(n+1)$

$= [1.2.(3-0) + 2.3.(4-1) + 3.4(5-2) + \dots + n(n+1)((n+2)-(n-1))] : 3$

$= [1.2.3 - 1.2.3 + 2.3.4 - 2.3.4 + \dots + n(n+1)(n+2)] : 3$

$= n(n+1)(n+2) : 3$

$1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + n(n+1)(n+2)$

$= [1.2.3(4-0) + 2.3.4(5-1) + 3.4.5.(6-2) + \dots + n(n+1)(n+2)((n+3)-(n-1))] : 4$

$= n(n+1)(n+2)(n+3) : 4$

Tổng quát:

Bài 2: a) Tính tổng : $S = 1 + a + a^2 + \dots + a^n$

b) Tính tổng : $A = \frac{c}{a_1.a_2} + \frac{c}{a_2.a_3} + \dots + \frac{c}{a_{n-1}.a_n}$ với $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1} = k$

HD: a) $S = 1 + a + a^2 + \dots + a^n \Rightarrow aS = a + a^2 + \dots + a^n + a^{n+1}$

Ta có : $aS - S = a^{n+1} - 1 \Rightarrow (a-1)S = a^{n+1} - 1$

Nếu $a = 1 \Rightarrow S = n$

Nếu a khác 1 , suy ra $S = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$

b) Áp dụng $\frac{c}{a.b} = \frac{c}{k}(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})$ với $b - a = k$

Ta có : $A = \frac{c}{k}(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}) + \frac{c}{k}(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}) + \dots + \frac{c}{k}(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n})$

$= \frac{c}{k}(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n})$

$= \frac{c}{k}(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n})$

Bài 3 : a) Tính tổng : $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$

b) Tính tổng : $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$

HD : a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = n(n+1)(2n+1) : 6$

b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (n(n+1):2)^2$

Bài 3: Thực hiện phép tính:

a) A = $(\frac{1}{4.9}+\frac{1}{9.14}+\frac{1}{14.19}+...+\frac{1}{44.49})\frac{1-3-5-7-...-49}{89}$

b) $B=\frac{2^{12}.3^5-4^6.9^2}{\left(2^2.3\right)^6+8^4.3^5}-\frac{5^{10}.7^3-25^5.49^2}{\left(125.7\right)^3+5^9.14^3}$

HD : A = $\frac{-9}{28}$; B = $\frac{7}{2}$

Bài 4: 1, Tính: P = $\frac{\frac{1}{2003}+\frac{1}{2004}-\frac{1}{2005}}{\frac{5}{2003}+\frac{5}{2004}-\frac{5}{2005}}-\frac{\frac{2}{2002}+\frac{2}{2003}-\frac{2}{2004}}{\frac{3}{2002}+\frac{3}{2003}-\frac{3}{2004}}$

2, Biết: 13 + 23 + ...+ 103 = 3025.

Tính: S = 23 + 43 + 63 + ...+ 203

Bài 5: a) TÝnh $A=\left(\frac{1,5+1-0,75}{2,5+\frac{5}{3}-1,25}+\frac{0,375-0,3+\frac{3}{11}+\frac{3}{12}}{-0,625+0,5-\frac{5}{11}-\frac{5}{12}}\right):\frac{1890}{2005}+115$

b) Cho $B=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+...+\frac{1}{3^{2004}}+\frac{1}{3^{2005}}$

Chøng minh r»ng $B<\frac{1}{2}$.

Bài 6: a) Tính : $\frac{\left(13\frac{1}{4}-2\frac{5}{27}-10\frac{5}{6}\right).230\frac{1}{25}+46\frac{3}{4}}{\left(1\frac{3}{10}+\frac{10}{3}\right):\left(12\frac{1}{3}-14\frac{2}{7}\right)}$

b) TÝnh $P=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2012}}{\frac{2011}{1}+\frac{2010}{2}+\frac{2009}{3}+...+\frac{1}{2011}}$

HD: Nhận thấy 2011 + 1 = 2010+2 = ….

$\Rightarrow MS=1+\frac{2012}{1}+1+\frac{2010}{2}+....+1+\frac{1}{2011}-2011$

$=2012+\frac{2012}{2}+....+\frac{2012}{2011}-2011$ = $2012(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+......+\frac{1}{2012})$

c) $A=\frac{(1+2+3+...+99+100)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)(63.1,2-21.3,6)}{1-2+3-4+...+99-100}$

Bài 7: a) Tính giá trị của biểu thức:

$$A=\left[\frac{1\frac{11}{31}.\,4\frac{3}{7}-\left(15-6\frac{1}{3}.\frac{2}{19}\right)}{4\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\left(12-5\frac{1}{3}\right)}.\left(-1\frac{14}{93}\right)\right].\,\frac{31}{50}$$

b) Chứng tỏ rằng: $B=1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^2}-...-\frac{1}{2004^2}>\frac{1}{2004}$

Bài 8: a) Tính giá trị của biểu thức:

$$A=\frac{\left(81,624:4\frac{4}{3}-4,505\right)^2+125\frac{3}{4}}{\left\{\left[\left(\frac{11}{25}\right)^2:0,88+3,53\right]^2-(2,75)^2\right\}:\frac{13}{25}}$$

b) Chứng minh rằng tổng:

$$S=\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}-...+\frac{1}{2^{4n-2}}-\frac{1}{2^{4n}}+....+\frac{1}{2^{2002}}-\frac{1}{2^{2004}}<0,2$$

Chuyên đề 2: Bài toán về tính chất của dãy tỉ số bằng nhau:

1. Kiến thức vận dụng :

- $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow a.d=b.c$

-Nếu $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$ **thì** $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{a\pm b\pm e}{b\pm d\pm f}$ **với gt các tỉ số dều có nghĩa**

- Có $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$ **=** k Thì a = bk, c = d k, e = fk

2. Bài tập vận dụng

Dạng 1 Vận dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau để chứng minh đẳng thức

Bài 1: Cho $\frac{a}{c}=\frac{c}{b}$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}=\frac{a}{b}$

HD: Từ $\frac{a}{c}=\frac{c}{b}$ suy ra $c^2=a.b$

khi đó $\frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}=\frac{a^2+a.b}{b^2+a.b}$

$=\frac{a(a+b)}{b(a+b)}=\frac{a}{b}$

Bài 2: Cho a,b,c $\in$ R và a,b,c $\neq$ 0 thoả mãn b^2 = ac. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{c}=\frac{(a+2012b)^2}{(b+2012c)^2}$$

HD: Ta có $(a + 2012b)^2 = a^2 + 2.2012.ab + 2012^2.b^2 = a^2 + 2.2012.ab + 2012^2.ac$

= a($a + 2.2012.b + 2012^2.c)$

$(b + 2012c)^2 = b^2 + 2.2012.bc + 2012^2.c^2 = ac+ 2.2012.bc + 2012^2.c^2$

= c($a + 2.2012.b + 2012^2.c)$

Suy ra : $\frac{a}{c}=\frac{(a+2012b)^2}{(b+2012c)^2}$

Bài 3: Chøng minh r»ng nÕu $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ th× $\frac{5a+3b}{5a-3b}=\frac{5c+3d}{5c-3d}$

HD : Đặt $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ $\Rightarrow$ **a = kb, c = kd .**

Suy ra : $\frac{5a+3b}{5a-3b}=\frac{b(5k+3)}{b(5k-3)}=\frac{5k+3}{5k-3}$ **và** $\frac{5c+3d}{5c-3d}=\frac{d(5k+3)}{d(5k-3)}=\frac{5k+3}{5k-3}$

Vậy $\frac{5a+3b}{5a-3b}=\frac{5c+3d}{5c-3d}$

Bài 4: BiÕt $\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}=\frac{ab}{cd}$ với a,b,c, d $\neq 0$ Chứng minh rằng :

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ hoặc $\frac{a}{b}=\frac{d}{c}$

HD : Ta có $\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}=\frac{ab}{cd}=\frac{2ab}{2cd}=\frac{a^2+2ab+b^2}{c^2+2cd+d^2}=\frac{(a+b)^2}{(c+d)^2}=(\frac{a+b}{c+d})^2$ (1)

$$\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}=\frac{ab}{cd}=\frac{2ab}{2cd}=\frac{a^2-2ab+b^2}{c^2-2cd+d^2}=\frac{(a-b)^2}{(c-d)^2}=(\frac{a-b}{c-d})^2 \ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $(\frac{a+b}{c+d})^2=(\frac{a-b}{c-d})^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{a+b}{c+d}=\frac{a-b}{c-d}\\ \frac{a+b}{c+d}=\frac{b-a}{d-c}\end{array}\right.$

Xét 2 TH đi đến đpcm

Bài 5 : Cho tØ lÖ thøc $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Chøng minh r»ng:

$\frac{ab}{cd}=\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}$ vµ $\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$

HD : Xuất phát từ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ biến đổi theo các

hướng làm xuất hiện $\frac{ab}{cd}=\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}=\frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}=\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}=(\frac{a+b}{c+d})^2$

Bài 6 : Cho dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{2a+b+c+d}{a}=\frac{a+2b+c+d}{b}=\frac{a+b+2c+d}{c}=\frac{a+b+c+2d}{d}$$

Tính $M=\frac{a+b}{c+d}+\frac{b+c}{d+a}+\frac{c+d}{a+b}+\frac{d+a}{b+c}$

HD : Từ $\frac{2a+b+c+d}{a}=\frac{a+2b+c+d}{b}=\frac{a+b+2c+d}{c}=\frac{a+b+c+2d}{d}$

Suy ra : $\frac{2a+b+c+d}{a}-1=\frac{a+2b+c+d}{b}-1=\frac{a+b+2c+d}{c}-1=\frac{a+b+c+2d}{d}-1$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c+d}{a}=\frac{a+b+c+d}{b}=\frac{a+b+c+d}{c}=\frac{a+b+c+d}{d}$$

Nếu a + b + c + d = 0 $\Rightarrow$ a + b = -(c+d) ; (b + c) = -(a + d)

$\Rightarrow M=\frac{a+b}{c+d}+\frac{b+c}{d+a}+\frac{c+d}{a+b}+\frac{d+a}{b+c}$ = -4

Nếu a + b + c + d $\neq 0 \Rightarrow$ a = b = c = d $\Rightarrow M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c} = 4$

Bài 7 : a) Chứng minh rằng:

Nếu $\frac{x}{a+2b+c} = \frac{y}{2a+b-c} = \frac{z}{4a-4b+c}$

Thì $\frac{a}{x+2y+z} = \frac{b}{2x+y-z} = \frac{c}{4x-4y+z}$

b) Cho: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$. Chứng minh: $\left(\frac{a+b+c}{b+c+d}\right)^3 = \frac{a}{d}$

HD : a) Từ $\frac{x}{a+2b+c} = \frac{y}{2a+b-c} = \frac{z}{4a-4b+c} \Rightarrow \frac{a+2b+c}{x} = \frac{2a+b-c}{y} = \frac{4a-4b+c}{z}$

$\Rightarrow \frac{a+2b+c}{x} = \frac{2(2a+b-c)}{2y} = \frac{4a-4b+c}{z} = \frac{a}{x+2y+z}$ (1)

$\frac{2(a+2b+c)}{2x} = \frac{(2a+b-c)}{y} = \frac{4a-4b+c}{z} = \frac{b}{2x+y+z}$ (2)

$\frac{4(a+2b+c)}{4x} = \frac{4(2a+b-c)}{4y} = \frac{4a-4b+c}{z} = \frac{c}{4x-4y+z}$ (3)

Từ (1) ;(2) và (3) suy ra : $\frac{a}{x+2y+z} = \frac{b}{2x+y-z} = \frac{c}{4x-4y+z}$

Bài 8: Cho $\frac{x}{y+z+t} = \frac{y}{z+t+x} = \frac{z}{t+x+y} = \frac{t}{x+y+z}$

chứng minh rằng biểu thức sau có giá trị nguyên.

$P = \frac{x+y}{z+t} + \frac{y+z}{t+x} + \frac{z+t}{x+y} + \frac{t+x}{y+z}$

HD Từ $\frac{x}{y+z+t} = \frac{y}{z+t+x} = \frac{z}{t+x+y} = \frac{t}{x+y+z} \Rightarrow \frac{y+z+t}{x} = \frac{z+t+x}{y} = \frac{t+x+y}{z} = \frac{x+y+z}{t}$

$\Rightarrow \frac{y+z+t}{x} + 1 = \frac{z+t+x}{y} + 1 = \frac{t+x+y}{z} + 1 = \frac{x+y+z}{t} + 1$

$\Rightarrow \frac{x+y+z+t}{x} = \frac{z+t+x+y}{y} = \frac{t+x+y+z}{z} = \frac{x+y+z+t}{t}$

Nếu x + y + z + t = 0 thì P = - 4

Nếu x + y + z + t $\neq$ 0 thì x = y = z = t $\Rightarrow$ P = 4

Bài 9 : Cho 3 số x , y , z khác 0 thỏa mãn điều kiện : $\frac{y+z-x}{x} = \frac{z+x-y}{y} = \frac{x+y-z}{z}$

Hãy tính giá trị của biểu thức : B = $\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right)$

Bài 10 : a) Cho các số a,b,c,d khác 0 . Tính

T = $x^{2011} + y^{2011} + z^{2011} + t^{2011}$

Biết x,y,z,t thỏa mãn: $\frac{x^{2010}+y^{2010}+z^{2010}+t^{2010}}{a^2+b^2+c^2+d^2} = \frac{x^{2010}}{a^2} + \frac{y^{2010}}{b^2} + \frac{z^{2010}}{c^2} + \frac{t^{2010}}{d^2}$